Časť I.

Základy mechaniky

1 Kinematika hmotného bodu

Pohybové rovnice nám umožňujú určiť polohu pohybujúceho sa telesa v ľubovoľnom okamihu vo vopred zvolenej súradnicovej sústave.

Súradnicovú sústavu je potrebné zvoliť tak, aby matematické riešenie pohybových rovníc bolo čo najjednoduchšie. Treba si uvedomiť, že ak vyjadríme zmenu polohy pomocou zmeny súradníc, nebudú naše pohybové rovnice vyjadrovať dráhu, ktorú prejde teleso za odpovedajúci čas.

Ak je známa rovnica dráhy pohybu, potom je možné zostrojiť trajektóriu a vypočítať rýchlosť a zrýchlenie. Z druhej strany, ak poznáme časovú závislosť rýchlosti a zrýchlenia, môžeme stanoviť rovnicu dráhy pohybu.

Predpokladáme, že pohyb hmotného bodu budeme skúmať v inerciálných súradnicových sústavách a preto je potrebné vedieť ako sa zmenia súradnice a rýchlosť pri prechode od jednej inerciálnej súradnicovej sústavy k druhej.

1. Priemerná rýchlosť hmotného bodu

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

kde $\Delta \boldsymbol{r}$ je zmena polohového vektora za časový interval Δt a Δs zmena dráhy za časový interval Δt.

2. Priemerné zrýchlenie hmotného bodu

$$\boldsymbol{a}_s = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t},$$

kde $\Delta \boldsymbol{v}$ je zmena rýchlosti za časový interval Δt.

3. Okamžitá rýchlosť hmotného bodu

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor a s - dráha.

4. Zrýchlenie hmotného bodu

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}; \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

kde a_t je tangenciálne zrýchlenie $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$;

a_n - normálové zrýchlenie $a_n = \frac{v^2}{R}$;

R - polomer krivosti dráhy v danom bode;

$\boldsymbol{\tau}$ - jednotkový vektor v smere dotyčnice k dráhe;

$\boldsymbol{n}$ - jednotkový vektor v smere normály k dráhe.

5. Pre priamočiary pohyb hmotného bodu platia vzťahy

$$v = v_0 + \int a \, dt; \quad s = s_0 + \int v \, dt.$$

V prípade, ak a je konštantné, potom

$$v = v_0 + at \qquad \text{a} \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

kde v_0 je rýchlosť v čase $t = 0$ a s_0 – dráha v čase $t = 0$.

6. Uhlová rýchlosť hmotného bodu

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt},$$

kde $d\varphi$ je uhol pootočenia.

V prípade rovnomerného pohybu $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$,

kde T je perióda otáčania f - kmitočet.

7. Uhlové zrýchlenie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

8. Vzťah medzi postupnou a uhlovou rýchlosťou

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}],$$

pri pohybe po kružnici $v = \omega R$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor a R - polomer kružnice.

9. Rotačný pohyb hmotného bodu

$$\omega = \omega_0 + \int \varepsilon \, dt, \quad \varphi = \varphi_0 + \int \omega \, dt.$$

V prípade, že ε je konštanta, potom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad \text{a} \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2,$$

kde ω_0 je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$ a φ_0 je uhol, charakterizujúci polohu hmotného bodu v čase $t = 0$.

10. Galileiho transformácie súradníc

$$x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z',$$

kde x – poloha bodu v laboratórnej sústave, x' - poloha bodu v inerciálnej sústave pohybujúcej sa voči laboratórnej rýchlosťou u v kladnom smere osi x.

11. Galileiho vzorec pre skladanie rýchlosti

$$v_x = v'_x + u.$$

12. Lorentzove transformácie súradníc

$$x = \frac{x' + u t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{u x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu a x – poloha bodu v laboratórnej sústave, x' - poloha bodu v inerciálnej sústave pohybujúcej sa voči laboratórnej s rýchlosťou u v kladnom smere osi x

13. Einsteinove vzorce pre skladanie rýchlosti

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, v'_y}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, v'_z}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}}.$$

Riešené príklady

1.1. Elektrický vlak sa pohybuje medzi dvoma zástavkami vzdialenými od seba 2,5 km nasledovne. Začína sa pohybovať s konštantným zrýchlením 1 m.s^{-2}, až dosiahne maximálne povolenú rýchlosť, ktorá je 90 km/h. Ďalej sa pohybuje rovnomerne až kým začne brzdiť do zastavenia s tým istým zrýchlením čo do veľkosti, ale opačného smeru. Vypočítajte priemernú rýchlosť elektrického vlaku medzi zastávkami.

Úvaha:

Známe veličiny	Hľadané veličiny
$a = 1$ m.s^{-2}	$v_p = ?$
$s = 2500$ m	
$v_{max} = 25$ m.s^{-1}	
$v_0 = v_k = 0$	

Urobíme si skrátený zápis známych a hľadaných veličín, ako aj podmienok riešenia. Budeme vychádzať z definície priemernej rýchlosti ako podielu celkovej dráhy a celkového času, za ktorý vlak túto dráhu prešiel.

$$v_p = \frac{s}{t} \qquad (1)$$

Zo zadania je zrejmé, že pohyb vlaku medzi zástavkami môžeme rozdeliť na tri úseky. Potom celková dráha bude rovná súčtu dráh jednotlivých úsekov a celkový čas súčtu časov potrebných na prekonanie jednotlivých úsekov. Na prvom úseku prejde vlak dráhu s_1 so zrýchlením a z počiatočnej rýchlosti v_0, pokiaľ nedosiahne rýchlosť v_{max}. Preto musí platiť

$$v_{max} = at_1 \qquad (2)$$

a

$$s_1 = at_1^2 / 2, \qquad (3)$$

pretože $v_0 = 0$ a a je konštantné. Úpravou dostaneme

$$t_1 = \frac{v_{max}}{a}, \qquad s_1 = \frac{v_{max}^2}{2a} \qquad (4)$$

Druhý úsek ide vlak konštantnou rýchlosťou v_{max} a prejde dráhu

$$s_2 = v_{max} t_2. \qquad (5)$$

Tretí úsek vlak brzdí so zrýchlením $-a$ z počiatočnej rýchlosti v_{max} do zastavenia.. Preto platia vzťahy

$$0 = v_{max} - at_3 , \tag{6}$$

$$s_3 = v_{max} t_3 - \frac{1}{2} a t_3^2 . \tag{7}$$

Riešením rovníc (6) a (7) dostaneme

$$t_3 = \frac{v_{max}}{a} = t_1, \quad s_3 = \frac{v_{max}^2}{2a} = s_1 . \tag{8}$$

Aby sme mohli úlohu riešiť je potrebné vyjadriť si dráhu s_2 pomocou známych veličín. Vieme, že celková dráha je rovná súčtu dráh na jednotlivých úsekoch a je zadaná. Preto dráha s_3 bude rovná rozdielu celkovej dráhy a dráh na prvom a treťom úseku

$$s_2 = s - 2s_1 . \tag{9}$$

Potom čas t_2 bude rovný $$t_2 = \frac{s - 2s_1}{v_{max}} . \tag{10}$$

Riešenie:

Vypočítame si najprv celkový čas berúc do úvahy, že

$$s_1 = \frac{v_{max}^2}{2a}$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{v_{max}}{a} + \frac{s}{v_{max}} - \frac{v_{max}}{a} + \frac{v_{max}}{a} = \frac{s}{v_{max}} + \frac{v_{max}}{a} = \frac{2500\text{m}}{25\text{m.s}^{-1}} + \frac{25\text{m.s}^{-1}}{1\text{m.s}^{-2}} =$$

$$= 125\,\text{s}.$$

Pre priemernú rýchlosť dostaneme

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{2500\text{m}}{125\text{ s}} = 20\text{ m.s}^{-1}.$$

1.2. Chodec stojí na okraji pásu zoraného poľa širokého 200 m a chce sa dostať na druhý okraj, ktorý susedí s trávnatou plochou, do miesta vzdialeného od východzieho bodu 300 m. V ornici kráča rýchlosťou 3 km/hod., po trávnatej ploche 5 km/hod. Pod akým uhlom vzhľadom na kolmicu k rozhraniu ornice a trávy musí chodec vyraziť zoraným pásom, aby do cieľového miesta došiel za najkratší čas a aký tento čas bude?

Úvaha:

Zadané veličiny

$d = 200$ m

$l = 300$ m

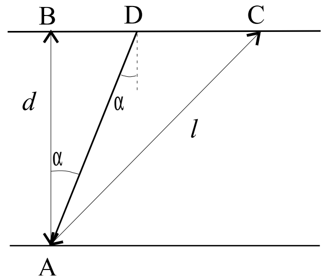
$v_1 = 3$ km/hod

$v_2 = 5$ km/hod

Hľadané veličiny

$\alpha_m = ?$

$t_{min} = ?$



Obr.1

Nakreslíme si schému pohybu chodca, pozri obr.1. Označíme si východziu polohu ako bod A a konečnú polohu ako bod C. Bod, ktorý sa nachádza oproti chodcovi na druhej strane poľa, si označíme ako B. Pretože rýchlosti pohybu chodca po zoranom poli a po tráve sú rôzne, je zrejmé, že pre dosiahnutie minimálneho času musí chodec prejsť zorané pole pod istým uhlom voči kolmici k rozhraniu zoraného poľa a trávy, označíme si ho α. Aby celkový čas t_c bol minimálny, musí byť splnená podmienka extrému funkcie $t_c(\alpha)$;

$$\frac{\partial t_c(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \tag{1}$$

Aby sme úlohu vyriešili treba nájsť funkciu, ktorá bude vyjadrovať závislosť času t_c od uhlu α. Zo zadania je zrejmé, že ide o rovnomerný pohyb a preto bude platiť vzťah medzi dráhou a časom

$$s = v\,t\ . \tag{2}$$

Z obrázku je zrejmé, že celkový čas potrebný na to, aby chodec prešiel z bodu A do bodu C, sa bude skladať z času t_1, potrebného na prekonanie dráhy z bodu A do bodu D a času t_2, potrebného na prekonanie dráhy z bodu D do bodu C. Vyjadríme si tieto časy pomocou rovnice (2).

$$t_1 = \frac{\overline{AD}}{v_1} = \frac{d}{v_1 \cos\alpha} \tag{3}$$

$$t_2 = \frac{\overline{DC}}{v_2} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2} - d\ \mathrm{tg}\alpha}{v_2} \tag{4}$$

Súčtom vzťahov (3) a (4) dostanem rovnicu vyjadrujúcu závislosť celkového času od uhlu α:

$$t_c = \frac{d}{v_1 \cos\alpha} + \frac{1}{v_2}\left(\sqrt{l^2 - d^2} - d\ \mathrm{tg}\alpha\right) \tag{5}$$

Riešenie:

Aby sme vypočítali minimálny čas musíme derivovať rovnicu (5) podľa uhlu α a deriváciu položiť rovnú nule. Dostaneme

$$\frac{d \sin\alpha_m}{v_1 \cos^2 \alpha_m} - \frac{1}{v_2}\frac{d}{\cos^2 \alpha_m} = 0\ . \tag{6}$$

Pretože riešenie s uhlom $\alpha_m = 90^0$ neprichádza do úvahy a d je nenulové, môžeme vzťah (6) vydeliť pomerom $d / \cos^2 \alpha_m$ a úpravou dostaneme výraz pre uhol α_m

$$\alpha_m = \arcsin \frac{v_1}{v_2} .$$

Dosadením hodnôt rýchlosti vypočítame hodnotu uhlu α_m

$$a_m = \arcsin \frac{3\text{km/h}}{5\text{km/h}} = 0.64 \text{ rad}.$$

Túto hodnotu uhlu dosadíme do rovnice (5) a dostaneme minimálny čas

$$t_{min} = 0{,}098 \text{ h} = 5{,}9 \text{ min} \cong 6 \text{ minút}$$

1.3. V triediacom zariadení padajú oceľové guľôčky z výšky h = 30 cm na oceľovú platňu naklonenú o uhol α = 15° voči vodorovnej rovine a skáču (ak sú vyhotovené podľa predpisu) cez otvor v stene, ktorá je vo vzdialenosti d = 20 cm od bodu odrazu. V akej výške h_1 sa otvor nachádza?

Úvaha:

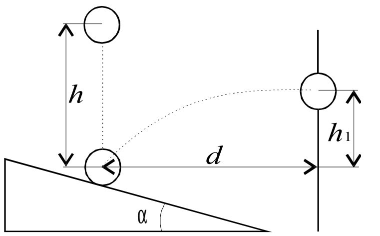
Zadané veličiny	Hľadané veličiny
h = 30 cm	h_1 = ?
α = 15°	
d = 20 cm	
Podmienka: Absolútne pružný ráz	

Znázorníme si dráhu guličky v triediacom zariadení, viď obr. 2. Guľôčka padajúca z výšky h voľným pádom po dopade na naklonenú rovinu sa odrazí a preletí otvorom v stene. Zo vzťahov pre voľný pád

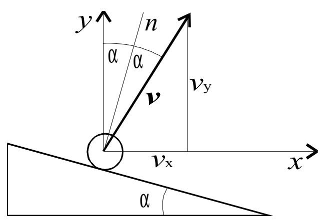
$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2} gt^2 \tag{1}$$

dostaneme pre rýchlosť v, ktorou guľôčka dopadla na podložku, vzťah

$$v = \sqrt{2gh} . \tag{2}$$



Obr.2



O br.3

Ráz guľôčky o podložku je absolútne pružný, preto rýchlosť odrazu je rovná rýchlosti dopadu a uhol odrazu je rovný uhlu dopadu. Pre lepšiu predstavu si nakreslíme obrázok, ktorý znázorňuje rýchlosť guličky a jej zložky vzhľadom na naklonenú rovinu (obr. 3). Priamka n je normálou k naklonenej rovine. Gulička dopadá na rovinu pod uhlom α, pod tým istým uhlom odskakuje od roviny a ďalej sa pohybuje po dráhe šikmého vrhu. Zavedieme si súradnicovú sústavu x,y tak, že os x je vodorovná a os y je na ňu kolmá. Potom môžeme napísať zložky v_x a v_y po odraze

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos\left(90^\circ - 2\alpha\right); \\ v_y &= v \sin\left(90^\circ - 2\alpha\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Aby gulička preletela cez otvor musí v čase preletu t_p byť jej poloha nasledovná:

$$x_p = v_x t_p = d \ ; \qquad (4)$$

$$y_p = v_y t_p - \frac{1}{2} g t_p^2 = h_1 \ . \qquad (5)$$

Riešenie:

Pomocou vzťahov (2) a (4) vypočítame čas t_p .

$$t_p = \frac{d}{v_x} = \frac{d}{\sqrt{2gh}\ \cos 60^\circ}$$

Dosadením času t_p do rovnice (5) vypočítame

$$h_1 = \frac{\sqrt{2gh}\ \sin 60^\circ}{\sqrt{2gh}\ \cos 60^\circ} d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{2gh\ \cos^2(60^\circ)} = d\left(\mathrm{tg}60^\circ - \frac{1}{4}\frac{d}{h}\frac{1}{\cos^2(60^\circ)}\right)$$

$$h_1 = 0{,}2\mathrm{m}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{4}\frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}\ 0{,}25}\right) = 0{,}213\mathrm{m}$$

1.4. Hmotný bod sa začína pohybovať po kružnici o polomere r = 10 cm s konštantným uhlovým zrýchlením ε = 0,4 rad.s^{-2}. Vypočítajte:

a) jeho celkové zrýchlenie v čase t_1 = 2 s po začatí pohybu;
b) dobu, za ktorú bude vektor zrýchlenia zvierať s vektorom rýchlosti uhol 80°;
c) dráhu, ktorú prejde za čas t_1 hmotný bod;
d) uhol, o ktorý sa pootočí polohový vektor hmotného bodu za čas t_1 !

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
r = 0,1 m	a_1 = ?
ε = 0,4 rad.s^{-2}	t_2 = ?
$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = 80^\circ$	$s(t_1)$ = ?
t_1=2 s	$\varphi(t_1)$ = ?
$v(0)$ = 0	
$\varphi(0)$ = 0	
$s(0)$ = 0	

Celkové zrýchlenie pri pohybe hmotného bodu po kružnici je rovné vektorovému súčtu tangenciálneho a normálového zrýchlení. Ale jednotlivé zložky celkového zrýchlenia sú na seba kolmé a preto môžeme napísať

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \ . \qquad (1)$$

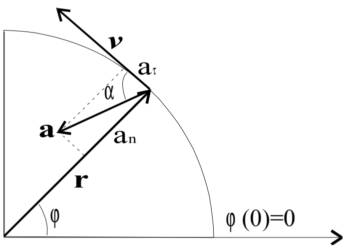
Zo zadania je zrejmé, že tangenciálna zložka zrýchlenia je konštantná a rovná

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r \ . \qquad (2)$$

Normálové zrýchlenie bude rovné :

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} \qquad (3)$$

a bude sa meniť v závislosti od času, preto treba vypočítať rýchlosť v čase t_1. Rýchlosť v vypočítame zo vzorca pre výpočet rýchlosti zo zrýchlenia:



Obr. 4

$$v = v_0 + \int_0^t a_t \, dt = v_0 + \int_0^t \varepsilon r \, dt \cdot$$

Ak vezmeme do úvahy počiatočnú podmienku $v(0) = 0$ dostaneme

$$v(t) = a_t \, t = \varepsilon r \, t \cdot \tag{4}$$

Z obrázku 4 je zrejmé, že uhol medzi celkovým zrýchlením a vektorom rýchlosti, označíme si ho α, bude aj uhlom medzi celkovým zrýchlením a tangenciálnym zrýchlením. Preto môžeme napísať

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_t}. \tag{5}$$

Dosadením vzťahov (3 a 4) do rovnice (5) dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_t^2 t^2}{a_t r} = \frac{a_t}{r} t^2$$

a odtiaľto

$$t = \sqrt{\frac{r \,\mathrm{tg}\,\alpha}{a_t}}. \tag{6}$$

Dráhu $s(t)$ si vypočítame zo vzorca pre výpočet dráhy

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t) \mathrm{d}t \quad . \tag{7}$$

Pri pohybe po kružnici platí nasledovný vzťah medzi dráhou a uhlovou dráhou

$$s = \varphi r \, . \tag{8}$$

Riešenie:

a) Pri použití rovníc (2, 3 a 4) môžeme rovnicu (1) upraviť do tvaru

$$a_1 = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \left(\frac{(\varepsilon r t_1)^2}{r} \right)^2} = \varepsilon r \sqrt{1 + \varepsilon^2 t_1^4} = 0{,}4 \mathrm{s}^{-2} \cdot 0{,}1 \mathrm{m} \cdot \sqrt{1 + \left(0{,}4 \mathrm{s}^{-2}\right) \cdot 2^4 \mathrm{s}^4} \cong 0{,}075 \mathrm{m.s}^{-2}$$

b) Dosadením hodnôt polomeru, uhlového zrýchlenia a tangensu α do rovnice (6) dostaneme:

$$t_2 = \sqrt{\frac{r \,\mathrm{tg}\,\alpha}{\varepsilon r}} == \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{5{,}67128}{0{,}4 \mathrm{s}^{-2}}} \cong 3{,}76 \mathrm{s} \, .$$

c) Ak vezmeme do úvahy, že $s(0) = 0$ a $v(0) = 0$ vypočítame dráhu v čase t_1, úpravou vzorca (7):

$$s_1 = \int_0^{t_1} v \, \mathrm{d}t = \int_0^{t_1} a_t t \, \mathrm{d}t = \frac{a_t t_1^2}{2} = \frac{\varepsilon r t_1^2}{2} = \frac{0{,}4 \mathrm{s}^{-2} \cdot 0{,}1 \mathrm{m} \cdot (2\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}08 \mathrm{m}$$

d) Dosadením do upraveného vzorca (8) dostaneme uhlovú dráhu

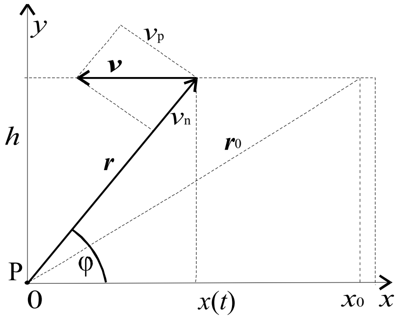
$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{0{,}08 \text{ m}}{0{,}1 \text{ m}} = 0{,}8 \text{ rad} \, .$$

1.5. Lietadlo letí vodorovne rovnomerne priamočiaro nad rovinným zemským povrchom vo výške h rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. V smere letu lietadla je v mieste P pozorovateľňa. Pozorovateľ má echolot (zariadenie na meranie absolútnej hodnoty vzdialenosti lietadla od bodu P). a) Akú priečnu rýchlosť má lietadlo? b) Vypočítajte hodnotu rýchlosti lietadla, ktorú určí pozorovateľ v bode P!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$\boldsymbol{r}_0$	$v_r = ?$
$\boldsymbol{r}$	$v = ?$

Pre riešenie príkladu je vhodné nakresliť obrázok (pozri obr.5) . Zvolíme si súradnicovú sústavu tak, že os x je v rovine zemského povrchu v smere lietadla a os y je na ňu kolmá. Počiatok súradnicovej sústavy umiestnime do bodu P. Budeme predpokladať, že v čase $t_0 = 0$ bol polohový vektor lietadla $\boldsymbol{r}_0$, ktorému na osi x zodpovedá súradnica x_0.



Obr.5

a) V ľubovoľnom nasledujúcom čase bude platiť:

$$x = x_0 - v\,t\,, \qquad r = \sqrt{x^2 + h^2}$$

Z nameraných hodnôt polohových vektorov r_0 a r za veľmi krátky časový interval pozorovateľ priamo vypočíta radiálnu rýchlosť lietadla

$$v_r = \frac{r - r_0}{\Delta t}\,.$$

b) Radiálnu rýchlosť lietadla si môžeme vyjadriť aj v diferenciálnom tvare

$$v_\mathrm{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}v\,.$$

Úpravou tejto rovnice dostaneme

$$v_r = -\frac{x}{r}v = -\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r}v\,,$$

odkiaľ hľadaná rýchlosť lietadla

$$v = -v_r\frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}}\,.$$

Poznámka: Príklad názorne dokazuje zložitosť problematiky merania rýchlosti pohybujúcich sa objektov. Ak má pozorovateľ prístroj len na určovanie vzdialenosti a z toho vyplývajúcej radiálnej rýchlosti, môže presne určiť rýchlosť iba vtedy, keď je umiestnený v niektorom bode na vektorovej priamke rýchlosti objektu (t. j. $h = 0$). Aby mohol pozorovateľ jednoznačne určiť zložky rýchlosti a smer lietadla musí mať k dispozícii údaj o vzdialenosti určitého bodu na osi x, nad ktorým lietadlo preletelo v čase, keď zamerali jeho vzdialenosť v bode P.

Keďže polícia má na meranie rýchlosti vozidiel iba prístroje vyššie spomínaného typu, musia ich umiestňovať na okraji vozovky tak, aby $h \cong 0$.

1.6. Na stožiari vo výške h=5,8 m je zavesená lampa. Bežec vysoký h_1=180 cm sa od lampy vzďaľuje rýchlosťou v = 4 m.s^{-1}.
Vypočítajte:
a) rýchlosť v_1, ktorou sa vrchol tieňa bežca vzďaľuje od lampy,
b) rýchlosť v_2, ktorou sa vrchol tieňa bežca vzďaľuje od bežca.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
h = 5,8 m	v_1 = ?
h_1 = 1,8 m	v_2 = ?
v = 4 m.s^{-1}	

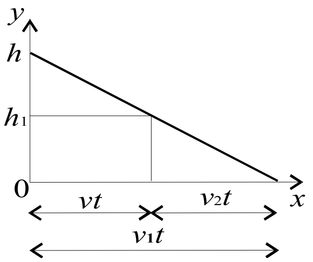
Zvolíme si súradnicovú sústavu tak, že os x je rovnobežná so smerom rýchlosti bežca a os y je na ňu kolmá. Nakreslíme si obrázok pohybu bežca a tieňa (obr. 6). Nech vt je poloha bežca na osi x, keď tento v čase t_0 = 0 bol v polohe x = 0. Potom v_1t je poloha vrcholu tieňa bežca na osi x a v_2t je vzdialenosť vrcholu tieňa bežca od bežca.

Z podobnosti trojuholníkov dostávame vzťahy:

$$\frac{h}{v_1 t} = \frac{h - h_1}{vt} \Rightarrow \frac{h}{h - h_1} = \frac{v_1}{v}. \qquad (1)$$

Podobne

$$\frac{h_1}{h - h_1} = \frac{v_2}{v}. \qquad (2)$$



Obr. 6

Riešenie:

Úpravou a dosadením do vzorca (1) dostaneme

$$v_1 = \frac{h}{h - h_1} v = \frac{5{,}8\,\mathrm{m}}{5{,}8\,\mathrm{m} - 1{,}8\,\mathrm{m}} 4\,\mathrm{m.s^{-1}} = 5{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

Úpravou a dosadením do vzorca (2) dostaneme

$$v_2 = \frac{h_1}{h - h_1} v = \frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{5{,}8\,\mathrm{m} - 1{,}8\,\mathrm{m}} 4\,\mathrm{m.s^{-1}} = 1{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}}.$$

1.7. Pozorovateľ, ktorý je v pokoji vzhľadom na laboratórnu sústavu súradníc, potrebuje zistiť dĺžku tyče, ktorá sa nachádza v rakete a je s ňou pevne spojená. Tyč je rovnobežná s osou rakety. Rýchlosť rakety je 0,7 c. Ako je možné urobiť takéto meranie? Vypočítajte dĺžku tyče, ktorú zistí pozorovateľ, ak dĺžka tyče v rakete je 1 m!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
l_0 = 1 m	l' = ?
v = 0,7 c	

Dĺžku telesa môžeme merať len vo vzťažnej sústave, voči ktorej sa teleso, ktorého dĺžku meriame, nepohybuje. Preto pod dĺžkou pohybujúceho sa telesa rozumieme vzdialenosť medzi dvoma bodmi v laboratórnej sústave (nepohybujúcej sa), v ktorých sa v rovnakom čase, podľa hodín v laboratórnej sústave, nachádzali začiatok a koniec pohybujúceho sa voči laboratórnej sústave telesa. Zvolíme si laboratórnu sústavu súradníc tak, aby rýchlosť rakety bola rovnobežná s osou x a pohybovala sa v zápornom smere. Aby sme mohli zistiť dĺžku pohybujúceho telesa, potrebujeme dvoje hodiny, pomocou ktorých zistíme polohy začiatku x_1 a konca tyče x_2 v rovnakom čase t_0. Je zrejmé, že dĺžka pohybujúcej sa tyče bude rovná

$$l' = x_2 - x_1 \,. \qquad (1)$$

Dĺžka tyče v rakete, voči ktorej je tyč v kľude bude

$$l = x_2' - x_1' \,. \qquad (2)$$

Pomocou Lorentzovych transformácií môžeme vyjadriť súradnice v pohybujúcej sa sústave pomocou súradníc v laboratórnej sústave a tým zistiť závislosť medzi dĺžkou pohybujúcej sa tyče a jej dĺžkou v stave pokoja.

Riešenie:

Nech hodnota rýchlosti rakety v laboratórnej sústave je v. Potom bude platiť

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,; \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \qquad (3)$$

Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$l = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \qquad (4)$$

Úpravou rovnice (4) dostaneme

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1\,\mathrm{m}\sqrt{1 - \frac{(0{,}7)^2 c^2}{c^2}} \approx 0{,}71\,\mathrm{m}$$

Neriešené príklady.

1.8. Automobil prešiel prvú tretinu dráhy rýchlosťou v_1 a zvyšujúcu časť dráhy rýchlosťou 50 km/hod. Vypočítajte rýchlosť v_1, ak priemerná rýchlosť na celej dráhe bola 37,5 km/hod. [25 km/hod.]

1.9. Akú priemernú rýchlosť v_p má piest motora automobilu pri n = 3600 ot/min a pri zdvihu h = 69 mm? [8,28 m.s^{-1}]

1.10. Dve autá vyrazili súčasne z mesta M do mesta N vzdialeného 50,4 km. Auto A_1 prešlo polovicu vzdialenosti rýchlosťou 54 km/hod. a druhú polovicu rýchlosťou 72 km/hod. Auto A_2 išlo polovicu času, ktorý potrebovalo na prejdene celej vzdialenosti, rýchlosťou 54 km/hod. a druhú polovicu času rýchlosťou 72 km/hod. Ktoré auto dorazilo do mesta N skôr a o koľko sekúnd? Ako vzdialené bolo od mesta N druhé auto v okamihu príchodu prvého auta do mesta N? Aká bola priemerná rýchlosť každého z aut? [A_2; 60 s; 1200 m; $\bar{v}_{A1}$ = 61,7 km/hod; $\bar{v}_{A2}$ = 63 km/hod.]

1.11. Hmotný bod sa pohyboval nasledovne: Prvú sekundu so zrýchlením 1 m.s^{-2}, ďalšie dve sekundy so zrýchlením –1 m.s^{-2}, a posledné dve sekundy bez zrýchlenia. Vypočítajte priemernú rýchlosť hmotného bodu na dráhe, ktorú prešiel za uvedených 5 s. [0,7 m.s^{-1}]

1.12. Cyklista sa pohybuje smerom do kopca konštantnou rýchlosťou v_1 = 10 km.h^{-1}. Keď dosiahne vrchol kopca, obráti sa a absolvuje tú istú trať z kopca dolu rýchlosťou v_2 = 40 km.h^{-1}. Aká je priemerná rýchlosť pohybu cyklistu? [v_p = 16 km.h^{-1}]

1.13.* Po priamej ceste ide autobus rýchlosťou 16 m.s^{-1}. Človek sa nachádza vo vzdialenosti 60 m od cesty a 400 m od autobusu. V akom smere musí začať bežať človek, aby dobehol k niektorému bodu na ceste súčasne s autobusom, alebo skôr ako autobus. Človek môže bežať rýchlosťou 4 m.s^{-1}. [Ak chce človek dobehnúť súčasne alebo skôr ako autobus, musí bežať smerom, ktorý zviera uhol voči počiatočnej polohe autobusu od 36° 45 minút až 143° 15 minút.]

1.14. Dvaja vodiči štartujú súčasne z jedného miesta. Jeden vodič ide so zrýchlením a_1 = 1,8 m/s^2 a po 16-ich sekundách má pred druhým vodičom predstih s = 50 m. Aké zrýchlenie má druhý vodič? [1,41 m.s^{-2}]

1.15. Aká je začiatočná rýchlosť a zrýchlenie telesa, keď v 6. sekunde ubehne 6 m a v 11. sekunde 8 m? [3,8 m.s^{-1}; 0,4 m.s^{-2}]

1.16. Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas t_1 = 4 s. Ako dlho bude popri ňom prechádzať n-tý vagón (napr. n = 7), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé? Považujte pohyb vlaku za priamočiary, rovnomerne zrýchlený. [$t^* = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = t_1(\sqrt{7} - \sqrt{6})$ = 0,8 s]

1.17. Teleso prešlo dva za sebou nasledujúce úseky dráhy s rovnakým zrýchlením za rovnaký čas. Aká je dĺžka druhého úseku, keď dĺžka prvého je 200 m a začiatočná rýchlosť telesa na prvom úseku bola nulová. [600 m]

1.18. Dve vozidlá štartujú v pravom uhle a idú rovnomerne zrýchlene tak, že po 15-ich sekundách sú od seba vzdialené 200m; jedno vozidlo má od križovatky dvojnásobnú vzdialenosť ako druhé. Aké rýchlosti majú v tom okamihu?
[v_1 = 11,9 m.s^{-1}; v_2 = 23,8 m.s^{-1}]

1.19. Vozidlo sa začalo pohybovať zo stavu pokoja so zrýchlením a_1 = 2,5 ms^{-2} . Po 5 s prešlo do rovnomerného pohybu a nakoniec brzdilo so spomalením a_2 = 3,5 ms^{-2} až do zastavenia. Celkove prešlo dráhu 100 m. Aký čas bol na túto jazdu potrebný? [12,06 s]

1.20.* Vlak išiel rýchlosťou 72 km/h, avšak mal meškanie t_m = 3 min, pretože prechodne na prestavovanej trati smel ísť iba rýchlosťou 18 km/h. Spomalenie pri brzdení bolo 0,3 m/s^2 a rozbehové zrýchlenie 0,15 m/s^2. Akú dráhu prešiel vlak rýchlosťou 18 km/hod.? [825 m]

1.21. Podľa záznamu akcelerografu sa vozidlo zo stavu pokoja rozbiehalo so zrýchlením, ktoré z počiatočnej hodnoty 1,5 m.s^{-2} rovnomerne klesalo až na nulovú hodnotu za čas 30 s. Akú dráhu vozidlo prešlo počas rozbehu a akú rýchlosť pohybu dosiahlo?
[450 m; 81 km/hod.]

1.22. Analýzou záznamu tachografu vozidla bolo zistené, že vozidlo z pôvodnej rýchlosti 90 km/hod. brzdilo podľa časovej závislosti $v = v_0 - bt^2$ a zastavilo za čas 16 s. Na akej dráhe vozidlo zastavilo a akú maximálnu hodnotu dosiahla veľkosť zrýchlenia počas pohybu? [266,7 m; 3,125 m.s^{-2}]

1.23. Ak na hladine vody voľne pustíme guličku, bude klesať nerovnomerne zrýchleným pohybom s časovou závislosťou rýchlosti $v=v_0[\,1 - \exp(-t/\Theta)]$, kde v_0 = 0,2 m.s^{-1} a Θ = 0,1 s. V akej hĺbke bude mať gulička rýchlosť rovnú 99 % rýchlosti ustáleného rovnomerného pohybu a aké bude v tejto hĺbke zrýchlenie? Zistite zo zadaných hodnôt hustotu guličky. [7,2 cm; 0,02 m.s^{-2}; $1{,}3 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}]

1.24. Častica sa začala pohybovať z počiatku súradnicovej sústavy v kladnom smere osi x. Veľkosť jej rýchlosti sa s časom mení podľa vzťahu $v = v_0\,(\,1 - kt\,)$, kde v_0 = 0,1 m/s je počiatočná rýchlosť častice a k = 0,2 s^{-1} je konštanta. Určite x – ovú súradnicu častice v čase t = 6,0 s od začiatku pohybu. [0,24 m]

1.25. Častica sa pohybuje tak, že jej poloha v ľubovoľnom okamihu je určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r} = 3\ \mathrm{m.s^{-1}}t\boldsymbol{i} +(1\ \mathrm{m.s^{-1}}t +1/2\ \mathrm{m.s^{-2}}t^2)\boldsymbol{j} - 4\ \mathrm{m}/\pi^2 \sin(\pi \mathrm{s^{-1}}t/2)\boldsymbol{k}$. Určite veľkosť rýchlosti a zrýchlenia častice v čase $t = 5$ s. [6,7 m/s ; 1,4 m/s^2]

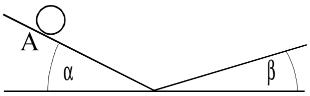
1.26. Auto sa rozbieha priamočiaro z pokoja, pričom jeho zrýchlenie rovnomerne rastie tak, že v čase $t_1 = 150$ s má veľkosť $a_1 = 0{,}25$ m/s^2. Aká bola okamžitá rýchlosť auta v čase $t_2 = 200$ s ? Akú dráhu prešlo auto za tento čas [33,3 m/s ; 2,2 km]

1.27. Nákladné auto ide stálou rýchlosťou $v_2 = 60$ km/h za iným autom, ktoré má rýchlosť $v_1 = 42$ km/h. Za aký čas t a na akej dlhej dráhe s dobehne pomalšie auto, keď autá mali začiatočný odstup 400 m? [80 s; 1333,3 m]

1.28.∗Auto idúce rýchlosťou $v_2 = 70$ km/h predbieha iné auto, ktoré má rýchlosť $v_1 =$ 60 km/h. Ako dlho bude trvať manéver predbiehania a akú dráhu musí predbiehajúce auto vykonať, keď vzájomný odstup áut pred a po predbiehaní je 20 m a obidve autá majú dĺžku 4 m? [17,27 s; 335,8 m]

1.29. Určite periódu periodického pohybu telesa, ktoré sa kĺže dolu a hore po dvoch naklonených rovinách zvierajúcich s vodorovnou rvinou uhly α a β (obr. 7), keď v čase $t = 0$ je voľne pustené z polohy A, a keď zanedbávame trenie ako aj straty kinetickej energie telesa pri jeho prechode z jednej roviny na druhú.

$$\left[T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)\right]$$



Obr.7

1.30. Teleso preletelo za posledné 2 sekundy voľného pádu tretinu svojej celkovej dráhy. Ako dlho a z akej výšky padalo ? [10,9 s ; 582,7 m]

1.31. Voľne padajúce teleso minie dva 12 m od seba vzdialené meracie body za časový interval jednej sekundy. Z akej výšky h nad prvým meracím bodom padá teleso a akú rýchlosť má v oboch bodoch? [2,56 m; 7,09 m.s^{-1}; 16,9 m.s^{-1}]

1.32. Lopta hodená zvisle na zem z výšky 1 m vyskočí do výšky 6 m. Aká bola jej začiatočná rýchlosť, keď so stratami rýchlosti v dôsledku odporu vzduchu nerátame? [9,9 ms^{-1}]

1.33. ∗Teleso bolo vrhnuté zo zemského povrchu zvisle nahor rýchlosťou $v_0 = 4{,}9$ m.s^{-1}. Súčasne z maximálnej výšky, ktorú toto teleso dosiahne, je vrhnuté zvisle nadol druhé teleso tou istou začiatočnou rýchlosťou v_0. Treba určiť čas t^*, v ktorom sa obidve telesá stretnú, vzdialenosť h od zemského povrchu, v ktorej sa stretnú a rýchlosti obidvoch telies v_1^* a v_2^* v okamihu stretnutia. Odpor vzduchu zanedbajte!

[$t^* = 0{,}125$ s; $h = 0{,}53$ m; $v_1^* = 3{,}67$ m.s^{-1}; $v_2^* = 6{,}12$ m.s^{-1}]

1.34. V určitej výške nad povrchom Zeme sú z jedného bodu súčasne všetkými smermi vyhodené guľôčky so začiatočnou rýchlosťou v_0. Dokážte, že v ľubovoľnom nasledujúcom čase sa guľôčky nachádzajú na guľovej ploche polomeru $R = v_0\, t$, ktorej stred klesá rýchlosťou gt.

1.35. Na vodorovnej ploche ihriska bola vystrelená šikmo hore pod uhlom 0,6 rad rýchlosťou 25 m.s^{-1} oceľová gulička. V akej vzdialenosti by dopadla, akú maximálnu výšku by dosiahla a aký by bol pomer polomerov zakrivenia trajektórie v najvyššom a počiatočnom bode, ak by na ňu nepôsobil odpor vzduchu? [59 m; 10 m; 0,56]

1.36. Z vodorovného dopravného pása vo výške 2,5 m má uhlie dopadať do vzdialenosti 1,80 m. Akú obehovú rýchlosť musí mať dopravný pás? [2,52 m.s^{-1}]

1.37. Pod akým uhlom musí striekať voda z hadice na úrovni zeme, aby dosiahla maximálnu výšku rovnú vzdialenosti dopadu vody na zem? Odpor vzduchu zanedbajte. [75,96°]

1.38. Pod akým uhlom voči horizontu musíme vrhnúť oceľovú guličku, aby pri zadanej rýchlosti dosiahla maximálnu vzdialenosť miesta dopadu? Odpor vzduchu zanedbajte. Riešte najprv obecne, potom vypočítajte vzdialenosť dopadu pre počiatočnú rýchlosť 25 m.s^{-1}. [45°; 63,71 m]

1.39. Dopravníkom, ktorý je naklonený nahor o 20°, vrhá sa sutina začiatočnou rýchlosťou 2,2 m/s do preklápacieho vozíka, ktorý stojí 4 m hlbšie ako horný koniec dopravníka. Vypočítajte vodorovnú vzdialenosť stredu preklápacieho vozíka od horného konca dopravníka, ak sutina dopadá do stredu vozíka.[2,032 m]

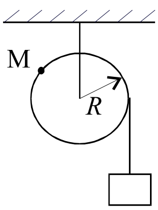
1.40.* Gulička bola vrhnutá z vrcholu hory, svah ktorej zviera s horizontálnou rovinou uhol 60°, v horizontálnom smere rýchlosťou 10 m.s^{-1}. Vypočítajte vzdialenosť medzi prvým a druhým miestom dopadu guličky na svah, za predpokladu, že ráz medzi guličkou a svahom je absolútne pružný. Odpor vzduchu zanedbajte. [176,56 m]

1.41. Pri meraní rýchlosti náboja sa náboj vystrelí cez dva lepenkové kotúče, ktoré sa otáčajú na spoločnej osi vo vzdialenosti 80 cm s frekvenciou = 1 500 ot/min. Aká bola rýchlosť náboja, keď obidva priestrely na kotúčoch sú navzájom posunuté o 12°? [600 m.s^{-1}]

1.42. Po obvode upevnenej 10-halierovej mince sa kotúľa druhá 10-halierová minca a vykoná tak celú kruhovú dráhu. Koľko otáčok pritom vykoná? [2]

1.43. Pri rýchlosti letu 420 km/h vykoná hlava (náboj) vrtule počas každej otáčky dráhu 3,6 m. Aký počet otáčok má vrtuľa? [32,4 s^{-1}]

1.44. Pri nehode sa remenica motora rozbije. Jeden kúsok z obvodu remenice (d=12 cm) uletí zvisle do výšky 65 cm. Aký počet otáčok mal motor? [$\cong$ 9,47 s^{-1}]



Obr.8

1.45. Na obvode kladky s polomerom R, otáčajúcej sa okolo vodorovnej osi, je položené lanko, na ktorom je zavesené závažie (obr.8). Pohyb závažia je určený rovnicou $s = \frac{1}{2}at^2$. Nájdite časovú závislosť zrýchlenia bodu M, ležiaceho na obvode kladky! [$a_M = \frac{a}{R}\sqrt{R^2 + a^2t^4}$]

1.46. Koleso sa otáča s frekvenciou f = 25 s^{-1}. Brzdením možno dosiahnuť, že jeho otáčanie bude rovnomerne spomalené a koleso sa zastaví po čase t_0 = 30 s od začiatku brzdenia. Vypočítajte uhlové zrýchlenie ε a počet otáčok, ktoré koleso vykoná od začiatku brzdenia až do zastavenia! [ε = - 5,24 s^{-2}; 375]

1.47. *Pohyb bodu je daný v polárnych súradniciach rovnicami $r = nt, \varphi = bt$, kde n a b sú konštanty. Nájdite rovnicu dráhy pohybu a vyjadrite závislosť rýchlosti a zrýchlenia od času. [Dráha je Archimedova špirála s rovnicou

$r = \frac{n}{b}\varphi$; $v = n\sqrt{1+b^2t^2}$; $a = nb\sqrt{4+b^2t^2}$]

1.48.* Hmotný bod sa pohybuje po kružnici o polomere 4 m tak, že jeho normálové zrýchlenie sa mení podľa vzťahu a_n= A+ Bt + Ct^2. Vypočítajte tangenciálne zrýchlenie hmotného bodu a celkové zrýchlenie v čase t_1=2/3 s, ak A = 1 m.s^{-2}, B = 3 m.s^{-3}, C = 2,25 m.s^{-4}. [a_τ=3 m.s^{-2}; a=5 m.s^{-2}]

1.49. Pozorovateľ sedí 2 m od 50 cm širokého okna. Pred oknom vo vzdialenosti 500 m prebieha cesta kolmo na smer pohľadu. Akú rýchlosť má bicyklista, ktorého vidno 15 sekúnd v zornom poli okna? [8,37 m.s^{-1}]

1.50. Akou rýchlosťou opustí delostrelecký náboj 80 cm dlhú hlaveň, keď pomocou vyrytých drážok získa n = 4500 ot/s a keď na dĺžku hlavne pripadajú 4 dĺžky závitu? [900 $m.s^{-1}$]
1.51. Na voze, ktorý sa pohybuje vodorovne a rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v je rúra. Ako musí byť os rúry naklonená, aby kvapky dažďa ňou preleteli bez dopadu na stenu. Kvapky padajú rovnomerne priamočiaro zvislým smerom rýchlosťou v_d.

[$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{v}{v_d}$]

1.52. Lietadlo má v smere zemského poludníka preletieť 1 500 km za dve hodiny. Akou priemernou rýchlosťou a akým smerom musí pilot viesť lietadlo, keď vie, že západný vietor má rýchlosť 100 km/hod. [$v_1 \doteq$ 756,6 km/hod; $\alpha \doteq 7{,}6°$]
1.53. Lietadlo letí rýchlosťou 250 km/h po skrutkovitej dráhe s polomerom zakrivenia r = 300m a za 3 minúty dosiahne takto výšku 1 500 m. Treba vypočítať: a) vykonanú dráhu ; b) čas potrebný na preletenie jednej slučky; c) počet vykonaných slučiek a d) krok skrutkovnice. [12,5 km; 27,34 s; 6,58; 228 m]
1.54. Furman s fúrou naloženého dlhého dreva ide konštantnou rýchlosťou. Pri nezmenenom pohybe voza zostúpi zo svojho sedadla a ide na koniec fúry niečo skontrolovať. Urobí pritom desať krokov. Potom ide naspäť na svoje sedadlo a musí pritom urobiť 15 krokov. Koľko krokov je dlhá jeho fúra? [12 krokov]
1.55. Dva vlaky, z ktorých jeden je dlhý 150 m a druhý 200 m, stretnú sa na voľnej trati. Akú rýchlosť majú oba protiidúce vlaky, keď ich jazda vedľa seba trvá 10 sekúnd a keď prvý vlak ubehne za tento čas dráhu 160 m? [16 $m.s^{-1}$; 19 $m.s^{-1}$]
1.56. V istej laboratórnej sústave sa gulička pohybovala priamočiaro proti stene rýchlosťou 20 $m.s^{-1}$. Stena sa pohybovala oproti guličke rýchlosťou 18 km/hod vzhľadom na laboratórnu sústavu.. Vypočítajte rýchlosť guličky po absolútne pružnom ráze so stenou. Hmotnosť steny uvažujte ako nekonečnú. [30 $m.s^{-1}$]
1.57. V istej inerciálnej sústave súradníc sa v bodoch x_A a x_B=x_A+l_0 súčasne stali dve udalosti A a B. Vypočítajte v akej vzájomnej vzdialenosti sa udalosti stali a aký časový interval medzi nimi uplynul z hľadiska pozorovateľa nachádzajúceho sa v rakete, ktorej rýchlosť bola 0,4 c vzhľadom k danej inerciálnej sústave! Vzdialenosť l_0 = 1 km. [1,1 km; -1,45 μs pri x_B-x_A=l_0; 1,45μs pri x_A-x_B = l_0]
1.58. Sklenená tyč dlhá 0,5 m sa pohybuje rýchlosťou 30 $m.s^{-1}$. Svetlo sa šíri tyčou tak v smere pohybu ako aj oproti pohybu tyče. Vypočítajte rozdiel časov v laboratórnej sústave, za ktoré prejde svetlo tyčou. Rýchlosť svetla v tyči uvažujte rovnú 2/5 c . [$17{,}5 \cdot 10^{-16}$s]
1.59. Vypočítajte dobu života častice vyjadrenú vlastným časom, ak jej rýchlosť sa líši o 0,2% od rýchlosti svetla vo vákuu a vzdialenosť, ktorú častica preletí v laboratórnej sústave do rozpadu je 300 km. (Rýchlosť svetla vo vákuu uvažujte $3 \cdot 10^8$ $m.s^{-1}$). [≅ 63,34 μs]
1.60. Dĺžka kozmickej lode na zemi je 100 m. Akou rýchlosťou letí loď v kozme, ak pozorovateľ na zemi vidí loď dlhú 99 m? [$4{,}2 \cdot 10^7$ $m.s^{-1}$]
1.61. Kozmická loď opúšťa zem rýchlosťou 0,98 c. Ako dlho bude trvať podľa pozorovateľa na Zemi 1 obeh minútovej ručičky na hodinách v kozmickej lodi. [5 hodín]
1.62. Kozmická loď sa vzďaľuje od zeme rýchlosťou 300 $m.s^{-1}$. Koľko rokov prejde, kým rozdiel času hodín na zemi a na kozmickej lodi a podľa pozorovateľa na Zemi bude 1 s. [$6{,}3 \cdot 10^4$ rokov]

1.63. Doba života častice v kľude je 10^{-7} s. Akú vzdialenosť môže preletieť od vzniku, keď pri vzniku mala rýchlosť 0,99 c. [213 m]