6 Neinerciálne vzťažné sústavy

Ako bolo uvedené v § 2, Newtonove pohybové zákony platia len v inerciálnych vzťažných sústavách. V neinerciálnych vzťažných sústavách môžeme používať zákony klasickej mechaniky za predpokladu, že okrem síl vzájomného pôsobenia medzi telesami budeme brať do úvahy zotrvačné sily, ktoré nie sú vyvolané vzájomným pôsobením telies. Musíme ale mať na zreteli, že práca inerciálnej sily je práca sily v inerciálnej vzťažnej sústave, ktorá udeľuje zrýchlenie neinerciálnej vzťažnej sústave. Zotrvačné sily závisia predovšetkým od druhu pohybu neinerciálnej sústavy. Znamená to, že ak chceme zistiť aké zotrvačné sily budú pôsobiť, musíme vedieť ako sa pohybuje neinerciálna sústava voči inerciálnej sústave, t.j. musíme vedieť kinematické parametre pohybu neinerciálnej sústavy.

Z praktického hľadiska majú význam dva druhy neinerciálnych sústav.

1. Neinerciálna sústava, ktorá sa pohybuje voči inerciálnej sústave priamočiaro so zrýchlením $\boldsymbol{a}_0$. V tejto sústave bude zotrvačná sila pôsobiaca na teleso hmotnosti m rovná

$$\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0 .$$

2. Neinerciálna sústava, ktorá sa otáča okolo nepohyblivej osi. V tejto sústave budeme rozlišovať dva prípady:

a) Teleso hmotnosti m je voči neinerciálnej sústave v pokoji. Potom naň budú pôsobiť zotrvačné sily rovné

$$\mathbf{F}_z = -m\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}\right] + m\,\omega^2\mathbf{r},$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je uhlová rýchlosť neinerciálnej sústavy v inerciálnej sústave, $\boldsymbol{r}$ – polohový vektor telesa voči osi otáčania.

b) Teleso sa pohybuje v neinerciálnej sústave rýchlosťou $\boldsymbol{v}'$. V tomto prípade budú na teleso pôsobiť tri zotrvačné sily

$$\mathbf{F}_z = m\,\omega^2\mathbf{r} - 2m\left[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'\right] - m\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}\right].$$

Prvá sa volá odstredivá, druhá Coriolisova sila.

Riešené príklady

6.1. Vo vozni je na poličke uložený kufrík. Uhol sklonu poličky vzhľadom k vodorovnej rovine je $\alpha = 5°$. Pri brzdení vozňa kufrík s poličky spadol. Vypočítajte minimálnu hodnotu spomalenia vozňa, keď faktor adhézie medzi poličkou a kufríkom je 0,3! Vozeň sa pohybuje po vodorovnej trati.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$\alpha = 5°$	a = ?
$\mu_0 = 0{,}3$	

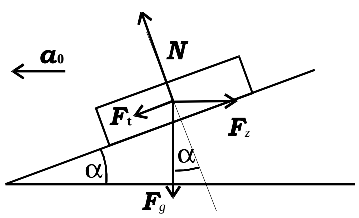
Úlohu budeme riešiť z hľadiska neinerciálnej sústavy spojenej s brzdeným vagónom. Potom na kufrík pôsobí okrem jeho sily tiaže $\boldsymbol{F}_g$, reakcie od podložky $\boldsymbol{N}$ a sily trenia $\boldsymbol{F}_t$ aj zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0$, kde $\boldsymbol{a}_0$ je zrýchlenie vagóna, pozri obr. 41. Podmienkou rovnováhy kufríka je, aby výsledná sila na neho pôsobiaca bola rovná 0.

$$\boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_z = 0 . \qquad (1)$$

Zvolíme si súradnicové osi: x –ovú vo smere poličky a y –ovú vo smere na ňu kolmom. Rovnicu (1) rozpíšeme pre priemety síl do osí x a y

$$-mg\sin\alpha - F_\mathrm{t} + ma_0\cos\alpha = 0\,, \tag{2}$$

$$-mg\cos\alpha + N - ma_0\sin\alpha = 0\,. \tag{3}$$



Obr.41

Riešenie:

Sila F_t je silou statického trenia a jej maximálna veľkosť je

$$F_{\mathrm{t\,max}} = \mu_0 N \tag{4}$$

Keďže budeme počítať s touto maximálnou hodnotou trenia, z rovníc (2) a (3) vypočítame hraničné zrýchlenie, pri ktorom sa ešte kufrík nepohne. Po dosadení N z rovnice (3) do rovnice (4) dostaneme

$$F_{\mathrm{t\,max}} = \mu_0 m\left(a_0\sin\alpha + g\cos\alpha\right),$$

a odtiaľto dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$m\left(a_0\cos\alpha - g\sin\alpha\right) = \mu_0 m\left(a_0\sin\alpha + g\cos\alpha\right)$$

Riešením pre a_0 dostaneme

$$a_0 = g\,\frac{\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}$$

$$a_0 = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\,\frac{\sin 5^\circ + 0{,}3\cdot\cos 5^\circ}{\cos 5^\circ - 0{,}3\cdot\sin 5^\circ} = 3{,}9\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

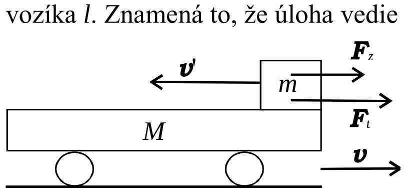
Kufrík sa nepohne z poličky, ak vlak brzdí so spomalením menším alebo rovným $3{,}9\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

6.2. Po hladkých koľajniciach sa horizontálne pohybuje vozík hmotnosti 50 kg rýchlosťou 1 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Na predný okraj vozíka opatrne položili závažie hmotnosti 2 kg. Koeficient šmykového trenia medzi závažím a vozíkom je rovný 0,1. Pri akej minimálnej dĺžke vozíka závažie nespadne z vozíka?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
M = 50 kg	l= ?
m = 2 kg	
v = 1 $\mathrm{m.s^{-1}}$	
μ =0,1	

V prvom okamihu vozík akoby sa snažil ujsť z pod závažia. Ale v dôsledku sily trenia sa bude rýchlosť vozíka vzhľadom na koľajnice zmenšovať a rýchlosť závažia vzrastať. Závažie nespadne z vozíka, ak za čas, po ktorom budú rýchlosti vozíka a závažia voči koľajniciam rovnaké, dráha závažia vzhľadom na vozík s' nebude väčšia ako je dĺžka vozíka l. Znamená to, že úloha vedie k hľadaniu relatívnej dráhy s' závažia a toto je vhodné riešiť v súradnicovej sústave pevne spojenej s vozíkom, pozri obr.42. Táto súradnicová sústava je neinerciálnou, pretože v dôsledku sily trenia, pokiaľ sa závažie vzhľadom na vozík nezastaví, pohybuje sa vozík spomalene. Spomalenie a_0, ktoré získa vozík v dôsledku sily trenia, má horizontálny smer. Na závažie v neinerciálnej sústave pevne



Obr.42

spojenej s vozíkom budú pôsobiť tiažová sila a sila reakcie vozíka, ktoré sa vzájomne kompenzujú, sila trenia $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ a zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0$. V okamihu položenia závažia bude jeho rýchlosť voči vozíku $\boldsymbol{v}_0' = -\boldsymbol{v}$. Keď závažie skončí svoj relatívny pohyb voči vozíku, prejde dráhu s', a jeho konečná rýchlosť vzhľadom na vozík je rovná 0. Je zrejmé, že úbytok kinetickej energie závažia na dráhe s' je:

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = A_{\mathrm{t}} + A_{\mathrm{z}}\,, \tag{1}$$

kde A_{t} je práca na prekonanie trenia;

A_{z} – zdanlivá práca zotrvačnej sily.

Obe sily F_{t} a F_{z} sú konštantné, a preto práca, ktorú tieto sily vykonajú bude priamo úmerná dráhe s'. Znamená to, že pomocou rovnice (1) môžeme vypočítať dráhu s' ak poznáme obidve sily.

Riešenie:

Aby sme mohli nájsť zotrvačnú silu, ktorá pôsobí na závažie, je potrebné zistiť zrýchlenie $\boldsymbol{a}_0$ vozíka. Sila trenia, ktorou pôsobí závažie na vozík je

$$F_t = \mu m g\,.$$

Smer tejto sily má opačný smer ako rýchlosť vozíka $\boldsymbol{v}$. Pretože je to jediná sila pôsobiaca v horizontálnom smere na vozík bude jeho zrýchlenie

$$a_0 = \mu m g / M$$

a vektor $\boldsymbol{a}_0$ bude tiež mať smer opačný smeru rýchlosti $\boldsymbol{v}$. Na závažie budú pôsobiť sily

$$F_{\mathrm{t}} = \mu m g, \quad F_z = m\,\mu m g / M\,.$$

Obidve tieto sily sú orientované proti smeru relatívnej rýchlosti závažia voči vozíku. Pri posunutí závažia po vozíku do vzdialenosti s' bude práca týchto síl záporná.

$$A_{\mathrm{t}} = -\mu m g s', \quad A_{\mathrm{z}} = -m\,\mu m g s'/M\,. \tag{2}$$

Zmena kinetickej energie závažia je

$$\Delta E_k = -m\left(v_0'\right)^2/2 = -m v^2/2 \tag{3}$$

Po dosadení rovníc (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme

$$-m v^2/2 = -\mu m g s'\left(1 + m/M\right)$$

a odtiaľto

$$s' = \frac{M v^2}{2\mu g\left(m + M\right)}.$$

Znamená to, že závažie nespadne z vozíka ak jeho dĺžka l bude

$$l \geq s' = \frac{M v^2}{2\mu g\left(m + M\right)}$$

$$l \geq \frac{50\mathrm{kg}\cdot 1^2\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{2\cdot 0{,}1\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s}^{-2}\left(2 + 50\right)\mathrm{kg}}$$

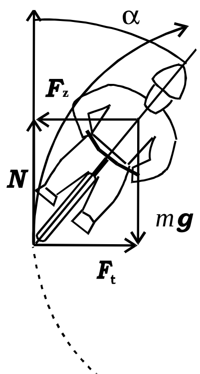
$$l \geq 0{,}49\ \mathrm{m}$$

6.3. Cyklista, ktorý ide po priamej betónovej ceste rýchlosťou 27 km/hod, náhle vojde do zákruty s polomerom 25 m. Ako sa musí cyklista nakloniť, aby bezpečne prešiel zákrutou?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$v = 7{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	$\alpha = ?$
$r = 25\ \mathrm{m}$	

Budeme skúmať cyklistu a bicykel ako jediné tuhé teleso. Na bicyklistu pri jeho pohybe pôsobí tiažová sila, sila reakcie vozovky, sila pohonu a sily trenia tak v smere dotyčnice k trajektórii ako aj v smere do stredu kruhu. Pri pohybe po kružnici nie je žiaden posun bicykla v radiálnom smere, čo znamená, že posledná sila je silou trenia v pokoji. Keď sa bicyklista pohybuje konštantnou rýchlosťou, sila pohonu a sila trenia v smere dotyčnice k trajektórií sú rovnako veľké a opačného smeru a preto sa rušia. Tiažová sila pôsobí v ťažisku. Sila reakcie vozovky a radiálna sila trenia v pokoji pôsobia v najnižšom bode oboch kolies a vyvolávajú otáčavý moment voči horizontálnej osi, ktorá prechádza cez hmotný stred bicyklistu, pozri obr. 43. Táto os sa spolu s hmotným stredom pohybuje vzhľadom k Zemi po kružnici a teda sa pohybuje so zrýchlením. Znamená to, že súradnicová sústava spojená s hmotným stredom bicyklistu je neinerciálna sústava a preto v tejto sústave bude pôsobiť na bicyklistu ešte zotrvačná odstredivá sila



Ob.43

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{z}} = \sum_j \boldsymbol{F}_{\mathrm{zj}} = -\sum m_{\mathrm{j}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{oj}} = \sum m_{\mathrm{j}} \omega^2 \boldsymbol{r}_{\mathrm{j}} \,,$$

kde m_{j} je hmotnosť j -tého hmotného bodu,
$\boldsymbol{a}_{0\mathrm{j}}$- normálové zrýchlenie j-tého hmotného bodu, ktoré má smer do stredu kruhu,
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{j}}$- polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na stred kružnice.

Budeme predpokladať, že rozmery bicyklistu sú malé voči polomeru kružnice. Potom môžeme položiť polomery každého hmotného bodu rovné polomeru kružnice t.j. $r_{\mathrm{j}} = r$. Znamená to, že aj postupná rýchlosť všetkých hmotných bodov bude rovnaká a

$$v_{\mathrm{j}} = \omega r \quad \text{a} \quad F_{\mathrm{z}} = m\,\omega^2 r \,.$$

V takomto prípade zotrvačná odstredivá sila pôsobí v hmotnom strede a nevyvoláva otáčavý moment voči uvažovanej osi. Podmienka rovnováhy bicyklistu bude spočívať v tom, aby súčet momentov síl trenia v pokoji $\mathrm{M_t}$ a reakcie vozovky $\boldsymbol{M}_{\mathrm{N}}$ voči horizontálnej osi, ktorá prechádza cez hmotný stred, bol rovný nule,

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{N}} = 0 \tag{1}$$

Rovnica (1) umožňuje zistiť uhol odklonu bicyklistu od kolmice, pretože momenty oboch síl závisia od tohto uhla. V skúmanej neinerciálnej sústave je bicyklista v pokoji. Znamená to, že súčet všetkých síl pôsobiacich na bicyklistu je rovný nule,

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{z}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{N} = 0 \,. \tag{2}$$

Pretože zotrvačná sila závisí od uhlovej rýchlosti pohybu cyklistu, rovnica (2) umožňuje s pomocou rovnice (1) nájsť uhol odklonu.

Riešenie:

Momenty síl trenia v pokoji a reakcie vozovky sa budú navzájom rušiť t.j. bude splnená rovnica (1), ak výslednica týchto síl bude prechádzať cez hmotný stred, t.j. ak

$$\mathrm{tg}\,\alpha = F_{\mathrm{t}} / N \tag{3}$$

Vektorovú rovnicu (2) si prepíšeme do skalárnych rovníc pomocou súradnicovej sústavy x,y, kde os x je v horizontálnom smere (kladný smer do stredu kruhu) a os y je vo vertikálnom smere.

$$F_t - F_z = 0 \qquad (4)$$

$$N - mg = 0 \qquad (5)$$

Z rovnice (4) vyplýva

$$F_t = m\omega^2 r = mv^2/r \qquad (6)$$

Dosadením vzťahov (5) a (6) do rovnice (3) dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = v^2/gr = \frac{\left(7{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2}{25\ \mathrm{m}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}} = 0{,}229$$

odkiaľ

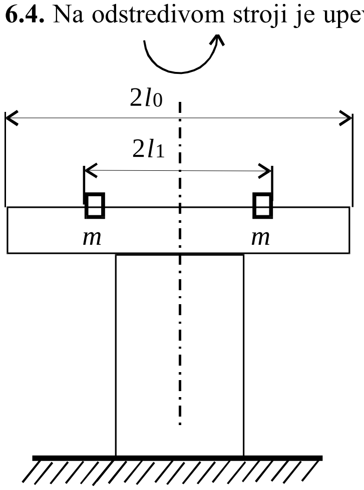
$$\alpha = 12{,}92^\circ \approx 13^\circ$$

Aby sa cyklista pri jazde nepreklopil, musí sa nakloniť o uhol 13° smerom dovnútra zákruty.

6.4. Na odstredivom stroji je upevnená hladká horizontálna tyč dĺžky 1 m. Os rotácie je vertikálna a prechádza cez stred tyče, pozri obr. 44. Na tyč sú nasunuté dva neveľké krúžky, každý o hmotnosti 400 g. Krúžky sú spojené niťou dlhou 20 cm a nachádzajú sa symetricky vzhľadom na os otáčania. Aká veľká bude Coriolisova sila, ktorá bude pôsobiť na krúžky v okamihu, keď po prepálení nite skĺznu na konce tyče? Riešte pre dva prípady:

1) stroj sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou 2 rad.s^{-1};

2) v okamihu prepálenia nite sa motor stroja vypne a sústava je ponechaná sama na seba. Moment zotrvačnosti rotujúcej časti stroja a tyče je 0,02 kg.m^2. Trenie zanedbajte!



Obr.44

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$J_0 = 0{,}02$ kg.m^2	$F_{c1} = ?$
$m = 0{,}4$ kg	$F_{c2} = ?$
$2l_0 = 1$ m	
$2l_1 = 0{,}2$ m	
$\omega_1 = 2$ rad.s^{-1}	

Zo zadania treba vypočítať veľkosť Coriolisovej sily, preto sa zdá, že je nutné počítať v neinerciálnej vzťažnej sústave pevne spojenej s tyčou. V tejto sústave bude Coriolisova sila rovná

$$\boldsymbol{F}_c = 2m\left[\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}\right], \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{v}'$ je radiálna rýchlosť krúžku v neinerciálnej sústave. Okrem Coriolisovej sily budú na každý krúžok pôsobiť tiažová sila a sila reakcie tyče, ktoré sa kompenzujú a odstredivá sila

$$\boldsymbol{F}_0 = m\omega^2 \boldsymbol{r}, \qquad (2)$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor krúžku (počiatok súradnicovej sústavy je na osi otáčania). Znamená to, že pre výpočet Coriolisovej sily je potrebné zistiť relatívnu rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ a tiež okamžitú uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$. V prvom prípade bude odstredivá sila rovná

$$\boldsymbol{F}_0 = m\omega_1^2 \boldsymbol{r} \, . \tag{3}$$

Táto sila bude udeľovať krúžkom zrýchlenie a zvyšovať ich rýchlosť $\boldsymbol{v}'$. Rotačný moment tejto sily je rovný nule. Coriolisova sila má smer kolmý na $\boldsymbol{v}'$, mení silu normálovej reakcie tyče, ale v dôsledku zanedbania síl trenia nijako nevplýva na pohyb krúžku. Ľahko môžeme posúdiť, že Coriolisova sila mení len režim práce motoru: čím ďalej budú krúžky od osi otáčania, tým väčší bude brzdiaci moment Coriolisových síl a tým väčší výkon bude musieť podávať motor, aby zachoval uhlovú rýchlosť otáčania. Pohyb krúžkov po tyči je vyvolaný len zotrvačnou odstredivou silou a rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ môžeme vypočítať dvoma spôsobmi. Buď pomocou druhého Newtonovho zákona alebo zo vzťahu medzi zmenou kinetickej energie krúžku ΔE_k a prácou A_z, ktorú vykoná pri radiálnom posunutí zotrvačná odstredivá sila. Potom

$$\Delta E_k = \frac{m(v')^2}{2} = A_z \tag{4}$$

V druhom prípade, keď je motor vypnutý, Coriolisove sily vyvolajú rotačný moment, ktorý bude brzdiť pohyb celej sústavy. Uhlová rýchlosť sa bude meniť a vznikne doplňujúca zotrvačná sila $\boldsymbol{F} = m\left[\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right]$, ktorá taktiež bude vplývať na uhlovú rýchlosť sústavy. Riešenie úlohy v neinerciálnej sústave sa stáva veľmi zložité a zdĺhavé. Preto preskúmajme možnosť stanovenia rýchlostí $\boldsymbol{v}'$ a $\boldsymbol{\omega}$ v inerciálnej sústave. V inerciálnej sústave pôsobia na sústavu sily tiaže a reakcie opory. Tieto ale nevyvolávajú žiaden rotačný moment síl voči vertikálnej osi a nevykonávajú prácu. Preto moment hybnosti a kinetická energia sústavy sa musia zachovávať. (Toto tvrdenie je pravdivé, ak zanedbáme sily trenia v osi stroja). Potom uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega}_2$ v tom okamihu, keď krúžky prídu na konce tyče, môžeme stanoviť zo zákona zachovania momentu hybnosti.

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2 , \quad J_1 \boldsymbol{\omega}_1 = J_2 \boldsymbol{\omega}_2 , \tag{5}$$

kde J_1 a J_2 sú momenty zotrvačnosti celej sústavy na počiatku a konci radiálneho pohybu krúžkov. Relatívnu rýchlosť $\boldsymbol{v}'$ každého z krúžkov môžeme zistiť zo zákona zachovania energie sústavy

$$E_{k_1} = E_{k_2} , \quad \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{2m(v')^2}{2} \, . \tag{6}$$

Všimnite si, že kinetickú energiu sústavy E_{k2}, môžeme vyjadriť ako súčet kinetickej energie rotačného pohybu a postupného pohybu len preto, že os rotácie prechádza cez hmotný stred celej sústavy.

Riešenie:

1) Vypočítame prácu zotrvačnej sily, ktorá pôsobí na každý krúžok. Vezmeme do úvahy rovnicu (3) a dostaneme

$$A_z = \int_{l_1}^{l_0} m\,\omega_1^2 r \;\mathrm{d}r = \frac{m\,\omega_1^2}{2}\left(l_0^2 - l_1^2\right). \tag{7}$$

Táto práca je kladná. Dosadením do rovnice (4) dostaneme

$$v' = \omega_1\sqrt{l_0^2 - l_1^2} = 2\,\mathrm{s}^{-1}\sqrt{(0{,}5)^2\,\mathrm{m}^2 - (0{,}1)^2\,\mathrm{m}^2} = 0{,}98\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

Dosadením výrazu pre v' do rovnice (1) vzhľadom na to, že $\boldsymbol{v}'$ a $\boldsymbol{\omega}$ sú na seba kolmé, dostaneme

$$F_{c1} = 2m\,\omega_1^2\sqrt{l_0^2 - l_1^2} = 2\cdot 0{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 4\mathrm{s}^{-2}\sqrt{(0{,}5)^2\,\mathrm{m}^2 - (0{,}1)^2\,\mathrm{m}^2} = 1{,}568\ \mathrm{N}$$

2) Ak budeme riešiť úlohu pomocou druhého Newtonovho zákona, potom ak si zvolíme os x vo smere tyče a počiatok súradnice dáme do osi otáčania, Newtonov zákon bude mať tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = m\,\omega^2 x\ ,$$

kde x je okamžitá vzdialenosť krúžku od osi otáčania. Aby sme vylúčili premennú t, vyjadríme si $\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t}$ nasledovne:

$$\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v'\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}x}\ .$$

Potom dostaneme diferenciálnu rovnicu s rozdelenými premennými

$$mv'\mathrm{d}v' = m\omega_1^2 x\ \mathrm{d}x\ .$$

Rovnicu (5) si prepíšeme do skalárneho tvaru a upravíme

$$\omega_2 = J_1\omega_1 / J_2 \tag{8}$$

Dosadením do rovnice (6) dostaneme

$$(v')^2 = \frac{\omega_1^2}{2m}\frac{J_1}{J_2}\left(J_2 - J_1\right) \tag{9}$$

Na začiatku bol moment zotrvačnosti sústavy

$$J_1 = J_0 + 2ml_1^2 \tag{10}$$

Keď krúžky skĺznu na konce tyče bude moment zotrvačnosti

$$J_2 = J_0 + 2ml_0^2 \tag{11}$$

Dosadením výrazov (8), (9), (10) a (11) do rovnice (1) nájdeme

$$F_{c2} = 2m\,v'\omega_2$$

$$F_{c2} = 2m\,\omega_1^2\sqrt{\frac{\left(J_0 + 2ml_1^2\right)^3}{\left(J_0 + 2ml_0^2\right)^3}\left(l_0^2 - l_1^2\right)}.$$

$$F_{c2} = 2\cdot 0{,}4\ \mathrm{kg}\cdot 4\mathrm{s}^{-2}\sqrt{\frac{\left(0{,}02\ \mathrm{kg.m}^2 + 0{,}8\,\mathrm{kg}\,(0{,}1)^2\,\mathrm{m}^2\right)^3}{\left(0{,}02\ \mathrm{kg.m}^2 + 0{,}8\,\mathrm{kg}\,(0{,}5)^2\,\mathrm{m}^2\right)^3}\left((0{,}5)^2 - (0{,}1)^2\right)\mathrm{m}^2} = 0{,}1\ \mathrm{N}$$

Neriešené príklady

6.5. Auto zvýšilo pri rozbiehaní svoju rýchlosť z 36 km/hod. na 72 km/hod za 40 sekúnd. Určite veľkosť sily, ktorou bol vodič o hmotnosti 70 kg pritlačený do operadla sedadla. [17,5 N]

6.6. Kabína výťahu má hmotnosť m_1 = 900 kg a je čiastočne vyvážená závažím hmotnosti m_2=750 kg. Akú ťažnú silu musí vyvinúť motor výťahu, ak výťah

a) stúpa stálou rýchlosťou;
b) stúpa so zrýchlením a = 1,2 m.s^{-2};

c) klesá so zrýchlením $a = 1{,}2$ m.s^{-2}?

[a) 1470 N; b) 2551 N; c) 508 N]

6.7. Na strope železničného vagóna idúceho rýchlosťou 50 km/hod visí kyvadlo. Keď začne vlak brzdiť, kyvadlo sa vychýli o 3°. Za ako dlho sa vlak zastaví za predpokladu, že spomalenie je rovnomerné? [27 s]

6.8. Sekundové kyvadlo v pohybujúcom sa výťahu vykonáva 72 kmitov za minútu. S akým zrýchlením sa pohybuje výťah? Aký je smer zrýchlenia? Aká musí byť minimálna výška výťahovej kabíny? [4,3 m.s^{-2}, proti smeru zemskej tiaže, 0,25 m]

6.9.* Vo výťahu, ktorý sa pohybuje so zrýchlením $a = 1/4\ g$, z výšky h púšťa chlapec guličku. Po uplynutí doby $\tau = 0{,}2$ s sa mení znamienko zrýchlenia výťahu a po čase 2τ je zrýchlenie výťahu rovné nule. V tom okamihu sa gulička dotkne podlahy. Vypočítajte, do akej výšky H od dlážky sa gulička odrazí, ak ráz je absolútne pružný! Vypočítajte výšku h, z ktorej chlapec pustil guličku. [a) a súhlasne s g: $h = 0{,}68$ m, $H = 0{,}78$ m; b) a v protismere g: $h = 0{,}88$ m, $H = 0{,}78$ m]

6.10. Vozidlo s hmotnosťou 5800 kg prechádza rýchlosťou 41 km.h^{-1} po vypuklom moste s polomerom krivosti 62 m. Akou silou tlačí vozidlo na most v okamihu, keď prechádza jeho stredom? [44 800 N]

6.11. Odstredivka má polomer bubna 0,5 m a vykonáva 1200 otáčok za minútu. Koľkokrát väčšia sila odtrhuje z mokrého prádla kvapku vody ako je jej tiaž? [800 krát]

6.12. Akou maximálnou rýchlosťou môže vojsť autobus do zákruty s polomerom 50 m, ktorej klopenie je 15°, aby nebola ohrozená bezpečnosť cestujúcich? [11,5 m.s^{-1}]

6.13. Na zvislej osi sú výkyvne pripevnené dve ramená tvaru tyče dĺžky 0,3 m tak, že pri roztáčaní sústavy sa ramená odstredivou silou vychyľujú v opačných smeroch od osi v tej istej rovine. Aká je frekvencia otáčania, ak sú ramená vychýlené o uhol 30°? [1,2 s^{-1}]

6.14. Guľôčka s hmotnosťou 0,1 kg je zavesená na vlákne dlhom 0,5 m a pohybuje sa tak, že opisuje vo vodorovnej rovine kružnicu rýchlosťou stálej veľkosti. Vlákno pritom opisuje plášť kužeľa a zviera so zvislým smerom 30°. Nájdite veľkosť rýchlosti, periódu obiehania guľôčky po kružnici, ako aj silu, ktorá pri tomto pohybe napína vlákno. [1,18 m.s^{-1}; 1,321 s; 1,13 N]

6.15. Na tenkej obruči s polomerom 10 cm je navlečená korálka, ktorá sa môže pohybovať po obruči voľne (prakticky bez trenia). Obruč, umiestnená vo zvislej rovine, sa začne otáčať okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom uhlovou rýchlosťou
a) 7 rad/s b) 14 rad/s. V akej polohe bude korálka v rovnováhe?

[a) v najnižšom bode obruče; b) 60°]

6.16.* Slnko je hviezda o polomere $6{,}95 \cdot 10^{8}$ m s hmotnosťou $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg. Po vyhasnutí sa gravitáciou zmrští na „bieleho trpaslíka“ o polomere asi $6{,}5 \cdot 10^{3}$ km. Aký bude relatívny rozdiel tiažového zrýchlenia na póle a na rovníku u Slnka a u „bieleho trpaslíka“, ak doba otáčania Slnka okolo jeho osi je 25,4 dňa? (Slnko i „bieleho trpaslíka“ považujeme za homogénne gule). [0,22]

6.17 Automobil hmotnosti 20 t sa pohybuje z juhu na sever rýchlosťou 90 km/hod na severnej šírke 60°. Vypočítajte veľkosť a smer sily, ktorá sa snaží zmeniť smer pohybu automobilu. [62,9 N, k východu]

6.18. Rieka, ktorá má v určitom mieste šírku 250 m, priemernú hĺbku 5,6 m a objemový prietok $5{,}3 \cdot 10^{3}$ m^{3}.s^{-1}, tečie v smere poludníka na sever. Zemepisná šírka miesta je 50° severnej šírky. Aký rozdiel tlaku vody na ľavý a pravý breh spôsobuje Coriolisova sila? Ktorým smerom bude sila stáčať tok rieky? [105 Pa, k východu]