2 Dynamika hmotného bodu

Druhý Newtonov zákon nám nehovorí nič o bodoch, v ktorých pôsobia sily, ani o rozmeroch a tvaroch telies. Znamená to, že platí len pre hmotné body, alebo pre telesá, ktoré sa pohybujú priamočiaro. Preto v tejto časti budeme predpokladať, že ak priamočiary pohyb nie je uvedený priamo v zadaní, výsledná sila pôsobiaca na teleso prechádza cez jeho ťažisko.

Pri riešení príkladov z dynamiky hmotného bodu musíme veľkú pozornosť venovať analýze síl. Pohybové rovnice je potrebné vždy zapisovať vo vektorovom tvare. Potom treba zvoliť vhodnú súradnicovú sústavu a do nej prepísať rovnice v skalárnom tvare pomocou projekcií síl a zrýchlení na jednotlivé osi.

Musíme mať na zreteli, že Newtonove zákony platia len v inerciálnych vzťažných sústavách . Znamená to, že zvolené súradnicové sústavy nesmú mať zrýchlenie voči Zemi.

1. Sila je mierou vzájomného pôsobenia dvoch telies na seba. Z druhej strany je sila aj mierou zmeny pohybu. Mierou pohybu je hybnosť, ktorá má označenie $\boldsymbol{p}$. Preto medzi silou a hybnosťou platí vzťah

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} .$$

V prípade klasickej mechaniky $(v \ll c)$ je hmotnosť konštantná, a preto môžeme napísať

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} .$$

2.. Sila je vektor, preto ju môžeme rozložiť na niekoľko jej vektorových zložiek, pre ktoré ale musí platiť

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i ,$$

kde N je počet zložiek, na ktoré silu rozložíme. Toto vektorové pravidlo platí aj opačne, výsledná sila sa rovná vektorovému súčtu všetkých pôsobiacich síl na hmotný bod.

3. Pre impulz sily za časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, platí vzťah

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 .$$

4. V prípade prítomnosti trenia platia nasledovné vzťahy pre sily trenia
   a) Maximálna sila statického trenia

$$\boldsymbol{F}_t = -\mu_s N \frac{\boldsymbol{F}_v}{|\boldsymbol{F}_v|} ,$$

kde μ_s je faktor adhézie,
N - hodnota normálovej sily,
$\boldsymbol{F}_v$ - vonkajšia sila pôsobiaca na teleso.

b) Sila šmykového trenia

$$\boldsymbol{F}_t = -\mu N \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|},$$

kde μ je faktor šmykového trenia,
$\boldsymbol{v}$ - je rýchlosť telesa.

c) Sila viskózneho trenia

$$\boldsymbol{F}_t = -k\,\boldsymbol{v},$$

kde k je súčiniteľ úmernosti.

V prípade, že ide o pohyb telieska sférického tvaru v tekutine, je

$$k = 6\pi\eta r,$$

kde η je súčiniteľ dynamickej viskozity kvapaliny a r - polomer guľôčky.

d) Sila odporového trenia

$$\boldsymbol{F}_x = -kv^2 \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|},$$

kde k je súčiniteľ úmernosti.

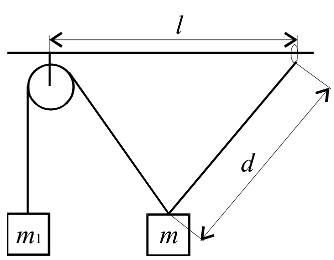
Obyčajne predpokladáme, že k má nasledovný tvar

$$k = \frac{1}{2}\rho C_x S_p,$$

kde ρ je hustota tekutiny,
C_x - súčiniteľ odporu,
S_p - charakteristická plocha napr. priečny prierez telesa.

Riešené príklady

2.1. Závažie o hmotnosti m = 1 kg je zavesené na dvoch nehmotných nitiach. Prvá niť je dlhá 1,5 m a je priviazaná ku krúžku, ktorý môže kĺzať po vodorovnej tyči, viď obrázok 9. Faktor adhézie medzi tyčou a krúžkom je 0,75. Druhá niť je vedená cez nehmotnú kladku, upevnenú vo vzdialenosti 2,5 m od krúžku a na jej konci visí závažie hmotnosti m_1. Vypočítajte minimálnu hmotnosť m_1, pri ktorej začne krúžok kĺzať. Ďalej vypočítajte silu napínajúcu prvú niť a uhol medzi niťami Θ.



Obr. 9

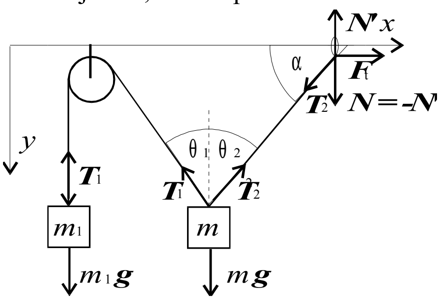
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 1 kg	m_1 = ?
l = 2,5 m	T_2 = ?
d = 1,5 m	Θ = ?
$\mu_s = 0{,}75$	

Minimálna hmotnosť závažia m_1 pri ktorej začne krúžok kĺzať, môžeme stanoviť z podmienky, že je to maximálna hmotnosť závažia m_1, pri ktorej je ešte sústava v pokoji. Je zrejmé, že potom sila trenia, ktorá bráni krúžku v pohybe, je maximálnou silou trenia, a preto môžeme napísať

$$F_\mathrm{t} = \mu_s N, \qquad (1)$$

kde N je sila, ktorou pôsobí krúžok v kolmom smere na tyč; μ_s je faktor adhézie. Na obrázku 10 sú znázornené sily, ktoré pôsobia na závažia a krúžok. Pretože nite a kladka sa uvažujú ako nehmotné, sily, ktoré napínajú nite T_1 a T_2, sú v celej dĺžke nití konštantné. Z tretieho Newtonovho zákona $N' = -N$ Napíšeme si podmienky rovnováhy pre závažia m, m_1 a krúžok



Obr.10

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 = 0$$
$$m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 = 0$$
$$\boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{N}' + \boldsymbol{F}_t = 0$$

Aby sme mohli riešiť tieto vektorové rovnice, zavedieme si dvojrozmernú súradnicovú sústavu s osami x a y, pozri obrázok 10. Uhol medzi tyčou a silou T_2 si označíme α.

Potom môžeme prepísať vektorové rovnice vyjadrujúce podmienky rovnováhy pri maximálnej sile trenia do skalárnych rovníc. V smere osi x majú tvar

$$T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0 \ . \tag{2}$$

$$T_2 \cos\alpha - F_t = 0 \, . \tag{3}$$

V smere osi y budú mať tvar

$$T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 - m g = 0 \, . \tag{4}$$

$$T_1 - m_1 g = 0 \, . \tag{5}$$

$$T_2 \sin\alpha - N' = 0 \, . \tag{6}$$

Rovnicu (3) môžeme upraviť pomocou rovníc (1) a (6) a dostaneme

$$T_2 \cos\alpha = \mu_s T_2 \sin\alpha \ . \tag{7}$$

Odtiaľ $\operatorname{cotg}\alpha = \mu_s$. Keďže $\alpha = 90^\circ - \theta_2$ dostávame $\operatorname{tg}\theta_2 = \mu_s$

Zostali nám tri rovnice (2), (4), (5) a štyri neznáme m_1, T_1, T_2 a θ_1. Štvrtú chýbajúcu rovnicu dostaneme z geometrie zariadenia. Pomocou sínusovej vety vypočítame uhol $\theta = \theta_1 + \theta_2$, a tým aj neznámy uhol θ_1. Platí

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin\left(180^\circ - \alpha - \theta\right)} \tag{8}$$

Riešením (8) dostaneme uhol θ a odtiaľto aj uhly θ_1 a θ_2. Dosadením do rovnice (3) dostaneme pomer síl napínajúcich nite a pomocou rovnice (4) aj ich veľkosť. Dosadením za T_1 do rovnice (2) vypočítame hodnotu hmotnosti závažia m_1.

Riešenie:

Úpravou rovnice (8) dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{l}{\sin\theta} &= \frac{d}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{d}{(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)} \\ \frac{l}{d} &= \frac{1}{(\sin\alpha \operatorname{cotg}\theta + \cos\alpha)} \end{aligned} \tag{9}$$

Zo vzťahu (7) vyplýva, že $sin\ \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+\mu_s^2}} = \dfrac{4}{5}$ a $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{\mu_s^2}{1+\mu_s^2}} = \dfrac{3}{5}$.

Potom môžeme rovnicu (9) upraviť do tvaru

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}\operatorname{cotg}\ \theta + \frac{3}{5}$$

Rovnica platí len vtedy, ak $cotg\ \theta = 0$, čo znamená, že θ je rovné 90°, a ďalej $\sin\theta_2 = \dfrac{3}{5}$ a $\cos\theta_2 = \dfrac{4}{5}$, a pretože $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, $|\sin\theta_1| = |\cos\theta_2|$ a opačne $\cos\theta_1 = \sin\theta_2$.

Dosadením do rovnice (4) dostaneme

$$T_1 \cos\theta_2 = T_2 \sin\theta_2$$
$$T_1\mu_s = T_2$$

Dosadením do rovnice (4) a úpravou dostaneme

$$T_1 \sin\theta_2 + T_1\mu_s \cos\theta_2 = mg$$
$$T_1 = \frac{mg}{\sin\theta_2 + \mu_s \cos\theta_2}$$

a nakoniec dosadením do rovnice (5)

$$m_1 = \frac{m}{\sin\theta_2 + \mu_s \cos\theta_2}$$

$$m_1 = \frac{1{,}2\ \text{kg}}{\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\frac{4}{5}} = \frac{1{,}2\ \text{kg}}{\frac{6}{5}} = 1\ \text{kg}$$

2.2. Lokomotíva ťahá súpravu 20 vozňov, každý hmotnosti $m = 2 \cdot 10^4\ \text{kg}$, silou $F = 10^5$ N. Vypočítajte: a) Silu, ktorou pôsobí 6. vozeň na 7. vozeň; b) Výslednú silu pôsobiacu na 8. vozeň. Trenie zanedbajte!

Úvaha:

Známe veličiny	Hľadané veličiny
Počet vozňov n = 20	$F_{6,7}$ = ?
$m = 2{,}0 \cdot 10^4$ kg	F_8 = ?
$F = 10^5$ N	

Budeme predpokladať, že vagóny sú pevne spojené, a teda celá súprava sa pohybuje s rovnakým zrýchlením. Pretože na opísanie pohybu vystačíme s jednou súradnicou rovnobežnou so silou $\boldsymbol{F}$ môžeme druhý Newtonov zákon napísať v skalárnom tvare

$$M\,a = F\ , \qquad (1)$$

kde M=nm.

Každý vozeň sa pohybuje s tým istým zrýchlením a, a preto pre ľubovoľný l-tý vozeň musí platiť

$$m\,a = F_l\ . \qquad (2)$$

Tak isto k-tý vozeň musí pôsobiť na zostávajúce vozne počtom $(n-k)$ takou silou, aby im udelila zrýchlenie a, a to znamená, že

$$(n-k)ma = F_{k,k+1}\,. \tag{3}$$

Riešenie:

Dosadením zrýchlenia a z rovnice (1) do rovnice (3) dostaneme

$$\frac{(n-k)F}{n} = F_{k,k+1}$$

a po dosadení

$$F_{6,7} = \frac{20-6}{20}10^5\,\mathrm{N} = 7\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,.$$

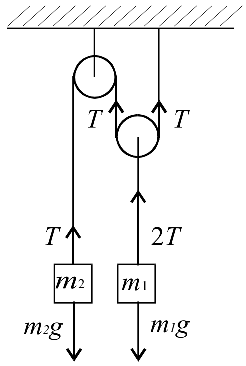
Dosadením zrýchlenia z rovnice (1) do rovnice (2) dostaneme

$$F_l = \frac{1}{n}F = \frac{10^5\,\mathrm{N}}{20} = 5\cdot 10^3\,\mathrm{N}.$$

2.3.Na obrázku 11 je znázornená sústava kladiek. Vypočítajte zrýchlenie závaží $m_1 = m_2 = 2$ kg a silu, ktorou je napínaná niť. Hmotnosť kladiek a silu trenia zanedbajte.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_1 = 2$ kg	$a_1 = ?$
$m_2 = 2$ kg	$a_2 = ?$
	$T = ?$



Obr.11

Urobíme si analýzu síl pôsobiacich na jednotlivé telesá sústavy nakreslenej na obrázku. Pretože závažia sa môžu pohybovať len vo smere jednej osi, môžeme všetky rovnice písať skalárne. Na závažie m_2 pôsobí tiažová sila m_2g smerom dole. Smerom hore na toto závažie pôsobí sila, ktorou je napínaná niť, označíme si ju T. Táto sila v dôsledku toho, že kladky sú nehmotné, pôsobí rovnako v každom bode nite. Sila napínajúca niť, na ktorej je zavesené závažie m_1 rovná $2T$. Podobne aj niť, na ktorej je upevnená pevná kladka, bude napísaná silou $T_1 = 2T$. Na závažie m_1 bude pôsobiť sila tiaže m_1g smerom dole a sila T_1 , ktorou je napínaná niť. Preto môžeme napísať

$$m_1a_1 = m_1g - 2T \tag{1}$$

$$m_2a_2 = m_2g - T\,, \tag{2}$$

kde sme za kladný smer vzali smer súhlasný s tiažovou silou. Máme iba dve rovnice a tri neznáme. Tretiu rovnicu dostaneme z podmienky, že niť je nehmotná.

Nech závažie m_2 sa posunie smerom dole o vzdialenosť x_2. Potom ale závažie m_1 sa zdvihne smerom hore o vzdialenosť $x_1 = x_2/2$. Derivovaním tejto rovnice dvakrát podľa času dostaneme vzťah medzi zrýchleniami závaží

$$-2a_1 = a_2\,. \tag{3}$$

Riešením troch rovníc o troch neznámych dostaneme hľadané veličiny zrýchlenia a silu ktorou je napínaná niť.

Riešenie:

Dosadíme za a_2 do rovnice (2) a dostaneme:

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T$$

$$-2m_2 a_1 = m_2 g - T$$

Prenásobíme prvú rovnicu číslom -2 a po sčítaní rovníc a úprave dostaneme

$$a_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{4m_2 + m_1} g$$

a z rovnice (3)

$$a_2 = \frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1} g$$

Dosadením a_2 do rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$T = \frac{3m_1 m_2}{4m_2 + m_1} g$$

Po dosadení zadaných hodnôt veličín m_1 a m_2 budeme mať

$$a_1 = \frac{2\,\mathrm{kg} - 2 \cdot 2\,\mathrm{kg}}{4 \cdot 2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}} = -1{,}962\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

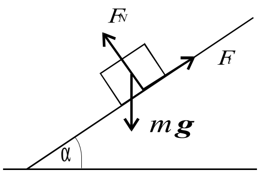
$$a_2 = \frac{4 \cdot 2\,\mathrm{kg} - 2 \cdot 2\,\mathrm{kg}}{4 \cdot 2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}} = 3{,}924\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

$$T = \frac{3 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{kg}}{4 \cdot 2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} \cdot 9{,}81 m.s^{-1} = 11{,}772\,\mathrm{N}$$

2.4. Teleso hmotnosti m sa šmýka dolu po naklonenej rovine s uhlom sklonu 45^0. Keď sa posunulo po dráhe 1 m, jeho rýchlosť sa zväčšila zo začiatočnej hodnoty 1,8 km.h^{-1} na hodnotu 12,6 km.h^{-1}. Vypočítajte faktor šmykového trenia.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$v_1 = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	$\mu = ?$
$v_2 = 3{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	
$s = 1$ m	
$\alpha = 45°$	

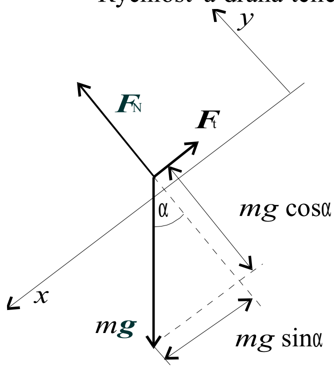


Obr.12

Urobíme si analýzu síl pôsobiacich na teliesko, pozri obr.12. Vidíme, že na teliesko pôsobí tiažová sila a sila šmykového trenia. Sila šmykového trenia je úmerná sile vzájomného pôsobenia teliesko a roviny. Súčiniteľ úmernosti bude hľadaný faktor šmykového trenia μ. Z obrázku 12 je zrejmé, že pohyb telieska môžeme skúmať ako pohyb v rovine. Zvolíme si vhodnú súradnicovú sústavu a to tak, že os x bude paralelná naklonenej rovine a os y bude kolmá na túto rovinu, pozri obr.13. Tiažovú silu si rozložíme na zložky v smere x a y. Vidíme, že teliesko pôsobí na rovinu silou $mg \cos \alpha$ a rovina bude pôsobiť na teliesko silou F_N rovnakou čo do veľkosti, ale opačného smeru.. Potom sila šmykového trenia bude rovná

$$F_t = \mu mg \cos \alpha \qquad (1)$$

Rýchlosť a dráha telieska budú závisieť od sily šmykového trenia. Preto, aby sme zistili faktor šmykového trenia, budeme hľadať vzťah medzi uvedenými veličinami. Napíšeme si pohybovú rovnicu telieska v smere osi x, pričom berieme do úvahy, že sila trenia pôsobí vždy proti smeru pohybu



Obr.13

$$ma = mg \sin\alpha - F_t \tag{2}$$

a po dosadení rovnice (1) do rovnice (2) dostaneme

$$ma = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \tag{3}$$

Úpravou rovnice (3) dostaneme výraz pre faktor šmykového trenia ako funkciu zrýchlenia a uhlu naklonenia.

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha} \tag{4}$$

Z rovnice (3) vyplýva, že zrýchlenie a je konštantné, a preto budú platiť nasledovné vzťahy pre rýchlosť a dráhu.

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + at\,, \\ s &= v_1 t + \frac{at^2}{2}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

kde dráhu a čas meriame od bodu, v ktorom malo teliesko rýchlosť v_1. Pomocou rovníc (5) vyjadríme zrýchlenie ako funkciu rýchlosti a dráhy a dosadením výrazu pre zrýchlenie do rovnice (4) vypočítame faktor šmykového trenia.

Riešenie:

Z rovníc (5) vylúčime čas t

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

$$s = \frac{v_1\left(v_2 - v_1\right)}{a} + \frac{\left(v_2 - v_1\right)^2}{2a} = \frac{1}{a}\left(v_1 v_2 - v_1^2 + \frac{v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2}{2}\right)$$

$$s = \frac{1}{2a}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

a odtiaľ

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

Dosadením do rovnice (4) dostaneme

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2sg\cos\alpha}$$

$$\mu = 1 - \frac{\left((3{,}5)^2 - (0{,}5)^2\right)\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{2\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s}^{-2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}135$$

2.5. Na hladine transformátorového oleja uvoľníme oceľovú guličku o priemere 3 mm. Po určitom čase sa rýchlosť klesajúcej guličky ustáli. Aká bude táto rýchlosť?

Predpokladáme, že odpor prostredia je daný Stokesovym vzťahom. V akej hĺbke pod hladinou môžeme pohyb považovať za rovnomerný s presnosťou 1% ?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
r = 1,5 mm	v_u = ?
ρ_g = 8010 kg.m^{-3}	s_1 = ?
ρ_k = 866 kg.m^{-3}	
η = 0.032 kg.m^{-1}.s^{-1}	
v_0 =0	
v_1 =0.99 v_u	

Pri pohybe v kvapaline, budú na guličku pôsobiť nasledovné sily: sila tiaže, vztlaková sila a sila viskózneho trenia. Pretože pohyb je priamočiary, môžeme sily aj rýchlosti vyjadrovať v skalárnom tvare. Nech kladný smer je smer tiažovej sily. Vztlakovú silu ako aj silu viskózneho trenia budeme brať so záporným znamienkom, pretože pôsobia v opačnom smere ako tiažová sila. Pohybovú rovnicu si zapíšeme v nasledovnom tvare:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - F_v - F_t\,. \qquad (1)$$

Hmotnosť m si vyjadríme pomocou objemu a hustoty. Vztlaková sila bude rovná tiažovej sile kvapaliny guličkou vytlačenej vzatej so záporným znamienkom. Hmotnosť kvapaliny si taktiež vyjadríme pomocou hustoty kvapaliny a jej objemu. Pre sférické telieska pri viskóznom pohybe v kvapalinách môžeme použiť Stokesov vzorec

$$F_t = 6\pi\eta r v$$

Takto si upravíme rovnicu (1) do tvaru

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_g\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_g - \rho_k\right)g - 6\pi\eta r v\,. \qquad (2)$$

Vidíme, že sme dostali diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením dostaneme výraz pre rýchlosť ako funkciu času. Pretože sila viskózneho trenia rastie s rýchlosťou, v určitý okamih pravá strana rovnice (2) bude rovná nule a pohyb ďalej bude prebiehať s konštantnou rýchlosťou v_u, ktorú zistíme z vypočítaného výrazu pre rýchlosť pohybu guličky.

Dráhu guľôčky s_1 vypočítame integrovaním výrazu pre rýchlosť guľôčky podľa času

$$s = \int_0^{t_1} v\,\mathrm{d}t\,,$$

kde čas t_1 vypočítame z podmienky $v_1 = 0{,}99\,v_u$

Riešenie:

Upravíme si rovnicu (2) nasledovne

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_g}\right)g - \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho_g}v \qquad (3)$$

Pre zjednodušenie výpočtu si označíme výrazy $\left(1-\frac{\rho_k}{\rho_g}\right)g$ ako k_0 a $\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\rho_g}$ ako k_1.

Prepíšeme si rovnicu (3) do tvaru vhodného pre integrovanie $\frac{\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{k_1}{k_0}v\right)} = k_0\,dt$

a integrujeme

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{k_1}{k_0}v\right)} = k_0\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$-\frac{k_0}{k_1}\ln\left(1-\frac{k_1}{k_0}v\right) = k_0\,t\ .$$

Tento výraz upravíme nasledovne:

$$1-\frac{k_1}{k_0}v = e^{-k_1 t}$$

a odtiaľ

$$v = \frac{k_0}{k_1}\left(1-e^{k_1 t}\right)\ . \tag{4}$$

Vidíme, že rýchlosť sa ustáli v čase $t=\infty$, a bude rovná

$$v_u = \frac{k_0}{k_1}$$

a po dosadení

$$v_u = \frac{2}{9}\frac{\rho_g-\rho_k}{\eta}r^2 g \tag{5}$$

$$v_u = \frac{2}{9}\left(\frac{8\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}} - 866\,\mathrm{kg.m^{-3}}}{0{,}032\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}}\right)\cdot(1{,}5)^2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}} = 1{,}09\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Integrovaním rovnice (4) podľa času v intervale $t=0$ a $t=t_1$ dostaneme

$$s_1 = v_u\int_0^{t_1}\left(1-e^{-k_1 t}\right)\mathrm{d}t = v_u\left[t+\frac{1}{k_1}e^{-k_1 t}\right]_0^{t_1}$$

$$s_1 = v_u\left(t_1+\frac{1}{k_1}e^{-k_1 t_1}-\frac{1}{k_1}\right). \tag{6}$$

Vypočítame si čas t_1, pre ktorý platí podľa zadania

$$v_1 = 0{,}99 v_u$$

$$0{,}99 v_u = v_u\left(1-e^{-k_1 t_1}\right).$$

Úpravou dostaneme $t_1 = \frac{\ln 100}{k_1}$.

Dosadením času t_1 do rovnice (6) dostaneme

$$s_1 = \frac{k_0}{k_1}\left(\frac{\ln 100}{k_1} + \frac{1}{k_1} e^{-\ln 100} - \frac{1}{k_1}\right)$$

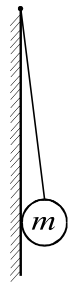
$$s_1 = \frac{k_0}{k_1^2}\left(\ln 100 + e^{-\ln 100} - 1\right)$$

$$s_1 = \frac{4}{81}\left(\frac{\rho_g - \rho_k}{\eta^2}\,\rho_g\, r^4\, g\right)\left(\ln 100 + e^{-\ln 100} - 1\right)$$

$$s_1 = \frac{4}{81}\,\frac{\left(8\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}} - 866\ \mathrm{kg.m^{-3}}\right)}{\left(0{,}032\right)^2 \mathrm{kg^2.m^{-2}.s^{-2}}}\, 8\cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}\left(1{,}5\right)^4\cdot 10^{-12}\mathrm{m^4}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}\cdot$$
$$\cdot\left(\ln 100 + e^{-\ln 100} - 1\right) = 0{,}477\ \mathrm{m}$$

Neriešené príklady

2.6. Aký je uhol medzi dvomi rovnakými silami, ak výsledná sila má veľkosť rovnú polovičnej veľkosti jednej sily? [151°]
2.7. Medzi dve skoby upevnené v rovnakej výške proti sebe v rovnobežných stenách vzdialených 3,5 m od seba je priviazané tenké vlákno. Po zavesení záťaže hmotnosti 5 kg do stredu vlákna poklesne stred vlákna o 5 cm pod úroveň spojnice bodov upevnenia. Aká sila kolmá na steny sa snaží skoby vytrhnúť? [860 N]



Obr.14

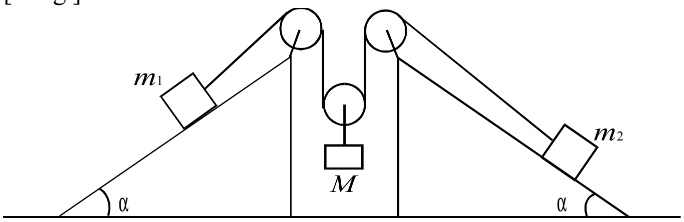
2.8. Guľa hmotnosťou 1 kg visí na niti dlhej 0,8 m. Niť je pripevnená k hladkej stene (pozri obrázok 13). Vypočítajte silu, ktorou guľa pôsobí na stenu, ak polomer gule je 22,5 cm! [2,2 N]

2.9.* Tri rovnaké gule ležia na dne valcovej nádoby o priemere 0,5 m tak že sa dotýkajú medzi sebou a steny. Vypočítajte silu, ktorou pôsobí jedna guľa na stenu nádoby, ak na ne položíme takú istú guľu! Hmotnosť každej gule je 10 kg. [23 N]

2.10. Cestná zákruta s polomerom 200 m má uhol klopenia 0,2 rad. Aká je optimálna rýchlosť jazdy zákrutou, pri ktorej je nulové šmykové trenie medzi kolesami s vozovkou? [72 km/hod.]

2.11. Po naklonenej rovine výšky *h* sa šmýka bez trenia teleso. Dokážte, že veľkosť rýchlosti telesa na konci roviny sa rovná veľkosti rýchlosti voľného pádu telesa z výšky *h*!
2.12. Nedeformovaná pružina s tuhosťou 16 kN.m^{-1} má dĺžku 0,4 m. Pružina je nasunutá na tyč a jeden jej koniec je pevne uchytený. Na druhom konci pružiny je upevnené závažie hmotnosti 2 kg, ktoré môže bez trenia kĺzať pozdĺž tyče. Vypočítajte dĺžku pružiny, ak sústava sa otáča s uhlovou rýchlosťou 40 rad.s^{-1} okolo osi, ktorá prechádza cez bod uchytenia pružiny! [0,5 m]
2.13. Na vodorovnej doske je položená a upevnená dokonale hladká guľa o polomere 15 cm. V najvyššom bode je položené teliesko, ktoré uvedieme nepatrným pohybom do kĺzavého pohybu po povrchu gule. V akej vzdialenosti od bodu dotyku gule s podložkou teliesko na podložku dopadne? [22 cm]
2.14. Pri rozbehu pôsobila na lokomotívu hmotnosti 40 t sila, ktorá vzrastala od nulovej hodnoty v počiatočnom stave pokoja priamo úmerne s časom. Rýchlosť pohybu 90 km/hod. dosiahla lokomotíva za čas 40s. Akú maximálnu hodnotu dosiahla počas pohybu trakčná sila? [50 kN]

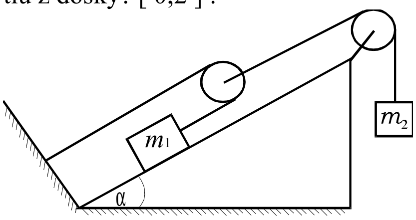
2.15. Na hmotné teleso pôsobí stále v tom istom smere sila, ktorej hodnota závisí od času podľa vzťahu $F = F_0 - kt$, kde $F_0 = 36$ N a $k = 6$ N.s^{-1}. Na začiatku bolo teleso v pokoji. Počas prvých 10 sekúnd urazilo dráhu 100 m. Vypočítajte jeho hmotnosť!
[8 kg].



Obr.15

2.16.[*] Na obrázku 15 je znázornená sústava závaží a kladiek. Kliny sú nepohyblivé. Hmotnosť závaží je m_1 = 3 kg a m_2 = 2 kg. Hmotnosť kladiek môžeme zanedbať. Uhol α = 30°. Vypočítajte zrýchlenie závažia hmotnosti M = 5 kg v prípade, že:
a) sily trenia môžeme zanedbať;
b) faktor šmykového trenia medzi závažiami a klinmi je rovný 0,1!
[a) 2,60 m.s^{-2} ; b) 2,19 m.s^{-2}]

2.17. Kruhová doska sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou $60\pi\,\mathrm{min}^{-1}$. Vo vzdialenosti 20 cm od osi otáčania sa nachádza kocka malých rozmerov. Aký musí byť koeficient šmykového trenia medzi doskou a kockou, aby nedošlo k jej zošmyknutiu z dosky? [0,2] .



Obr. 16

2.18[*]**.** V zariadení zobrazenom na obrázku 16 sa závažie hmotnosti m_1 šmýka po naklonenej rovine s uhlom sklonu 30°. Hmotnosť závažia m_1= 400g a hmotnosť závažia m_2 = 0,2kg. Vypočítajte zrýchlenie závažia hmotnosti m_2 a sily, ktorými sú namáhané nite!
[1,09 m.s^{-2}; 2,18 N; 1,09 N]

2.19. Po dvoch naklonených rovinách zvierajúcich s horizontálnou rovinou uhly 30°, 60° sa pohybujú dve telesá o hmotnostiach 5 kg a 2 kg spojené pevným vláknom vedeným cez kladku. Faktor šmykového trenia medzi telesami a rovinami je $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}1$. Vypočítajte zrýchlenie telies a ťahovú silu vlákna! [0,3 m.s^{-2} ; 18,6 N]

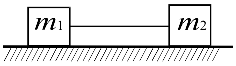
2.20. Teleso sa šmýka dolu po naklonenej rovine zvierajúcej s vodorovnou rovinou uhol 45° za účinku síl trenia so zrýchlením a = 2,4 m.s^{-2}. Pod akým uhlom β musí byť naklonená rovina, aby sa teleso po nej šmýkalo po malom postrčení konštantnou rýchlosťou? [β=33,2°]

2.21. Na naklonenej rovine rovnomerne priamočiaro sa šmýka teleso rýchlosťou v. Vypočítajte faktor šmykového trenia medzi telesom a povrchom roviny, keď uhol sklonu roviny vzhľadom na vodorovný smer je 30°. [μ = 0,6]

2.22. Za lokomotívou nákladného vlaku je pripojených 20 vagónov. Priemerná hmotnosť každého je 50 t. Akú hmotnosť musí mať lokomotíva, aby bol vlak schopný zrýchliť z rýchlosti 20 km/hod. na rýchlosť 60 km/hod. za čas 2 minúty? Faktor adhézie medzi kolesami a koľajnicou je 0,2. Predpokladáme rovnomerné rozloženie tiaže lokomotívy na kolesá (všetky poháňané). Šmykové trenie a odpor prostredia proti pohybu sústavy neuvažujeme. [49 t]

2.23. Na naklonenej rovine sa nachádza závažie hmotnosti m_1=5 kg, ktoré je spojené nehmotnou niťou pomocou nehmotnej kladky s druhým závažím m_2=2 kg, ktoré voľne visí. Faktor šmykového trenia medzi prvým závažím a naklonenou rovinou je μ=0,1; uhol sklonu roviny voči horizontu α=37°. Vypočítajte zrýchlenie závaží. Pri akých hodnotách m_2 bude sústava v rovnováhe? Faktor adhézie uvažujte rovný μ_s=0,1. [0,84m.s^{-2}, 2,6kg < m_2 < 3,4 kg]

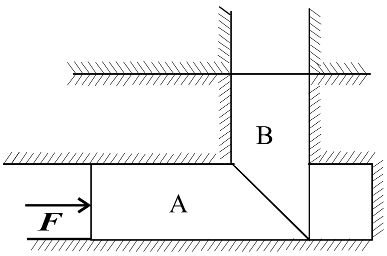
2.24.* Na dlážke leží debna hmotnosti 100 kg. Akou minimálnou silou je možné pohnúť touto debnou, ak súčiniteľ statického trenia je rovný 0,2? [≈192,3 N]



Obr. 17

2.25. Dve telesá ležiace na stole sú spojené nehmotnou niťou (pozri obr.17). Hmotnosť telies je m_1=0,5kg a m_2=0,2kg. Sila 2 N pôsobí raz na teleso s hmotnosti m_1 (ťah), druhýkrát na teleso hmotnosti m_2. Vypočítajte silu napínania nite v prvom a druhom prípade, ak uvažujeme silu trenia aj medzi telesami a stolom. Koeficient šmykového trenia 0,2. [≈ 0,57 N; 1,43 N]

2.26. Trezor hmotnosti 10 t má byť naložený na korbu automobilu vo výške 1,5 m nad zemou pomocou dosiek dlhých 6 m. Vypočítajte potrebnú minimálnu silu, ak k faktor šmykového trenia je 0,35! [≈ $6 \cdot 10^4$ N]



Obr. 18

2.27. Na obr. 18 je znázornená zámka. Dolná časť sa môže pohybovať vo vodorovnom žľabe. Steny žľabu sú absolútne hladké, ale roviny hranolov A a B, ktoré sú sklonené voči vodorovnej rovine o 45°, sú drsné. Faktor adhézie medzi nimi je 0,2. Aká musí byť minimálna sila, ktorou treba pôsobiť na časť zámky A, aby sme obe časti zámky dali do pohybu? Hmotnosť hranola B je rovná 100 g. [1,47 N]

2.28. Guľôčka stúpa v kvapaline smerom kolmo k povrchu s konštantnou rýchlosťou. Hustota materiálu guličky je rovná štvrtine hustoty kvapaliny. Koľko krát je sila viskózneho trenia , ktorá pôsobí na guličku väčšia, ako sila tiaže guličky? [3 krát]

2.29. Oceľová guľôčka o priemere 1 mm klesá vo veľkej nádobe naplnenej ricínovým olejom s konštantnou rýchlosťou 0,185 cm.s^{-1}. Vypočítajte hodnotu dynamickej viskozity oleja! [2 kg.m^{-1}.s^{-1}]

2.30. Akú najvyššiu rýchlosť môže dosiahnuť kvapka vody o priemere 0,3 mm, ak dynamická viskozita vzduchu je rovná 1,2 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}? [4,1 m.s^{-1}]

2.31. Zmes olovených guličiek o priemere 3mm a 1 mm uvolnili na povrchu glycerínu hlbokého 1 m Vypočítajte rozdiel časov dopadu guľôčok rôzneho rozmeru! Dynamická viskozita glycerínu je 1,47 kg.m^{-1}.s^{-1}. [4 minúty]

2.32. Sklená guľôčka (ρ=2530 kg.m^{-3}) s priemerom 4 mm padá z výšky 0,05m do glycerínu (ρ=1230 kg.m^{-3}). Vypočítajte počiatočné zrýchlenie a rýchlosť po ustálení pohybu v glyceríne. Tiažové zrýchlenie uvažujte rovné 10 m.s^{-2}.
[-648,5 m.s^{-2}; $7{,}86 \cdot 10^{-3}$ m.s^{-1}]

2.33. Teliesko hmotnosti 5 g vnikne rýchlosťou 2 m.s^{-1} do viskózneho prostredia a pohybuje sa v ňom vo vodorovnom smere pod účinkom brzdiacej sily priamoúmernej rýchlosti s konštantou úmernosti $1 \cdot 10^{-2}$ N.s.m^{-1}. Nakreslite graf závislosti pôsobiacej sily od času a zistite, na akej dráhe teliesko zastane. [1 m]

2.34. Vypočítajte impulz sily, ktorý dostane stena, ak na ňu narazí gulička hmotnosti 7 g pod uhlom 30^0 vzhľadom na stenu rýchlosťou 400 $m.s^{-1}$. [2,8 $kg.m.s^{-1}$]
2.35. Pohybujúci sa vagón napĺňajú uhlím, ktoré padá zo zásobníka zvisle nadol. Akou silou treba pôsobiť na vagón, aby sa pohyboval rovnomerne $v = 5 m.s^{-1}$, pri rýchlosti naplnenia 10 ton za 2 s. Trenie zanedbajte. [25 kN]
2.36. Auto sa pohybuje v daždi, v ktorom kvapky majú hmotnosť 0,1 gramu a padajú zvisle rýchlosťou 12 $m.s^{-1}$. Za jednu sekundu dopadne na 1 m^2 $3 \cdot 10^4$ kvapiek. Vypočítajte doplňujúcu silu potrebnú pre výpočet trenia medzi kolesami a cestou ak budeme predpokladať, že povrch auta zasahovaný v kolmom smere kvapkami je 8 m^2. [288 N]
2.37. Spolucestujúci v automobile vysunul ruku z okna dlaňou proti smeru pohybu automobilu. Potom vodič zvýšil rýchlosť automobilu. Koľkokrát sa táto zvýšila, keď spolucestujúci odhadol vzrast odporovej sily na dvojnásobok? [$\sqrt{2}$]
2.38. Ľadoborec naráža na ľadovú kryhu hmotnosti 200 t a odráža ju od seba rýchlosťou 4$m.s^{-1}$. Vypočítajte maximálnu silu, ktorou ľadoborec pôsobil na kryhu, za predpokladu, že tlak ľadoborca na kryhu narastal rovnomerne počas zbližovania sa s kryhou a tak isto rovnomerne klesal pri ich rozchádzaní. Doba pôsobenia ľadoborca na kryhu bola 8s. Hmotnosť ľadoborca uvažujte oveľa vyššiu ako hmotnosť ľadovej kryhy. [200 kN]
2.39.* Basketbalista vrhá loptu o hmotnosti 400 g pod uhlom 45° voči horizontu tak, že pôsobí na loptu počas 0,2 s silou, ktorá sa mení z maximálnej po nulovú podľa vzťahu $F = F_0(1\text{-k}t^2)$, kde F_0 = 30,3 N. Vypočítajte akú maximálnu výšku vzhľadom na bod vrhnutia dosiahne lopta! Odpor vzduchu zanedbajte. [2,6 m]