4 Silové pole a pohyb hmotných telies v silovom poli.

V tomto paragrafe sa rozoberá problém zisťovania charakteristických funkcií silového poľa, t.j. potenciálu a intenzity poľa z rozloženia zdrojov poľa (elektrické náboje, hmotné telesá), ako aj pohyb elektricky nabitých častíc v elektromagnetickom poli a hmotných častíc v gravitačnom poli. Pri výpočte silových polí sa ohraničíme poliami síl, ktorých intenzita klesá nepriamo úmerne so štvorcom vzdialenosti od zdroja poľa.

Pri výpočte silových polí sa používa princíp superpozície a Gaussova veta. Princíp superpozície dovoľuje vypočítať potenciál ako funkciu súradníc. Potom pomocou diferenciálnych vzťahov medzi intenzitou a potenciálom sa vypočítava intenzita poľa.

Niekedy je vhodné počítať potenciál a intenzitu oddelene pomocou integrálnych vzťahov medzi funkciou rozloženia náboja (elektrické pole) alebo hmotnosti (gravitačné pole) a potenciálom a intenzitou poľa.

V prípade, že rozloženie náboja alebo hmotnosti je dostatočne symetrické, pri riešení príkladov sa používa Gaussova veta a integrálne vzťahy medzi intenzitou a potenciálom poľa.

1. Ako bolo uvedené sily v skúmaných poliach ubúdajú so štvorcom vzdialenosti podľa nasledovných zákonov

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} \quad \text{(Newtonov)}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\boldsymbol{r} \quad \text{(Coulombov),}$$

kde G je univerzálna gravitačná konštanta,
ε_0 - permitivita vákua,
Q - elektrický náboj,
$\boldsymbol{r}$ - polohový vektor.

2. Medzi silou a potenciálnou energiou platí vzťah

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, E_p \,,$$

kde E_p je potenciálna energia.

3. Medzi hustotou elektrického náboja ρ_e, hustotou hmotnosti ρ_m, potenciálom φ a intenzitou poľa $\boldsymbol{E}$ alebo $\boldsymbol{g}$ platia nasledovné diferenciálne a integrálne vzťahy:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi\,; \qquad \boldsymbol{g} = -\nabla\varphi\,;$$

$$\nabla\boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \qquad \nabla\boldsymbol{g} = 4\pi G\,\rho_m\,;$$

$$(\nabla\cdot\nabla)\varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \quad (\nabla\cdot\nabla)\varphi = -4\pi G\,\rho_m\,,$$

kde $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ a $(\nabla\cdot\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$$\varphi_{21} = -\int_1^2 (\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}); \quad \varphi_{21} = -\int_1^2 (\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}).$$

4. Gaussova veta pre elektrostatické pole sa dá vyjadriť vzťahom

$$\oint (\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \int_V \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \mathrm{d}V .$$

Gaussova veta pre gravitačné pole sa dá vyjadriť vzťahom

$$\oint (\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) = -4\pi \mathrm{G} \int_V \rho_m \, \mathrm{d}V .$$

5. Pre objemovú energiu elektrického poľa vo vákuu platí vzťah

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} .$$

6. Gravitačné sily sú stredové sily, a preto ich moment sily je rovný nule, v dôsledku čoho pri pohybe hmotných telies v gravitačnom poli sa zachováva ich moment hybnosti (2. Keplerov zákon).
Pri pohybe telesa v gravitačnom poli je dráha tohto telesa kužeľosečka. Ak je táto dráha elipsa, platí nasledovný vzťah medzi periódou obehu a veľkou poloosou.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{G}(M_1 + M_2)},$$

kde ťažšie teleso je v jednom ohnisku elipsy a ľahšie teleso obieha po eliptickej dráhe.

7. Pre pohyb elektricky nabitých častíc v elektromagnetickom poli platí vzťah (Lorentzova sila)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = Q\,(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]),$$

kde $\boldsymbol{B}$ je vektor magnetickej indukcie.

9. V prípade, že magnetické pole nie je prítomné a rýchlosť častíc je oveľa menšia ako rýchlosť svetla, platí zákon zachovania energie v tvare

$$\Delta E_k = Q\,\varphi$$

a pre relativistické častice platí

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + Q\,\varphi = konšt .$$

10. V prípade, že sa častice pohybujú len v magnetickom poli, budú sa pohybovať po skrutkovnici, ktorej krok bude

$$h = \frac{2\pi m}{|Q|B} v_1 .$$

Perióda obehu a polomer dráhy budú

$$T = \frac{2\pi m}{|Q|B}; \quad r = \frac{m v_2}{|Q|B},$$

kde v_1 je zložka rýchlosti rovnobežná s vektorom magnetickej indukcie,
v_2 – zložka rýchlosti kolmá na vektor magnetickej indukcie.

Riešené príklady

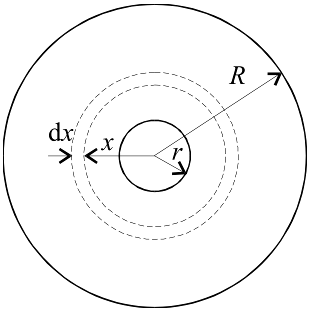
4.1. Homogénna guľa má hmotnosť M a polomer R. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa gule:

a) vo vzdialenosti od jej stredu väčšej ako je jej polomer
b) vo vzdialenosti od jej stredu menšej ako je jej polomer;
c) Nájdite také vzdialenosti od stredu gule, v ktorých potenciál a intenzita budú nadobúdať polovičnú hodnotu odpovedajúcich veličín tesne nad povrchom gule!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m_g = M$	$\varphi(r) = ?$
$r_g = R$	$E\,(r) = ?$
	$r_1 = ?$
	$r_2 = ?$

a) Vyšetrujeme gravitačné pole gule v priestore mimo nej, t.j. vo vzdialenosti od stredu $r>R$. Z Gaussovej vety vyplýva, že guľové teleso vytvára svoje vonkajšie pole tak, akoby celá jeho hmotnosť bola sústredená v jeho strede.



Obr.21

Potom potenciál bude rovný

$$\varphi = -G\frac{M}{r} \qquad (1)$$

a intenzita

$$\mathbf{E} = -G\frac{M}{r^3}\mathbf{r}\,. \qquad (2)$$

b) Skúmajme teraz gravitačné pole vo vnútri gule, t.j. vo vzdialenosti $r<R$. Použijeme princíp superpozície, ktorý v našom prípade hovorí, že gravitačné pole v mieste kde $r<R$ je súčtom poľa vnútornej gule polomeru r a poľa zvyšku, tvoreného guľovou vrstvou hrúbky $R - r$. Potom potenciál výsledného poľa je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,,$$

kde φ_1 je potenciál vytvorený vnútornou guľou na jej povrchu:

$$\varphi_1 = -G\frac{m_1}{r}\,,$$

kde

$$m_1 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = M\frac{r^3}{R^3}\,.$$

Po dosadení

$$\varphi_1 = -G\frac{M}{R^3}r^2\,.$$

Potenciál φ_2 je vytvorený guľovou vrstvou hrúbky R-r, čiže počítame potenciál v dutine tejto vrstvy. Z Gaussovej vety vyplýva, že intenzita gravitačného poľa v dutine telesa je nulová a keďže ***E***= - grad φ , musí byť potenciál v celej dutine konštantný. Preto namiesto počítania φ_2 vo vzdialenosti r môžeme počítať potenciál priamo v strede dutiny. Guľovú vrstvu si rozdelíme na elementárne sústredné vrstvičky polomeru x a hrúbky dx (pozri obr.21). Potenciál, ktorý takáto vrstvička vytvára v strede, je

$$d\varphi_2 = -G\frac{dm}{x},$$

kde $dm = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot 4\pi x^2 dx = \dfrac{3M}{R^3}\cdot x^2 dx$.

Po dosadení $$d\varphi_2 = -G\frac{3M}{R^3}\cdot x\, dx$$

a $$\varphi_2 = -G\frac{3M}{R^3}\int_r^R x\, dx = -G\frac{3M}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right).$$

Výsledný potenciál vo vzdialenosti r<R je:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -G\frac{M}{R^3}\cdot r^2 - G\frac{3M}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right).$$

Po úprave $$\varphi = -G\frac{M}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right).$$

Pri výpočte intenzity v mieste $r<R$ si opäť uvedomíme, že príspevok od guľovej vrstvy hrúbky R-r je nulový a intenzita poľa je tvorená len vnútornou guľou polomeru r:

$$\boldsymbol{E} = -G\frac{M\frac{r^3}{R^3}}{r^3}\boldsymbol{r} = -G\frac{M}{R^3}\boldsymbol{r}.$$

c) Na povrchu (tesne nad ním) má potenciál hodnotu

$$\varphi_0 = -G\frac{M}{R}.$$

Hľadáme vzdialenosť r_1, v ktorej $\varphi_1 = \frac{1}{2}\varphi_0$. Predpokladajme, že $r_1>R$. Potom by malo platiť: $$G\frac{M}{r_1} = \frac{1}{2}G\frac{M}{R}$$

odkiaľ $r_1 = 2R$.

Ak hľadáme $r_2 < R$, malo by platiť:

$$\frac{GM}{2R^3}\left(3R^2 - r_2^2\right) = \frac{1}{2}G\frac{M}{R},$$

odkiaľ $r_2 = R\sqrt{2}$, čo je spor s predpokladom, že $r_2 < R$, preto vnútri gule neexistuje bod, kde potenciál má polovičnú hodnotu povrchového potenciálu.

Zostáva ešte nájsť vzdialenosti, v ktorých má intenzita polovičnú hodnotu intenzity na povrchu gule. Uvažujme najprv $r_1>R$. Potom má platiť:

$$G\frac{M}{r_1^2} = \frac{1}{2}G\frac{M}{R^2},$$

odkiaľ $r_1 = R\sqrt{2}$.

Ak hľadáme $r_2 < R$, musí platiť:

$$G\frac{M}{R^3}r_2 = \frac{1}{2}G\frac{M}{R^2},$$

odkiaľ $r_2 = \frac{R}{2}$.

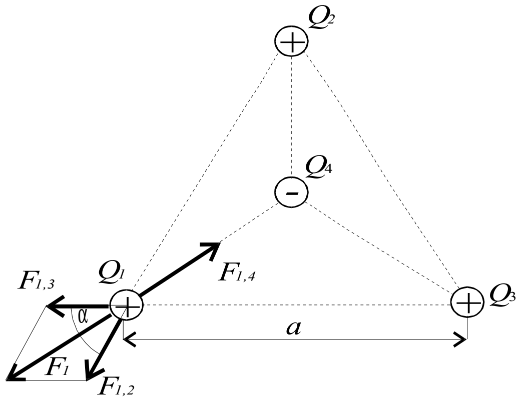
Vidíme, že existujú dve vzdialenosti od stredu gule, v ktorých má intenzita polovičnú hodnotu z povrchovej intenzity.

4.2. Tri rovnaké náboje veľkosti 5 nC sú umiestnené vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka. Aký náboj musíme umiestniť uprostred trojuholníka, aby výsledná sila pôsobiaca na každý náboj bola nulová?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 5$ nC	$Q_4 = ?$
$a_1 = a_2 = a_3 = a$	

Podľa zadania sú náboje umiestnené vo vrcholoch trojuholníka kladné, a to znamená, že sa budú odpudzovať. Náboj, ktorý treba umiestniť uprostred trojuholníka bude záporný a jeho veľkosť musí byť taká, aby sila, ktorou pôsobí na náboj vo vrchole trojuholníka kompenzovala výslednú odpudivú silu zostávajúcich dvoch nábojoch vo vrchole.



0br.22

V dôsledku symetrie sú všetky tri polohy kladných nábojov rovnaké a ľahko dokázať, že výsledná sila, ktorou budú pôsobiť náboje vo vrcholoch trojuholníka na náboj v strede, v dôsledku symetrie bude rovná nule nezávisle od znamienka a veľkosti tohoto náboja.

Označíme si náboje v rohoch trojuholníka Q_1, Q_2, Q_3 a náboj v strede Q_4 a znázorníme si na obrázku polohy nábojov a sily ktorými na seba pôsobia (pozri obr. 22). (Je zrejmé, že v dôsledku symetrie stačí preskúmať stav len v jednom vrchole). Podmienka rovnováhy vyžaduje, aby súčet všetkých síl pôsobiacich na náboj bol rovný 0. Pre náboj Q_1 platí

$$\boldsymbol{F_{1,2}} + \boldsymbol{F_{1,3}} + \boldsymbol{F_{1,4}} = 0 \qquad (1)$$

Silu vzájomného pôsobenia dvoch nábojov stanovíme z Coulombovho zákona

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_k}{r_{ik}^2} \qquad (2)$$

kde r_{ik} je vzdialenosť nábojov Q_i a Q_k.

Riešenie:

Zložíme vektorovo sily $\boldsymbol{F}_{1,2}$ a $\boldsymbol{F}_{1,3}$ do výslednej sily $\boldsymbol{F}_1$. Potom rovnicu (1) môžeme prepísať do skalárneho tvaru

$$F_{1,2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}+F_{1,4}=0\,, \tag{3}$$

kde $\alpha = 60°$. Pritom sme vzali do úvahy, že zo zadania vyplýva $F_{1,2}=F_{1,3}$.
Dosadíme výrazy pre sily (rovnica 2) zadaním príslušných parametrov do rovnice (3) a dostaneme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{r_1^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{a^2} \tag{4}$$

Z geometrie rovnostranného trojuholníka vyplýva, že $r_1=\dfrac{a}{2\cos 30'}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Dosadením do rovnice (4) a úpravou tejto rovnice dostaneme

$$Q_4=Q_1\frac{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{3}$$

Ale $\cos\alpha=0{,}5$ a po dosadení

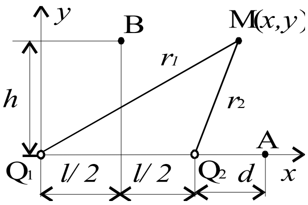
$$Q_4=\frac{Q_1}{\sqrt{3}}=\frac{5nC}{\sqrt{3}}=\frac{5nC}{\sqrt{3}}=2{,}886nC\,.$$

4.3. Dva rovnaké náboje $Q = Q_1 = Q_2 = 8\cdot10^{-12}$ C sú vzdialené 10 cm od seba. Vypočítajte potenciál a vektor intenzity v bodoch A a B (pozri obr. 22, kde h = 10 cm, d = 5 cm). Zostrojte grafy závislosti potenciálu a vektora intenzity el. poľa od vzdialenosti pre body ležiace na priamke, ktorá spája náboje a na priamke kolmej na ňu a nachádzajúcej sa symetricky voči nábojom.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$Q = Q_1 = Q_2 = 8\cdot10^{-12}$ C	φ_A = ?
l = 10 cm	φ_B = ?
h = 10 cm	$\boldsymbol{E}_A$ = ?
d = 5 cm	$\boldsymbol{E}_B$ = ?

Zdrojom elektrostatického poľa sú dva bodové náboje. V ľubovoľnom bode priestoru môžeme nájsť potenciál výsledného poľa pomocou princípu superpozície: $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, kde φ_1 a φ_2 sú potenciály polí vyvolané nábojmi Q_1 a Q_2. Zavedieme si súradnicovú sústavu tak, ako je to znázornené na obr. 23.



Obr.23

Nech M (x, y) je určitý ľubovoľný bod a preskúmame potenciál v tomto bode. Pri zvolenej súradnicovej sústave vzdialenosť r_1 a r_2 každého náboja od bodu M (x, y) môžeme vyjadriť nasledovne

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2}\quad;\quad r_2=\sqrt{(x-l)^2+y^2}$$

Potom potenciál v bode M bude rovný

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}\right). \tag{1}$$

Pretože $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\,\varphi$ dostaneme pre zložky intenzity nasledovné vzťahy

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{x-l}{\left[(x-l)^2+y^2\right]^{3/2}}\right\},$$
$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}y\left\{\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left[(x-l)^2+y^2\right]^{3/2}}\right\} \qquad (2)$$

Zo vzorcov (2) môžeme nájsť hodnotu a smer vektora intenzity elektrického poľa. Pomocou rovníc (1) a (2) môžeme zostrojiť grafy závislosti potenciálu a zložiek vektora intenzity poľa od súradníc.

Riešenie:

Súradnice bodu A sú: $x = l + d,\ y = 0$. Súradnice bodu B sú: $x = l/2,\ y = h$. Dosadením týchto súradníc do rovníc (1) a (2) nájdeme potenciály a zložky vektorov intenzity v uvedených bodoch.

V bode A bude potenciál rovný

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l+d}+\frac{1}{d}\right) = \frac{8\cdot10^{-12}\,\mathrm{A.s}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\,\mathrm{kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2}}\left(\frac{1}{0{,}1+0{,}05}+\frac{1}{0{,}05}\right)\mathrm{m^{-1}}$$

$$\varphi_A = 1{,}92\ \mathrm{V}$$

Podobne dosadením do rovníc (2), úpravou, dosadením a výpočtom dostaneme

$$E_{xA} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(l+d)^2}+\frac{1}{d^2}\right] = 2{,}88\ \mathrm{V/m}$$

$$\mathrm{E}_{yA} = 0$$

V bode A vektor intenzity elektrického poľa bude smerovať napravo v kladnom smere osi *ox*, a jeho hodnota bude 2,88 V/m.

Pri výpočte φ a E_x v bodoch, v ktorých je $x > l,\quad y = 0$ budú platiť vzťahy

$$(x-l) > 0 \quad a \quad \left[(x-l)^2+y^2\right]^{3/2} = (x-l)^3 .$$

Pre potenciál a vektor intenzity elektrického poľa sa rovnice (1) a (2) zjednodušia

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-l}\right) \quad a \quad E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-l)^2}\right).$$

Potenciál a vektor intenzity elektrického poľa, ktorý bude smerovať napravo, budú kladné.

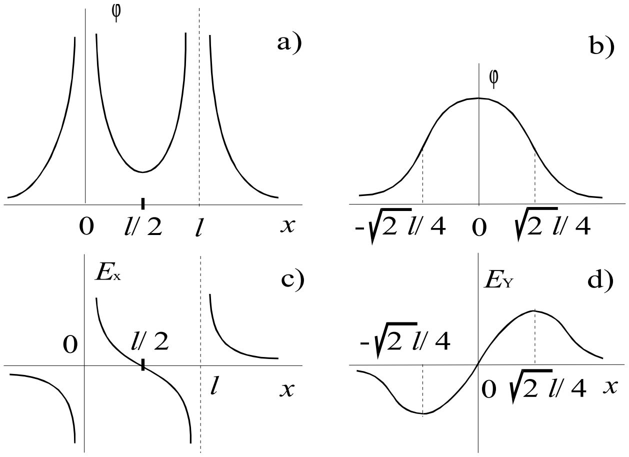
V bodoch, ktoré ležia na priamke spájajúcej náboje, $y = 0$ a potenciál

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|l-x|}\right).$$

V týchto bodoch bude $\varphi > 0$ pre ľubovoľné *x*. Keď $x \to 0$ a $x \to l$, potom $\varphi \to \infty$. Z toho je zrejmé, že potenciál v bodoch medzi $x = 0$ a $x = l$ bude mať minimum. Z výrazu pre E_x, pre body, v ktorých platí $y = 0$, je zrejmé, že $\varphi = \varphi_{min}\ (E_x = 0)$ v bode $x = l/2$. Graf závislosti potenciálu φ je znázornený na obrázku 24 a.

V bodoch, pre ktoré platí $y = 0$, viď rovnica (2)

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|x|^3} + \frac{x-l}{|x-l|^3}\right);\ E_y = 0\ .$$



Obr.24

Preto pre interval $0 < x < l$ prepíšeme vyššie uvedený výraz do tvaru

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(l-x)^2}\right).$$

V prípade $x < l/2$ bude $E_x > 0$ a v prípade, že $x > l/2$ bude $E_x < 0$.
Pre $x < 0$ bude platiť

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(l+|x|)^2}\right) < 0.$$

Vektor intenzity elektrického poľa bude mať v bodoch $x = 0$ a $x = l$ nespojitosť. Hodnoty $E_x \overset{+}{\underset{-}{\to}} \infty$ ak $x \to 0$ a $E_x \overset{-}{\underset{+}{\to}} \infty$ ak $x \to l$.
Graf závislosti $E_x(x)$ na priamke $y = 0$ je znázornený na obrázku 24 c.
V bode B

$$\varphi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + h^2}} = \frac{8\cdot 10^{-12}\,\text{A.s}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-3}.\text{s}^4.\text{A}^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\frac{(0{,}1)^2\,\text{m}^2}{4} + (0{,}1)^2\,\text{m}^2}}$$

$= 1{,}29\,\text{V}$

Tak isto ako pri výpočte intenzity el. poľa v bode B budeme postupovať pri výpočte intenzity el. poľa v bode A.

$$E_{xB} = 0 \quad E_{yB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}h\frac{2}{\left(\frac{l^2}{4} + h^2\right)^{3/2}} = 20{,}59\ \text{V/m}\ .$$

V bode B bude mať smer vektora intenzity elektrického poľa smer paralelný osi oy a jeho hodnota bude 20,59 V/m.

Pre potenciál a vektor intenzity elektrického poľa v bodoch na priamke $x = l/2$ rovnice (1) a (2) budú mať tvar

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+y^2}}$$

$$E_x = 0; \quad E_y = \frac{Q\,y}{2\pi\varepsilon_0\left(\frac{l^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}.$$

Z rovníc je zrejmé, že $\varphi \rangle 0$ pre všetky hodnoty y a znamienko E_y bude totožné so znamienkom y.

Pre hodnoty $y = \pm\sqrt{2}\,\frac{l}{4}$ bude derivácia $\frac{dE_y}{dy} = 0$, a to znamená, že funkcia $E_y(y)$ nadobúda v týchto bodoch extrémne hodnoty. Súhlasne tomuto, v týchto bodoch bude mať funkcia potenciálu $\varphi(y)$ inflexné body. Približné grafy $\varphi(y)$ a $E_y(y)$ sú znázornené na obr. 24 b a obr.24 d.

4.4. Určte hmotnosť Jupitera zo známeho stredného polomeru obežnej dráhy jeho mesiaca Io $4{,}22\cdot 10^8$ m, doby obehu tohto mesiaca 42,5 h a univerzálnej gravitačnej konštanty G.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$r = 4{,}22\cdot 10^8$ m	$M_j = ?$
$T = 42{,}5$ hod	

Vezmeme najjednoduchší model pohybu mesiaca Io okolo planéty Jupiter. Budeme predpokladať, že vplyv ostatných telies našej planetárnej sústavy je zanedbateľný a mesiac Io sa pohybuje po kružnici.

Zvolíme si vzťažnú sústavu pevne spojenú s planétou Jupiter, do ktorej umiestnime počiatok polárnej súradnicovej sústavy. Potom bude obiehať mesiac lo okolo materskej planéty s uhlovou rýchlosťou

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (1)$$

Jeho postupná rýchlosť bude rovná

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

Pri pohybe po kružnici má obiehajúce teleso normálové zrýchlenie $\frac{v^2}{r}$, ktoré je spôsobené gravitačným poľom Jupitera. Preto môžeme napísať rovnicu pohybu mesiaca v tvare

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_j m}{r^2}, \qquad (3)$$

kde m je hmotnosť mesiaca Io.

Riešenie:

Dosadíme rovnicu (2) do rovnice (3) a po úprave dostaneme

$$\frac{(2\pi)^2 r}{T^2} = G\frac{M_j}{r^2}$$

a odtiaľto

$$M_j = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{r^3}{G}.$$

$$M_j = \frac{4\pi^2}{(42{,}5\cdot 3600\text{s})^2}\cdot\frac{(4{,}22\cdot 10^8\text{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}} = 1{,}9\cdot 10^{27}\text{kg}$$

4.5. Akú rýchlosť dosahujú elektróny v obrazovke, ak sú z katódy emitované rýchlosťou $2\cdot 10^6$ ms^{-1} a urýchľovacie napätie medzi anódou a katódou je 15 kV? Aké napätie musí byť medzi katódou a mriežkou obrazovky, aby sa obrazovka zatemnila (žiadne elektróny nedopadnú na tienidlo obrazovky).

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$v_1 = 2\cdot 10^6$ m/s	$v_2 = ?$
$U = 15$ kV	$U_b = ?$
$e = 1{,}602\cdot 10^{-19}$ As	
$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg	

Pretože nás zaujímajú len počiatočné a konečné stavy, môžeme použiť zákon zachovania energie

$$E_{K2} = E_{K1} + A, \qquad (1)$$

kde E_{K1} je počiatočná kinetická energia elektrónu, E_{K2} je výsledná kinetická energia elektrónu, A je práca elektrostatického poľa. Dosadením výrazov pre kinetickú energiu a prácu $A = eU$ do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{m_e v_2^2}{2} = \frac{m_e v_1^2}{2} + eU$$

a odtiaľto

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m_e}} \qquad (2)$$

Dosadením do vzorca (2) sa musíme presvedčiť, že rýchlosť $v_2 \ll c$. Ak tomu tak nie je, budeme musieť vziať do úvahy zákon zachovania energie v relativistickom tvare

$$\frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + eU \qquad (3)$$

Po dosadení zodpovedajúcich hodnôt zo zadania do rovnice (2) dostaneme

$$v_2 = \sqrt{4 \cdot 10^{12} \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2} + \frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A.s} \cdot 15 \cdot 10^3\,\mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-3}.\mathrm{A}^{-1}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 7{,}27 \cdot 10^7\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

Vidíme, že vypočítaná rýchlosť je približne 0,2 c a teda nemôžeme predpokladať, že platia zákony nerelativistickej mechaniky. (Pre výpočet brzdiaceho napätia na mriežke môžeme použiť rovnicu (2), pretože $v_1 \ll$ c a $v_2 = 0$.)

Rýchlosť elektrónu musíme preto počítať podľa vzťahu (3). Preskúmame výraz

$$\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\,.$$

Zistíme, že veličinou $\frac{v_1^2}{c^2}$ môžeme voči 1 zanedbať, a preto môžeme rovnicu (3) prepísať do tvaru

$$\frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_{e0}c^2 + eU \tag{4}$$

Riešenie:

Rovnicu (4) upravíme nasledovne

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = 1 + \frac{eU}{m_{e0}c^2}$$

a odtiaľto

$$v_2 = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{m_{e0}c^2}\right)^2}}\,.$$

Po dosadení dostaneme

$$v_2 = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A.s} \cdot 15 \cdot 10^3\,\mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-3}.\mathrm{A}^{-1}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}\right)^2}} = 5{,}06 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}.$$

Brzdiace napätie U_B vypočítame z klasického zákona zachovania energie, pretože v_1 je asi 0,007 c. Pretože $E_{K2} = 0$ dostaneme

$$U_B = \frac{m_e v_1^2}{2e}$$

a po dosadení

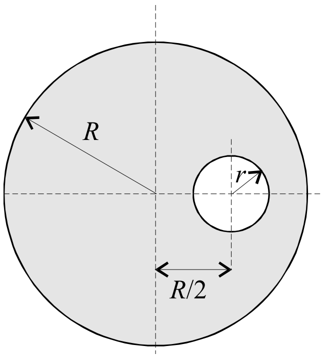
$$U_B = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2\left(-1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A.s}\right)} = \text{-11,4 V}.$$

Neriešené príklady

4.6. Aký priemer musia mať dve dotýkajúce sa rovnaké olovené gule, keď sa majú navzájom priťahovať silou 10^{-2}N? [1,43 m]

4.7. Aký je pomer gravitačného zrýchlenia na povrchu Mesiaca a na povrchu Zeme? Polomer Mesiaca je 0,273-násobok polomeru Zeme a hmotnosť Mesiaca je 0,0123-násobok hmotnosti Zeme. [0,165]

4.8. Saturn má hmotnosť 95-krát väčšiu ako Zem a polomer 9-krát väčší ako polomer Zeme. Vypočítajte gravitačné zrýchlenie na povrchu Saturnu. [11,5 m.s^{-2}]

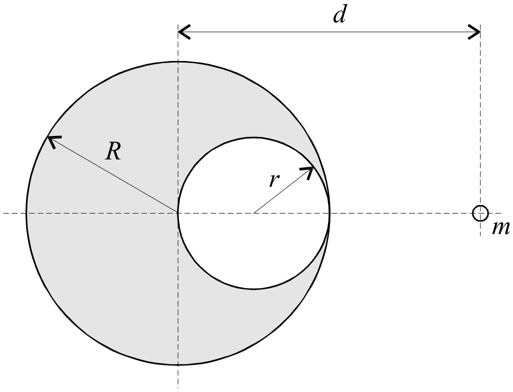


Obr.25

4.9. Jablko s hmotnosťou 0,2 kg sa nachádza na povrchu Zeme. a) Stanovte ich vzájomné silové pôsobenie, b) intenzitu gravitačného poľa Zeme v strede jablka, c) intenzitu gravitačného poľa jablka v strede Zeme! [a) 1,962 kg.m.s^{-2}; b) 9,81 m.s^{-2}; c) $3{,}28 \cdot 10^{-25}$ m.s^{-2}]

4.10. Aké zrýchlenie udeľuje Slnko telesám na Zemi? [Rovnaké ako Zemi (ak zanedbáme rozmery Zeme v porovnaní so vzdialenosťou od Slnka), $6 \cdot 10^{-3}$ m.s^{-2}]

4.11.* Vo vnútri gule o polomere R = 1 m a hustote $11{,}2 \cdot 10^{3}$ kg.m^{-3} je sférická dutina polomeru $r = R/4$. Stred dutiny sa nachádza vo vzdialenosti $R/2$ od stredu gule, pozri obr.25 Vypočítajte intenzitu gravitačného poľa na povrchu gule v bodoch, v ktorých sa pretínajú povrch gule a spojnica stredov gule a dutiny! [a) dutina je ďalej od povrchu $3{,}1 \cdot 10^{-6}$ kg.m.s^{-2} ; b) dutina je bližšie k povrchu $2{,}9 \cdot 10^{-6}$ kg.m.s^{-2}]



Obr.26

4.12.* V kovovej guli s polomerom R je vytvorená dutina guľového tvaru s polomerom r=R/2 spôsobom znázorneným na obr.26. Treba zistiť, akou silou bude pôsobiť takto vzniknutý hmotný útvar na guľôčku hmotnosti m nachádzajúcu sa vo vzdialenosti d od stredu pôvodnej kovovej gule, keď hmotnosť pôvodnej kovovej gule bola M.

[$\mathrm{G}mM\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right]$]

4.13. Akou veľkou silou pôsobí Mesiac na 1 m^3 morskej vody s hustotou 1030 kg.m^{-3} na povrchu Zeme? Hmotnosť Mesiaca je $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg, vzdialenosť stredov Mesiaca a Zeme je 384000 km a polomer Zeme je 6378 km .
90,0353 N]

4.14. V akej vzdialenosti r_1 od stredu Zeme bude predmet, ktorý sa nachádza medzi Zemou a Mesiacom, v beztiažovom stave? (vzdialenosť stredu Mesiaca od stredu Zeme r= 384400 km, hmotnosť mesiaca = 1/81 hmotnosti Zeme) [r_l=0,9 r=346000 km]
4.15. Z veľmi veľkej vzdialenosti začína padať meteorit hmotnosti 1000 kg. Vypočítajte kinetickú energiu meteoritu vo vzdialenosti 200 km od povrchu Zeme! Počiatočnú rýchlosť meteoritu pokladajte rovnú 0. [60,7 GJ]
4.16. Vypočítajte minimálnu rýchlosť, ktorú treba udeliť telesu na povrchu Zeme, aby dopadlo na Mesiac! Aká bude rýchlosť dopadu telesa na Mesiac? M_Z = 81 M_M, vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca 60 R_Z a R_M=0,273 R_Z.
[11073 m.s^{-2}; 2324 m.s^{-1}]
4.17. Akú vzdialenosť od stredu Zeme musí mať umelá družica, ktorá obieha tak, že sa zdá, že stojí nad určitým bodom rovníka? (polomer Zeme je 6378 km) [42300 km]
4.18. Určte hmotnosť Slnka z polomeru obežnej dráhy Zeme $1{,}49\cdot 10^{11}$ m , periódy obehu Zeme a gravitačnej konštanty G! Vypočítajte strednú hustotu Slnka, ak jeho polomer je $6{,}96\cdot 10^{8}$ m! 9 $2\cdot 10^{30}$ kg ; $1{,}4\cdot 10^{3}$ kg.m^{-3}9
4.19. Aká je perióda obiehania umelej družice Zeme na dráhe, ktorej polomer sa rovná polovici polomeru geostacionárnej dráhy umelej družice? [8 hod 29 min]
4.20. Aký je pomer gravitačného zrýchlenia v meste A a v meste B, ak kyvadlo vykoná v meste A za hodinu 3600,0 kmitov a v meste B za rovnakú dobu a pri rovnakej teplote 3601,4 kmitov? [$g_B = g_A \cdot 1{,}0008$]
4.21. Ako by sa zmenil chod kyvadlových hodín, keby boli prenesené zo Zeme na Mesiac? [Hodiny by išli 2,5 krát pomalšie.]
4.22. Určte hmotnosť Marsu, ak intenzita gravitačného poľa na jeho povrchu je 3,63 N.kg^{-1} a jeho polomer je $3{,}32\cdot 10^{6}$ m ! 9 $6\cdot 10^{23}$ kg9
4.23.* Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa drôtu hmotnosti m, ohnutého do tvaru kružnice s polomerom R v bode P na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu! [$\varphi = -G\dfrac{m}{\sqrt{a^2+R^2}}$; $K = G\dfrac{ma}{(a^2+R^2)^{3/2}}$]
4.24. Aby ste si urobili predstavu o veľkosti náboja 1 coulomb, vypočítajte akou silou sa odpudzujú dva súhlasné náboje, obidva veľkosti 1 coulomb, vzdialené od seba 1 km. [8996 N]
4.25. Akou silou priťahuje jadro vodíkového atómu elektrón, ak priemer vodíkového atómu je $2\cdot 10^{-8}$ cm? [$2{,}3\cdot 10^{-8}$ N]
4.26. Dve rovnaké guličky polomeru 1 cm a hmotnosti 9,81 g visia z jedného bodu na dvoch nitkách dĺžky 19 cm. Guličky nabijeme súhlasnými nábojmi rovnakej veľkosti. Aký veľký je náboj každej guličky, ak sa rozostúpia tak, že nitky zvierajú uhol 90^0? [0,88 μC]
4.27. Rozhodnite, či je stabilná rovnovážna poloha bodového náboja, ležiaceho uprostred medzi dvoma inými rovnakými bodovými nábojmi, ktorých znamienka sú buď rovnaké, alebo opačné ako znamienko prvého náboja.[nestabilná]

⊕ ⊖ ⊕ ⊖ ⊕ ⊖ ⊕

Obr.27

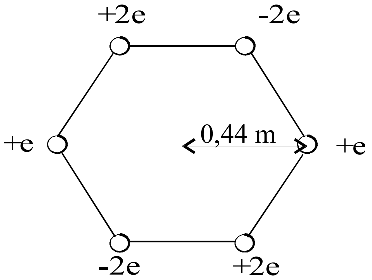
4.28. Na obr. 27 je znázornená časť nekonečného jednorozmerného reťazca kladných a záporných iónov. Vypočítajte silu pôsobiacu na ľubovoľný vybraný ión zo strany polovice reťazca! Akou silou by na ión pôsobil len susedný ión?

Vzdialenosť medzi iónmi je 0,15 nm, a ióny sú jednovalentné. [$8{,}4\cdot10^{-9}$ kg.m.s^{-2} ; $1{,}02\cdot10^{-8}$ kg.m.s^{-2}]

4.29. Dva veľmi dlhé priame medené drôty sú rovnobežné a elektricky nabité. Hustota naboja pripadajúca na jednotku dĺžky v jednom z nich je λ_1 a v druhom λ_2. Vypočítajte akou silou pôsobí prvý vodič na jednotku dĺžky druhého vodiča, keď vzdialenosť medzi nimi je d a sú umiestené vo vákuu! (Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty λ_1=λ_2=λ= 0,1 μC.cm^{-1}, d = 0,5 cm!) [$F = \dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 d}$ =360 N.m^{-1}]

4.30.* Nekonečne dlhá niť, na ktorej je rovnomerne rozložený elektrický náboj lineárnej hustoty $2\cdot10^{-6}$ C.m^{-1}, sa nachádza v jednej rovine s tenkou tyčkou dlhou 12 cm, na ktorej je rovnomerne rozdelený náboj $3\cdot10^{-9}$ C . Uhol medzi niťou a osou tyčky je 30^0. Stred tyčky je vzdialený 8 cm od nite. Vypočítajte akou silou pôsobí niť na tyčku ako aj hraničné hodnoty sily pre $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi/2$! [$1{,}42\cdot10^{-3}$ N, $1{,}35\cdot10^{-3}$ N, $1{,}75\cdot10^{-3}$ N]

4.31. Nech potenciál poľa v určitom priestore závisí len od súradnice x vzťahom $\varphi = \dfrac{-ax^2}{2} + c$. Aká bude veľkosť intenzity poľa? [E = ax]



Obr.28

4.32. Vypočítajte potenciál a veľkosť intenzity elektrického poľa sústavy nábojov (pozri obr.28) vo vzdialenosti a) 1 m a b) 1000 m od stredu sústavy na kolmici k rovine sústavy.
[φ_a= $26{,}37\cdot10^{-10}$ V; φ_b= $28{,}81\cdot10^{-13}$ V;
E_a= $22{,}09\cdot10^{-10}$ kg.m.s^{-3}.A^{-1};
E_b= $28{,}81\cdot10^{-16}$ kg.m.s^{-3}.A^{-1}]

4.33. Z mydlovej bubliny polomerom 2cm a nabitej na potenciál 10000 V vznikne po prasknutí kvapka s polomerom r_l=0,05 cm. Aký veľký je potenciál tejto kvapky? [$4\cdot10^5$ V]

4.34. Guľôčka o polomere r_1 je nabitá nábojom Q. Potom sa táto guľôčka dotkla druhej guľôčky o polomere r_2. Dokážte, že podmienka rovnosti potenciálov oboch guľôčiek sa rovná podmienke minima energie elektrického poľa sústavy.

4.35. Dve rovinné kovové platne, navzájom rovnobežné, veľkej plochy S v malej vzdialenosti d od seba sú elektricky nabité. Platňa 1 nesie kladný náboj 2Q, platňa 2 kladný náboj Q. Vypočítajte rozdiel potenciálov $\varphi_1 - \varphi_2$ medzi platňou 1 a platňou 2, keď medzi nimi je vákuum! $\left[\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\int_1^2 \mathrm{d}r = \dfrac{Q\,\mathrm{d}}{2\varepsilon_0 S}\right]$

4.36. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa v okolí nabitého, veľmi dlhého priameho drôtu, keď je v jeho okolí vákuum! Dĺžková hustota náboja je λ. $\left[E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right]$

4.37. Elektrické pole tvoria dve rovnomerne nabité rovnobežné nekonečné dosky, ktorých vzdialenosť je d. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa v priestore medzi doskami a mimo nich ako aj napätie medzi doskami, keď
a) plošná hustota náboja na jednej z nich je σ_1 a na druhej $\sigma_2 = 2\sigma_1$,
b) plošné hustoty náboja na oboch doskách sú rovnako veľké, ale náboje sú opačného znamienka. Obklopujúce prostredie dosiek je vákuum.
Riešte pre hodnoty $\sigma_1 = 10\ \mu C.m^{-2}$, $d = 10$ cm!

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)}\quad \text{Medzi doskami}\quad E = 5{,}6\cdot 10^5\,\text{N.C}^{-1},\quad U = 56\,\text{kV}. \\ \quad\ \text{Mimo medzery medzi doskami}\quad E = 16{,}8\cdot 10^5\,\text{N.C}^{-1}. \\ \text{b)}\quad \text{Medzi doskami}\,E = 11{,}2\cdot 10^5\,\text{N.C}^{-1},\quad U = 112\,\text{kV}. \\ \quad\ \text{Mimo medzery medzi doskami}\quad E = 0. \end{array}\right]$$

4.38. Aká je intenzita elektrostatického poľa vo vnútri a v okolí gule polomeru R, ktorá je rovnomerne nabitá nábojom objemovej hustoty ρ? Predpokladajte, že guľa je vo vákuu.

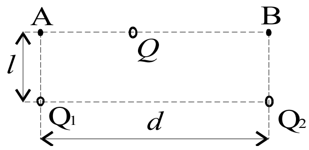
$$\left[\text{Pre } r < R : E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},\ pre\ r > R : E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\right].$$

4.39. Tenká niť dlhá 10 cm je rovnomerne nabitá celkovým nábojom $3\cdot 10^{-9}$ C . Vypočítajte veľkosť intenzity elektrického poľa v bode, ktorý leží na tej istej priamke ako niť a je vzdialený 20 cm od stredu nite. [720 Vm^{-1}]

4.40.* Kladný náboj $4\cdot 10^{-9}$ C je rovnomerne rozdelený na tenkom kovovom krúžku o polomere 0,2 m. Vypočítajte hodnotu potenciálu v bode, v ktorom veľkosť intenzity elektrického poľa dosahuje maximálnu hodnotu! [147 V]

4.41. Vo vákuu sa nachádza veľmi tenký disk polomeru r = 120 mm, na ktorom je rovnomerne rozložený náboj $q = 1{,}8\,\mu C$. Vypočítajte potenciál a veľkosť intenzity poľa vo vzdialenosti 80 mm na osi kolmej na rovinu disku.
[144,37 kV; $1\cdot 10^6$ kg.m.s^{-3}.A^{-1}]

4.42. Intenzita elektrického poľa na osi nabitého kruhového závitu má maximálnu hodnotu v istej vzdialenosti od stredu tohto závitu. Koľkonásobne je intenzita elektrického poľa menšia v bode, ktorý leží v polovičnej vzdialenosti od stredu závitu, ako maximálna hodnota intenzity? [1,3 krát]



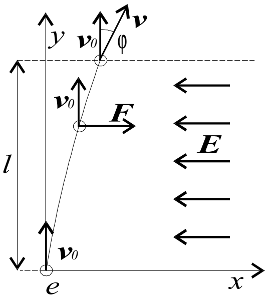
Obr.29

4.43. Na aký potenciál možno nabiť guľovú elektródu o priemere 5 cm obklopenú vzduchom, ak pri elektrickej intenzite 30 kV/cm nastáva výboj sršaním? [75 kV]

4.44. Vypočítajte prácu síl elektrostatického poľa pri premiestnení náboja Q v elektrickom poli nábojov Q_1 a Q_2 z bodu A do bodu B. (pozri obr. 29)
(Vypočítajte pre hodnoty Q=3C, Q_1=+10 C, Q_2=-10 C, d = 8m, l = 6m,) $\left[36\cdot 10^9\,\text{J}\right]$

4.45. Dve duté tenkostenné gule so spoločným stredom sa nachádzajú vo vákuu. Každá guľa je nabitá elektrickým nábojom $Q = 5.10^{-6}$ C. Polomery gulí sú r_1 = 1 m a r_2 = 2 m. Vypočítajte energiu elektrostatického poľa v priestore medzi guľami. Zmení sa energia elektrostatického poľa ak na vonkajšej guli odstránime náboj? [$5{,}625\cdot 10^{-2}$ J; nezmení]

4.46. Vo vrcholoch trojuholníka ABC sa nachádzajú tri bodové náboje $Q_A = 3\cdot 10^{-6}$ C, $Q_B = 5\cdot 10^{-6}$ C a $Q_C = -8\cdot 10^{-6}$ C. Rozmery strán trojuholníka sú AB = 0,3 m, AC = 0,4 m a BC = 0,5 m. Vypočítajte prácu potrebnú na vytvorenie tejto sústavy elektrických nábojov! Aké budú rozmery strán trojuholníka, a k sústava bude vytvorená dvojnásobnou prácou, ale symetria trojuholníka bude zachovaná? Sústavu nábojov uvažujte vo vákuu. [-8,09 J; polovičné rozmery strán]



Obr.30

4.47. Do homogénneho elektrostatického poľa intenzity $\boldsymbol{E}$, ktorého siločiary sú rovnobežné so súradnou osou x, vletí elektrón kolmo k siločiaram v smere osi y rýchlosťou v_0. Počiatok súradníc je v mieste vstupu elektrónu do poľa. Odvoďte rovnicu dráhy elektrónu a vypočítajte uhol φ, o ktorý sa odchýli smer pohybu elektrónu od pôvodného smeru pri prechode poľom šírky l! (Pole je ohraničené rovinami y = 0 a y = l). Pozri obr.30.

$$\left[x = \frac{eEy^2}{2mv_0^2}, \text{ parabola}, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{eEl}{mv_0^2}\right]$$

4.48. Elektrón vlieta do homogénneho magnetického poľa. V tomto okamžiku sa nachádza v bode P. Smer jeho rýchlosti zviera uhol α s vektorom magnetickej indukcie. Po opísaní dráhy jedného závitu elektrón bude v bode Q. Vypočítajte vzdialenosť $\overline{PQ}$ ak α=60°, v =10^3 m.s^{-1} a B=1 T! [$1{,}786 \cdot 10^{-8}$ m]

4.49. Aký rozdiel potenciálov musí prejsť elektrón, aby jeho vlastný čas bol 10 krát väčší ako laboratórny čas. [4,6 MV]

4.50. Akú rýchlosť dosiahne α - častica, ak bude urýchlená rozdielom potenciálov 112 kV? [$3{,}28 \cdot 10^6$ m].