9 Termodynamika

Pri riešení úloh z termodynamiky budeme predpokladať, že všetky deje prebiehajú kvazistacionárne (t.j. všetky priebežné stavy sú rovnovážne). Tento predpoklad nám dovoľuje použiť prvú vetu termodynamickú v integrálnom tvare. Diferenciálny tvar prvej termodynamickej vety je vhodný len v tých prípadoch, ak potrebujeme pomocou tejto vety a stavovej rovnice napísať rovnicu deja alebo tepelnú kapacitu.

Druhá veta termodynamická nám umožňuje zistiť smer procesov, ak ponecháme sústavu samú na seba.

Analýzu príkladov je vhodné začínať grafickým zobrazením dejov. Pre lepšiu predstavivosť je vhodné nazerať sa na jednotlivé deje z hľadiska molekulárno-kinetickej teórie ideálneho plynu.

1. Zákon zachovania energie sa v termodynamike volá prvá veta termodynamická. Pre uzavretú sústavu platí

$$\mathrm{d}'Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}'A ,$$

kde $\mathrm{d}'Q$ je množstvo tepla, ktoré sústava dostáva alebo odovzdáva, $\mathrm{d}U$ – zmena vnútornej energie a sústavy a $\mathrm{d}'A$ práca sústavy proti vonkajším silám.

2. Vnútorná energia jedného molu ideálneho plynu je

$$U = \frac{i}{2}RT ,$$

kde i je počet stupňov voľnosti a R je molárna plynová konštanta.

3. Elementárna práca plynu je súčin tlaku a elementárnej zmeny objemu

$$\mathrm{d}\acute{A} = p\mathrm{d}V .$$

Práca, ktorú vykoná sústava pri prechode zo stavu 1 do stavu 2, vypočítame zo vzťahu

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V .$$

4. Tepelná kapacita plynu je definovaná ako prvá derivácia tepla podľa teploty pri fixovanej zmene stavu

$$C_x = \left(\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T}\right)_x .$$

5. Molárne teplo jedného kilomolu plynu pri izochorickom procese je dané vzťahom:

$$C_{mv} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2}R .$$

6. Molárne teplo jedného kilomolu plynu pri izobarickom procese je

$$C_{mp} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{i+2}{2}R .$$

7. Súvis medzi molárnymi teplami kilomolu pri stálom tlaku a stálom objeme vyjadruje Mayerov vzťah:

$$C_{mp} = C_{mv} + R .$$

8. Rovnice adiabatického deja (Poissonove rovnice) majú nasledovný tvar

$$pV^{\gamma} = \text{konšt.};\quad TV^{\gamma-1} = \text{konšt.},\quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{konšt.},$$

kde $\gamma = \dfrac{C_{mp}}{C_{mv}}$ je Poissonova konštanta. Molárne teplá sa dajú vyjadriť pomocou hmotnostnej tepelnej kapacity nasledovnými vzťahmi

$$C_{mv} = M\,c_v,\quad C_{mp} = M\,c_p,$$

kde M je hmotnosť jedného molu.

9. Rovnica polytropického deja má nasledovný tvar:

$$pV^{n} = \text{konšt.},$$

kde $n = \dfrac{c_p - c_n}{c_v - c_n}$ a c_n je hmotnostná tepelná kapacita pri danom deji.

10. Pri fázových prechodoch prvého druhu platí Clausiusova – Clapeyronova rovnica: Zmena teploty topenia (vyparovania) súvisí so zmenou tlaku podľa vzťahu

$$\mathrm{d}T = \frac{T(v_2 - v_1)}{l}\mathrm{d}p,$$

kde v_1 a v_2 sú špecifické objemy látok pred skupenskou premenou a po nej a l je latentné teplo, t.j. teplo, ktoré sa pri fázovej premene spotrebuje jednotkovou hmotnosťou.

11. Koeficient objemovej rozťažnosti a_v je daný vzťahom

$$a_v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}.$$

12. Pomerný koeficient rozpínavosti je daný vzťahom

$$a_p = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

13. Izotermická stlačiteľnosť κ_T je definovaná vzťahom

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

14. Účinnosť kruhového deja tepelného stroja sa dá vypočítať zo vzťahu:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1},$$

kde A je práca, ktorú vykoná tepelný stroj za jeden kruhový dej, Q_1 teplo, ktoré získa od teplého zásobníka tepla počas jedného kruhového deja a Q_2 – teplo, ktoré odovzdá chladnejšiemu zásobníku tepla počas jedného kruhového deja.

15. V prípade ideálneho Carnotovho kruhového deja bude účinnosť rovná

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde T_1 je teplota teplejšieho zásobníka tepla a T_2 je teplota chladnejšieho zásobníka tepla.

16. Zmena entrópie ΔS pri prechode sústavy zo stavu 1 do stavu 2 je daná vzťahom

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}'Q}{T}\ .$$

Riešené príklady

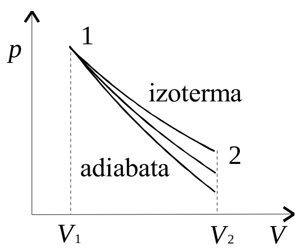
9.1. Ideálny plyn pozostávajúci z dvojatómových molekúl sa nachádza vo valci s pohyblivým piestom pod tlakom $2 \cdot 10^5$ Pa. Objem plynu v počiatočnom stave bol 6 litrov. Potom plyn zväčšil svoj objem na dvojnásobok podľa zákona pV^k = konšt., kde k = 1,2. Vypočítajte zmenu vnútornej energie plynu a prácu, ktorú plyn pri svojom rozširovaní sa vykonal. Vypočítajte molárne teplo plynu pre tento dej.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa	$\Delta U = ?$
$V_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ m^3	$A = ?$
$V_2 = 2V_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ m^{-3}	$C_\mathrm{m} = ?$
$k = 1{,}2$	

Aby sme mohli kvalitatívne posúdiť prebiehajúci dej, je vhodné porovnať grafické zobrazenie tohoto deja v súradniciach p,V s izotermou a adiabatou pri prechode z jedného a toho istého počiatočného stavu do rovnakého konečného objemu (pozri obr. 54).

V skúmanom deji je $k > 1$, preto bude jeho pV diagram prebiehať nižšie ako izoterma. Znamená to, že pri tomto deji bude teplota klesať $(\Delta T < 0)$ a zároveň sa bude zmenšovať vnútorná energia $(\Delta U < 0)$. Z druhej strany, súčiniteľ $k < \gamma = C_{mp}/C_{mV}$, t.j. pV diagram skúmaného deja bude nad adiabatou. Znamená to, že zmenšenie vnútornej energie ΔU je menšie ako pokles vnútornej energie pri adiabatickom deji $\left(|\Delta U| < |\Delta U_{ad}|\right)$. Práca A bude pri tomto deji väčšia ako pri adiabatickom deji $(A > A_{ad})$, pretože pri adiabatickom deji $|\Delta U_{ad}| = A_{ad}$ a teda $|\Delta U| < A$. Znamená to, že množstvo tepla potrebné pre uskutočnenie skúmaného deja bude $Q = A - |\,\Delta U\,| > 0$, t.j. plyn pri takomto deji dostáva teplo, ale jeho teplota klesá. Potom tepelná kapacita pri tomto deji je záporná. Vidíme, že na vykonanie práce proti vonkajším silám plyn spotrebuje okrem dodaného tepla aj časť svojej vnútornej energie.



Obr.54

Zmenu vnútornej energie môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{m}{M} C_{mV}\left(T_2 - T_1\right). \qquad (1)$$

Neznáme veličiny z rovnice (1) môžeme zistiť pomocou stavovej rovnice a rovnice deja. Práca je daná vzťahom

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\ \mathrm{d}V\ , \qquad (2)$$

kde závislosť $p(V)$ je daná rovnicou deja. Teplo prijaté sústavou je podľa prvej vety termodynamickej

$$Q = A + \Delta U \qquad (3)$$

Ak pre skúmaný dej bude Q priamo úmerné rozdielu teplôt $\Delta T = T_2 - T_1$, potom bude molárne teplo konštantné (polytropický dej). Porovnaním rovnice (3) s rovnicou (1) môžeme odvodiť výraz pre molárne teplo daného deja.

Riešenie:

Úpravou rovnice (1) dostaneme

$$\Delta U = \frac{i}{2}\left(\frac{m}{M}RT_2 - \frac{m}{M}RT_1\right) = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) \qquad (4)$$

Výsledný tlak podľa zadanej rovnice deja pV^k = konšt. bude

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^k = 2\cdot10^5\,\text{Pa}\left(\frac{1}{2}\right)^{1,2} = 8,7\cdot10^4\,\text{Pa}$$

Skúmaný plyn pozostáva z dvojatómových molekúl a teda $i = 5$. Potom zmena je vnútornej energie

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(8,7\cdot10^4\,\text{Pa}\cdot12\cdot10^{-3}\,\text{m}^3 - 2\cdot10^5\,\text{Pa}\cdot6\cdot10^{-3}\,\text{m}^3\right) = -390\,\text{J}$$

Aby sme mohli vypočítať prácu, prepíšeme si rovnicu deja do tvaru $pV^k = p_1V_1^k$

$$\text{odkiaľ} \quad p = p_1\frac{V_1^k}{V^k}.$$

Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$A = p_1V_1^k\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V^k} = p_1V_1^k\,\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_2^{k-1}}\right).$$

Keďže $p_1V_1^k = p_2V_2^k$, dostaneme $A = \dfrac{1}{k-1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$. (5)

$$A = \frac{1}{1,2-1}\left(2\cdot10^5\,\text{Pa}\cdot6\cdot10^{-3}\,\text{m}^3 - 8,7\cdot10^4\,\text{Pa}\cdot12\cdot10^{-3}\,\text{m}^3\right) = 780\,\text{J}$$

Množstvo tepla prijatého plynom vypočítame dosadením rovníc (4) a (5) do rovnice (3).

$$Q = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) - \frac{1}{k-1}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right),$$

alebo

$$Q = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) = \frac{m}{M}\left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1}\right)R\left(T_2 - T_1\right).$$

Znamená to, že množstvo prijatého tepla je priamo úmerné rozdielu teplôt a to znamená, že molárne teplo je konštantné. Porovnaním s rovnicou (4) dostaneme

$$C_{.m} = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\mathrm{R} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1,2-1}\right)8,31\,\text{kJ.kmol}^{-1} = -21\,\text{kJ.kmol}^{-1}$$

Overme si zápornosť molárneho tepla. Poissonova konšt. $\gamma = i + 2/i$ a odkiaľ $\dfrac{i}{2} = \dfrac{1}{\gamma - 1}$. Potom

$$C_{mk} = \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)R < 0, \quad ak \quad 1 < k < \gamma.$$

9.2. Určité množstvo vzduchu sme nechali rozpínať sa z počiatočného objemu $V_1 = 2l$ na päťnásobný. Počiatočný tlak bol 0,1 MPa. Vypočítajte, akú prácu vykonal vzduch, ak jeho rozšírenie sa uskutočnilo a) izobaricky, b) izotermicky, c) adiabaticky.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$V_1 = 2\cdot 10^{-3}$ m^3	$A_a = ?$
$p_1 = 1\cdot 10^5$ Pa	$A_b = ?$
$V_2 = 10\cdot 10^{-3}$ m^3	$A_c = ?$
a) izobara	
b) izoterma	
c) adiabata	
$\gamma = 1{,}4$	

Elementárna práca plynu, ktorú vykoná pri elementárnej zmene svojho objemu, je daná vzťahom

$$d'A = p\,dV \ . \qquad (1)$$

Celkovú prácu vypočítame, ak budeme integrovať rovnicu (1)

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \ . \qquad (2)$$

Je zrejmé, že aby sme mohli vypočítať integrál v rovnici (2), musíme poznať funkciu $p(V)$.

a) Pre izobarický dej je p= konšt.

b) Pre izotermický dej platí vzťah

$$pV = \text{konšt.} = p_1V_1$$

a odtiaľto

$$p = \frac{p_1V_1}{V} \ . \qquad (3)$$

c) Pre adiabatický dej platí Poissonova rovnica

$$pV^{\gamma} = konšt. = p_1V_1^{\gamma}$$

a odtiaľto

$$p = \frac{p_1V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} \ . \qquad (4)$$

Riešenie:

a) Pri izobarickom deji bude práca rovná

$$A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p\left(V_2 - V_1\right) = 10^5\,\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}\cdot(10-2)\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = 800 \text{ J} \ .$$

b) Dosadením za p z rovnice (3) do rovnice (2) dostaneme

$$A = p_1V_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = 10^5\,\text{kg m}^{-1}.\text{s}^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\cdot\ln 5 = 322 \text{ J} \ .$$

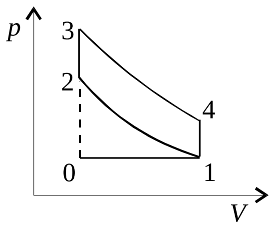
c) Dosadením za p z rovnice (4) do rovnice (2) dostaneme

$$A = p_1V_1^{\gamma}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^{\gamma}} = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{10^5\,\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{1{,}4-1}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}4}\right]$$

$$A = 237 \text{ J} \ .$$

9.3. V pracovnom cykle štvortaktných plynových motorov ako aj motorov s karburátorom (Ottov kruhový dej) sa teplo dodáva a odoberá pri stálych objemoch (pozri obr. 55). Zvláštnosťou týchto motorov je to, že pracovná zmes, ktorá je stlačovaná v motore, sa pripravuje mimo valcov motora:

0 – 1 – nasávanie pracovnej zmesi;



Obr.55

1 – 2 – adiabatické stlačenie na konci ktorého dochádza k zapáleniu pracovnej zmesi od elektrickej iskry;

2 – 3 – veľmi rýchly rast tlaku produktov horenia a teploty (prakticky pri stálom objeme);

3 – 4 – adiabatická expanzia produktov horenia, (pracovný chod stroja);

4 – 1 – otvára sa výfukový ventil a dochádza k poklesu tlaku vo valci pri stálom objeme;

1 – 0 – vytláčanie produktov horenia z valca.

Pomer objemov $V_1 / V_2 = \varepsilon$ sa volá stupeň adiabatickej kompresie. Vypočítajte účinnosť kruhového deja ak Poissonova konšt. adiabaty je rovná 1,4 a $\varepsilon = 4$.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny	
$\gamma = 1{,}4$ $\varepsilon = 4$	$\eta = ?$	Účinnosť kruhového deja je daná vzťahom

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \qquad (1)$$

Znamená to, že potrebujeme zistiť teplá Q_1 a Q_2. Pretože teplo Q_1 sa dodáva pri stálom objeme a teplo Q_2 sa odoberá tiež pri stálom objeme bude platiť:

$$Q_1 = nC_{mV}(T_3 - T_2) \quad \text{a} \quad Q_2 = nC_{mV}(T_4 - T_1) \quad . \qquad (2)$$

Dosadením do rovnice (1) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \qquad (3)$$

Ale deje 3 – 4 a 1 – 2 sú adiabaty, pre ktoré bude platiť Poissonova rovnica, pomocou ktorej môžeme vyjadriť teploty T_3 a T_2 ako funkcie teplôt T_4 a T_1. Dosadením týchto závislostí do rovnice (3) dostaneme hľadanú účinnosť.

Riešenie:

Na základe Poissonovej rovnice $TV^{\gamma-1} = \text{konšt}.$ môžeme napísať:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1},$$

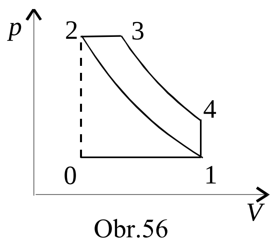
$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1}$$

a odtiaľto $T_2 = T_1\varepsilon^{\gamma-1}$ a $T_3 = T_4\varepsilon^{\gamma-1}$.

Dosadením do rovnice (3) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_4\varepsilon^{\gamma-1} - T_1\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{4^{0,4}} = 0{,}426\,.$$

9.4. Kruhový dej Dieselovho motora prebieha nasledovne (pozri obr. 56):
0 – 1 – nasávanie vzduchu do valca prakticky pri stálom tlaku, obyčajne rovnému atmosferickému tlaku;
1 – 2 – adiabatické stlačenie vzduchu, na konci tohto deja dochádza ku vstreknutiu paliva a jeho vznietenie;
2 – 3 – horenie paliva a expanzia produktov horenia pri stálom tlaku (izobarický prívod tepla);



Obr.56

3 – 4 – po dosiahnutí stavu 3 končí horenie paliva a expanzia produktov horenia sa deje adiabaticky, v stave 4 sa otvára výfukový ventil;
4 – 1 – tlak produktov horenia klesá na úroveň atmosferického (izochorické odvádzanie tepla);
1 – 0 – vytlačenie produktov horenia z valca.
Pomer $V_1/V_2 = \varepsilon$ sa volá stupeň adiabatickej kompresie a pomer $V_3/V_2 = \rho$ stupeň predbežnej expanzie.

Vypočítajte účinnosť Dieselovho kruhového deja pre $\varepsilon = 12$, $\rho = 4$ a Poissonovu konštantu $\gamma = 1{,}4$!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$\varepsilon = 12$	$\eta = ?$
$\rho = 4$	
$\gamma = 1{,}4$	

Účinnosť kruhového deja tepelného stroja je daná vzťahom

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}\,. \tag{1}$$

Teplo Q_1 sa privádza pri stálom tlaku, a preto platí

$$Q_1 = nC_{mp}\left(T_3 - T_2\right). \tag{2}$$

Teplo Q_2 sa odvádza pri stálom objeme a teda

$$Q_2 = nC_{mV}\left(T_4 - T_1\right). \tag{3}$$

Dosadením rovníc (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$\eta = 1 - \frac{nC_{mV}\left(T_4 - T_1\right)}{nC_{mp}\left(T_3 - T_2\right)} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(T_4 - T_1\right)}{\left(T_3 - T_2\right)}\,. \tag{4}$$

Pomocou rovníc, ktoré popisujú deje pri prechode z jedného stavu do druhého, môžeme vyjadriť teploty T_2 , T_3 a T_4 pomocou teploty T_1 a zadaných pomerov ε, ρ a γ.

Riešenie:

Pretože dej 2 – 3 je izobarický platí:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{T_3}\,,$$

odkiaľ

$$T_3 = T_2\frac{V_3}{V_2} = T_2\rho\,. \tag{5}$$

Dej 3 – 4 je adiabatický dej, pre ktorý platí Poissonova rovnica. Preto môžeme napísať:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1},$$

odkiaľ
$$T_4 = T_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}. \tag{6}$$

Vyjadríme si pomer $\frac{V_3}{V_4}$ pomocou pomeru $\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon$ a pomeru $\frac{V_3}{V_2} = \rho$.

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1} = \rho\frac{1}{\varepsilon}.$$

Dosadením do rovnice (6) dostaneme:

$$T_4 = T_3\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}.$$

Po dosadení T_2 z rovnice (5) dostávame:

$$T_4 = T_2\,\rho\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1} = T_2\,\frac{\rho^{\gamma}}{\varepsilon^{\gamma-1}}. \tag{7}$$

Zostáva nám nájsť vzťah medzi T_2 a T_1, ale pretože dej 1 – 2 je adiabatický, bude platiť:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} \qquad \text{odkiaľ} \quad T_2 = \varepsilon^{\gamma-1}T_1. \tag{8}$$

Dosadením vzťahu (8) do rovníc (5) a (7) dostaneme

$$T_3 = \rho\,\varepsilon^{\gamma-1}T_1, \qquad T_4 = \rho^{\gamma}T_1.$$

Po dosadení teplôt do rovnice (4) dostaneme pre účinnosť výraz

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\left(\rho^{\gamma}-1\right)T_1}{\left(\rho\,\varepsilon^{\gamma-1} - \varepsilon^{\gamma-1}\right)T_1} = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\rho^{\gamma}-1}{\varepsilon^{\gamma-1}\left(\rho-1\right)}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{1{,}4}\frac{4^{1{,}4}-1}{12^{0{,}4}\left(4-1\right)} = 0{,}47.$$

9.5. V mosadznom kalorimetri hmotnosti 200 g sa nachádza kúsok ľadu hmotnosti 100 g s teplotou –10°C. Koľko pary teplej 100°C je treba vpustiť do kalorimetra, aby voda v ňom mala teplotu 40°C?

Úvaha:

Pre kalorimeter platí zákon zachovania energie, t.j. množstvo tepla Q_1, ktoré príjme kalorimeter pri svojom ohreve a ľad pri svojom ohreve, premene na vodu a ohreve vody, bude rovné množstvu tepla, ktoré odovzdá para pri kondenzácií a svojom ochladzovaní.

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_1 = 0{,}2\text{kg}$	$m_3 = ?$
$m_2 = 0{,}1\text{ kg}$	
$t_1 = 263\text{K}$	
$t_2 = 373\text{K}$	
$t_k = 313\text{K}$	
$c_1 = 398\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	
$c_2 = 2{,}09\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	
$c_{\text{H}_2\text{O}} = 4186\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	
$l_2 = 3{,}35\cdot 10^5\,\text{J.kg}^{-1}$	
$l_3 = 2{,}26\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1}$	

$$Q_1 = Q_2 \tag{1}$$

Množstvo tepla Q_1 je rovné súčtu tepla potrebného na ohriatie kalorimetra z teploty t_1 na teplotu t_K

$$m_1 c_1 (t_k - t_1)\,,$$

tepla potrebného na ohriatie ľadu do teploty topenia (273K) $m_2 c_2 (273\text{K} - t_1)$,tepla potrebného na premenu ľadu na vodu $m_2 l_2$ a tepla potrebného na ohriatie tejto vody do teploty t_k $m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K})$, t. j.,

$$Q_1 = m_1 c_1 (t_k - t_1) + m_2 c_2 (273\text{K} - t_1) + m_2 l_2 + m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K})\,. \tag{2}$$

Množstvo tepla Q_2 je rovné súčtu tepla získaného kondenzáciou pary pri 100°C $m_3 l_3$ a tepla získaného z ochladenia toho istého množstva vody do teploty t_k $m_3 c_{H_2O}(373\text{K} - t_k)$

$$Q_2 = m_3 l_3 + m_3 c_{H_2O}(373\text{K} - t_n) \tag{3}$$

Dosadením vzťahov (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme rovnicu o jednej neznámej m_3.

Riešenie:

Po dosadení vzťahov (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$m_1 c_1 (t_k - t_1) + m_2 c_2 (273\text{K} - t_1) + m_2 l_2 + m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K}) =$$
$$= m_3 l_3 + m_3 c_{H_2O}(373\text{K} - t_k)$$

a odtiaľto

$$m_3 = \frac{m_1 c_1 (t_k - t_1) + m_2 c_2 (273\text{K} - t_1) + m_2 l_2 + m_2 c_{H_2O}(t_k - 273\text{K})}{l_3 + c_{H_2O}(373\text{K} - t_k)}$$

$$m_3 = \frac{0{,}2\,\text{kg}\cdot 398\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}(313\,\text{K} - 263\,\text{K}) + 0{,}1\text{kg}\cdot 2{,}09\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}(273\,\text{K} - 263\,\text{K})}{2{,}26\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1} + 4186\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}(373\,\text{K} - 313\,\text{K})} +$$
$$+ \frac{0{,}1\,\text{kg}\cdot 3{,}35\cdot 10^{-6}\,\text{J.kg}^{-1} + 0{,}1\,\text{kg}\cdot 4186\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}(313\,\text{K} - 273\,\text{K})}{2{,}26\cdot 10^6\,\text{J.kg}^{-1} + 4186\,\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}(373\,\text{K} - 313\,\text{K})}$$

$$m_3 = 22g$$

9.6. Voda v kvapalnom stave hmotnosti 1 kg mala teplotu 0^0C. Vypočítajte zmenu entrópie a) pri ohriatí vody na 100 ^{0}C; b) pri ohriatí vody tak, že došlo k fázovému prechodu, t.j. voda sa zmenila na paru teplú 100 ^{0}C.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 1\text{kg}$	$\Delta S_a = ?$
$T_1 = 273{,}16\text{ K}$	$\Delta S_b = ?$
$T_2 = 373{,}16\text{ K}$	

Pre elementárnu zmenu entrópie platí vzťah

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}'Q}{T}\,, \tag{1}$$

kde d´Q – je elementárne množstvo tepla dodaného pri teplote T. Celkovú zmenu entrópie zo stavu 1 do stavu 2 dostaneme integrovaním rovnice (1)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}'Q}{T} \tag{2}$$

a) Pri ohriatí látky bez fázového prechodu môžeme dodané teplo vyjadriť vzorcom

$$\mathrm{d}'Q = mc\ \mathrm{d}T\ , \tag{3}$$

kde m je hmotnosť látky, c je hmotnostná tepelná kapacita a dT elementárna zmena teploty. Dosadením vzťahu (3) do rovnice (2) dostaneme hľadanú zmenu ΔS_a.

b) V prípade, že pri ohreve dôjde k fázovému prechodu, bude potrebné dodať ešte teplo Q´ potrebné na túto skupenskú premenu, t.j.

$$Q_l = m\,l\ , \tag{4}$$

kde l je merné skupenské teplo varu vody.

Fázový prechod prebieha pri konštantnej teplote, a preto môžeme napísať

$$\Delta S_b = \Delta S_a + \frac{Q_l}{T} \tag{5}$$

Riešenie:

a) Po dosadení d$'Q$ rovnice (3) do vzťahu (2) dostaneme

$$\Delta S_a = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\ \mathrm{d}T}{T} = mc\left[\ln T\right]_{T_1}^{T_2} = mc\ \ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_a = 1\mathrm{kg}\cdot 4186\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}\cdot \ln\frac{373{,}16\ \mathrm{K}}{273{,}16\ \mathrm{K}} = 1{,}306\cdot 10^3\ \mathrm{J.K^{-1}}$$

b) Vypočítame si druhý člen na pravej strane rovnice (5)

$$\frac{Q_l}{T} = \frac{1\mathrm{kg}\cdot 2{,}256\cdot 10^6\,\mathrm{J.kg^{-1}}}{373{,}16\ \mathrm{K}} = 6{,}046\cdot 10^3\ \mathrm{J.K^{-1}}$$

Pripočítaním ΔS_a dostaneme $\Delta S_b = 7{,}352\cdot 10^3\ \mathrm{J.K^{-1}}$.

Neriešené príklady

9.7. Aké množstvo tepla vznikne v brzdách nákladného vlaku s hmotnosťou 1200 t, keď sa z rýchlosti 50 km/h celkom zastaví ? [115,7 MJ]

9.8. Kompresor nasáva atmosferický vzduch s tlakom 0,1 MPa a teplotou 27°C a stláča ho pri stálej teplote na tlak 3,5 MPa. Vypočítajte, koľko tepla sa odvádza chladiacej vode za hodinu, keď za tento čas sa stlačí 10 kg vzduchu! [$3{,}1\cdot 10^6$ J]

9.9. Ideálny plyn, hmotnosť ktorého je 16 g, má teplotu 300 K. Plyn bol izochoricky ochladený tak, že jeho tlak klesol 5 násobne. Potom plyn expandoval pri stálom tlaku tak, že jeho výsledná teplota nadobudla pôvodnú hodnotu. Vypočítajte, akú prácu vykonal plyn, ak viete, že jeho molárna hmotnosť je 32 g. [997,2 J]

9.10. Vznetový motor nasáva vzduch o teplote 20° C a tlaku 101 kPa. V akom pomere sa musí zmenšiť objem vzduchu pri kompresii, aby sa zohrial na teplotu 800° C? Dej považujte za adiabatický. [26]

9.11. Koľko tepla treba na izotermickú expanziu 2 litrov vodíka tlaku 0,08 MPa na štvornásobný objem? Aký bude výsledný tlak? [221,5 J; 0,02MPa]

9.12. Vo valci s pohyblivým piestom je m = 36 g vodíka teploty t_1 = 270° C pod tlakom p_1 = 0,4 MPa. Na jeho stlačenie na tretinu pôvodného objemu bolo treba vynaložiť prácu $A = 1{,}5 \cdot 10^5$ J a súčasne sa mu chladením odňalo $Q^{`} = 5{,}95 \cdot 10^4$ J tepla. Vypočítajte teplotu a tlak vodíka po stlačení ! [548 K ; 2,17 MPa]

9.13. Určité množstvo plynu má pri tlaku p_0 = 0,1 MPa objem V_0 = 1 l. Plyn podrobíme postupne týmto zmenám:

a) Najprv ho izobaricky zohrejeme, až sa jeho objem zdvojnásobí;
b) potom ho izochoricky zohrejeme, až sa jeho tlak zdvojnásobí;
c) napokon ho necháme adiabaticky rozopnúť, až jeho teplota poklesne na začiatočnú hodnotu.

Vypočítajte, aké celkové teplo plynu sa počas tejto zmeny dodalo, akú prácu plyn vykonal a ako sa pritom zmenila jeho vnútorná energia ! Poissonova konštanta plynu γ= 1,4. [850 J; 850 J; 0]

9.14. Vypočítajte vnútornú energiu kyslíka hmotnosti 12 g pri teplote 700° C, ak viete, že jedna tretina molekúl je disociovaná na atómy! [8090 J]

9.15.* V nádobe A sa nachádza vodík pri teplote 107^0 C a tlaku $6 \cdot 10^5$ Pa. V nádobe B sa nachádza dusík pri teplote 37^0 C a tlaku 10^6 Pa. Objem nádoby A je 0,5 m^3, objem nádoby B je 0,8 m^3. Nádoby sú spojené trubicou s ventilom, ktorý je zatvorený. Vypočítajte výslednú teplotu a tlak zmesi po otvorení ventilu za predpokladu, že molárne teplo pri stálom objeme je konštantné a dej prebehol adiabaticky!

[326 K, $8{,}47 \cdot 10^5$ Pa]

9.16. Keď sme určitému množstvu argónu teploty 60° C pri stálom objeme dodali 209,3 J tepla, zvýšila sa jeho teplota na 88° C. Koľko bolo argónu? [23,9 g]

9.17. Plyn sa nachádza vo vertikálnom valci, ktorý je zhora uzavretý piestom. Hmotnosť piesta je 20 kg a jeho plocha 10 cm^2. Piest sa môže pohybovať vo valci bez trenia. Počiatočný objem plynu bol 11,2 l a jeho teplota 0° C. Aké množstvo tepla treba dodať plynu, aby sme ho ohriali o 10 K, ak viete, že tepelná kapacita tohto plynu, ktorá bola nameraná pri upevnenom pieste, bola 20,9 $J.K^{-1}$? Vonkajší tlak vzduchu na piest zanedbajte. [289,5 J]

9.18. Predpokladáme, že energia vodopádu so spádovou výškou 15 m sa celá premenila na teplo. O koľko stupňov by sa pritom mohla zvýšiť teplota vody? [0,035 K]

9.19. Na udržanie stálej teploty v miestnosti sa za hodinu spotrebuje $4{,}2 \cdot 10^6$ J tepla. Koľko vody pretečie radiátorom ústredného kúrenia za hodinu, keď voda pri vstupe do radiátora má teplotu 80° C a pri výstupe 70° C? Hmotnostná tepelná kapacita vody je 4200 $J.kg^{-1}.K^{-1}$ [100 dm^3]

9.20. Pracovný stroj, konajúci 1200 otáčok za minútu, má brzdu chladenú vodou. Moment trecích síl je 4905 Nm. Brzde sa privádza za hodinu 8 m^3 vody teploty 10°C. Vypočítajte, akú teplotu bude mať odtekajúca voda, keď predpokladáme, že iba 75% práce síl trenia prispieva k zvýšeniu vnútornej energie chladiacej vody ? [59,7°C]

9.21. Olovená guľôčka hmotnosti 30 g a teploty 395K narazí na železný terč rýchlosťou 75 $m.s^{-1}$ a zastaví sa. Určite: a) aké teplo vzniklo pri tomto zabrzdení; b) o koľko sa zväčší teplota guľky, ak predpokladáme, že 1/3 vzniknutého tepla sa v nej absorbuje. [a) 84,4 J; b) 7K]

9.22. Koľko litrov vody s teplotou 95° C môžeme za minútu odoberať z elektrického ohrievača vody, keď jeho výkon je 1,6 kW a keď začiatočná teplota vody je 14 ^{0}C? [0,28 l]

9.23. Stroj pracujúci s výkonom P = 368 W vyvŕta za dve minúty otvor do liatinového bloku hmotnosti m = 20 kg. O koľko stupňov sa blok ohreje, keď 80% práce, vykonanej pri vŕtaní, prispieva k zväčšeniu vnútornej energie bloku? Hmotnostná tepelná kapacita liatiny c = 544,2 J.kg^{-1}.K^{-1}. [Δt = 3,25° C]

9.24. Kúsok železa bol vrhnutý v šikmom smere nahor a dopadol na rovnako veľký kúsok železa, ktorý bol vzdialený od prvého vo vodorovnom smere 37,5 m. Ráz bol absolútne nepružný, a oba kúsky sa ohriali o 0,8 K. Vypočítajte maximálnu výšku, ktorú letiaci kúsok dosiahol. [1,2 m]

9.25. Na prípravu 200 l vaňového kúpeľa sa udáva spotreba 70 l vody teplej 85° C. S akou výslednou teplotou vody sa pritom ráta, ak studená voda má teplotu 15° C? [39,5° C]

9.26. V automatickej práčke sa zohrieva 30 litrov vody,. Koľko tepla voda príjme, ak sa jej teplota zvýši z 288 K na 363 K? Ako dlho trvá zohrievanie, ak príkon výhrevného telesa práčky je 1,7 kW? [$9{,}4 \cdot 10^6$ J ; 92 min]

9.27. Koľko tepla treba na zohriatie 1,5 litra vody v hliníkovom hrnci hmotnosti 0,4 kg z 283 K na 373 K? [$599{,}4 \cdot 10^3$ J]

9.28. Do medeného kalorimetra hmotnosti 151 g vlejeme 200 g vody, a nameriame teplotu 18,6° C. Po vložení 85 g medi, ktorá bola predtým zohriata na 98,5° C, stúpne teplota na 21,4° C. Aká hodnota z toho vyplýva pre hmotnostnú tepelnú kapacitu medi? [383 J.kg^{-1}.K^{-1}]

9.29. Dva odliatky, jeden z hliníka a druhý z medi, o teplote 450° C a celkovej hmotnosti 650 g, vložíme do 2,5 kg vody o teplote 12° C, ktorá sa pritom zohreje na 27° C. Akú hmotnosť majú jednotlivé odliatky? [240g; 410g]

9.30. Kusy nástrojovej ocele ohriate na 950° C sa majú zakaliť v 80 kg oleja s teplotou 25° C, pričom výsledná teplota nesmie prekročiť 350° C. Koľko ocele sa môže najviac ponoriť, keď rátame s 10 % tepelných strát? [174 kg]

9.31. Oceľová guľa padá z výšky 20 m so začiatočnou rýchlosťou 4 m.s^{-1} a po dopade sa odrazí do výšky 4 m. O koľko stupňov sa pritom ohreje, keď predpokladáme, že len 60% práce, vykonanej pri deformovaní guľky pri náraze, prispieva k zvýšeniu vnútornej energie guľky ? [0,23° C]

9.32. V kalorimetri bolo 1500 g vody teploty 6° C, do ktorej sme pridali 120 g ľadu neznámej teploty. Po vyrovnaní teplôt sme z vody kalorimetra ľad vybrali a vážením zistili, že sa jeho hmotnosť zväčšila o 12 g. Aká bola pôvodná teplota ľadu? [-166° C]

9.33.* Olovená guľka preráža dosku v dôsledku čoho sa zmení jej rýchlosť zo 420 m.s^{-1} na 120 m.s^{-1}. Na ohrev guľky šlo 80% úbytku kinetickej energie guľky. Vypočítajte aká časť hmotnosti guľky sa roztavila, ak teplota guľky pred nárazom bola 27° C! [30%]

9.34. V termoske s tepelnou kapacitou 50 J/K je 500 ml vody o teplote 20° C . Do vody začneme vháňať vodnú paru teploty 100° C v množstve 5 g/min. Za aký čas prestane para v termoske kondenzovať? (Tepelné straty neuvažujeme). [15 min]

9.35. Koľko vody sa odparí varom, keď rozžeravené oceľové skrutky hmotnosti 6 kg a teploty 1200° C vhodíme do 3 kg vody teploty 20° C? [0,9 kg]

9.36. Zmena entrópie medzi adiabatami v Carnotovom kruhovom deji je 4160 J.K^{-1}. Rozdiel teplôt medzi izotermani je 100° C. Aké množstvo tepla sa premení na prácu v tomto kruhovom deji? [416 kJ]

9.37. Ideálny tepelný stroj, ktorý pracuje v režime Carnotovho kruhového deja, dostáva počas jedného kruhového deja energiu 2,52 kJ. Teplota teplého zásobníka je 400 K, teplota chladnejšieho zásobníka je 300 K. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná stroj za jeden kruhový dej. [630 J]

9.38. Aká je teoreticky najvyššia účinnosť parného stroja, ktorý pracuje s parou teplou 190 ^{0}C a ktorého kondenzátor má teplotu 40° C? [η = 32,4%]
9.39. Vypočítajte, aké by mali byť teploty zásobníka tepla a chladiča, keď je medzi nimi teplotný rozdiel 40° C, aby ideálny Carnotov stroj, ktorý by medzi nimi pracoval, mal účinnosť 12%! [60° C; 20° C]
9.40. Carnotov tepelný stroj naberá pri každom cykle zo zásobníka tepla 419 J tepla a chladiču odovzdáva 335 J. Vypočítajte, aká je teplota chladiča, keď zásobník tepla udržiavame na teplote 127° C! [t_2=47° C]
9.41. Aký najmenší musí byť výkon stroja, ktorý má odoberať vode stálej teploty 17° C teplo 41,9 kJ za sekundu a dodávať ho tepelnému radiátoru teploty 46° C? Koľko tepla sa odovzdá teplejšiemu zásobníku ? [4,18 kW; 46,1 kJ.s^{-1}]
9.42. Spaľovaním benzínu sa uvoľňuje energia 45 MJ.kg^{-1}. Aká je účinnosť motora automobilu, ak pri výkone 15 kW spotrebuje 7 l benzínu na 100 km pri rýchlosti jazdy 90 km/hod? [25%]
9.43.* Kruhový dej pozostáva z dvoch izochor a dvoch izobár. Vypočítajte množstvo tepla dodané z teplého zásobníka tepla za jeden kruhový dej, prácu, ktorú vykoná pracovný plyn za jeden kruhový dej a účinnosť kruhového deja. Vypočítajte účinnosť Carnotovho kruhového deja pri teplotách izoterm rovných maximálnej a minimálnej teplote vo vyše uvedenom kruhovom deji! V počiatočnom stave mal pracovný plyn objem 0,3 m^3 a tlak 60 kPa. Po izochorickom ohreve bol jeho tlak 120 kPa a po nasledujúcom izobarickom ohreve bol jeho objem 0,6 m^3. Pracovný plyn bol dusík a jeho hmotnosť bola 0,3 kg. [171 kJ, 18 kJ, 0,1; 0,75]
9.44. Tepelný stroj pracujúci medzi zásobníkom tepla a chladičom má polovičnú účinnosť ako ideálny Carnotov kruhový stroj pracujúci medzi týmito teplotami. Stroj pri každom kruhovom deji odoberá zo zásobníka teplo 2 kJ a odovzdáva chladičom teplo 1,6 kJ. Aká je teplota zásobníka tepla, ak chladič má teplotu 17^{0}C? [210,4^{0}C]
9.45. O koľko sa zmení entropia 20 g vody, keď ju zohrejeme z 10 ^{0}C na 75 ^{0}C?
[17,3 J.K^{-1}]
9.46. O koľko sa zmení entropia 20 g ľadu teploty 0°C, keď ho premeníme na vodnú paru teploty 100°C pri normálnom atmosferickom tlaku? [171,6 J.K^{-1}]
9.47. Vypočítajte zmenu entropie 56 g dusíku, ak v počiatočnom stave má objem 15 l a teplotu 60^O C a prejde do konečného stavu keď teplota je 450^O C a objem 75 l.
[59 J.K^{-1}]
9.48. Bezstarostný experimentátor, ktorý sa ponáhľal na víkend, neuzavrel dokonale uzáver nádoby s héliom. Plyn, ktorý sa v počiatočnom stave nachádzal pod tlakom $2 \cdot 10^7$ Pa, začal pomaly izotermický unikať z nádoby pri teplote 20° C. Vypočítajte zmenu entrópie na 1 kg plynu. [3225 kJ.K^{-1}]
9.49. Vypočítajte, ako sa zmení entrópia po zmiešaní 10 g vody teploty 100°C a 20 g vody teploty 15°C ! [0,94 J.K^{-1}]
9.50. Nájdite vzťah medzi tlakom, objemom a entrópiou ideálneho plynu !
[$pV = \text{konšt.} \cdot \exp\left(\frac{S}{mC_V}\right)$]