ČASŤ III.

MECHANICKÉ KMITY A VLNY

13 Mechanické kmity

V tomto paragrafe sa zaoberáme riešením úloh týkajúcich sa netlmených, tlmených a vynútených kmitov hmotného bodu alebo tuhého telesa. Prv než sa pristúpi k riešeniu konkrétnej úlohy je potrebné urobiť kvalitatívnu analýzu deja, t.j. urobiť analýzu síl, ktoré pôsobia na hmotný bod alebo tuhé teleso.

V ďalšom budeme skúmať len jednorozmerné kmity a preto pre ich opísanie vystačíme s jednou súradnicou, ktorá v závislosti od charakteru pohybu môže byť buď lineárna alebo uhlová. Rovnica kmitavého pohybu sa vyjadruje pomocou harmonickej funkcie. Voľba harmonickej funkcie sínusu alebo kosínusu sa obyčajne robí na základe počiatočných podmienok.

1. Rovnica netlmených harmonických kmitov má tvar

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

kde x je výchylka z rovnovážnej polohy, A je amplitúda kmitov, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ - vlastná uhlová frekvencia, T - perióda kmitov, f_0 - vlastná frekvencia a φ_0 – počiatočná fáza. Funkcia x=$x(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice pre harmonické kmity

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x \ ,$$

čo je zjednodušený zápis Newtonovej pohybovej rovnice

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad \text{pre} \quad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ,$$

pre pohyb telieska hmotnosti m pri pôsobení elastickej sily o veľkosti kx.

2. Kinetická energia kmitajúceho telesa je rovná

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

3. Potenciálna energia kmitajúceho telesa je rovná

$$E_p = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

4. Celková energia je rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie

$$E = E_p + E_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

5. Perióda kmitov matematického kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ ,$$

kde l je dĺžka kyvadla a g tiažové zrýchlenie.

6. Perióda kmitov fyzikálneho kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\ ,$$

kde m je hmotnosť kyvadla, l- vzdialenosť ťažiska hmotného telesa od osi otáčania a J moment zotrvačnosti vzhľadom k osi otáčania.

7. Uhlová frekvencia torzného kyvadla je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{\pi G r^4}{2lJ}}\ ,$$

kde G je modul pružnosti v šmyku, r- polomer závesu a l –dĺžka závesu kyvadla a J moment zotrvačnosti závažia vzhľadom k osi otáčania.

8. Rovnica tlmených kmitov oscilátora má tvar

$$x = A\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde δ je koeficient tlmenia a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ uhlová frekvencia kmitov.

9. Logaritmický dekrement tlmenia je definovaný ako prirodzený logaritmus pomeru dvoch za sebou idúcich amplitúd.

$$\Lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T$$

10. V prípade, že na harmonický oscilátor s tlmením bude pôsobiť vonkajšia harmonická sila $F_0 \sin \omega t$, potom sústava bude vykonávať v ustálenom režime vynútené kmity podľa rovnice

$$x = A \sin(\omega t - \varphi),$$

kde $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ je amplitúda kmitov a fázový posuv φ stanovíme z rovnice $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Riešené príklady

13.1. Vypočítajte periódu harmonického pohybu hmotného bodu o hmotnosti 10 g, keď sila udržiavajúca hmotný bod v tomto pohybe má pri výchylke 3 cm hodnotu 0,05 N.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 0{,}01$ kg	$T = ?$
$x_1 = 0{,}03$ m	
$F_1 = 0{,}05$ kg.m.s^{-2}	

Pretože výchylka je zadaná ako skalárna veličina, môžeme predpokladať, že harmonický pohyb prebieha po priamke. Rovnica harmonického pohybu bude mať tvar

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)\ , \qquad (1)$$

kde x je výchylka v čase t, A – amplitúda kmitov, ω- kruhová frekvencia a φ_0 počiatočná fáza. Perióda kmitov je spojená s uhlovou frekvenciou nasledovným vzťahom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \qquad (2)$$

V prípade harmonických kmitov pôsobí na hmotný bod sila

$$F = -kx . \qquad (3)$$

Rovnica (1) platí pre harmonické kmity, pre ktoré ω je dané vzťahom

$$\omega^2 = \frac{k}{m} . \qquad (4)$$

Dosadením rovníc (3) a (4) do rovnice (2) vypočítame hľadanú hodnotu periódy kmitov.

Riešenie:

Dosadením za ω do rovnice (2) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

a po dosadení za k z rovnice (3)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_1}{F_1}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}01\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}03\,\mathrm{m}}{0{,}05\,\mathrm{kg.m.s^{-2}}}} \cong 0{,}49\,\mathrm{s} .$$

13.2. Ideálna pružina je voľne zavesená za jeden koniec. Jej dĺžka je l_0. Keď na druhý koniec pružiny zavesíme teliesko hmotnosti m, bude jej dĺžka $l_0 + h$. Na toto teliesko, ktoré sa nachádza v pokoji, dopadne z výšky h druhé teliesko tej istej hmotnosti. Ráz je absolútne nepružný. Vypočítajte periódu, počiatočnú fázu a amplitúdu kmitov takejto sústavy a tiež maximálnu výšku nad počiatočnou rovnovážnou polohou, do ktorej sa zdvihnú telieska pri kmitavom pohybe. Riešte najprv všeobecne, potom pre $h = 0{,}1$m.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$h = 0{,}1$ m	$T = ?$
	$\varphi_0 = ?$
	$A = ?$
	$h_{max} = ?$

Pre harmonické kmity telieska na pružine sú dôležité dva údaje, a to tuhosť pružiny a hmotnosť telieska. Okrem toho je treba poznať rovnovážnu polohu, okolo ktorej budú prebiehať kmity. Tuhosť pružiny zistíme z predĺženia pružiny pri jej zaťažení telieskom hmotnosti m. Zo vzťahu $mg = k\,h$ dostaneme

$$k = mg / h .$$

Rovnovážnu polohu x_0, t.j. dĺžku pružiny zaťaženej obidvomi telieskami, zistíme zo vzťahu $k\left(x_0 - l_0\right) = 2mg$ a odtiaľto $x_0 = l_0 + 2h$, kde l_0 je dĺžka nezaťaženej pružiny.

Nech počiatok súradnicovej sústavy bude v bode x_0 a kladný smer osi x nech smeruje dole. Rovnica pohybu oboch spojených teliesok bude mať tvar

$$2m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{alebo} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{2h}x = 0\,. \qquad 1)$$

Rovnice takéhoto druhu popisujú harmonické kmity s periódou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Riešenie rovnice (1) budeme hľadať v tvare

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)\,. \qquad (2)$$

Amplitúda A a počiatočná fáza φ_0 sa dajú určiť z počiatočných podmienok.

Riešenie:

Za čas $t = 0$ si zvolíme okamžik, keď $x(0) = -h$. Počiatočnú rýchlosť $v(0)$ vypočítame z podmienky, že ráz teliesok bol absolútne nepružný, a teda

$$mv_1 = 2mv(0)\,. \qquad (3)$$

Ak vezmeme do úvahy, že teliesko dopadlo z výšky h, jeho rýchlosť na základe zákona zachovania mechanickej energie bude $v_1 = \sqrt{2hg}$.

Dosadením do rovnice (3) a úpravou dostaneme

$$v(0) = \sqrt{\frac{gh}{2}}\,.$$

Deriváciou rovnice (2) dostaneme rýchlosť teliesok ako funkciu času

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)\,. \qquad (4)$$

V čase $t=0$ vzťahy (2) a (4) prejdú do tvaru

$$x(0) = A\sin\varphi_0$$

$$v(0) = A\omega\cos\varphi_0\,.$$

Z týchto dvoch vzťahov dostávame pre amplitúdu kmitov

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}$$

a počiatočnú fázu

$$\varphi_0 = \arctan\frac{\omega\, x(0)}{v(0)}\,.$$

Dosadením za $x(0)$, $v(0)$ a ω po úprave dostaneme

$$A = h\sqrt{2} \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \arctan(-1) = 135^\circ\,.$$

Maximálna výška nad pôvodnou rovnovážnou polohou, (ktorá bola vo vzdialenosti h od počiatku súradníc) je

$$h_{max} = A - h = h\left(\sqrt{2} - 1\right). \qquad (4)$$

Dosadením číselných hodnôt od rovnice (2) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m.s}^{-2}}} = 0{,}897\ \text{s}$$

Dosadením číselných hodnôt za h dostaneme

$$A = 0{,}1\ \text{m}\ \sqrt{2} = 0{,}1414\ \text{m}\ ,$$

a z (4) dostaneme h_{max} = 0,0414 m.

13.3. Aký je koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu, keď podiel dvoch za sebou idúcich amplitúd hmotného bodu na tú istú stranu sa rovná 2 a perióda tlmených kmitov T = 0,5 s? Aká by bola perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T = 0{,}5$ s	$\delta = ?$
$\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = 2$	$T_0 = ?$

Budeme hľadať vzťah, v ktorom koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu δ vystupuje spolu s periódou kmitov T a pomerom dvoch po sebe idúcich amplitúd. Takým vzťahom je definícia logaritmického dekrementu útlmu

$$\Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T\ . \tag{1}$$

Perióda netlmených kmitov sa dá vyjadriť pomocou vlastnej kruhovej frekvencie vzťahom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ , \tag{2}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ je vlastná uhlová frekvencia netlmených harmonických kmitov. Podobne pre periódu tlmených kmitov platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ . \tag{3}$$

Uhlová frekvencia tlmených harmonických kmitov ω sa rovná

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ . \tag{4}$$

Riešením rovníc (2),(3),(4) dostaneme hľadanú periódu vlastných kmitov.

Riešenie:

Z rovnice (1) pre koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu δ platí:

$$\delta = \frac{\Lambda}{T}\ .$$

Zo zadania vyplýva, že $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = 2$, a preto

$$\delta = \frac{ln\ 2}{T}\ . \tag{5}$$

Po dosadení za T = 0,5 s dostaneme

$$\delta = \frac{\ln 2}{0{,}5} = 1{,}39\ \text{s}^{-1}\ .$$

Koeficient tlmenia kmitov hmotného bodu je 1,39 s^{-1}.

Po dosadení ω zo vzťahov (4) a (3) do vzorca (2) a úpravou dostaneme

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{0,5\ \mathrm{s}}\right)^2 + \left(1,39\ s^{-1}\right)^2}} .$$

$$T_0 = 0,497\ \mathrm{s} .$$

Perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok by bola 0,497 s.

13.4. Guľôčka hmotnosti 50 g je zavesená na nehmotnej pružine s tuhosťou 20 N.m^{-1}. Na guľôčku pôsobí vonkajšia harmonická sila v zvislom smere, ktorej uhlová frekvencia je 18 s^{-1}. V dôsledku toho gulička koná vynútené kmity s amplitúdou 1,3 cm. Fázový posun výchylky guličky z rovnovážnej polohy voči vonkajšej sile je π/4. Vypočítajte prácu vonkajšej sily za dobu 1 periódy kmitov! Koľkokrát je táto práca menšia než maximálna práca, ktorú môže vykonať vonkajšia sila za 1 periódu?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 0,05 kg	A = ?
k = 20 kg.s^{-2}	A_{Max} = ?
ω = 18 s^{-1}	
X_0 = 0,013 m	
$\varphi = \pi/4$	

Guľôčku, ktorá vykonáva vynútené kmity, môžeme považovať za hmotný bod. Amplitúdu kmitov označíme ako X_0. Elementárna práca vonkajšej sily F je rovná

$$\mathrm{d}A = Fv\ \mathrm{d}t , \qquad (1)$$

kde v je rýchlosť guličky. Vonkajšia sila sa mení s časom podľa vzťahu

$$F = F_0 \sin \omega t , \qquad (2)$$

kde F_0 je amplitúda vonkajšej sily a ω jej uhlová frekvencia. Výchylka kmitajúcej guľôčky z rovnovážnej polohy a jej rýchlosť sa menia podľa vzťahov

$$x = X_0 \sin(\omega t - \varphi), \qquad (3)$$

$$v = \dot{x} = \omega X_0 \cos(\omega t - \varphi) . \qquad (4)$$

Amplitúda a fázový posun vynútených kmitov sú rovné

$$X_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - 4\delta^2\omega^2}} , \qquad (5)$$

$$tg\ \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} , \qquad (6)$$

kde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ je vlastná uhlová frekvencia oscilátora. Rovnice (5) a (6) tvoria sústavu rovníc pre neznáme δ a F_0. Znamená to, že môžu byť stanovené všetky parametre, ktoré charakterizujú vonkajšiu silu a rýchlosť kmitajúceho telesa v závislosti na čase. Dosadením rovníc (2) a (4) do vzťahu (1) dostaneme

$$\mathrm{d}A = Fv\ \mathrm{d}t = F_0 X_0 \omega\ \sin\omega t\ \cos(\omega t - \varphi)\mathrm{d}t . \qquad (7)$$

Prácu, ktorú vykonáva sila za jednu periódu, môžeme zistiť integrovaním rovnice (7) podľa času. Ako je vidieť z rovnice (7), elementárna práca mení znamienko počas jednej periódy. Práca vynucujúcej vonkajšej sily bude maximálna vtedy, ak dA bude v ľubovoľný časový úsek dt kladná, t.j., keď vynucujúca sila a rýchlosť kmitajúceho hmotného bodu budú vo fáze. Znamená to, že v ľubovoľnom čase bude platiť

$$\cos(\omega t - \varphi) = \sin \omega t . \qquad (8)$$

Pomocou rovníc (8) a (6) môžeme nájsť hodnoty φ a ω, pri ktorých bude práca vonkajšej síl maximálna.

Riešenie:

Prácu vonkajšej sily za jednu periódu dostaneme integrovaním rovnice (7). Najprv ale podľa trigonometrického pravidla pre cosínus rozdielu dvoch uhlov vypočítame $\cos(\omega t - \varphi)$ a dosadíme do rovnice (7)

$$A = F_0 X_0 \omega \left(\cos\varphi \int_0^T \sin\omega t \cdot \cos\omega t \, \mathrm{d}t + \sin\varphi \int_0^T \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t \right).$$

Hodnota integrálov je

$$\int_0^T \sin\omega t \cdot \cos\omega t \, \mathrm{dt} = 0 \,, \quad \int_0^T \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \,.$$

Potom hľadaná práca

$$A = F_0 X_0 \pi \sin\varphi \,. \tag{9}$$

Z rovnice (6) pre $\varphi = \pi / 4$ vyplýva

$$2\delta\,\omega = \omega_0^2 - \omega^2 \,. \tag{10}$$

Dosadíme vzťah (10) do rovnice (5)

$$X_0 = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sqrt{2}} \,,$$

a odtiaľto

$$F_0 = X_0 m \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sqrt{2} \,. \tag{11}$$

Dosadením vzťahu (11) do rovnice (9) vezmúc do úvahy, že $\varphi = \pi / 4$ dostaneme

$$A = X_0^2 m \; \pi\left(\omega_0^2 - \omega^2\right),$$

$$A = X_0^2 m \; \pi\left(k / m - \omega^2\right).$$

$$A = \left(0{,}013\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{20\ \mathrm{kg.s^{-2}}}{0{,}05\ \mathrm{kg}} - 18^2\ \mathrm{s}^{-2} \right) = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} \,.$$

Prejdeme k riešeniu druhej otázky. Rovnica (8) platí pre $\varphi_1 = \pi/2$. Po dosadení tejto hodnoty do rovnice (6) dostávame $\omega_1 = \omega_0$. Pri tejto kruhovej frekvencií rýchlosť kmitajúceho hmotného bodu a vonkajšia sila sa menia s časom vo fáze, a preto práca vonkajšej sily za jednu periódu bude maximálnou. Ak vezmeme do úvahy, že F_0 je konštantná, bude pomer maximálnej práce A_{max} k práci A na základe rovnice (9) nasledovný

$$A_{max} / A = X_{0max} \sin\varphi_1 / \left(X_0 \sin\varphi\right),$$

kde X_{0max} a φ_1 sú amplitúda vynútených kmitov a ich fázový posun oproti vonkajšej sile pri

$\omega_1 = \omega_0$.

Z rovnice (5) dostaneme

$$X_{0max} = F_0 / \left(2m\ \delta\,\omega_0\right).$$

Ak vezmeme do úvahy rovnice (10) a (11) nájdeme

$$X_{0max} = X_0\,\omega\sqrt{2} / \omega_0 \,.$$

Potom

$$A_{max} / A = X_0 \omega \sqrt{2} / (X_0 \omega_0 \sin \varphi),$$

ale $\sin \varphi = \sqrt{2} / 2$, a preto

$$A_{max} / A = \frac{2\omega}{\omega_0} = \frac{2\omega}{\sqrt{k / m}} = \frac{2 \cdot 18\ \mathrm{s}^{-1}}{\sqrt{20\ \mathrm{kg.s}^{-2} / 0{,}05\ \mathrm{kg}}} = 1{,}8 .$$

13.5. Dva rovnobežné kmitavé pohyby rovnakej amplitúdy, rovnakej počiatočnej fázy a blízkych periód $T_1 = 3\ s$ a $T_2 = 3{,}1\ s$ sa skladajú do výsledného pohybu. Nájdite periódu výsledného kmitavého pohybu a periódu rázov!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$T_1 = 3$ s	$T = ?$
$T_2 = 3{,}1$ s	$T_r = ?$

Pre kmitavý pohyb platí

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

kde x_0 je amplitúda, φ je počiatočná fáza a $\omega = (m/k)^{1/2}$ je uhlová frekvencia kmitavého pohybu.

Preto môžeme pre uvedené kmitavé pohyby napísať:

$$x_1 = x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi); \quad x_2 = x_0 \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

Pre výsledný pohyb potom platí: $x = x_1 + x_2$

$$x = x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \sin(\omega_2 t + \varphi),$$

$$\mathrm{x} = 2\,\mathrm{x}_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right) .$$

Výsledný kmitavý pohyb má uhlovú frekvenciu rovnú polovičnému súčtu uhlových frekvencií jednotlivých kmitov a amplitúdu, ktorá sa periodicky mení s uhlovou frekvenciou rovnou polovičnému rozdielu pôvodných frekvencií.

Riešenie:

Pre periódu výsledného kmitavého pohybu možno písať

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{2}{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 3{,}05\mathrm{s} .$$

Perióda amplitúdy bude rovná

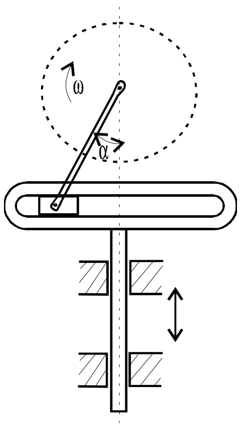
$$T' = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} .$$

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia amplitúdy, t.j. dva rázy, pre periódu rázov platí:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} = 93s$$

Neriešené príklady

13.6. Za koľko sekúnd po prechode rovnovážnou polohou sa pri sínusovom kmitaní s amplitúdou $A_0 = 2$ cm a $f = 50$ Hz dosiahnu výchylky a) 1mm; b) 5mm; c)15 mm?
[a) 160 μs; b) 805 μs ; c) 2,7 ms]
13.7. Hmotný bod vykonáva harmonické kmity pozdĺž osi x. V čase 0,1 s od začiatku pohybu je vzdialenosť hmotného bodu od rovnovážnej polohy 5 cm, rýchlosť 62 cm/s a zrýchlenie -540 cm/s^2. Vypočítajte: 1) amplitúdu, uhlovú frekvenciu a počiatočnú fázu kmitov; 2) polohu ,rýchlosť a zrýchlenie v čase t=0!
[1) 7,8 cm, 10,4 s^{-1} , -π/9; 2) -2,7 cm, 76 cm/s, 289 cm/s^2]
13.8. Teleso vykonáva harmonický pohyb s amplitúdou 12 cm a s frekvenciou 4 Hz. Vypočítajte: a)čas potrebný na to, aby sa teleso dostalo z rovnovážnej polohy do bodu, kde výchylka má hodnotu 6 cm, b) okamžitú rýchlosť telesa v tomto bode, c) okamžité zrýchlenie telesa v tomto bode! Pre zjednodušenie uvažujte riešenie v intervale 0 s až $T/2$.
[a) 0,02 s; 0,1 s; b) 2,6 m.s^{-1}; -2,6 m.s^{-1}; c) -38 m.s^{-2} ; -38 m.s^{-2}]
13.9. Hmotný bod kmitajúci s amplitúdou 6 cm dosiahol v prvej polperióde v časovom rozpätí 0,001 s dva razy za sebou výchylku 3 cm. Akou frekvenciou kmitá? [333,3 Hz]
13.10. Výchylka hmotného bodu, konajúceho harmonické kmity, dosiahne za 1/20 sekundy po prechode rovnovážnou polohou 1/4 maximálnej výchylky. Aká je frekvencia kmitania? [0,806 Hz]
13.11. Hmotný bod, ktorý harmonicky kmitá, má v čase t_1 výchylku 0,05 m. Pri dvojnásobnom zväčšení fáz bude výchylka bodu 0,08 m. Určite amplitúdu kmitavého pohybu!
[0,083 m]
13.12. Hmotný bod hmotnosti 0,01 kg kmitá harmonicky s periódou 2s a s počiatočnou fázou rovnajúcou sa nule. Celková energia hmotného bodu pri tomto pohybe je $1 \cdot 10^{-4}$ J. Vypočítajte amplitúdu kmitov a nájdite maximálnu hodnotu sily pôsobiacej na hmotný bod! [0,045 m; $4{,}44 \cdot 10^{-3}$ N]
13.13. Hmotný bod kmitá s amplitúdou 100 cm a periódou 20 s. Akú vzdialenosť od krajnej polohy prešiel za 2,5 s? [29 cm]



Obr.60

13.14. Na obrázku 60 je znázornená 18 cm dlhá kľuka, ktorej voľný koniec kĺže v kulise posúvača a ktorej počet otáčok za minútu je 210. Vyjadrite rýchlosť posúvača všeobecne a vypočítajte pre prípad, keď kľuka so zvislým smerom zviera uhol: a)15°; b) 30°; c) 45°; d) 60°; e) 90°.
[a) 102,4 cm/s; b) 197,9 cm/s; c) 279,9 cm/s; d) 342,8 cm/s; e) 395,8 cm/s]
13.15. Teleso harmonicky kmitá s amplitúdou 2 cm a jeho celková energia je $3 \cdot 10^{-7}$ J. Určite okamžitú výchylku, pri ktorej pôsobí na teleso sila $2{,}25 \cdot 10^{-5}$ N. [1,5 cm]
13.16. Na koniec pružiny v zvislej polohe zavesili teliesko, v dôsledku čoho sa táto predĺžila o 10 cm. Potom teliesko vychýlili v zvislom smere z rovnovážnej polohy a uvolnili. Vypočítajte periódu kmitov telieska. [0,628 s]
13.17.* **Z**istite pohyb hmotnej guľôčky pozdĺž priameho kanála prechádzajúceho stredom Zeme, keď vieme, že sila pôsobiaca na guľôčku vnútri zemskej gule je priamo úmerná vzdialenosti pohybujúceho sa bodu od stredu Zeme a smeruje do jej stredu. Guľôčka bola spustená do kanála bez

počiatočnej rýchlosti. Treba určiť čas, za ktorý sa guľôčka dostane zo zemského povrchu do stredu Zeme, ako aj rýchlosť, ktorou prebehne stredom Zeme.
[1248 s; 7,9 km.s^{-1}]
13.18. Horizontálna doska koná harmonický pohyb vo vodorovnom smere s periódou 5 s. Teleso, ktoré leží na doske začne kĺzať, keď amplitúda kmitov dosiahne hodnotu x_0 = 0,5 m. Aký je koeficient trenia medzi závažím a doskou? [0,08]
13.19. Tenká skúmavka o priemere 1,5 cm , ktorá je čiastočne zaplnená pieskom, pláva v zvislej polohe na hladine vody. Aby sme zistili dĺžku ponorenej časti, udelíme skúmavke impulz v zvislom smere, takže začne v zvislom smere kmitať. Aká je hľadaná dĺžka, ak perióda uvedených kmitov je 0,8 s? (Vplyv tlmenia neuvažujte).
[16 cm]
13.20. Môžu vo vode plávajúca drevená guľa a drevený kváder vykonávať harmonické kmity? Zdôvodnite svoju odpoveď! [guľa nie, vztlaková sila nie je priamo úmerná hĺbke ponorenia; kváder áno, vztlaková sila je priamo úmerná hĺbke ponorenia]
13.21. Kruhová doska, uložená v horizontálnej rovine, koná vo zvislom smere kmitavý pohyb s amplitúdou 0,75 m. Aká môže byť maximálna frekvencia kmitania dosky, aby predmet voľne uložený na doske sa od nej neoddelil? [0,575 s^{-1}]
13.22. Pružina má tuhosť 0,25 N/cm. Teleso akej hmotnosti musíme zavesiť na pružinu, aby konalo 25 kmitov za 1 minútu? [3,6 kg]
13.23. Na pružine visí miska váh (jej hmotnosť zanedbáme), na ktorú položíme teleso o hmotnosti 300 g. Pružina začne kmitať s amplitúdou 12 cm. Vypočítajte frekvenciu kmitov a periódu. [1,44 Hz; 0,694 s]
13.24. Teleso zavesené na pružine vykonáva za minútu 42 kmitov. Aké predĺženie má pružina pôsobením tohoto telesa v rovnovážnej polohe? [0,507 m]
13.25. V zvislej trubke vrhacieho mechanizmu je pružina, na ktorej je položená guľa. Po stlačení pružiny o 10 cm a uvoľnení vyletí guľa do výšky 2,3 m (meranej od polohy gule pred zaťažením pružiny). Do akej výšky vyletí guľa, ak pružinu mechanizmu s guľou stlačíme o 15 cm a uvoľníme? [5,25 m]
13.26. Aká je tuhosť pružinových (v počte 4) pier železničného vozňa, ktorého hmotnosť s nákladom je $5 \cdot 10^4$ kg , ak sa zistilo, že pri rýchlosti 12 m.s^{-1} sa vozeň začne prudko hojdať vplyvom nárazov na spojoch koľajníc? Dĺžka koľajnice 12,8 m. Vplyv trenia zanedbajte. [$4{,}34 \cdot 10^5$ N.m^{-1}]
13.27. Kyvadlo je tvorené guľkou hmotnosti 20 g zavesenej na vlákne dĺžky 1m. Určite energiu guľôčky pri jej najväčšej výchylke 5°! Aká je najväčšia rýchlosť guľôčky? [$761 \cdot 10^{-6}$ J , 0,237 m.s^{-1}]
13.28. Kým jedno z dvoch matematických kyvadiel vykoná 50 kmitov, druhé vykoná 54 kmitov. Keď druhé kyvadlo predĺžime o 6 cm, tak v rovnakom čase vykoná tak isto 50 kmitov. Aké dlhé sú kyvadlá? [l_1 = 42,1 cm, l_2 = 36,1 cm]
13.29. O koľko percent sa skráti doba kmitu T matematického kyvadla, keď jeho dĺžku skrátime o 1/4? [o 13,4%]
13.30. Na strope vysokého sálu je zavesené na kovovej trubici osvetľovacie teleso. Pri pozornom sledovaní vidíme, že teleso pomaly kmitá. Dobu kyvu odhadneme na (3,0±0,5)s. Aká je dĺžka trubky vrátane chyby odhadu? Predpokladáme, že sústava kmitá ako tuhá tyč danej dĺžky. [(13±5)m]
13.31. Reverzné kyvadlo je tvorené tyčou s dvoma osami otáčania v nerovnakej vzdialenosti od ťažiska, pričom ťažisko je medzi nimi. Okolo týchto osí tyč kmitá s rovnakou periódou. Vzdialenosť osí určená meraním je (80,5±0,5) cm. V danom mieste bola zmeraná doba kmitu (1,800±0,002) s. Akú hodnotu má tiažové zrýchlenie v danom mieste vrátane chyby merania? [(9,81±0,06) ms^{-2}]

13.32. Priemer tenkého krúžku možno určiť i stopkami. Krúžok zavesíme na vodorovnú ostrú hranu, necháme ho kývať v rovine krúžku a meriame čas. Nameraná doba 100 kyvov je (85,0±0,5) s. Aký je priemer krúžku vrátane chyby merania, ak je tiažové zrýchlenie 9,81 ms^{-2}? [(718±8) mm]

13.**33.** Rovnorodá tyč vykonáva malé kmity vo vertikálnej rovine okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza cez jej horný koniec. Vypočítajte periódu kmitov tejto tyče na Zemi a na Mesiaci ak viete, že jej dĺžka je $20/\pi^2$ metrov. Hmotnosť Mesiaca uvažujte $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg a jeho polomer 1737 km. [2,33 s; 5,7 s]

13.34. Akú dobu kmitu má 80 cm dlhá homogénna tyč, ktorá kýva ako fyzikálne kyvadlo okolo bodu A, ktorý sa nachádza 20 cm od horného konca? [1,37 s]

13.35. Kruhový kotúč, ktorý kýva vo svojej rovine okolo bodu A na obvode kotúča, má dobu kmitu 0,5 s. Aký je priemer kotúča? [8,3 cm]

13.36. Okolo svojho horného konca kývajúca homogénna tyč s hmotnosťou m má vo svojom ťažisku prídavnú hmotnosť m, ktorú považujeme za hmotný bod. Akú dĺžku má tyč, keď doba kmitu je 5 s? [10,65 m]

13.37.* Akú minimálnu dobu kmitu možno realizovať fyzikálnym kyvadlom, tvoreným obdĺžnikovou doskou s dĺžkou uhlopriečky 25 cm, ktorá kmitá v zvislej rovine okolo osi kolmej na plochu dosky? [0,76 s]

13.38. Na meranie momentu zotrvačnosti rotora použijeme torzné kyvadlo. Na dolný koniec zvislej torznej tyče s upevneným horným koncom pripevníme súoso valcový zotrvačník hmotnosti 50 kg o priemere 60 cm a nameriame periódu torzných kmitov 1,8 s. Potom namiesto zotrvačníka pripevníme súoso na dolný koniec tyče meraný rotor a určíme periódu kmitov 2,1 s. Aký je moment zotrvačnosti rotora vzhľadom na jeho os? [3,1 $kg.m^2$]

13.39. Oceľová gulička o priemere 12 mm, ktorá je zavesená na tenkom vlákne, kýva ako matematické kyvadlo s dobou kmitu 2 s. Pod kyvadlo umiestnime nádobu s kvapalinou, takže sa gulička bude pohybovať v tejto kvapaline. Aká musí byť viskozita kvapaliny, aby tlmenie kmitov kyvadla bolo kritické? (Predpokladáme, že sila odporu kvapaliny je daná Stokesovym vzťahom). [0,39 Pa s]

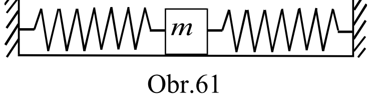
13.40. Aký je logaritmický dekrement tlmenia matematického kyvadla dĺžky 0,8 m, ak jeho počiatočná amplitúda 5^0 klesne po 5 minútach na hodnotu $0{,}5^0$? [0,0138]

13.41. Matematické kyvadlo dĺžky 0,5m stratilo v tlmiacom prostredí 99% svojej počiatočnej energie počas prvých 8 minút od začiatku pohybu. Vypočítajte logaritmický dekrement tlmenia! [$6{,}8 \cdot 10^{-3}$]

13.42. Logaritmický dekrement tlmenia je 0,02. Vypočítajte, koľkokrát sa zmenší amplitúda kmitov po 100 kmitoch hmotného bodu! [7,4 krát]

13.43. Kyvadlo začína kývať v tlmiacom prostredí. Amplitúda 10. kmitu je 8 cm a 20. kmitu 3 cm. Aká bola počiatočná amplitúda? [21,3 cm]

13.44. Závažie hmotnosti 0,5 kg je zavesené na pružine a ponorené v oleji. Na horný koniec pružiny pôsobí vonkajšia sila $F = F_0 \sin(\omega t)$, kde F_0 = 0,98 N. Tuhosť pružiny je 49 $N.m^{-1}$ a koeficient odporu oleja je 0,5 $kg.s^{-1}$. Vypočítajte amplitúdu kmitov závažia pri rezonančnom kmitočte a amplitúdy týchto kmitov, ak kmitočet vonkajšej sily je dvojnásobok a potom polovica kmitočtu vlastných kmitov.
[0,5 %; 0,2 m; 0,027 m; 0,007 m]



Obr.61

13.45.* Kváder hmotnosti 0,2 kg ležiaci na ideálne hladkej vodorovnej ploche je pripojený prostredníctvom dvoch pružín k dvom stenám (pozri obr.61). Dĺžky nestlačených pružín sú 40 cm.

V rovnovážnej polohe telesa pružiny nie sú natiahnuté ani stlačené. Tuhosti pružín sú $k_1 = 20$ N.m^{-1}, $k_2 = 8,8$ N.m^{-1}. a) Vypočítajte uhlovú frekvenciu, frekvenciu a amplitúdu kmitov kvádru, ak ho vychýlime z rovnovážnej polohy o 10 cm a pustíme! b) V okamihu prechodu kvádra cez rovnovážnu polohu necháme padnúť naň teliesko hmotnosti 38 g, ktoré sa naň prilepí. Vypočítajte novú uhlovú frekvenciu, frekvenciu kmitov a amplitúdu! c) Bude energia sústavy kváder + teliesko iná ako pôvodná energia kvádra? Vypočítajte rozdiel energií! [a) 12 s^{-1}; 1,9 s^{-1}; 10 cm; b) 11 s^{-1}; 1,75 s^{-1}; 9,17 cm; c) energia sústavy sa zmení; 2,29 J]

13.46. Nájdite amplitúdu výsledného harmonického pohybu, ktorý vznikne zložením dvoch jednosmerných kmitavých pohybov s rovnakou periódou, s amplitúdami 3 a 5 cm, keď rozdiel ich fáz je 60°C! [7 cm]