3 Zákony zachovania

V mnohých prípadoch sú možné dve rovnocenné metódy riešenia fyzikálnych problémov a to použitie Newtonových zákonov, alebo zákonov zachovania. Ale v niektorých prípadoch, keď nepoznáme charakteristiku síl vzájomného pôsobenia, len zákony zachovania nám umožňujú na základe známych parametrov (súradníc, rýchlostí) sústavy v jednom stave vypočítať jej parametre v inom stave.

Voľba metódy a spôsobu riešenia každej konkrétnej úlohy je možná len po detailnom kvalitatívnom rozbore úlohy. Vždy treba začať s analýzou síl, ktoré pôsobia na každé teleso. Toto nám pomôže riešiť, či je účelné skúmať každé teleso zvlášť, alebo celú sústavu a aké zákony zachovania je možné použiť.

Je treba si uvedomiť, že rýchlosti telies musíme udávať vzhľadom na jednu a tú istú inerciálnu sústavu, čo platí aj pre potenciálnu energiu, pričom je nutná dohoda odkiaľ ju začneme odpočítávať, t.j. kde si zvolíme $E_P = 0$.

1. Pre izolovanú sústavu platí zákon zachovania hybnosti

$$\sum \boldsymbol{p}_i = konšt \ .$$

2. V prípade klasickej mechaniky hmotnosť nezávisí od rýchlosti a je konštantná. Preto si môžeme zaviesť pojem hmotného stredu telesa alebo sústavy hmotných bodov. Jeho poloha je daná nasledovne.

Pre diskrétne rozdelenie hmotnosti

$$\boldsymbol{r}_t = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} ,$$

a pre spojité rozdelenie hmotnosti

$$\boldsymbol{r}_t = \frac{\int_V \rho \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}V}{\int_V \rho \, \mathrm{d}V} ,$$

kde ρ je hustota telesa, $\boldsymbol{r}$ - polohový vektor a V objem telesa.

3. Práca sily $\boldsymbol{F}$ na dráhe s je rovná

$$A = \int_s (\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}) ,$$

kde $|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|$ je prírastok dráhy a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ je vektor posunutia pôsobiska sily.
V prípade konštantnej sily bude práca rovná

$$A = Fs \cos \alpha ,$$

kde α je uhol medzi silou a smerom pohybu.

4. Výkon je definovaný ako prvá derivácia práce podľa času

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

a pre konštantnú silu ho môžeme vyjadriť vzorcom

$$P = F v \cos \alpha .$$

5. Kinetická energia pohybujúceho sa telesa v klasickej mechanike sa rovná

$$E_K = \frac{mv^2}{2} .$$

6. Potenciálna energia telesa, ktoré bolo zdvihnuté o výšku h , sa rovná

$$E_p = mgh .$$

7. Zákon zachovania mechanickej energie v klasickej mechanike môžeme vyjadriť nasledovne

$$E = E_K + E_p = konšt .$$

8. Relativistickej mechanike pre zákon zachovania energie platí vzťah

$$\sum m_i c^2 + \sum E_{ip} = konšt .,$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

9. Kinetická energia telesa v relativistickej mechanike sa dá vyjadriť vzorcom

$$E_k = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

kde m_0 je hmotnosť telesa v stave pokoja.

Riešené príklady

3.1. Guľôčka hmotnosti m_1 sa pohybovala rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$, a pružne narazila do guľôčky hmotnosti m_2, ktorá bola v pokoji. Po zrážke mala guľôčka m_1 rýchlosť $\boldsymbol{v}_1'$ a guľôčka m_2 rýchlosť $\boldsymbol{v}_2'$.

a) V prípade, že $m_1 = m_2$, určte uhol, ktorý zvierajú vektorové priamky $\boldsymbol{v}_1'$ a $\boldsymbol{v}_2'$.

b) Guľôčka m_1 sa po zrážke pohybuje pod uhlom 30° vzhľadom k vektorovej priamke $\boldsymbol{v}_1$ rýchlosťou $0,5v_1$. Určite smer a veľkosť rýchlosti $\boldsymbol{v}_2'$ pre prípad, keď m_1 = 2g a m_2 = 1g a rýchlosť v_1 je 200 m.s^{-1}!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_1 = 2$ g	$v_2' = ?$
$m_2 = 1$ g	$\beta = ?$
$v_1 = 200$ m.s^{-1}	
$v_1' = 100$ m.s^{-1}	
$\alpha = 30^\circ$	

a) Zo zadania príkladu vyplýva

$m_1 = m_2$ a $v_2 = 0$.

Potom platí:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 = m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2' \quad (1)$$

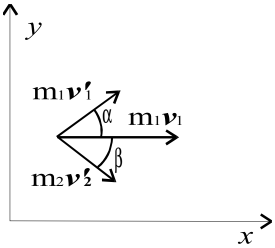
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (2)$$

V prípade, keď $m_1 = m_2$, zo vzťahov (1) a (2) vyplýva, že

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2' \quad \text{a} \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

a to znamená, že vektory $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$, tvoria pravouhlý trojuholník, ktorého preponou je vektor $\boldsymbol{v}_1$. Vzťahy (1) a (2) sú splnené aj vtedy, keď dôjde k tzv. stredovej zrážke a

$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{0}$. Potom $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1$. Po zrážke prvá guľôčka zostane v pokoji a druhá sa bude pohybovať rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$.



Obr. 19

b) Zvolíme si os x vo smere rýchlosti $\boldsymbol{v}_1$ a os y nech je kolmá na os x, pozri obr.19. Nech α je kladný uhol. Potom uhol β musí byť záporný, lebo počiatočná hybnosť v smere osi y bola rovná nule.

Z obr.19 vyplýva nasledovná vektorová rovnica $m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = m_1\boldsymbol{v}_1$. Pre zložky tejto rovnice v smere osí x a y platí

$$m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta = m_1 v_1 \qquad (3)$$

$$m_1 v_1' \sin\alpha - m_2 v_2' \sin\beta = 0 \qquad (4)$$

Riešením rovníc (3) a (4) dostaneme neznáme veličiny v_2' a uhol β.

Riešenie:
Úpravou rovníc (3) a (4) dostaneme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m_1 v_1' \sin\alpha}{m_1\left(v_1 - v_1'\cos\alpha\right)}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_1'\sin\alpha}{v_1 - v_1'\cos\alpha} = \frac{0{,}5 \cdot 200\,\mathrm{m.s^{-1}} \cdot 0{,}5}{200\,\mathrm{m.s^{-1}} - 86{,}6\,\mathrm{m.s^{-1}}} = 0{,}441$$

$$\beta = 23{,}8^{\circ}$$

Úpravou rovnice (4) dostaneme

$$v_2' = \frac{m_1 \sin\alpha}{m_2 \sin\beta} v_1'$$

$$v_2' = \frac{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}5}{1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}4} 100\,\mathrm{m.s^{-1}} = 250\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

3.2. Baranidlo dopadá z výšky 8 m na stĺp vysoký 4 m a zatláča ho do zeme. Hmotnosť baranidla je 400 kg, hmotnosť stĺpu 100 kg. Sila odporu zeminy závisí od hĺbky zatlačenia do zeme podľa vzťahu $F = F_0\left(1 + kx\right)$, kde $F_0 = 70\,\mathrm{kN}$ a $k = 0{,}1\,\mathrm{m^{-1}}$. Vypočítajte, ako hlboko zatlačí baranidlo stĺp do zeme po prvom údere. Odpor vzduchu zanedbajte.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m_b=400 kg	s = ?
m_s=100 kg	
h = 4 m	
F_0 = 70 kN	
k = 0,1 m^{-1}	

Na začiatku sa baranidlo nachádza vo výške 8 m nad zemou. Samotný stĺp je vysoký 4 m, to znamená, že na stĺp dopadá z výšky 4 m. Ak neuvažujeme odpor vzduchu, bude pri páde baranidla platiť zákon zachovania energie

$$\frac{1}{2} m_b v_b^2 = m_b g h \,, \qquad (1)$$

odkiaľ vypočítame rýchlosť dopadu baranidla na stĺp. Po náraze na stĺp baranidlo spolu so stĺpom budú spoločne vnikať do zeme. Znamená to, že ráz je absolútne nepružný, a preto použijeme na výpočet počiatočnej rýchlosti sústavy baranidlo-stĺp zákon zachovania hybnosti,

$$m_{\mathrm{b}} v_{\mathrm{b}} = (m_{\mathrm{b}} + m_s) v \ . \qquad (2)$$

Sústava má počiatočnú kinetickú energiu

$$\frac{1}{2}(m_{\mathrm{b}} + m_s) v^2 \qquad (3)$$

Po zatlačení stĺpa do zeme do hĺbky s bude kinetická energia sústavy nulová. Celá kinetická energia baranidla a stĺpu vyjadrená vzorcom (3) spolu s potenciálnou energiou $(m_{\mathrm{b}} + m_s) gs$ bude rovná práci sily odporu zeminy, ktorú vypočítame zo vzťahu

$$A = F_0 \int_0^s (1 + kx) \, \mathrm{d}x \ . \qquad (4)$$

Riešenie:

Z rovnice (1) dostaneme pre rýchlosť baranidla $v_{\mathrm{b}} = \sqrt{2gh}$.

Dosadením do rovnice (2) a úpravou dostaneme pre počiatočnú rýchlosť sústavy

$$v = \frac{m_b}{m_b + m_s} \sqrt{2gh} \ .$$

Prácu A vypočítame podľa vzťahu (4)

$$A = F_0 \int_0^s (1 + kx) \, \mathrm{d}x = F_0 \left(s + \frac{1}{2} k s^2 \right)$$

Ako bolo povedané, kinetická energia sústavy a úbytok potenciálnej energie sústavy budú rovné práci odporovej sily zeme. Znamená to, že môžeme napísať

$$\frac{1}{2}(m_{\mathrm{b}} + m_s) v^2 + (m_{\mathrm{b}} + m_s) gs = F_0 \left(s + \frac{1}{2} k s^2 \right).$$

Dosadením za počiatočnú rýchlosť sústavy a úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu pre hĺbku zatlačenia do zeme.

$$\frac{F_0 k}{2} s^2 + \left[F_0 - (m_b + m_s) g \right] s - \frac{m_b^2}{m_b + m_s} gh = 0$$

Pretože všeobecné riešenie je veľmi zložité, zjednodušíme si výpočet tak, že zavedieme nasledovné označenie.

$$a = \frac{F_0 k}{2}; \quad b = F_0 - (m_b + m_s) g \quad ; \quad \mathrm{c} = \frac{\mathrm{m_b^2}}{m_b + m_s} gh$$

a vypočítame si ich hodnoty.

$$a = \frac{7 \cdot 10^4 \ \mathrm{kg.m.s^{-2}} \cdot 0{,}1 \mathrm{m^{-1}}}{2} = 3{,}5 \cdot 10^3 \mathrm{kg.s^{-2}}$$

$$b = \left[7 \cdot 10^4 \mathrm{kg.m.s^{-2}} - (400 \,\mathrm{kg} + 100 \,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}81 \mathrm{m.s^{-2}} \right] = 65095 \,\mathrm{kg.m.s^{-2}}$$

$$c = \frac{(400)^2 \,\mathrm{kg^2}}{400 \,\mathrm{kg} + 100 \,\mathrm{kg}} 9{,}81 \mathrm{m.s^{-2}} \cdot 4 \mathrm{m} = 12556{,}8 \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$$

Pre kvadratickú rovnicu platí riešenie

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Po dosadení a výpočte odmocniny dostaneme

$$s = \frac{-65095 \pm 66431{,}6}{7000}\ \mathrm{m}$$

Z hľadiska skutočnosti má zmysel len kladné riešenie

$$s = \frac{66431{,}6 - 65095}{7000}\ \mathrm{m} = 0{,}191\,\mathrm{m}\,.$$

3.3. Častica hmotnosti m_0, ktorá letela s rýchlosťou v = 0,8 c, narazila do identickej častice, ktorá sa nachádzala v stave pokoja. Zrážka bola absolútne nepružná. Vypočítajte hmotnosť, rýchlosť a kinetickú energiu častice, ktorá vznikla pri tomto ráze!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m_0	$m'_0 = ?$
$v = 0{,}8c$	$v' = ?$
	$E'_k = ?$

Je zrejmé, že vzhľadom na rýchlosť častice je potrebné riešiť úlohu pomocou zákonov relativistickej mechaniky. Aby sme mohli úlohu riešiť, musíme predpokladať, že sústava je izolovaná. Potom bude platiť, že hybnosť sústavy a tiež celková energia sústavy sa zachováva, t.j.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' \quad \text{a} \quad E = E' \qquad (1)$$

Vyjadríme si hybnosť a celkovú energiu pred rázom a po ráze. Dostaneme

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{m'_0 \boldsymbol{v}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E' = \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

Pomocou rovníc (2) a (3) s použitím zákonov zachovania (1) môžeme vypočítať hmotnosť a rýchlosť vzniknutej častice. Kinetickú energiu vzniknutej častice stanovíme zo vzťahu

$$E'_k = E' - E_0 = m'_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} - 1 \right) \qquad (4)$$

Riešenie:

Porovnaním rovníc (3) dostaneme

$$v' = p' c^2 / E'\,. \qquad (5)$$

Pomocou zákonov zachovania (1) a rovníc (2) dostaneme

$$p' = p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad a \quad E' = E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1 \right).$$

Dosadíme za rýchlosť v jej hodnotu 0,8 c a vypočítame hybnosť a celkovú energiu

$$p' = p = \frac{4}{3} m_0 c \quad a \quad E' = E = \frac{8}{3} m_0 c^2 . \tag{6}$$

Tieto hodnoty dosadíme do rovnice (5) a dostaneme $v' = 0{,}5$ c. Smer vektora rýchlosti v' je totožný so smerom rýchlosti v. Z rovnice (3) vyplýva

$$E'^2 - p'^2 c^2 = \left(m_0' c^2 \right)^2 . \tag{7}$$

Dosadením hodnôt p' a E' do rovnice (7) dostaneme

$$\frac{48}{9} m_0^2 c^4 - \frac{16}{9} m_0^2 c^4 = \left(m_0' c^2 \right)^2$$

$$2{,}31 m_0 = m_0'$$

Vidíme, že pokojová hmotnosť vzniknutej častice je väčšia ako súčet pokojových hmotností častíc pred rázom, preto sa musí zmenšiť kinetická energia sústavy.

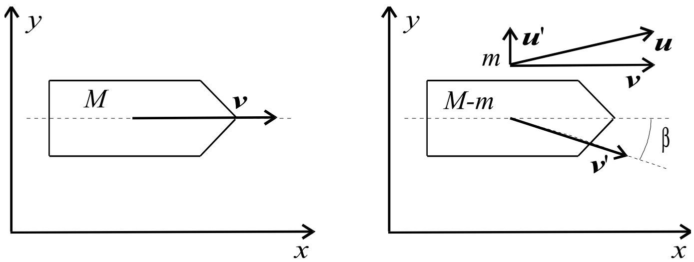
$$E_K = E - m_0' c^2 = \frac{8}{3} m_0 c^2 - 2{,}31 m_0 c^2 = 0{,}36 m_0 c^2 .$$

3.4. Z kozmickej rakety hmotnosti 2000 kg, ktorá sa pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou 8 km.s^{-1} bol kolmo na smer jej pohybu vystrelený predmet hmotnosti 200 kg, rýchlosťou 500 m.s^{-1} vzhľadom na raketu. Vypočítajte smer a veľkosť rýchlosti rakety po uskutočnení tohoto výstrelu.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
M = 2000 kg	β = ?
v = 8000 m.s^{-1}	v' = ?
m = 200 kg	
u' = 500 m.s^{-1}	
α = 90°	

V súlade so zákonom zachovania hybnosti sa celková hybnosť sústavy s časom nemení. Znázorníme si úlohu na obrázku 20. Os x si zvolíme v smere pôvodného pohybu rakety a predmet nech sa pohybuje v smere osi y. Potom platí vektorová rovnica



Obr.20

$$M\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{u} + (M - m)\boldsymbol{v}', \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}$.

Riešenie:

Prepíšeme si vektorovú rovnicu na skalárne zložky

$$Mv = mv + (M - m)v'\cos\beta,$$

$$0 = mu' - (M - m)v'\sin\beta.$$

Tieto rovnice upravíme nasledovne

$$\begin{aligned}(M - m)v &= (M - m)v'\cos\beta,\\ mu' &= (M - m)v'\sin\beta,\end{aligned} \qquad (2)$$

a odtiaľto

$$tg\,\beta = \frac{mu'}{(M - m)v} \quad ; \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{mu'}{(M - m)v}.$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{200\text{ kg}\cdot 500\,\text{m.s}^{-1}}{(2000 - 200)\text{kg}\cdot 8000\text{ m.s}^{-1}} = 0{,}3979^{\circ}.$$

Po umocnení rovníc (2) a ich sčítaní dostaneme

$$(M - m)^2 v^2 + m^2 u'^2 = (M - m)^2 v'^2,$$

odkiaľ

$$v' = \sqrt{v^2 + \left(\frac{m}{M - m}\right)^2 u'^2}.$$

$$v' = \sqrt{(8000)^2\text{m}^2.\text{s}^2 + \left(\frac{200\text{kg}}{2000\text{kg} - 200\text{kg}}\right)^2 \cdot (500)^2\text{m}^2.\text{s}^2} = 8000{,}2\text{ m.s}^{-1}$$

Neriešené príklady

3.5. Loďka stojí na vode v pokoji. Os loďky je kolmá na breh. Vzdialenosť špice loďky od brehu je 1,6 m a kormy od brehu 5,2 m. Človek, ktorý stál na špici loďky, prešiel na kormu. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od brehu bude špica loďky po premiestení človeka, ak jeho hmotnosť je 80 kg a hmotnosť loďky 100 kg. Odpor prostredia zanedbajte. [0 m]

3.6. Tri loďky rovnakej hmotnosti 200 kg idú za sebou rovnakou rýchlosťou 2 m.s^{-1}. Zo strednej loďky bolo rýchlosťou 10 m.s^{-1} vzhľadom k brehu vhodené v rovnaký okamih závažie 10 kg do prednej a rovnako veľké závažie tou istou rýchlosťou do zadnej loďky. Aké sú rýchlosti lodiek po prehodení závaží?
[1,43 m.s^{-1}; 2,22 m.s^{-1}; 2,38 m.s^{-1}]

3.7. Akou rýchlosťou sa musí pohybovať strela hmotnosti 100 kg, aby pri náraze na stojacu loď hmotnosti 100 t sa začala loď pohybovať rýchlosťou 0,1 m/s? Náraz pokladajte za absolútne nepružný. [100,1 m.s^{-1}]

3.8.* Náboj, ktorý letel vodorovne vo výške 40 m rýchlosťou 100m.s^{-1}, sa roztrhol na dva kusy. Jeden kus dopadol po 1s po rozpade na zem priamo pod miestom rozpadu. Vypočítajte smer a veľkosť rýchlosti druhého kusu tesne po rozpade!
[10^0 voči horizontu, 203 m.s^{-1}]

3.9.* Žaba o hmotnosti 0,1 kg sedí na konci dosky dlhej 2 m , ktorej hmotnosť je 10 kg. Doska pláva na povrchu rybníka bez trenia, Žaba skáče pod uhlom 45° voči horizontu na druhý koniec dosky. Aká musí byť počiatočná rýchlosť žaby, aby sa žaba po doskoku nachádzala na druhom konci dosky? [4,4 $m.s^{-1}$]
3.10. Drevená kocka hmotnosti 3 kg leží na podlahe. Vo vodorovnom smere vnikne do kocky kamienok hmotnosti 10g a uviazne v nej, v dôsledku čoho sa kocka posunie o 0,2 m. Aká bola rýchlosť kamienka, ak faktor šmykového trenia pri pohybe kocky bol 0,01? [60 $m.s^{-1}$]
3.11. Guľka hmotnosti 10 g, ktorá letela vodorovne rýchlosťou 400 $m.s^{-1}$, narazila do vrecka naplneného pieskom hmotnosti 4 kg, ktoré viselo na dlhej niti. Vypočítajte výšku, do ktorej sa vrecko vychýli a tú časť kinetickej energie guľky, ktorá sa spotrebovala na prerážanie piesku. [5 cm, 99,75 %]
3.12. Chlapec posúva sánky po zasneženej vodorovnej ceste rovnobežnou silou. Po prejdení dráhy 3 m vykoná prácu 75 J. a) Akou silou pôsobí? b) Akou silou bude musieť pôsobiť pod uhlom 45^0 smerom nahor, aby vykonal po tej istej dráhe rovnako veľkú prácu? c) Čo sa zmení pri pôsobení sily po tým istým uhlom smerom nadol? Trenie zanedbajte.
[a) 25 N; b) a c) v oboch prípadoch je sila rovnaká: 35 N]
3.13. Dieťa ťahalo vozík na povraze silou 80 N tak, že prvý meter dráhy bol povraz rovnobežný s podlahou a druhý meter zvieral povraz s podlahou uhol 30°. Akú celkovú prácu dieťa vykonalo? [149,3 J]
3.14. Akú prácu treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o x_0 = 5 cm, keď na jej stlačenie o x_1 = 1 cm treba silu 30 000 N a keď platí, že sila je priamo úmerná skráteniu pružiny? [3750 J]
3.15. Drevený valec je ponorený vo vode do 2/3 svojej výšky. Akú prácu treba vykonať na vytiahnutie valca z vody, keď polomer valca r = 10 cm a jeho výška h = 60 cm? [24,1 J]
3.16. Indián poháňa kanoe silou 200 N. S akým výkonom pracuje, ak sa plaví rýchlosťou 5 $m.s^{-1}$? [1000 W]
3.17. Akú hmotnosť má kováčske kladivo, ktoré pri dopade rýchlosťou 4,5 m/s odovzdá energiu E_k = 240 J? [23,7 kg]
3.18. Vozidlo s hmotnosťou $1{,}2\cdot10^3$ kg rozbiehajúce sa rovnomerne zrýchlene má po prejdení prvých 50 m pohybovú energiu E_k= $1{,}5\cdot10^4$ J. Aká veľké je zrýchlenie a konečná rýchlosť pri zanedbaní trenia? [0,25 $m.s^{-2}$; 5 $m.s^{-1}$]
3.19. Voľne padajúce teleso preletí za čas Δt = 2 sekundy dvoma bodmi P_1 a P_2, ktorých vzdialenosti od východiskového bodu sú h_1 a h_2. V bode P_2 je kinetická (pohybová) energia telesa 2-krát väčšia ako v bode P_1. Aké veľké sú dráhy pádu h_1 a h_2? [114,3 m; 228,67 m]
3.20. Akou silou treba pôsobiť na baranidlo hmotnosti 400 kg, aby pri dopade z výšky 50 cm vydalo takú istú energiu ako pri voľnom páde z výšky 75 cm?
[1962 N]
3.21. Teleso hmotnosti m treba zdvihnúť zvisle do výšky h. Za tým účelom teleso rovnomerne zrýchlime pozdĺž prvej časti dráhy h_1 tak, aby vystúpilo druhú časť dráhy h_2 len svojou zotrvačnosťou. Aký vzťah nám z toho vyplynie pre potrebné zrýchlenie a? [a=g (h_2/h_1]
3.22. Oceľová gulička hmotnosti 20 g je zavesená na vlákne dĺžky 0,3 m. Aký impulz sily treba udeliť guličke vo vodorovnom smere, aby sa pohybovala v zvislej rovine po kružnici? [$7{,}7\cdot10^{-2}$ N.s]

3.23. Na vláknach sú zavesené dve pružné gule s hmotnosťami 0,5 kg a 25 kg tak, že sa práve dotýkajú a spojnica ich stredov je vodorovná. O aký uhol musíme vychýliť ťažšiu guľu, aby druhá po náraze prešla po kruhovej dráhe hornou polohou nad bodom závesu? Zrážku považujte za dokonale pružnú a stredovú [1,2 rad]

3.24. Teleso hmotnosti 2 kg sa pohybuje rýchlosťou 3 m.s^{-1} a dobieha druhé teleso o hmotnosti 3 kg, ktoré sa pohybuje rýchlosťou 1 m.s^{-1}. Nájdite rýchlosť telies po zrážke, ak:

a) zrážka bola absolútne nepružná,
b) zrážka bola absolútne pružná.

Telesá sa pohybujú v jednej priamke. Zrážka je centrálna.
[a) $v_1 = v_2 = 1{,}8$ m.s^{-1}; b) $v_1 = 0{,}6$ m.s^{-1}, $v_2 = 2{,}6$ m.s^{-1}]

3.25. Aký musí byť pomer medzi hmotnosťami telies v predchádzajúcej úlohe, aby prvé teleso po absolútne pružnej zrážke ostalo stáť? [m_1:m_2 = 1:3]

3.26. Teleso o hmotnosti 3 kg sa pohybuje rýchlosťou 4 m.s^{-1} a naráža na nepohybujúce sa teleso tej istej hmotnosti. Nájdite množstvo uvoľneného tepla pri zrážke, ak zrážka je centrálna a absolútne nepružná! [12 J].

3.27. Teleso hmotnosti 5 kg naráža do nepohybujúceho sa telesa o hmotnosti 2,5 kg, ktoré sa po zrážke začne pohybovať s kinetickou energiou 5 J. Nájdite kinetickú energiu prvého telesa pred a po zrážke, ak zrážka bola centrálna a absolútne pružná.
[5,62 J; 0,62 J]

3.28. Dve telesá, pohybujúce sa oproti sebe, sa nepružne zrazia. Rýchlosť prvého telesa pred zrážkou je v_1 = 2 m.s^{-1} a rýchlosť druhého je v_2 = 4 m.s^{-1}. Výsledná rýchlosť oboch telies po zrážke je v smere rýchlosti v_1 a jej veľkosť je rovná 1 m.s^{-1}. Aký bol pomer kinetických energií pred zrážkou? [Kinetická energia prvého telesa bola 1,25 krát väčšia než energia druhého telesa].

3.29. Oceľová guľôčka hmotnosti 20 g dopadla z výšky 1 m na oceľovú podložku a odskočila od nej do výšky 0,81 m. Nájdite impulz sily pôsobiacej počas zrážky a množstvo tepla uvoľneného pri zrážke. [0,17 N.s; $37{,}2 \cdot 10^{-3}$ J]

3.30. Do telesa tvaru gule, zaveseného zvisle na vlákne, narazí vodorovne letiaci náboj, ktorého hmotnosť je 1000-krát menšia ako hmotnosť telesa, a uviazne v tomto telese. Aká bola rýchlosť náboja pri náraze, keď sa teleso po náraze vychýlilo zo svojej rovnovážnej polohy tak, že záves zvieral so zvislým smerom uhol 10°? Dĺžka závesu od miesta upevnenia do stredu gule je 1 m. [$v \doteq 550$ m.s^{-1}]

3.31. Teleso začalo padať z výšky 100 m a preniklo snehovým závejom do hĺbky 5 m. Vypočítajte priemernú silu odporu snehu proti pohybu telesa, keď hmotnosť telesa bola 10 kg! Odpor vzduchu zanedbajte. [2060 N]

3.32. Do zvislej dosky, ktorá má hrúbku 5 cm, narazila vo vodorovnom smere guľôčka hmotnosti 10 g rýchlosťou 1206 km/hod a vyletela z nej rýchlosťou 300 m.s^{-1}. Vypočítajte priemernú silu odporu dosky proti pohybu guľôčky! [2222,5 N]

3.33*. Oceľová guľôčka padá z výšky 2 m na rovinnú vodorovnú plochu. Pri každom odraze stratí 10% svojej mechanickej energie. Určite všeobecnú závislosť výšky odrazu od ich počtu. Vypočítajte jej výšku po 5-tom odraze! Určte časový interval medzi (n+1)-ým a n-tým dopadom guľôčky!

[$h_n = h_0 q^n$; kde q = 0,9; 1,18 m; $\left[t_{n+1} - t_n = 2\sqrt{\dfrac{2 \cdot q^n \cdot h_0}{g}}\text{, pre } n \geq 1 \right]$].

3.34. Lodné delo vymrští z hlavne granát s hmotnosťou 620 kg za 1/40 sekundy, pričom granát dosiahne rýchlosť 935 m/s. Akému priemernému výkonu to zodpovedá? [10,84 GW]

3.35. Loď pláva rýchlosťou v = 20 km/hod rovnomerne priamočiaro. Výkon hnacích síl je 25 MW. Vypočítajte silu odporu proti pohybu lode! (4,5 MN)

3.36. Automobil hmotnosti 900 kg dosiahne pri jazde s vypnutým motorom na ceste so sklonom 5% ustálenú rýchlosť pohybu 75 km/hod. Aký výkon musí vyvinúť motor automobilu na vodorovnej ceste, aby sa vozidlo pohybovalo rovnomerným pohybom s tou istou rýchlosťou 75 km/hod.? [9,2 kW]

3.37. Častica s pokojovou hmotnosťou M_0 sa rozpadla na dve častice, rýchlosť ktorých v laboratórnej sústave bola 0,9 c. Vypočítajte pokojovú hmotnosť častíc. [0,218 M_0]

3.38.* Častica s pokojovou hmotnosťou $3{,}2 \cdot 10^{-27}$ kg mala v laboratórnej sústave rýchlosť 0,8 c. Táto častica sa zrazila s identickou časticou, ktorá v laboratórnej sústave bola v pokoji a ráz bol absolútne nepružný. Vypočítajte hybnosť, rýchlosť a kinetickú energiu častice, ktorá vznikla v dôsledku rázu. [$1{,}28 \cdot 10^{-18}$ kg.m.s^{-1}, $1{,}5 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1}, $1{,}38 \cdot 10^{-19}$ J]

3.39. Vypočítajte relatívnu chybu vo výpočte kinetickej energie podľa klasickej mechaniky vzhľadom na relativistickú mechaniku pri rýchlostiach u_1=0,1 c, u_2 = 0,9 c, u_3 = 0,99 c! [0,8%; 69%; 92%]

3.40. Hmotnosť pohybujúceho sa protónu je 1,5 krát väčšia ako jeho hmotnosť v pokoji. Vypočítajte jeho kinetickú a celkovú energiu! [$7{,}5 \cdot 10^{-11}$ J ; $22{,}5 \cdot 10^{-11}$ J]

3.41. Vypočítajte rýchlosť častice, ak jej kinetická energia je rovná polovici pokojovej energie. [$\sqrt{5}/3$ c]

3.42.* Hmotnosť dvojstupňovej rakety na štarte je 150 t. Plyny vyletujú z rakety rýchlosťou 4 km/s. Po spálení 90 t paliva odhadzuje sa prvý stupeň hmotnosti 30 t. Potom sa ešte spáli 28 t paliva. Aká je výsledná rýchlosť druhého stupňa rakety? Odpor vzduchu zanedbajte. Akú rýchlosť by mala jednostupňová raketa pri rovnakej počiatočnej hmotnosti a spálení rovnakého množstva paliva?
[14,5 km.s^{-1}; 6,18 km.s^{-1}]