ČASŤ II.

SÚSTAVY S VEĽKÝM POČTOM STUPŇOV VOĽNOSTI

8 Molekulárno-kinetická teória ideálneho plynu

V tejto kapitole sa riešia úlohy, ktoré sa týkajú molekulárno-kinetického výkladu tlaku, kinetickej energie chaotického pohybu molekúl a rozdelenia molekúl podľa ich rýchlosti. Základná rovnica molekulárno-kinetickej teórie bola odvodená pomocou zjednodušeného modelu ideálneho plynu. V tomto modeli

1) Skutočné rozdelenie podľa jednotlivých zložiek rýchlostí sa nahradzuje predpokladom, že molekuly sa pohybujú len v troch navzájom kolmých smeroch;
2) rozdelenie molekúl podľa absolútnej hodnoty rýchlosti sa nahradzuje predpokladom o rovnosti absolútnej hodnoty u všetkých molekúl.

Prvý predpoklad ako by vylučoval zrážky molekúl. Ale v procese vzniku tepelnej rovnováhy práve zrážky hrajú veľmi významnú úlohu. Potom, ako vznikne rovnováha, zrážky už nemôžu vplývať ani na tlak, ani na teplotu, ani na iné charakteristiky sústavy.

1. Základná rovnica kinetickej teórie plynov má tvar

$$p=\frac{2}{3V}\left\langle E_k\right\rangle=\frac{2}{3}n_0\frac{m\left\langle v^2\right\rangle}{2},$$

kde $\left\langle E_k\right\rangle$ je celková kinetická energia postupného pohybu n molekúl plynu v objeme V,

n_0 – koncentrácia molekúl (počet molekúl v jednotke objemu),
m – hmotnosť molekuly,
$\left\langle v^2\right\rangle$ - štvorec strednej kvadratickej rýchlosti molekúl.

2. Stredná hodnota celkovej kinetickej energie jednej molekuly je rovná

$$\left\langle E_k\right\rangle=\frac{i}{2}kT,$$

kde i je počet stupňov voľnosti,
k – Boltzmanova konštanta,
T – absolútna teplota.

3. Stredná hodnota kinetickej energie postupného pohybu jednej molekuly je

$$\left\langle E_{kp}\right\rangle=\frac{3}{2}kT.$$

4. Keďže tlak plynu závisí len od postupného pohybu molekúl, tak plynu sa dá vyjadriť nasledovne

$$p=n_0kT.$$

5. Stavová rovnica ideálneho plynu má tvar

$$pV = \frac{m}{M} RT \ ,$$

kde m je hmotnosť plynu,

M – molárna hmotnosť plynu,

R – univerzálna plynová konštanta.

6. Pre zmes ideálnych plynov platí Daltonov zákon. Výsledný tlak zmesi plynov je rovný súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek. Stavová rovnica zmesi ideálnych plynov má potom tvar

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} + \ldots + \frac{m_k}{M_k} \right) RT \ .$$

7. Rozdelenie molekúl v potenciálovom silovom poli je dané Boltzmanovym rozdelením

$$n = n_0 e^{\frac{-E_p}{kT}} \ ,$$

kde E_p je potenciálna energia molekuly.

8. Rozdelenie molekúl podľa výšky v tiažovom poli Zeme má tvar

$$n = n_0 e^{\frac{-Mg}{RT}(h - h_0)} \ ,$$

kde n je počet molekúl vo výške h,

n_0 – počet molekúl vo výške h_0.

9. Barometrická formula, ktorá vyjadruje súvis medzi tlakmi p a p_0 vo výškach h a h_0 má tvar

$$p = p_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT}(h - h_0)} \ .$$

10. Maxwellovo rozdelenie molekúl podľa rýchlosti sa dá vyjadriť nasledovne

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \mathrm{d}v \ ,$$

kde dn je počet molekúl z celkového počtu n, ktoré majú pri teplote T rýchlosť v intervale v, v+ dv a m je hmotnosť molekuly.

11. Z tohto rozdelenia je možné vypočítať najpravdepodobnejšiu rýchlosť molekuly

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \ ,$$

strednú aritmetickú rýchlosť molekuly

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \ ,$$

a strednú kvadratickú rýchlosť molekuly

$$v_k = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \ .$$

Riešené príklady

8.1. Zmes kyslíka a dusíka pri teplote 290° K a tlaku 5,8 kPa má hustotu 0,4 kg.m^{-3}. Vypočítajte koncentráciu molekúl kyslíka v zmesi.
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T = 290$ K	$n_{01} = ?$
$p = 5{,}8$ kPa	
$\rho = 0{,}4$ kg.m^{-3}	
$M_1 = 32$ kg/kmol	
$M_2 = 28$ kg/kmol	

Budeme predpokladať, že obe zložky sa chovajú ako ideálne plyny. Potom celková koncentrácia molekúl zmesi n_0 bude rovná súčtu koncentrácií jednotlivých zložiek. Nech kyslík je prvá zložka a dusík druhá. Môžeme teda napísať

$$n_0 = n_{01} + n_{02} . \tag{1}$$

Na druhej strane, na základe molekulárnej teórie plynov, môžeme koncentráciu zmesi vyjadriť nasledovne

$$n_0 = \frac{p}{kT} . \tag{2}$$

Podľa Daltonovho zákona tlak zmesi plynov je rovný súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek

$$p = p_1 + p_2 . \tag{3}$$

Ak vezmeme do úvahy, že hustota látky je definovaná ako pomer hmotnosti látky a jej objemu $\rho = m/V$, môžeme pomocou stavovej rovnice vyjadriť parciálne tlaky

$$p_1 = \frac{\rho_1}{M_1} RT \ ; \ \ p_2 = \frac{\rho_2}{M_2} RT , \tag{4}$$

kde ρ_1 a ρ_2 sú parciálne hustoty, ktoré by mali jednotlivé zložky, keby sa každá zložka nachádzala v tom istom objeme ako zmes. Je zrejmé, že platí

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 . \tag{5}$$

Riešením rovníc (1) až (5) môžeme vypočítať koncentráciu molekúl kyslíka.

Riešenie:

Upravíme si rovnice (4) pomocou rovnice (2) do tvaru

$$n_{01} = \frac{\rho_1}{M_1} N_A \ ; \ n_{02} = \frac{\rho_2}{M_2} N_A$$

a odtiaľ
úpravou a dosadením do rovnice (5) dostaneme

$$\rho = \frac{n_{01} M_1}{N_A} + \frac{n_{02} M_2}{N_A} . \tag{6}$$

Z rovníc (1) a (2) dostaneme

$$\frac{p}{kT} = n_{01} + n_{02} . \tag{7}$$

Riešením rovníc (6) a (7) dostaneme pre koncentráciu molekúl kyslíku n_{01}

$$n_{01} = \frac{1}{M_1 - M_2}\left(N_A \cdot \rho - \frac{M_2 \cdot p}{kT}\right) =$$

$$\frac{1}{32\text{kg.kmol}^{-1} - 28\text{kg.kmol}^{-1}}\left(6{,}023 \cdot 10^{23}\,\text{kmol}^{-1} \cdot 0{,}4\text{kg.m}^{-3} - \frac{28\text{kg.kmol}^{-1} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{3}\,\text{Pa}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{J.K}^{-1} \cdot 290\text{K}}\right)$$

$$= 5 \cdot 10^{25}\,\text{m}^{-3}$$

8.2. Nádoba , v ktorej sa nachádza určité množstvo plynu, sa pohybuje rýchlosťou 20 m.s^{-1}. Ako sa zmení stredná kvadratická rýchlosť molekúl pri zastavení nádoby v prípade jednoatómového a dvojatómového plynu. Tepelnú kapacitu, vodivosť ako aj hmotnosť stien nádoby môžeme zanedbať.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
u = 20 m.s^{-1}	v_k = ?
$i_1 = 3$	
$i_2 = 5$	

Pri pohybe nádoby všetky molekuly plynu vykonávajú chaotický (tepelný) pohyb ako aj priamočiary pohyb spojený s pohybom nádoby rýchlosťou u. Pri zastavení nádoby molekuly si budú určitú dobu ešte zachovávať svoju jednosmernú rýchlosť, ale v dôsledku zrážok medzi sebou a stenami nádoby príde plyn do rovnovážneho stavu, v ktorom už jeho molekuly budú vykonávať len tepelný pohyb. V tomto stave vznikne nové Maxwellovo rozdelenie molekúl podľa rýchlosti s novou hodnotou sttednej kvadratickej rýchlosti v_{k2}. V dôsledku toho sa ustáli nová hodnota teplota plynu T_2. Pôvodná teplota T_1 bola úmerná pôvodnej hodnote strednej kvadratickej rýchlosti v_{k1}. Znamená to, že je potrebné zistiť, o koľko je v_{k2} väčšia ako v_{k1}, t.j. potrebujeme zistiť prírastok strednej kinetickej energie ΔE_k chaotického pohybu jednej molekuly v dôsledku zastavenia nádoby. Pri pohybe nádoby budú výsledná rýchlosť $\boldsymbol{c}_i$ a kinetická energia postupného pohybu i-tej molekuly rovné

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{u}_i\,; \quad \frac{m_0 c_i^2}{2} = \frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + m_0(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{u}), \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{v}_i$ je rýchlosť tepelného pohybu molekuly.

Aby sme vypočítali strednú kinetickú energiu postupného pohybu molekuly je treba urobiť súčet kinetických energií molekúl a podeliť ho celkovým počtom N molekúl.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_0 c_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + \frac{1}{N} m_0\left(\boldsymbol{u} \cdot \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\right). \tag{2}$$

V dôsledku toho, že tepelný pohyb je chaotický, t.j. platí, že veštky smery sú rovnako pravdepodobné, bude $\sum \boldsymbol{v}_i = 0$, a posledný člen v súčte rovnice (2) bude rovný nule.

Prvý člen môžeme vyjadriť nasledovne $\frac{m_0 v_{k1}^2}{2}$. Stredná kinetická energia postupného pohybu jednej molekuly počas pohybu nádoby bude

$$\langle E_{kp}\rangle_1 = \frac{m_0 v_{k1}^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2}.$$

Je zrejmé, že aj strednú hodnotu celkovej kinetickej energie molekuly počas pohybu nádoby môžeme vyjadriť analogickým súčtom

$$\langle E_0\rangle' = \langle E_0\rangle_1 + \frac{m_0 u^2}{2}\,. \tag{3}$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (3) je stredná hodnota celkovej energie chaotického (tepelného) pohybu molekuly, ktorá je rovná $ikT_1/2$.

Po zastavení bude platiť

$$\langle E_0\rangle'' = \langle E_0\rangle_2 = \frac{i}{2}kT_2\,. \tag{4}$$

Keď vezmeme do úvahy doplňujúce podmienky, ktoré vyjadrujú že nádoba sa nezúčastňuje na energetickej bilancii, potom $\langle E_0\rangle' = \langle E_0\rangle''$. Znamená to, že pri zastavení nádoby kinetická energia molekúl spojená s pohybom nádoby sa premieňa na kinetickú energiu tepelného pohybu molekúl. Porovnaním rovníc (3) a (4) dostaneme

$$\Delta\langle E_0\rangle = \langle E_0\rangle_2 - \langle E_0\rangle_1 = \frac{m_0 u^2}{2}\,. \tag{5}$$

Rovnica (5) umožňuje zistiť hľadaný prírastok strednej kvadratickej rýchlosti molekúl.

Riešenie:

Z výrazu pre strednú energiu postupného pohybu molekuly $\frac{m_0\langle v^2\rangle}{2} = \frac{3}{2}kT$ vyplýva, že $\langle v_2\rangle = \frac{3kT}{m_0}$. Celková kinetická energia jednej molekuly je $\langle E_0\rangle = ikT/2$. Porovnaním posledných dvoch rovníc dostaneme $\langle v^2\rangle = 6\langle E_0\rangle / im_0$. Potom zmena štvorca strednej kvadratickej rýchlosti bude

$$\Delta\langle v^2\rangle = v_{k2}^2 - v_{k1}^2 = \Delta\langle E_0\rangle \frac{6}{im_0}\,.$$

Dosadením za $\Delta\langle E_0\rangle$ z (5) a úpravou dostaneme $\Delta\langle v^2\rangle = 3u^2/i$. Pre plyn s jednoatómovými molekulami je $i = 3$ a

$$\Delta\langle v^2\rangle = u^2 = \left(20\,\mathrm{m.s^{-1}}\right)^2 = 400\,\mathrm{m^2.s^{-2}}\,,$$

čo zodpovedá zmene strednej kvadratickej rýchlosti o 20 m.s^{-1}.
Pre plyn s dvojatómovými molekulami je $i = 5$.

$$\Delta\langle v^2\rangle = 0{,}6\,u^2 = 0{,}6\left(20\,\mathrm{m.s^{-1}}\right)^2 = 240\,\mathrm{m^2.s^{-2}}\,,$$

čo zodpovedá zmene strednej kvadratickej rýchlosti o 15,5 m.s^{-1}.

8.3. Odvoďte vzťah pre **z**ávislosť atmosferického tlaku od výšky nad zemským povrchom, ak platí dp = -ρgdh, kde dp je zmena tlaku pri zmene výšky o dh a ak teplota vzduchu klesá s výškou podľa vzťahu $T = T_0 - \alpha h$, kde T_0 je teplota vo výške h_0 a tlak v tejto výške je p_0. Zmenu tiažového zrýchlenia neuvažujte.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
p_0	$p\ (T,h\ )$
T_0	
h_0	
$\mathrm{d}p = -\ \rho g \mathrm{d}h$	
$T = T_0 - \alpha h$	

Je zrejmé, že závislosť tlaku od výšky dostaneme integrovaním vzťahu

$$\mathrm{d}p = -\ \rho g \mathrm{d}h. \qquad (1)$$

Pomocou stavovej rovnice si vyjadríme ρ ako funkciu tlaku a teploty.

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{M}RT$$

a odtiaľ

$$\rho = \frac{M\ p}{RT} = \frac{M\ p}{R\left(T_0 - \alpha h\right)}\ . \qquad (2)$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice (1) a úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{-Mg}{R}\frac{\mathrm{d}h}{T_0 - \alpha h}\ . \qquad (3)$$

Riešenie:

Aby sme dostali vzťah pre $p(h)$ musíme diferenciálnu rovnicu (3) integrovať

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{R}\int_{h_0}^{h}\frac{\mathrm{d}h}{T_0 - \alpha h}\ .$$

Je vhodné použiť substitúciu $x = T_0 - \alpha h$. Derivovaním dostaneme $\mathrm{d}x = -\ \alpha \mathrm{d}h$ a hranice integrovania teraz budú od $x_0 = T_0 - \alpha h_0$ po $x = T_0 - \alpha h$.

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = +\frac{Mg}{\alpha R}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}\ .$$

Integrovaním dostaneme

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{\alpha R}\ln\frac{x}{x_0} = \frac{Mg}{\alpha R}\ln\frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \alpha h_0}\ .$$

Pretože hodnota $T_0 - \alpha h$ bude menšia ako hodnota $T_0 - \alpha h_0$, hodnota $\ln\frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \alpha h_0}$ bude záporná, a preto je vhodné vziať logaritmus na pravej strane so záporným znamienkom a s prevrátenou hodnotou pod logaritmom

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{\alpha R}\ln\frac{T_0 - \alpha h_0}{T_0 - \alpha h}\ .$$

Odstránime logaritmy na oboch stranách a dostaneme

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - \alpha h_0}{T_0 - \alpha h}\right)^{-\frac{Mg}{\alpha R}}$$

a odtiaľ

$$p = p_0\left(\frac{T_0 - \alpha h_0}{T_0 - \alpha h}\right)^{-\frac{Mg}{\alpha R}}\ .$$

8.4. Kyslík bol ohriaty z teploty T_1 =300 K na teplotu T_2 = 600 K. Vypočítajte, ako sa zmení relatívny počet molekúl s rýchlosťami $v_p(T_1) \pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$, $v_k(T_1) \pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$ a $\bar{v}(T_1) \pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Ako sa zmenia samotné rýchlosti v_p, v_k a $\bar{v}$?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
T_1 = 300 K	$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, v_p(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_p(T_1)} = ?$
T_2 = 600 K	$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, v_k(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_k(T_1)} = ?$
$v_p(T_1) \pm 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, \bar{v}(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, \bar{v}(T_1)} = ?$
$v_k(T_1) \pm 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	$\frac{v_p(T_2)}{v_p(T_1)} = ?$
$\bar{v}(T_1) \pm 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	$\frac{v_k(T_2)}{v_k(T_1)} = ?$
	$\frac{\bar{v}(T_2)}{\bar{v}(T_1)} = ?$

Nezávisle od charakteru deja, ktorým bola uskutočnená zmena , môžeme predpokladať, že počiatočný a konečný stav sú tepelne rovnovážne stavy, preto v každom s týchto stavov je rozdelenie molekúl podľa rýchlosti Maxwellovo rozdelenie. Relatívny počet molekúl dN/N, rýchlosť ktorých leží v intervale od $v - \mathrm{d}v/2$ do $v + \mathrm{d}v/2$ bude

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(v,T)\,\mathrm{d}v\ .$$

Maxwellovo rozdelenie má tvar

$$f(v,T) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v^2}{v_p^3}e^{-\frac{v^2}{v_p^2}}\ . \tag{1}$$

Najpravdepodobnejšiu rýchlosť v_p môžeme vypočítať zo vzťahu

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\ . \tag{2}$$

Stredná kvadratická rýchlosť je daná vyťahom

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_p\ . \tag{3}$$

Stredná aritmetická rýchlosť je daná vzťahom

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}v_p\ . \tag{4}$$

Znamená to, že v obecnom prípade môžeme vypočítať relatívny počet molekúl podľa vzorca

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v,T)\,\mathrm{d}T\ . \tag{5}$$

V prípade, ak rozdiel $v_2 - v_1$ je vzhľadom na zmenu Maxwellovho rozdelenia malý, relatívny počet molekúl môžeme počítať

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f\left(v, T\right)\Delta v \ , \tag{6}$$

kde za v sa berie stredná hodnota rýchlosti v intervale Δv.

Riešenie:

Vypočítame si najprv relatívny počet molekúl pre teplotu 300 K. Pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť pri teplote 300 K dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_p(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v_p^2}{v_p^3} e^{-\frac{v_p^2}{v_p^2}} \Delta v$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_p(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}} \frac{1}{e} \Delta v \ . \tag{7}$$

Pri výpočte pre stredne kvadratickú rýchlosť vezmeme do úvahy vzťah (3) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_k(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}} e^{-3/2}\,\Delta v$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{v_k(T_1)} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{1}{e^{3/2}}\Delta v \ . \tag{8}$$

Pri výpočte pre stredne aritmetickú rýchlosť vezmeme do úvahy vzťah (4) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{\overline{v}(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}} e^{-4/\pi}\,\Delta v$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{\overline{v}(T_1)} = \frac{16}{\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}}\frac{1}{e^{4/\pi}}\Delta v \ . \tag{9}$$

Vypočítame teraz relatívny počet molekúl pri teplote 600 K, pre ten istý interval teplôt. Aby sme to mohli urobiť, musíme najprv vypočítať rýchlosť v_p pre teplotu T_2. Táto je rovná

$$v_p\left(T_2\right) = \sqrt{\frac{2RT_2}{M}} \ . \tag{10}$$

Pomocou vzťahov (3) a (4) vypočítame v_k a $\overline{v}$. Dosadením zodpovedajúcich vzťahov do rovnice (1) dostaneme nasledovné vzťahy:

Pre rýchlosť $v_p\left(T_1\right)$ pri teplote 600 K

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_p(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{T_1}{T_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}} e^{-T_1/T_2}\,\Delta v \ ; \tag{11}$$

Pre rýchlosť $v_k\left(T_1\right)$ pri teplote 600 K

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_k(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \frac{T_1}{T_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}} e^{-\frac{3}{2}\frac{T_1}{T_2}} \Delta v \; ; \tag{12}$$

a pre rýchlosť $\bar{v}(T_1)$ pri teplote 600 K

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, \bar{v}(T_1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{\pi} \frac{T_1}{T_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}} e^{-\frac{4}{\pi}\frac{T_1}{T_2}} \Delta v \; . \tag{13}$$

Pomer relatívnych počtov molekúl pri zadaných rýchlostiach dostaneme vydelením zodpovedajúcich vzťahov. Pre rýchlosť $v_p(T_1)$ použijeme vzťahy (7) a (11) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, v_p(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_p(T_1)} = \frac{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}} \frac{T_2}{T_1} \frac{e^{T_1/T_2}}{e} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} e^{T_1/T_2 - 1} = 1{,}72 \; .$$

Pre rýchlosť $v_k(T_1)$ použijeme vzťahy (8) a (12) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, v_k(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, v_k(T_1)} = \frac{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}} \frac{2}{3} \frac{T_2}{T_1} \frac{\frac{3}{2} e^{-3/2}}{e^{-3T_1/2T_2}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} e^{-3/2(1 - T_1/T_2)} = 1{,}34$$

Pre rýchlosť $v_k(T_1)$ použijeme vzťahy (9) a (13) a dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_1, \bar{v}(T_1)} : \left(\frac{\mathrm{d}N}{N}\right)_{T_2, \bar{v}(T_1)} = \frac{\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}}{\sqrt{\frac{2RT_1}{M}}} \frac{T_2}{T_1} \frac{e^{-4/\pi}}{e^{-4T_1/\pi T_2}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} e^{-\frac{4}{\pi}(1 - T_1/T_2)} = 1{,}50 \; .$$

Pre zmeny rýchlostí dostaneme zo vzťahov (2), (3) a (4) nasledujúce pomery

$$\frac{v_p(T_2)}{v_p(T_1)} = \frac{v_k(T_2)}{v_k(T_1)} = \frac{\bar{v}(T_2)}{\bar{v}(T_1)} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{2} \; .$$

Neriešené príklady

8.5. Koľko molekúl obsahuje a) liter vody, b) kocka železa s hranou 1 cm?
[$3{,}35 \cdot 10^{25}$, $8{,}41 \cdot 10^{22}$]

8.6. Vypočítajte počet molekúl dusíka, ktorý sa nachádza v nádobe objemom 1 l pri teplote 27° C a tlaku $1{,}333 \cdot 10^{4}$ Pa. [$3{,}22 \cdot 10^{21}$]

8.7.* Dvojité okno má plochu 2 m^2. Vzdialenosť medzi tabuľami skla je 0,2 m. Vonkajšie sklo má teplotu –10° C, vnútorné 20° C. Tlak vzduchu v okne je atmosferický, a teplota sa mení v smere kolmom na sklá lineárne. Vypočítajte počet molekúl vzduchu, ktoré sa nachádzajú medzi tabuľami skla a ich celkovú energiu.

[$1{,}06 \cdot 10^{25}$, 0,1 MJ]

8.8. V guľovej nádobe o polomere 1 cm sa nachádza hélium pri teplote 300 K a tlaku $1{,}5 \cdot 10^5$ Pa. Samotná nádoba sa nachádza vo vákuu. Aký bude tlak v nádobe, ak v dôsledku netesnosti vo ventile unikne $3{,}035 \cdot 10^{19}$ molekúl? [$1{,}2 \cdot 10^5$ Pa]

8.9. Vypočítajte hustotu zmesi 4 g vodíka a 32 g kyslíka pri tlaku 93,3 kPa a teplote 7° C. Predpokladáme, že plyny sa chovajú ako ideálne. [0,48 $kg.m^{-3}$]

8.10. V nádobe, ktorej objem je 0,01 m^{-3}, sa nachádza zmes dusíka a vodíka pri teplote 280 K. Vypočítajte tlak zmesi plynov, ak viete, že hmotnosť dusíka je 7 g a vodíka 1 g. [$1{,}75 \cdot 10^5$ Pa]

8.11. V nádobe objemu 164 cm^3 sa nachádza plynu pri teplote 20° C a tlaku $0{,}993 \cdot 10^5$ Pa. Vypočítajte, aký objem bude mať to isté množstvo plynu, ak bude jeho teplote 0° C a tlak $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. [$\cong$ 150 cm^3]

8.12. Vypočítajte, koľko váži vzduch v miestnosti, ktorej rozmery sú. šírka 4 m, dĺžka 5 m a výška 3 m, pri tlaku 0,1 MPa a pri izbovej teplote 20° C. Hustota vzduchu pri teplote 0° C a tlaku 0,1 MPa je 1,293 $kg.m^{-3}$. [709 N]

8.13. Žiarovka objemu 150 cm^3 je naplnená argónom. Aká je jeho teplota, ak pri tlaku 0,1 MPa má argón tiaž $1{,}42 \cdot 10^{-3}$ N. [224° C]

8.14. Koľko vzduchu unikne y 220 m^3 veľkej miestnosti, keď pri rovnakom tlaku v nej stúpne teplota z 12° C na 22° C? [7 m^3]

8.15. Pretlak v oceľovej tlakovej fľaši stúpne zohriatím zo 6,2 MPa na 7,5 MPa. Aká je výsledná teplota, keď počiatočná teplota bola –14° C? [39,5° C]

8.16. Keď v nádobe uzavreté množstvo plynu zohrejeme o 150° C, zvýši sa jeho tlak o 40%. Aká je počiatočná a konečná teplota plynu? [102° C; 252° C]

8.17. V tenkej sklenej trubici na jednom konci zatavenej je uzavretý vzduch stĺpcom ortuti dĺžky 8,5 cm. Keď je trubica vo vertikálnej polohe so zataveným koncom hore, je výška vzduchového stĺpca 5 cm, a keď je trubica vo vertikálnej polohe so zataveným koncom dole, je výška vzduchového stĺpca 4 cm. Aký je atmosferický tlak?

[$1{,}01 \cdot 10^5$ Pa]

8.18.* Nádoba je predelená piestom, ktorý sa môže pohybovať vplyvom tlakových síl v zvislom smere a meniť pomer objemov oboch častí nádoby. V oboch častiach je rovnaká hmotnosť plynu. Vplyvom tiaže pôsobiacej na piest pri teplote 400 K je objem dolnej časti rovný jednej tretine z celkového objemu. Pri akej teplote bude objem dolnej časti rovný jednej štvrtine z celkového objemu? [225 K]

8.19. V pneumatike automobilu je pri teplote 280 K objem vzduchu 35 dm^3 a jeho tlak je $2 \cdot 10^5$ Pa. Ako sa zvýši objem vzduchu v pneumatike, ak sa pri jazde pneumatika zohreje na teplotu 288 K za stáleho tlaku? [o 1 dm^3]

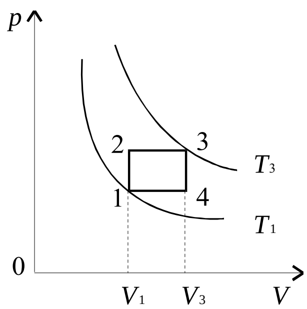
8.20. Predpísaný tlak vzduchu v pneumatikách auta je 220 kPa. Pretekárske automobily však majú pneumatiky nastavené na nižší tlak. A akým zvýšením teplota sa počíta, keď pri teplote 20° C má vzduch v pneumatikách tlak 200 kPa? Nepatrnú zmenu objemu pneumatiky zanedbajte. [29,3 K]

8.21. V balóne bolo 10 kg dusíka pri tlaku 10 MPa. Aké množstvo sme vypustili. ak konečný tlak bol2,5 MPa? Teplota dusíka sa nemení. [7,5 kg]

8.22. Aký tlak je v oceľovej fľaši s objemom 40 l, keď je v nej 4,2 kg kyslíka pri teplote 20° C? [$8 \cdot 10^6$ Pa]

8.23. Bomba obsahuje stlačený plyn pri teplote 293K a tlaku $3{,}76 \cdot 10^6$ Pa. Ako sa zmení jeho tlak, keď polovičné množstvo plynu vypustíme a jeho teplota pritom klesne na 283 K? [$1{,}82 \cdot 10^6$ Pa]

8.24. V jednom valci objemu $V_1 = 5\ m^3$ je kysličník uhoľnatý s tlakom $p_1 = 15$ MPa, v druhom valci objemu $V_2 = 8\ m^3$ je vodík s tlakom 22 MPa pri rovnakej teplote. Aký bude výsledný tlak zmesi po spojení oboch nádob? [19,3 MPa]



Obr.53

8.25.* Na obrázku 53 je znázornený kruhový dej 1-2-3-4-1. Stavy 1 a 3 zodpovedajú izotermám s teplotami 27° C a 327° C. V stave 1 je známy aj objem plynu a to 20 l. Aký musí byť objem V_3 aby stavy 2 a 4 boli na tej istej izoterme? Aká je teplota tejto izotermy? [28,3 l; 424,26 K]

8.26. Koľko zdvihov musí vykonať piest vývevy, aby odsal časť vzduchu z nádoby, objem ktorej je 200 l, a to tak, aby tlak v nádobe klesol z $1 \cdot 10^5$ Pa na $3{,}695 \cdot 10^4$ Pa? Teplota vzduchu pri odsávaní sa nemení. Objem valca vývevy je 2 l. [$\cong$ 100]

8.27. Kompresor nasáva pri každom zdvihu 5 l vzduchu pri normálnom atmosferickom tlaku $1 \cdot 10^5$ Pa a teplote 280 K a vtláča ho do zásobníka s objemom 2 m^3. Teplota vzduchu v zásobníku sa udržuje konštantná 300 K. Koľko zdvihov musí urobiť kompresor, aby sa tlak v zásobníku zväčšil o 0,3 MPa? [1120]

8.28.* Dve nádoby s objemami 200 cm^3 a 0,1 l sú spojené krátkou trubičkou, v ktorej sa nachádza izolačná pôristá priehradka. Pomocou tejto priehradky je možné dosiahnuť rovnakého tlaku v oboch nádobách pri rôznych teplotách plynu v jednotlivých nádobách. V nádobách sa nachádza kyslík a v počiatočnom stave bola jeho teplota 27° C a tlak $1 \cdot 10^5$ Pa. Potom bola menšia nádoba umiestená do nádoby s ľadom, v ktorej sme udržovali teplotu 0° C. Väčšia nádoba bola vložená do nádoby s parou o teplote 100^0 C. Vypočítajte výsledný tlak kyslíku v sústave. Tepelnú rozťažnosť nádob neuvažujte. [$1{,}11 \cdot 10^5$ Pa]

8.29. Balón naplnený na zemi vodíkom má objem 500 m^3 pri atmosferickom tlaku 101 kPa. Hmotnosť balónu a záťaže je 450 kg. Do akej výšky vystúpi, ak teplota atmosféry je konštantná a rovná 20° C? (Objem balónu sa nemení). [2260 m]

8.30. Aký je relatívny pokles tlaku pri výstupe z nadmorskej výšky 300 m na vrchol hory v nadmorskej výške 2000 m? Teplotu považujeme za konštantnú a rovnú 20° C. (Molárna hmotnosť vzduchu je približne 30 g/mol). [19%]

8.31. Perrin zistil, že vo dvoch rovnako hrubých vrstvách vzdialených od seba 100 μm, počet častíc vznášajúcich sa v kvapaline je v jednej vrstve 2 krát väčší ako v druhej. Teplota kvapaliny bola 20° C. Rozmer častíc bol $3 \cdot 10^{-4}$ cm. Hustota kvapaliny bola o 0,2 mg/cm^3 menšia ako častíc. Vypočítajte Avogadrovo číslo. [$6{,}1 \cdot 10^{26}\ kmol^{-1}$]

8.32. Vypočítajte strednú aritmetickú, strednú kvadratickú a najpravdepodobnejšiu rýchlosť molekúl kysličníka uhličitého pri teplote 0° C.
[362 $m.s^{-1}$; 393 $m.s^{-1}$; 321 $m.s^{-1}$]

8.33. Určte teplotu dusíka, pre ktorú hustota pravdepodobnosti rozdelenia molekúl podľa rýchlosti je rovnaká pre rýchlosť v_1 = 200 $m.s^{-1}$ a rýchlosť v_2 = 650 $m.s^{-1}$.
[274 K]

8.34. Teplota kysličníka dusného je 300 K. Vypočítajte, aké percentuálne množstvo molekúl bude mať rýchlosť v intervale od 815 $m.s^{-1}$ do 825 $m.s^{-1}$. [0,4%]