14 Vlny v pružnom prostredí. Akustika

1. Rovnice priestorovej vlny šíriacej sa rýchlosťou c môžeme vyjadriť pomocou periodických funkcií.

   a) Jednorozmerná vlna:

$$u = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = A\sin(\omega t - kx),$$

kde A je amplitúda vlny, $c = \lambda f$ - rýchlosť šírenia sa kmitov, $\lambda = cT$ - dĺžka vlny, x - vzdialenosť od zdroja, $k = 2\pi/\lambda$ - uhlové vlnové číslo a T – perióda kmitov.

   b) Rovinná vlna:

$$u = A\sin(\omega t - (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r})),$$

kde $\boldsymbol{k}_0$ - dvojrozmerný uhlový vlnový vektor, $\boldsymbol{r}$ – polohový vektor kmitajúceho bodu (zdroj leží v počiatku súradníc)

   c) Guľová vlna

$$u = \frac{A}{r}\sin(\omega t - (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}))$$

kde $\boldsymbol{k}$ je trojrozmerný uhlový vlnový vektor a $\boldsymbol{r}$ polohový vektor kmitajúceho bodu voči bodovému zdroju, ktorý leží v počiatku súradníc.

Vlny uvedené pod a), b) a c) sú špeciálnymi prípadmi riešenia diferenciálnej rovnice pre vlnenie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kde $u = u(x,y,z,t)$.

2. Rozdiel fáz kmitania v dvoch rôznych bodoch x_1 a x_2 môžeme stanoviť zo vzťahu

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}.$$

3. Sinusoidálna vlna bude mať maximum amplitúdy v bode, v ktorom bude splnená podmienka, že vzdialenosť Δ bodu od zdroja bude rovná

$$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2}, \quad \text{kde} \quad m = 0,1,2...$$

4. Sinusoidálna vlna bude mať minimum amplitúdy v bode vo vzdialenosti Δ od zdroja, v ktorom bude splnená podmienka, že vzdialenosť Δ bodu od zdroja bude rovná

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{kde} \quad m = 0,1,2,...$$

5. Rýchlosť zvukových vĺn v plynoch je daná vzorcom

$$c = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma\frac{kT}{m}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}$$

kde γ je pomer molárnych tepiel pri stálom tlaku a stálom objeme, p_0 a ρ_0 – tlak a hustota plynu bez prítomnosti akustickej vlny, k – Boltzmannova konštanta, T – absolútna teplota, m – hmotnosť molekuly plynu a M – molárna hmotnosť.

6. Šíriaca sa zvuková vlna vyvoláva zmenu tlaku Δp, ktorú môžeme stanoviť zo vzťahu

$$\Delta p = \rho_0 c v \ ,$$

kde v je hydrodynamická rýchlosť molekúl.

V plynoch a kvapalinách sa šíria len pozdĺžne vlny. Veličina $\rho_0 c$ sa volá akustický odpor.

7. Rýchlosť šírenia sa zvukových vĺn v kvapaline je daná vzťahom

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \kappa_T}} \ ,$$

kde ρ je hustota kvapaliny a κ_T izotermická stlačiteľnosť, ktorá je rovná prevrátenej hodnote modulu objemovej pružnosti.

8. Rýchlosť šírenia sa zvukových vĺn v kmitajúcej strune je daná vzťahom

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}$$

kde p je napätie v strune, ρ - hustota struny, F – napínajúca strunu sila a S – plošný obsah prierezu struny. V strune sa šíri len priečne vlnenie.

9. V tuhých látkach sa môže šíriť tak pozdĺžne ako i priečne vlnenie. Pre rýchlosti šírenia vĺn platia nasledovné vzťahy

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

kde c_l je rýchlosť šírenia sa pozdĺžnych vĺn, c_t – rýchlosť šírenia sa priečnych vĺn, E – modul pružnosti v ťahu, μ- Poissonovo číslo, ktoré je rovné pomeru relatívneho priečnemu zúženia ku relatívnemu predĺženiu a G je modul pružnosti v šmyku.

10. Intenzitu zvuku môžeme vyjadriť pomocou akustického odporu a hydrodynamickej rýchlosti vzťahom

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 c V^2,$$

kde V je amplitúda hydrodynamickej rýchlosti. Stredný akustický výkon zdroja v tvare piestu v trubici je daný vzťahom

$$W = IS = \frac{1}{2}\rho_0 c V^2 S \ ,$$

kde S je obsah plochy piestu.

11. Uhlová frekvencia vlastných kmitov v uzavretej trubici dĺžky l je rovná

$$\omega_n = \frac{n\,\pi c}{l}, \text{ kde n = 1,2,3,...}$$

Uhlová frekvencia vlastných kmitov otvorenej trubici dĺžky l je rovná

$$\omega_n = \frac{n\,\pi c}{2l}, \text{ kde n = 1,2,3 ...}$$

12. Podľa Dopplerovho javu je frekvencia zvuku, ktorú prijíma pozorovateľ, daná vzťahom

$$f' = \frac{c+v}{c-u} f \ ,$$

kde f je frekvencia zvuku, ktorý vysiela zdroj zvuku, u – rýchlosť zdroja zvuku, v – rýchlosť pozorovateľa a c – rýchlosť zvuku. Rýchlosť $v \rangle 0$, platí v prípade, keď pozorovateľ sa pohybuje smerom k zdroju zvuku, $u \rangle 0$ platí v prípade, keď zdroj zvuku sa pohybuje smerom k pozorovateľovi.

13. Hladina veličiny poľa L_F je definovaná vzťahom

$$L_\mathrm{F} = \ln(F/F_0),$$

kde F a F_0 reprezentujú dve amplitúdy rovnakej veličiny charakterizujúcej fyzikálne pole, pričom F_0 je vzťažná amplitúda. 1 Np je hladina veličiny poľa, keď $\ln(F/F_0)=1$. V praxi sa často používa decibel (dB), preto všeobecne platí

$$L_F = \ln(F/F_0)\mathrm{Np} = 2\lg(F/F_0)\mathrm{B} = 20\lg(F/F_0)\mathrm{dB}\ .$$

Hladina výkonovej veličiny je definovaná vzťahom

$$L_\mathrm{P} = \ln(P/P_0),$$

kde P a P_0 predstavujú dva výkony rovnakej fyzikálnej veličiny, pričom P_0 je vzťažný výkon. 1 Np je hladina veličiny výkonu, keď $1/2\ln(F/F_0)=1$. Hladinu výkonovej veličiny v decibeloch dostaneme následovne

$$L_p = \frac{1}{2}\ln(P/P_0)\mathrm{Np} = \lg(P/P_0)\mathrm{B} = 10\lg(P/P_0)\mathrm{dB}\ .$$

14. Pri odraze zvuku cez rozhranie dvoch prostredí platí, že uhol dopadu je rovný uhlu odrazu

$$i = i'\ .$$

Pri prechode zvukovej vlny cez hranicu dvoch prostredí platí zákon lomu, ktorý má tvar

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2},$$

kde i je uhol dopadu na rozhranie, r – uhol lomu a c_1 a c_2 rýchlosti zvukovej vlny v prvom a druhom prostredí, pri čom normála vlny odrazenej i normála vlny po lome zostáva v rovine dopadu.

15. Ak sa zvuková vlna šíri v prostredí, ktoré zvuk pohlcuje, amplitúda kmitov zvukovej vlny sa mení podľa vzťahu

$$A = A_0 e^{-\alpha x},$$

kde α je koeficient útlmu a x dráha, ktorú prešla zvuková vlna v prostredí.

Riešené príklady

14.1. Sinusoidálna rovinná vlna má amplitúdu 10 cm, rýchlosť šírenia 0,6 ms^{-1}, vlnovú dĺžku 6 cm a počiatočnú fázu 0. Po 5 sekundách jej čelo došlo do bodu P. V akej vzdialenosti od zdroja vlnenia bude čelo vlny v čase, keď v bode P okamžitá výchylka bude mať prvýkrát hodnotu 5 cm.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$A = 0{,}1$ m	$x = ?$
$c = 0{,}6$ ms^{-1}	
$\lambda = 0{,}06$ m	
$t_1 = 5$ s	
$u_1 = 0{,}05$ m	
$\varphi_0 = 0$	

Pretože ide o rovinnú vlnu, táto sa bude šíriť len v jednom smere, ktorý si označíme x. Pre výchylku rovinnej vlny platí vzťah

$$u = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right], \qquad (1)$$

kde u je okamžitá výchylka kmitajúceho bodu v čase t vo vzdialenosti x od zdroja vlnenia. Ak poznáme amplitúdu a okamžitú výchylku môžeme zistiť argument sínusu, ktorý musí byť taký, aby hodnota sínusu bola rovná pomeru okamžitej výchylky ku amplitúde kmitania. Z rovnice (1) vidíme, že ak chceme zistiť vzdialenosť, potrebujeme poznať čas a naopak, ak chceme zistiť čas, potrebujeme poznať vzdialenosť. Tieto dve veličiny sú spojené vzťahom

$$x = c \cdot t \,. \qquad (2)$$

Pomocou rovníc (1) a (2) dostaneme hľadanú vzdialenosť.

Riešenie:

V našom prípade je počiatočná fáza rovná 0. Preskúmame aká bude vzdialenosť bodu P od zdroja a aká bude fáza vlny v tomto bode. Počas 5s prejde čelo vlny dráhu $x_P = c \cdot t = 0{,}6\,\text{m.s}^{-1} \cdot 5\text{s} = 3\text{m, t.j. } 50\lambda$. Dosadením do výrazu pre fázu, vidíme, že fáza bude rovná 0.

Rovnicu (1) si upravíme pomocou vzťahu $T = \dfrac{\lambda}{c}$ nasledovne

$$\frac{u}{A} = \sin\left[2\pi\left(\frac{c \cdot t_x}{\lambda} - \frac{x_p}{\lambda}\right)\right],$$

kde t_x je čas, kedy bude mať výchylka v bode P po prvýkrát veľkosť 5 cm

Dosadením za u a A dostaneme, že $\sin\left[2\pi\left(\dfrac{c \cdot t_x}{\lambda} - \dfrac{x_P}{\lambda}\right)\right] = 1/2$ a odtiaľto

argument sínusu môže mať hodnoty ($\pi/6$; $5/6\pi$) + $2m\pi$, kde m = 1, 2, ... Keďže nás zaujíma čas t_x, kedy bude mať výchylka v bode P po prvýkrát veľkosť 5 cm, bude pre fázu kmitania platiť

$$2\pi\left(\frac{c \cdot t_x}{\lambda} - \frac{x_P}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$\frac{c \cdot t_x}{\lambda} - \frac{x_p}{\lambda} = \frac{1}{12},$$

a odtiaľto, nakoľko pre bod P je $x_P = 50\lambda$, $t_x = \dfrac{50\lambda + \dfrac{\lambda}{12}}{c}$.

Dosadením za t do rovnice (2) dostaneme

$$x = c \cdot t_x = \left(50 + \frac{1}{12}\right) \cdot \lambda = \frac{301 \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}}{6} = 3{,}005\mathrm{m}\ .$$

14.2. Aktívna dĺžka oceľovej husľovej struny o priemere 0.45 mm je 33 cm. Aká je sila napínajúca strunu, ak struna vydáva základný tón a[1] (komorné "a" o kmitočte 440 Hz)? Akou rýchlosťou sa vlnenie šíri pozdĺž struny? O koľko treba strunu celkovej dĺžky 50 cm predĺžiť, aby sa preladila na tón "ais" o kmitočte 466 Hz?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$d = 0{,}45$ mm	$F = ?$
$l = 0{,}33$ m	$c = ?$
$f_0 = 440\ \mathrm{s}^{-1}$	$\Delta l = ?$
$l_0 = 0{,}5$ m	
$f_1 = 466\ \mathrm{s}^{-1}$	
$E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$	
$\rho = 7{,}85 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg.m^{-3}}$	

V strune vznikne vlnenie so základnou frekvenciou zodpovedajúcou vlnovej dĺžke, ktorá je daná uzlami kmitajúcej struny. Pre takéto stojaté vlnenie bude platiť, že

$$l = \lambda/2\ . \qquad (1)$$

Pre rýchlosť šírenia vlny v strune platia vzťahy

$$c = \sqrt{p / \rho} \qquad (2)$$

$$c = f \cdot \lambda\ , \qquad (3)$$

kde p je napätie v strune a ρ je hustota materiálu struny.

Z rovnice (1) poznáme vlnovú dĺžku, frekvencia je zadaná a potom z rovnice (3) môžeme vypočítať rýchlosť šírenia sa zvukovej vlny v strune. Napätie v strune je definované ako podiel napínacej sily a obsahu prierezu struny, $p = F/S$. Dosadením do rovnice (2) a porovnaním pravých strán rovníc (2) a (3) dostaneme rovnicu o jednej neznámej pre výpočet napínacej sily.

Aby sme zmenili frekvenciu pri nemennej dĺžke vlny, je potrebné zmeniť rýchlosť šírenia sa zvukovej vlny v strune (pozri rovnicu (3). Toto môžeme dosiahnuť zvýšením napínacej sily. V dôsledku toho sa ale bude struna deformovať (predlžovať). Predĺženie struny je spojené s napätím v strune Hookovým zákonom

$$p = E \cdot \varepsilon = E \left(\frac{l_1 - l_0}{l_0}\right) \qquad (4)$$

Označíme si hodnoty pre predĺženú strunu indexom 1 a môžeme na základe rovnice (3) napísať

$$c_1 = \sqrt{\frac{p_1}{\rho}} = f_1 \lambda \qquad (5)$$

$$p_1 = E\,\frac{\Delta l}{l_0}\ . \qquad (6)$$

Riešením rovníc (5) a (6) môžeme vypočítať veľkosť predĺženia Δl.

Riešenie:

Dosadením zadaných veličín do rovníc (2) a (3) dostaneme

$$2lf = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} \quad , \tag{7}$$

kde sme použili vzťah $p = \dfrac{4F}{\pi d^2}$.

Úpravou rovnice (7) dostaneme pre napínaciu silu

$$F = l^2 \cdot f^2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot d^2 \quad .$$

Pre komorné „*a*“ má hodnotu

$$F = (0{,}33\,\mathrm{m})^2 \cdot (440\,\mathrm{s}^{-1})^2 \cdot 3{,}14 \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m})^2 \cdot 7{,}85 \cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}} = 105\ \mathrm{N}.$$

Dosadením do rovnice (3) dostaneme

$$c = 2 \cdot f \cdot l = 2 \cdot 440\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}33\,\mathrm{m} = 290{,}4\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Použitím rovníc (4), (5) a (6) dostaneme vzťah

$$\sqrt{\frac{E\Delta l}{l_0\rho}} = 2f_1 l \quad .$$

A po jeho úprave

$$\Delta l = 4f_1^2 l^2 l_0 \rho E^{-1}$$

$$\Delta l = 4 \cdot (466\mathrm{s}^{-1})^2 \cdot (0{,}33\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}875 \cdot 10^3 \mathrm{kg.m^{-3}} \cdot (2{,}1.10^{11}\mathrm{kg.m^{-1}.s^{2}})^{-1} = 0{,}018\mathrm{mm}$$

14.3. Vzorka betónu v tvare tyče dĺžky 20 cm má objemovú hmotnosť $1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. Ultrazvukový impulz pozdĺžnej polarizácie vyslaný pozdĺž vzorky sa po odraze vráti za čas 90 μs. Stanovte modul pružnosti vzorky v ťahu. Akú maximálnu intenzitu môže mať ultrazvuková vlna s kmitočtom 20 kHz, aby nebola prekročená hranica dovoleného namáhania v tlaku 0,2 MPa a aká tejto intenzite odpovedá amplitúda akustickej výchylky?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$l = 0{,}2$ m	$E = ?$
$\rho_0 = 1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kgm^{-3}}$	$I_{\mathrm{Max}} = ?$
$\Delta t = 90$ μs	
$f = 20 \cdot 10^3$ Hz	
$\sigma_{\max} = 0{,}2$ MPa	

Pre rýchlosť šírenia sa ultrazvukovej vlny pozdĺžnej polarizácie platí nasledovný vzťah

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad , \tag{1}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, μ –Poissonovo číslo a ρ - hustota prostredia, v ktorom sa šíri vlna. V prípade vzorky z betónu môžeme uvažovať, že $\mu \cong 0$ a namiesto ρ môžeme použiť ρ_0, hustotu nedeformovanej vzorky. To znamená, že môžeme napísať

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad , \tag{2}$$

odkiaľ $E = \rho_0 c^2$.

Rýchlosť ultrazvukovej vlny vo vzorke dostaneme vydelením dráhy $2l$ dobou Δt. Závislosť intenzity zvuku od hustoty ρ_0, od rýchlosti c a amplitúdy hydrodynamickej rýchlosti V je daná vzťahom

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 c V^2 \; . \tag{3}$$

Závislosť akustického tlaku od tých istých veličín je daná vzťahom

$$\Delta p = \rho_0 c v \; , \tag{4}$$

kde v je hydrodynamická rýchlosť.

Aby nebola prekročená hranica dovoleného namáhania σ_{Max}, nesmie túto hodnotu prekročiť maximálna hodnota akustického tlaku, ktorá vzhľadom na to, že v je harmonická funkcia, dá sa vyjadriť nasledovne

$$\sigma_{max} = \Delta p_{max} = \rho_0 c V \; . \tag{5}$$

Zo vzťahu (5) môžeme vypočítať amplitúdu hydrodynamickej rýchlosti a dosadením do rovnice (3) vypočítame maximálnu dovolenú intenzitu ultrazvukovej vlny.

Pre šíriacu sa ultrazvukovú vlnu platí vzťah

$$u_1 = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \; , \tag{6}$$

kde A je amplitúda akustickej výchylky. Hydrodynamickú rýchlosť dostaneme derivovaním rovnice (6)

$$v = \omega A \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \; . \tag{7}$$

Odtiaľto z amplitúdy hydrodynamickej rýchlosti $V = \omega A$ môžeme vypočítať amplitúdu akustickej výchylky

$$A = V/\omega \; . \tag{8}$$

Riešenie:

Do rovnice (2) dosadíme zadané hodnoty a dostávame

$$E = \rho_0\left(\frac{2l}{\Delta t}\right)^2 = \frac{1{,}8\cdot 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 4(0{,}2\,\mathrm{m})^2}{\left(90\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}\right)^2} = 35{,}5\,\mathrm{GPa} \; .$$

Vyjadrením amplitúdy hydrodynamickej rýchlosti V z rovnice (5) a dosadením do rovnice (3) dostaneme pre maximálnu dovolenú intenzitu ultrazvukovej vlny

$$I = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_{max})^2}{\rho_0 c} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_{max})^2\Delta t}{\rho_0\, 2l} \; .$$

Po dosadení príslušných hodnôt dostaneme

$$I = \frac{\left(0{,}2\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}\right)^2\cdot 90\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}{2\cdot 1{,}8\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot 2\cdot 0{,}2\,\mathrm{m}} = 2{,}5\,\mathrm{kW.m^{-2}} \; .$$

14.4. Voľným koncom napnutej gumenej hadice pohybujeme hore a dolu s frekvenciou 3 s^{-1}, pričom sa vytvára stojaté vlnenie so vzdialenosťou uzlov 1,80 m. Aká veľká je rýchlosť šírenia vĺn?

Úvaha:

Budeme predpokladať, že vlnenie sa šíri v homogénnom prostredí a jeho rýchlosť sa nemení. Potom riešenie môžeme dostať dvomi spôsobmi.

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$f = 3\ s^{-1}$	$c = ?$
$d = 1{,}8$ m	

a) Vyjdeme zo vzťahu pre veľkosť rýchlosti rovnomenného priamočiareho pohybu

$$v = d/t\ ,\qquad (1)$$

kde t je doba, za ktorú vlnenie prejde vzdialenosť medzi dvomi susednými uzlami. Táto doba je rovná polovici periódy, $t = \frac{1}{2}T$.

b) Tým, že poznáme vzdialenosť dvoch susedných uzlov , poznáme vlnovú dĺžku λ vlnenia. To nám umožňuje použiť vzťah pre rýchlosť vlnenia

$$v = \lambda \cdot f \qquad (2)$$

pričom $\lambda = 2d$.

Riešenie:

a) Perióda kmitov je rovná prevrátenej hodnote frekvencie $T = 1/f$. Dosadením do rovnice (1) dostaneme

$$v = \frac{d}{\frac{1}{2f}} = 2df = 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{s}^{-1} = 10{,}8\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

b) Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$v = 2d \cdot f = 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{s}^{-1} = 10{,}8\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

14.5. Na nástupišti stojí výpravca, okolo ktorého prechádzajú dve lokomotívy idúce v protismere. Strojvodcovia sa zdravia zvukovými signálmi o frekvencii 440 Hz. Posunovacia lokomotíva má rýchlosť 18 km/hod., rýchliková 72 km/hod. V momente, keď sa stretávajú, sú oproti výpravcovi. Vypočítajte a) Aké frekvencie zvuku počuje výpravca, keď sa lokomotívy približujú k nemu; b) aký skok vo frekvenciách bude pozorovať výpravca, keď lokomotívy prejdú okolo neho; c) akú frekvenciu zvuku počujú strojvodcovia, keď sa lokomotívy k sebe približujú; d) akú frekvenciu zvuku počujú strojvodcovia, keď sa lokomotívy od seba vzďaľujú? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujte 340 m.s^{-1}.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny	Hľadané veličiny
$f_0 = 440\ s^{-1}$	$f'_n = ?$	$f''_n = ?$
$v_n = 5\ m.s^{-1}$	$f'_r = ?$	$f''_r = ?$
$v_r = 20\ m.s^{-1}$	$\Delta f_n = ?$	$f'''_n = ?$
$c = 340\ m.s^{-1}$	$\Delta f_r = ?$	$f'''_r = ?$

Frekvencia, ktorú de prijímať pozorovateľ, bude závisieť tak od rýchlosti, s ktorou sa pohybuje zdroj, ako aj od rýchlosti pozorovateľa. Pre výslednú prijímanú frekvenciu platí vzťah

$$f = \frac{c+v}{c-u} f\ , \qquad (1)$$

kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu, v – rýchlosť zdroja zvuku a u – rýchlosť pozorovateľa. Rýchlosť $v > 0$ bude v prípade, že zdroj zvuku sa pohybuje k pozorovateľovi. V prípade, že zdroj sa vzďaľuje, budeme brať rýchlosť v so znamienkom „ - „. Podobne ak pozorovateľ sa pohybuje smerom ku zdroju budeme brať $u > 0$ a ak sa pohybuje smerom od zdroja bude $u < 0$.

Riešenie:

a)Výpravca stojí a to znamená, že $u = 0$. Lokomotívy sa približujú a teda $v > 0$. Označíme si indexami n a r frekvencie prijímané od nákladnej a rýchlikovej lokomotívy. Potom budeme mať

$$f_n' = \left(1 + \frac{v_n}{c}\right) f_0 \quad \text{a} \quad f_r' = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) f_0 .$$

Po dosadení hodnôt dostaneme

$$f_n' = \left(1 + \frac{5\,\mathrm{m.s^{-1}}}{340\,\mathrm{m.s^{-1}}}\right) \cdot 440\,\mathrm{s^{-1}} = 446{,}5\,\mathrm{Hz},$$

$$f_r' = \left(1 + \frac{20\,\mathrm{m.s^{-1}}}{340\,\mathrm{m.s^{-1}}}\right) \cdot 440\,\mathrm{s^{-1}} = 465{,}88\,\mathrm{Hz}.$$

b) Aby sme vypočítali skok vo frekvenciách musíme vypočítať frekvencie, ktoré bude prijímať výpravca, keď sa lokomotívy od neho vzďaľujú. Teraz budeme brať rýchlosť v so záporným znamienkom. Vypočítané frekvencie odpočítame od frekvencie vypočítaných v odstavci a)

$$\Delta f = \left[\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \left(1 - \frac{v}{c}\right)\right] f_0 = \frac{2v}{c} f_0 .$$

Odtiaľto
$$\Delta f_n = \frac{2v_n}{c} f_0 = \frac{10\,\mathrm{m.s^{-1}}}{340\,\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 12{,}99\,\mathrm{Hz}$$

a
$$\Delta f_r = \frac{2v_r}{c} f_0 = \frac{40\,\mathrm{m.s^{-1}}}{340\,\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 51{,}76\,\mathrm{Hz}.$$

c) V tomto prípade budeme mať nenulové obe rýchlosti, tak zdroja ako aj prijímateľa. Aj zdroj aj prijímateľ smerujú k sebe. Znamená to, že obe rýchlosti budeme brať ako kladné veličiny. Preto môžeme napísať

$$f'' = \frac{c + v}{c - u} f_0 .$$

Strojvodca nákladnej lokomotívy počuje frekvenciu

$$f_n'' = \frac{340\,\mathrm{m.s^{-1}} + 20\,\mathrm{m.s^{-1}}}{340\,\mathrm{m.s^{-1}} - 5\,\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 472{,}8\,\mathrm{Hz} .$$

Strojvodca rýchlikovej lokomotívy počuje frekvencie

$$f_r'' = \frac{340\,\mathrm{m.s^{-1}} + 5\,\mathrm{m.s^{-1}}}{340\,\mathrm{m.s^{-1}} - 20\,\mathrm{m.s^{-1}}} 440\,\mathrm{s^{-1}} = 474{,}4\,\mathrm{Hz} .$$

d) Lokomotívy sa od seba vzďaľujú a teda budeme brať rýchlosti v a u ako záporné. Potom bude platiť

$$f''' = \frac{c - v}{c + u} f_0 .$$

Strojvodca nákladnej lokomotívy bude počuť frekvenciu

$$f_n''' = \frac{c - v_r}{c + u_n} f_0 = \frac{340\text{m.s}^{-1} - 20\text{m.s}^{-1}}{340\text{m.s}^{-1} + 5\text{m.s}^{-1}} 440\,\text{s}^{-1} = 408{,}1\,\text{Hz}\ .$$

Strojvodca rýchlikovej lokomotívy bude počuť frekvenciu

$$f_r''' - \frac{c - v_n}{c + u_r} f_0 = \frac{340\text{m.s}^{-1} - 5\text{m.s}^{-1}}{340\text{m.s}^{-1} + 20\text{m.s}^{-1}} 440\text{s}^{-1} = 409{,}5\ \text{Hz}$$

14. 6. Vypočítajte rozdiel hladín intenzity dvoch zvukových vĺn, ak intenzita jednej vlny je a) dvojnásobná; b) dvadsaťnásobná, ako intenzita druhej vlny.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
a) $I_1/I_2 = 2$	a) $\Delta L_I = ?$
b) $I_1/I_2 = 20$	b) $\Delta L_I = ?$

Intenzita zvuku má fyzikálny rozmer W.m^{-2}, čo znamená, že intenzita zvuku je fyzikálna veličina spojená s výkonom. Potom hladina intenzity zvuku vyjadrená v decibeloch (dB) je definovaná nasledovne

$$L_I = 10\lg(I / I_0), \tag{1}$$

kde I – je intenzita zvuku a I_0 – referenčná intenzita zvuku rovná 10^{-12} W.m^{-2}. Rozdiel hladín intenzity zvuku potom bude

$$\Delta L_I = L_{I_1} - L_{I_2} = 10\lg(I_1 / I_0) - 10\lg(I_2 / I_0) = 10\lg(I_1 / I_2). \tag{2}$$

Riešenie:

Rozdiely hladín intenzity dvoch zvukových vĺn dostaneme, ak dosadíme príslušné zadané veličiny do rovnice (2).

a) $\qquad \Delta L_I = 10\lg(I_1 / I_2) = 10\lg 2 = 3\,\text{dB}$.

b) $\qquad \Delta L_I = 10\lg(I_1 / I_2) = 10\lg 20 = 13\,\text{dB}$.

Neriešené príklady

14.7. Aký je fázový rozdiel dvoch kmitajúcich bodov rovinnej vlny, ak ich vzájomná vzdialenosť je 2 m a vlnová dĺžka je 0,5 m? [8 π]

14.8. Aká je výchylka bodu z rovnovážnej polohy v čase $T/6$, ak bod je vzdialený od zdroja vlnenia $\lambda/12$, keď amplitúda výchylky je 5 cm? Zdroj má v čase t = 0 nulovú výchylku. [2,5 cm]

14.9. Vypočítajte vlnovú dĺžku zvukovej vlny, ak rozdiel fáz kmitania dvoch bodov vzdialených od seba 0,025 m je rovný $\pi/6$. [0,3 m]

14.10. Vypočítajte dĺžku zvukovej vlny, ktorej perióda kmitov je 10^{-5} s a rýchlosť $3\cdot 10^3$m.s^{-1} . [$3\cdot 10^{-2}$ m]

14.11. Akú frekvenciu má rovinná vlna, ktorá potrebuje 12 sekúnd na prekonanie dráhy, rovnej 7,5 vlnovým dĺžkam ? [0,625 s^{-1}]

14.12. Vypočítajte rýchlosť zvuku v dvojatomovom plyne, keď viete, že jeho hustota pri tlaku 0,1 MPa je 1,29 kg.m^{-3}. [330 m.s^{-1}]

14.13. Vypočítajte rýchlosť zvuku vo vzduchu pri teplotách a) -20°C; b) 0°C; c)20°C. [a) 318 m.s^{-1}; b) 330 m.s^{-1}; c) 343 m.s^{-1}]

14.14. Rýchlosť zvuku v plyne bola pri teplote 293 K 343 m.s^{-1}. Vypočítajte Poissonovu konštantu plynu, ak je jeho molárna hmotnosť 29 gmol^{-1}. [1,403]

14.15. V tabuľkách nájdeme pre rýchlosť zvuku vo vode hodnotu 1460 m/s pri teplote 20°C. Aký odpovedá tejto hodnote súčiniteľ objemovej stlačiteľnosti vody? [$4{,}7 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}]
14.17. Aké sú vlnové dĺžky zvuku, ktorý odpovedá hraniciam počuteľnosti (16 Hz, 20 kHz) pri teplote 30° C ? [22 m, 18 mm]
14.18. Oceľová tyč dĺžky 1,1 m je upevnená na jednom konci. Úderom kladiva vzbudíme v nej pozdĺžne vlnenie. Na akých frekvenciách sa môže táto tyč chvieť. [$1{,}18 \cdot 10^3 (2m+1) s^{-1}$; m = 0,1,2 . . .]
14.19. Vlastný kmitočet kmitania oceľovej struny je 4 Hz. Vypočítajte dĺžku struny, ak jej priemer je 0,5 mm a je napínaná silou 0,1 N. [1 m]
14.20. Ak poznáte medzu pevnosti ocele, vypočítajte najvyššiu frekvenciu, na ktorú je možné naladiť strunu dlhú1 m. [158 Hz]
14.21. Jeden koniec pružnej tyče je pripojený ku zdroju harmonických kmitov $u = A\sin\omega t$, druhý je upevnený. Stanovte charakter kmitov v ľubovoľnom bode tyče za predpokladu, že pri odraze vĺn od upevneného konca sa mení fáza o π. Vypočítajte podmienku minimálnej amplitúdy šíriacej sa vlny.
[$u = -2A\sin(\omega x/c)\cos\omega t$; $u = u_{min}$ ak $\Delta = (2m+1)(\lambda/2)$]
14.22. Dokážte, že pre sinusoidálnu vlnu, ktorá sa šíri pozdĺž napnutej struny, bude potenciálna a kinetická energia vlny rovnaká.
14.23. Mosadzná tyč dĺžky 1 m je upevnená v strede a jej koniec s piestom je vsunutý do otvoreného rezonátora – Kundtovej trubice. Pozdĺžnym rozkmitaním tyče vznikne chvenie a v rezonátore sa utvorí stojaté vlnenie s vlnovou dĺžkou 20 cm. Určte rýchlosť zvuku v mosadznej tyči, ak rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 $m.s^{-1}$. [3400 $m.s^{-1}$]
14.24. Ako dlhá je otvorená organová píšťala, ktorá je naladená na komorné a (tón frekvencie 440 Hz) ? [39 cm]
14.25. Zdroj zvuku frekvencie 5 kHz je umiestnený pri otvorenom konci Kundtovej trubice. Na druhom konci je trubica uzavretá. Predpokladajme, že zvuk sa odráža od druhého konca bez zoslabenia. Dĺžka Kundtovej trubice je 1 m, rýchlosť zvuku vo vzduchu c=340 $m.s^{-1}$. Určite polohu uzlov vzniknutého stojatého vlnenia. Vypočítajte, aká je najmenšia vzdialenosť uzla od zdroja. [$(1 - n \cdot 0{,}034)$m; 0,017 m]
14.26. Uzavretá trubica dáva základný tón zodpovedajúci kmitočtu 130,5 Hz. Trubicu z jednej strany otvorili. Aký bude dávať základný tón? Aká je jej dĺžka? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujte 340 $m.s^{-1}$. [261 Hz; 1,30 m]
14.27. Dutinový akustický rezonátor vyplnený vzduchom je naladený na kmitočet 1 kHz pri teplote 20°C. Aké je relatívne rozladenie rezonátora, ak teplota vzduchu v rezonátore poklesne na –5°C ? Predpokladáme, že rozmery rezonátora sa nemenia. [4,4 %]
14.28. Nad valcovou trubicou vysokou 1m zvučí ladička, ktorej základná frekvencia je 340 Hz. Do trubice pomaly nalievame vodu. Pri ktorých polohách hladiny vody sa bude zosilovať zvuk v trubici? [0,25 m ; 0,75 m]
14.29. Pre aké najväčšie frekvencie sa dá použiť Kundtova metóda stanovenia rýchlosti zvuku, ak vezmeme do úvahy, že najmenšia vzdialenosť medzi uzlami, ktorú môžeme ešte rozlíšiť je ≅ 4 mm? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujte 340 $m.s^{-1}$. [≅ 43 kHz]
14.30. Youngov modul pružnosti v ťahu a Poissonovo číslo ocele zisťovali pomocou merania rýchlosti ultrazvukovej vlny. Ak vyslali pozdĺžnu vlnu, vrátila sa odozva za 0,3448 μs. Ak vyslali priečnu vlnu, vrátila sa odozva za 0,6452 μs. Vypočítajte

Youngov modul pružnosti a Poissonovo číslo pre túto oceľ, ak vzorka ocele mala dĺžku 2 cm a hustota ocele bola $8 \cdot 10^3$ kg.m^{-3} . [$2 \cdot 10^{11}$ Pa, 0,3]

14.31. Vo vzdialenosti 0,5 m od bodového zdroja zvuku (reproduktora) je hladina hlasitosti zvuku 80 dB. Aký je jej pokles, ak z tejto vzdialenosti prejdeme do vzdialenosti 10 m od zdroja? [26 dB]

14.32.* Oceľovou tyčou kruhového prierezu sa šíri pozdĺžne vlnenie o frekvencii 50 Hz a amplitúde 0,1 mm. Priemer tyče je 1 cm. Vypočítajte strednú hodnotu intenzity vlnenia v ľubovoľnom priereze tyče a tok intenzity vlnenia (strednú hodnotu výkonu) prechádzajúceho cez prierez tyče. [$1{,}997 \cdot 10^4$ W.m^{-2} ; 1,57 W]

14.33. Intenzita zvuku je rovná 10^{-2} W.m^{-2}. Vypočítajte a) hladinu intenzity zvuku; b) amplitúdu tlaku zvukovej vlny. [a) 100 dB; b) 2 Pa]

14.34. Na stanici stojí lokomotíva a jej siréna vysiela tón s frekvenciou 10^3 Hz. Okolo prechádza rýchlik, ktorý sa pohybuje konštantnou rýchlosťou 20 m.s^{-1}. Akú absolútnu výšku tónu bude počuť cestujúci pri otvorenom okne rýchlika, keď sa rýchlik a) približuje k lokomotíve; b) vzďaľuje od lokomotívy? Rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 m.s^{-1}. [1060 Hz, 940 Hz]

14.35.* Zdroj zvuku, ktorého vlastný kmitočet je 1,8 kHz, sa rovnomerne pohybuje po priamke vzdialenej 250 m od nepohyblivého pozorovateľa. Rýchlosť zdroja je rovná 0,8 rýchlosti zvuku. Vypočítajte a) kmitočet prijímaný pozorovateľom v okamžiku, keď zdroj je oproti pozorovateľovi; b) vzdialenosť medzi zdrojom a pozorovateľom, keď pozorovateľ prijíma vlastnú frekvenciu zdroja. [2,95 kHz; 320 m]

14.36. Netopier letí kolmo na stenu rýchlosťou 6 m.s^{-1} a pri tom vysiela ultrazvuk o frekvencii 45 kHz. Aké frekvencie počuje netopier? Rýchlosť zvuku uvažujte 340 m.s^{-1}. [45 kHz; 46,6 kHz]

14.37. Vypočítajte relatívny index lomu zvukových vĺn na rozhraní vzduch – sklo. Youngov modul pružnosti v ťahu pre sklo uvažujte $6{,}9 \cdot 10^{10}$ Pa , hustotu skla $2{,}6 \cdot 10^3$ kg.m^{-3} a rýchlosť zvuku vo vzduchu 340 m.s^{-1}. [0,067]

14.38. Aký môže byť najväčší uhol dopadu vlnenia, ak relatívny index lomu je 0,5, aby sa lomené vlnenie ešte dostalo do druhého prostredia? [30°]

14.39. Pod akým uhlom meraným od hladiny musí dopadnúť zvuk na hladinu vody, aby neprenikol do vody v dôsledku úplného odrazu od hladiny? [< 77°]

14.40. Aká vrstva vody zoslabí intenzitu ultrazvuku frekvencie 100 kHz na jednu desatinu, keď vieme, že vrstva hrúbky 1400 m ju zoslabí na polovicu ? [4651 m]