5 Dynamika tuhého telesa

V tomto paragrafe budeme skúmať pohyb tuhého telesa pod vplyvom vonkajších síl. Ohraničíme sa buď len na otáčanie sa okolo nepohyblivej osi, alebo zložitejší pohyb v rovine, ktorý pozostáva z postupného pohybu a z rotácie okolo osi prechádzajúcej cez ťažisko a kolmej na rovinu, v ktorej ležia dráhy všetkých bodov telesa. Je preto nutné najprv zoznámiť sa s hľadaním ťažiska tuhého telesa a až potom pristúpiť k problému zaoberajúcemu sa pohybom tuhého telesa.

Riešenie pohybu tuhých telies môžeme hľadať dvoma spôsobmi: Riešením prvej a druhej pohybovej rovnice alebo pomocou zákonov zachovania. V druhom prípade treba venovať pozornosť tomu, ktorý zo zákonov zachovania možno použiť, pretože na rozdiel od dynamiky hmotného bodu budú zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania momentu hybnosti dva od seba nezávislé zákony.

Voľbu spôsobu riešenia, ako aj postup riešenia každej konkrétnej úlohy možno urobiť až po podrobnom preskúmaní podmienok úlohy, t.j. detailného rozboru síl, ktoré pôsobia na jednotlivé telesá. Pritom musíme brať do úvahy miesta pôsobenia týchto síl.

1. Moment zotrvačnosti hmotného bodu je daný vzťahom

$$J = mr^2 ,$$

kde r je vzdialenosť hmotného bodu od osi otáčania.

2. Moment zotrvačnosti tuhého telesa, ktorý charakterizuje mieru zotrvačnosti tuhého telesa pri otáčavom pohybe, je daný vzťahom

$$J = \int_V \rho r^2 \mathrm{d}V ,$$

kde ρ je hustota tuhého telesa a r – vzdialenosť elementu objemu dV od osi otáčania

3. Steinerova veta hovorí, že ak poznáme moment zotrvačnosti tuhého telesa voči osi prechádzajúcej cez jeho hmotný stred J_0, potom moment voči paralelnej osi vo vzdialenosti a od osi prechádzajúcej cez hmotný stred vypočítame zo vzťahu

$$J = J_0 + ma^2 ,$$

kde m je hmotnosť tuhého telesa.

4. Moment sily vzhľadom na počiatok súradníc je rovný vektorovému súčinu polohového vektora bodu $\boldsymbol{r}$, v ktorom pôsobí sila $\boldsymbol{F}$, s touto silou,

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r} \ x \ \boldsymbol{F}]$$

5. Druhá pohybová rovnica, ktorá popisuje otáčavý pohyb tuhého telesa okolo osi, má tvar

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t} ,$$

kde $\boldsymbol{L}$ je moment hybnosti tuhého telesa.

6. Keď na tuhé teleso, ktoré sa otáča okolo nehybnej osi, pôsobí súčasne viac síl, výsledný moment síl je daný vektorovým súčtom jednotlivých momentov

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 + ...$$

7. Tuhé teleso otáčavé okolo osi je v rovnovážnej polohe, ak vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, sú rovné nule:

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0; \quad \sum \boldsymbol{M}_i = 0$$

8. V izolovanej sústave je celkový moment hybnosti konštantný

$$\sum \boldsymbol{L}_i = konšt.$$

9.Kinetická energia tuhého telesa je rovná súčtu kinetickej energie jeho postupného pohybu a kinetickej energie jeho otáčavého pohybu

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{p}^2 + \frac{1}{2} J\,\omega^2,$$

kde v_p je postupná rýchlosť hmotného stredu tuhého telesa.

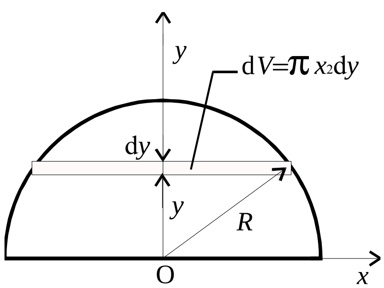
Riešené príklady

5.1. Nájdite polohu hmotného stredu homogénnej mosadznej pologule o polomere krivosti *R*! Vypočítajte pre *R*=4 cm!

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
ρ = konšt.	x_t = ?
R = 4 cm	y_t = ?

Zo zadania je zrejmé, že hustota pologule ρ bude konštantná po celom objeme. Zvolíme si vhodne súradnicovú sústavu tak, aby sme využili symetriu telesa. Ak si zvolíme osi ako je to znázornené na obrázku 31, v dôsledku symetrie bude x-ová súradnica hmotného stredu rovná 0. Znamená to, že je potrebné vypočítať len y-ovú súradnicu hmotného stredu. Použijeme vzťah



Obr.31

$$y_t = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \tag{1}$$

kde d*m* je element hmotnosti a vzhľadom na ρ = konšt dostaneme

$$y_t = \frac{\int \rho y\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V} = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{V}, \tag{2}$$

kde d*V* je element objemu.

Riešenie:

Zvolíme si vhodne element objemu tak, ako je to znázornené na obrázku 31, potom

$$\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}y \quad \text{a} \quad x^2 = R^2 - y^2 .$$

Dosadením do vzorca (2) dostaneme

$$y_t = \frac{1}{V}\int_0^R \pi y\,\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}\pi\left[\frac{R^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^R = \frac{3}{8}R.$$

Ťažisko sa bude nachádzať vo výške 3/8 polomeru pologule nad jej základňou. Po dosadení číselnej hodnoty bude táto výška 1,5 cm.

5.2. Plný oceľový valec (ρ = 7,6 g/cm^3) dlhý 80 cm a hrubý 20 cm má mať na sústruhu 180 ot/min. Aká hnacia sila F sa musí prenášať na stupňový prevodový kotúč, ktorého priemer je: a) rovnaký ako priemer valca t.j. 20 cm; b) 30 cm, keď rozbehový čas môže trvať najviac 5 sekúnd. Aký výkon musí vyvinúť motor sústruhu v prípade a) a v prípade b)?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
valec	F = ?
r_v = 0,1 m	P_{max} = ?
l = 0,8 m	
ρ = $7{,}6\cdot10^3$ kg.m^{-3}	
f = 3 s^{-1}	
Δt = 5 s	
r_1 = 0,1m	
r_2 = 0,15 m	
ω_0 = 0	

Hnacia sila $\boldsymbol{F}$ potrebná na roztočenie valca musí na prevodovom kotúči pôsobiť momentom sily $\boldsymbol{M}$, ktorý vyvolá uhlové zrýchlenie valca $\boldsymbol{\varepsilon}$ také, že po uplynutí rozbehového času bude uhlová rýchlosť valca rovná požadovanej hodnote t.j. $\omega = 2\pi f$.

Moment sily je rovný

$$\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{r}\ x\ \boldsymbol{F}\right], \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta pôsobenia sily $\boldsymbol{F}$ vzhľadom na stred prevodového kotúča. Pohybová rovnica valca má tvar

$$J\varepsilon = \boldsymbol{M}\ , \tag{2}$$

kde J je moment zotrvačnosti valca. Pretože vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$ sú na seba kolmé, môžeme upraviť rovnice (1) a (2) na skalárnu rovnicu.

$$F = \frac{J\,\varepsilon}{r} \tag{3}$$

Pretože veľkosť sily F je konštantná, bude konštantné aj zrýchlenie ε. Potom, ak vezmeme do úvahy, že počiatočná uhlová rýchlosť bola nulová, bude platiť $\omega = \varepsilon\Delta t$ a odtiaľ

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\Delta t} \tag{4}$$

Dosadením rovnice (4) do rovnice (3) dostaneme výraz pre požadovanú silu. Výkon sily P je definovaný ako prvá derivácia jej práce podľa času

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\left(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{5}$$

pretože hodnota sily je konštantná.

Vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ bude rovný

$$\boldsymbol{v} = \left[\boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}\right] \tag{6}$$

t.j. bude mať ten istý smer ako sila $\boldsymbol{F}$.

Z rovnice (5) je zrejmé, že maximálny výkon vyvinie hnacia sila na konci časového úseku Δt. Pomocou rovníc (3), (4), (5), (6) dostaneme

$$P_{max} = F\,\omega r \tag{7}$$

Riešenie: Moment zotrvačnosti plného valca je rovný $m r_v^2/2$. Hmotnosť valca je rovná súčinu jeho objemu a hustoty materiálu, z ktorého je valec vyrobený, $m = \rho\pi r_v^2 l$. Dosadením do rovnice (3) a úpravou dostaneme

a) $r = r_1 = r_v$

$$F = \frac{\pi r_v^2 l\rho r_v^2}{2r_1}\frac{2\pi f}{\Delta t} = \frac{\pi^2 r_v^3 l\rho f}{\Delta t} = \frac{(3{,}14)^2\cdot(0{,}1\mathrm{m})^3\cdot 0.8\mathrm{m}\cdot 7{,}6\cdot 10^3\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 3\mathrm{s^{-1}}}{5\mathrm{s}} = 36\,\mathrm{N}$$

b) $r = r_2$

$$F = \frac{\pi r_v^2 l\rho r_v^2}{2r_2}\frac{2\pi f}{\Delta t} = \frac{\pi^2 r_v^4 l\rho f}{r_2\Delta t} = \frac{(3{,}14)^2\cdot(0{,}1\mathrm{m})^4\cdot 0{,}8\mathrm{m}\cdot 7{,}6\cdot 10^3\mathrm{kg.m^{-3}}\cdot 3\mathrm{s^{-1}}}{0{,}15\mathrm{m}\cdot 5\mathrm{s}} = 24\,\mathrm{N}$$

Dosadením do rovnice (7) dostaneme

a) $$P_{\mathrm{Max}} = F\,2\pi f r_1 = 36\mathrm{kg.m.s^{-1}}\cdot 2\pi\cdot 3\mathrm{s^{-1}}\cdot 0{,}1\mathrm{m} = 67{,}9W$$

b) $$P_{\mathrm{Max}} = F\,2\pi f r_2 = 24\mathrm{kg.m.s^{-1}}\cdot 2\pi\cdot 3\mathrm{s^{-1}}\cdot 0{,}15\mathrm{m} = 67{,}9W$$

V oboch prípadoch požadovaný výkon je rovnaký, lebo v oboch prípadoch je potrebné vykonať tú istú prácu ($J\omega^2/2$) v tom istom čase (3s).

5.3. Na koncoch nite prevesenej cez kladku, ktorej hmotnosť je m_2= 2 kg, visia rovnaké závažia každé hmotnosti m = 2 kg. K jednému závažiu pridáme prívažok hmotnosti m_1 = 0,5 kg. Akú dráhu prejdú závažia za čas 1 s po uvoľnení kladky, keď trenie a odpor vzduchu neuvažujeme?

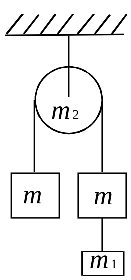
Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 2 kg	s = ?
m_1 = 0,5 kg	
m_2=2 kg	
t = 1 s	
v_0 = 0	

Po uvoľnení kladky bude tiažová sila $(m + m_1)g$, ktorá pôsobí na pravý koniec nite (pozri obr.32), väčšia ako tiažová sila mg, ktorá pôsobí na ľavý koniec nite a sústava sa začne pohybovať tak, že kladka sa otáča v smere hodinových ručičiek. Nech od okamžiku, kedy bola uvoľnená kladka, klesli závažia $m + m_1$ o vzdialenosť s a získali rýchlosť v. Potom, v dôsledku toho, že niť je nehmotná, závažie m získa tú istú rýchlosť a posunie sa nahor o vzdialenosť s. Okrem toho sa bude kladka, ktorej polomer je r, otáčať uhlovou rýchlosťou ω, pre ktorú platí vzťah

$$v = \omega r\ , \tag{1}$$

pretože medzi niťou a kladkou nie je žiadne šmykové trenie, t.j. pôsobí tu len sila statického trenia. Tiažové sily a tiež sila statického trenia medzi niťou a kladkou nezávisia od času, a preto zrýchlenie sústavy bude konštantné. Potom dráhu s môžeme vypočítať zo vzťahu



Obr.32

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\ .$$

V čase t=0 boli s_0 a v_0 rovné 0, a preto platí

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \,. \qquad (2)$$

Pretože na sústavu nepôsobia disipatívne sily (sily trenia), môžeme použiť zákon zachovania energie. Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že úbytok potenciálnej energie sústavy bude rovný prírastku kinetickej energie sústavy

$$\Delta E_p = \Delta E_k \,. \qquad (3)$$

Potenciálna energia bude funkciou dráhy a kinetická energia funkciou rýchlosti. Znamená to, že pomocou rovníc (2) a (3) môžeme vypočítať zrýchlenie a dráhu, ktorú prejdú závažia za čas t.

Riešenie:

Vyjadríme si zmeny potenciálnej a kinetickej energie sústavy závaží a kladky v čase t, keď závažia prejdú dráhu s.

$$(m + m_1) g s - m g s = \frac{1}{2}(m + m_1) v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2 \,. \qquad (4)$$

Pretože kladka tvorí plný disk, bude jej moment zotrvačnosti $J = \frac{1}{2} m_2 r^2$ a použitím vzťahu (1) môžeme rovnicu (3) upraviť do nasledovného tvaru

$$m_1 g s = \frac{v^2}{2}\left(m_1 + 2m + \frac{m_2}{2}\right). \qquad (5)$$

Dráha a rýchlosť sú funkciami času, a preto môžeme vypočítať zrýchlenie sústavy derivovaním rovnice (5) podľa času.

$m_1 g \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(m_1 + 2m + \frac{m_2}{2}\right)$, ale $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť v a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ je zrýchlenie a.

Po úprave dostaneme:

$$a = \frac{2m_1}{2m_1 + 4m + m_2} g \,.$$

Dosadením zrýchlenia do rovnice (2) dostaneme

$$s = \frac{m_1}{2m_1 + 4m + m_2} g t^2 = \frac{0{,}5\ \mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg} + 8\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}} \cdot 1^2 \mathrm{s}^2 \approx 0{,}446\ \mathrm{m}$$

5.4. Sústava pozostáva z voľnej a pevnej kladky. Tenké lanko je jedným koncom upevnené ku stropu, druhý koniec visí voľne z pevnej kladky. Medzi upevneným koncom lanka a pevnou kladkou sa nachádza voľná kladka. Pevnú kladku tvorí plný disk hmotnosti 2 kg o priemere 0,2 m. Voľná kladka má tú istú hmotnosť a polomer ako pevná kladka, len jej hmotnosť je prakticky celá rozdelená po obvode kladky, pozri obr.33. Akou konštantnou silou musíme pôsobiť na voľný koniec lanka, aby sme zdvihli závažie hmotnosti 10 kg, ktoré je upevnené na voľnej kladke, do výšky 2 m za 2s?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
$m = 2$ kg	$F = ?$
$r = 0{,}1$ m	
$M = 10$ kg	
$s = 2$ m	
$t = 2$ s	

Sila, ktorou budeme pôsobiť na lanko, uvedie do zrýchleného pohybu nie len závažie, ale aj kladky. Pretože sila pôsobiaca na lanko je konštantná, bude tento pohyb rovnomerne zrýchlený. Aby sme riešili pohyb celej sústavy, urobíme si analýzu síl a napíšeme si pohybové rovnice pre závažie a obe kladky. Na obrázku 33 sú znázornené sily, ktoré pôsobia v našej sústave. Je zrejmé, že voľná kladka a závažie na nej upevnené budú mať rovnaké postupné zrýchlenie, a preto môžeme napísať

$$(M+m)a = T_1 + T_2 - (M+m)g \; . \tag{1}$$

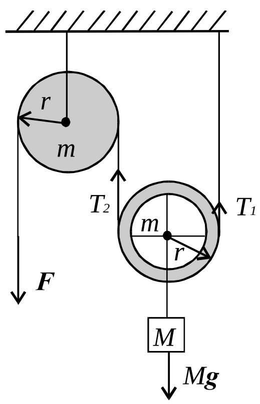
Voľná kladka sa bude otáčať so zrýchlením ε_1. Pohybová rovnica bude mať tvar

$$J_1\varepsilon_1 = (T_2 - T_1)r \; , \tag{2}$$

kde $J_1 = mr^2$.

Podobne pre pevnú kladku bude platiť pohybová rovnica

$$J_2\varepsilon_2 = (F - T_2)r \; , \tag{3}$$



Obr.33

kde $J_2 = \frac{1}{2}mr^2$.

Zrýchlenie závažia môžeme zistiť pomocou vzťahu pre dráhu pri rovnomerne zrýchlenom pohybe. Ak vezmeme do úvahy počiatočné podmienky bude platiť

$$a = \frac{2h}{t^2} \; . \tag{4}$$

Máme štyri rovnice ale 5 neznámych Je zrejmé, že ak sa koniec lanka posunie o vzdialenosť $2x$, potom sa voľná kladka spolu so závažím zdvihnú o vzdialenosť x. Lanko je ideálne t.j. nepreklzuje, a preto sa pevná kladka pootočí o uhol $\varphi_2 = 2x/r$. Uhlové zrýchlenie pevnej kladky ε_2 sa rovná $\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2}$ a to sa rovná

$$\varepsilon_2 = 2a/r \; . \tag{5}$$

Ostáva vyriešiť otázku o koľko sa pootočí voľná kladka ak sa lanko posunie o $2x$. Voľná kladka sa zdvihne o x a pootočí o uhol φ_1. Musí platiť rovnica

$$2x = \varphi_1 r + x \; . \tag{6}$$

Uhlové zrýchlenie voľnej kladky ε_1 je druhou deriváciou rovnice (6)

$$\varepsilon_1 = a/r, \;\text{ t.j. } \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1. \tag{7}$$

Máme teraz 6 nezávislých lineárnych rovníc o 6 –tich neznámych a ich riešením zistíme hľadanú veličinu F.

Riešenie:

Pretože je potrebné vypočítať silu F je vhodné upraviť si rovnice (1) až (6) tak, aby sme dostali závislosť sily F od zrýchlenia, ktoré môžeme vypočítať z rovnice (4). Použitím rovníc (5) a (7) a dosadením momentov zotrvačnosti upravíme rovnicu (1), (2) a (3) do nasledovného tvaru

$$(M+m)a = T_1 + T_2 - (M+m)g\,, \tag{8}$$

$$ma = T_2 - T_1\,, \tag{9}$$

$$ma = F - T_2\,. \tag{10}$$

Z rovnice (10) si vyjadríme T_2

$$T_2 = F - ma\,.$$

Dosadíme do rovnice (9) a po úprave dostaneme

$$T_1 = F - 2ma\,.$$

Po dosadení výrazov pre T_1 a T_2 do rovnice (8) dostaneme

$$F = \frac{1}{2}\left[(M+4m)a + (M+m)g\right].$$

a po dosadení z rovnice (4) za zrýchlenie bude sila F rovná

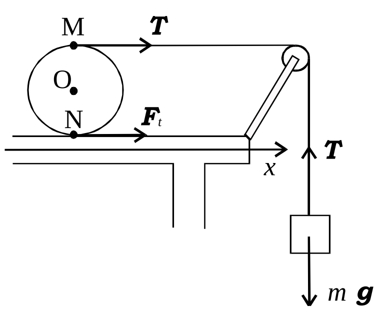
$$F = \frac{1}{2}\left[(M+4m)\frac{2h}{t^2} + (M+m)g\right].$$

$$F = \frac{1}{2}\left[(10\,\mathrm{kg} + 8\,\mathrm{kg})\frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}^2} + (10\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg})\cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s}^{-2}\right] = 67{,}86\,\mathrm{N}$$

5.5. Na stole leží valec hmotnosti 2,2 kg, ktorý sa môže odvaľovať po stole. Na valec je namotaná niť. Na voľnom konci nite, ktorá je vedená cez veľmi ľahkú kladku, je zavesené závažie tej istej hmotnosti ako má valec, pozri obrázok 34. Sústava je ponechaná sama na seba. Vypočítajte zrýchlenie závažia a silu šmykového trenia medzi valcom a stolom. Riešte pre prípady, že valec je a) dutý, b) plný.

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m = 2,2 kg	a_a = ?
a) dutý valec	a_b = ?
b) plný valec	F_{ta} = ?
	F_{tb} = ?



Obr.34

Sústava pozostáva z dvoch medzi sebou spojených telies, závažia a valca. (Vzhľadom na zadanie predpokladáme, že ľahká kladka ako aj vlákno sú nehmotné). Preto bude určitá väzba medzi zrýchlením valca a zrýchlením závažia. Na závažie pôsobí tiažová sila $m\boldsymbol{g}$ a ťahová sila vo vlákne, preto platí

$$m\boldsymbol{a}_1 = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}\,. \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{a}_1$ je zrýchlenie závažia. Z obrázku 34 je zrejmé, že závažie bude konať len postupný pohyb.

Na valec pôsobí tiažová sila, ktorú ale ruší sila reakcie stola a v horizontálnom smere ťahová sila vlákna $\boldsymbol{T}$ (v dôsledku toho, že vlákno a kladka sú nehmotné) a sila trenia medzi valcom a stolom. Obe tieto sily vyvolávajú otáčavé momenty voči osi valca (budeme predpokladať, že obe sily pôsobia v jednej a tej istej rovine, kolmej na os valca). Dôsledkom toho valec vykonáva v tejto rovine tak postupný, ako aj rotačný pohyb, pre ktoré platia nasledovné rovnice

$$m\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}\,; \quad J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_T + \boldsymbol{M}_\mathrm{t}\,, \tag{2}$$

kde a_0 je zrýchlenie ťažiska valca.

Aby sme zistili väzbu medzi a_1, a_0 a ε, preskúmame pohyb dvoch bodov M a N valca. Ako bolo uvedené, valec vykonáva súčasne dva pohyby, a preto rýchlosť jeho ľubovoľného bodu bude rovná $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}_i$, kde $\boldsymbol{v}_0$ je postupná rýchlosť ťažiska, $\boldsymbol{u}_i = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i]$ - rýchlosť, ktorá je spôsobená otáčaním sa valca okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Urobíme si projekciu rýchlostí bodov M a N na os *x*.

$$v_{M_x} = v_0 + \omega r; \quad v_{N_x} = v_0 - \omega r \ .$$

Deriváciou týchto rovníc dostaneme

$$a_{M_x} = a_0 + \varepsilon r; \quad a_{N_x} = a_0 - \varepsilon r \ ,$$

kde a_{M_x} a a_{N_x} sú projekcie celkového zrýchlenia bodov M a N na os *x*. V prípade, že nedochádza ku šmyku valca, $v_{N_x} = 0$ a $v_0 = \omega r$. Preto platí

$$a_0 = \varepsilon r \tag{3}$$

a horizontálna zložka výsledného zrýchlenia bodu M a bude

$$a_{M_x} = a_0 + \varepsilon r = 2a_0 \ .$$

V dôsledku toho, že vlákno a kladka sú nehmotné (t.j. vlákno sa nerozťahuje) bude horizontálna zložka zrýchlenia bodu M valca rovná zrýchleniu závažia

$$a_1 = 2a_0 \ . \tag{4}$$

Hľadané veličiny môžeme nájsť riešením rovníc (1) a (2) s prihliadnutím na vzťahy (3) a (4). Ale rovnice (1) a (2) sú vo vektorovom tvare a je ich potrebné nahradiť skalárnymi, ale aby sme to mohli urobiť, potrebujeme zistiť smer sily trenia.

Sila trenia je sila statického trenia a smeruje proti vektoru rýchlosti bodu N, ktorú by tento bod mal, ak by nebolo šmykového trenia medzi valcom a stolom. V prípade, že počiatočná rýchlosť je rovná nule, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}$ má totožný smer ako horizontálna zložka výsledného zrýchlenia $\boldsymbol{a}_{\mathrm{N}}$, pre prípad, keď nie je šmykové trenie medzi valcom a stolom. Aj v tomto prípade valec vykonáva zložitý pohyb a platí

$$a_{N_x} = a_0 - \varepsilon r \ ,$$

a_0 - je zrýchlenie ťažiska valca a ε - uhlové zrýchlenie valca v prípade, že nie je medzi nimi šmykové trenie medzi valcom a stolom. Teda smer sily šmykového trenia možno zistiť, ak najprv preskúmame túto úlohu bez prítomnosti tejto sily.

Riešenie:

Rovnice (2) v prípade, že nie je prítomné šmykové trenie, budú mať tvar

$$m\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{T}; \quad J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_T \ . \tag{5}$$

Prepíšeme si rovnice (5) do skalárneho tvaru

$$ma_0 = T; \quad J\varepsilon = Tr \ . \tag{6}$$

Napíšeme si moment zotrvačnosti valca v tvare $J = bmr^2$ (pre dutý valec bude $b = 1$ a pre plný $b = \frac{1}{2}$) a dosadíme do rovnice (6)

$$a_0 = T/m; \quad \varepsilon r = T/bm \ .$$

Pretože $b \le 1$, potom $a_0 \le \varepsilon r$ a $a_{N_x} = a_0 - \varepsilon r \le 0$. Ak $a_{N_x} = 0$, potom bod N valca sa nebude šmýkať po povrchu stola (pri ľubovoľnej hodnote *T*) a šmykové trenie nie je prítomné. Ak ale $a_{N_x} \langle 0$, potom sila šmykového trenia bude mať smer, ktorý je znázornený na obrázku 34.

Zvolíme si kladný smer nadol a potom platí

$$m\,a_1 = m\,g - T\ . \tag{7}$$

Rovniciam (2) zodpovedajú nasledovné skalárne rovnice

$$m a_0 = T + F_t\ ; \quad J\,\varepsilon = T\,r - F_t\,r\ . \tag{8}$$

Druhá rovnica vyjadruje, že tak ako aj v prípade, keď šmykové trenie nie je prítomné, valec sa bude otáčať v smere hodinových ručičiek.
Dosadením vzťahov (3) a (4) a výrazu pre moment zotrvačnosti do rovníc (7) a (8) dostaneme

$$m\,a_1 = m\,g - T\ ; \quad \frac{m\,a_1}{2} = T + F_t$$

$$\frac{b m r^2 a_1}{2r} = T\,r - F_t\,r$$

Vydelíme poslednú rovnicu polomerom r a riešením sústavy rovníc nájdeme

$$a_1 = 4g/(5+b), \quad F_t = mg(1-b)/(5+b)\,.$$

Pre plný valec $\left(b = \tfrac{1}{2}\right)$

$$a_1 = \tfrac{8}{11}g \approx 7{,}13\,\mathrm{m.s^{-2}}; \quad F_t = \tfrac{1}{11}mg \approx 1{,}92\ \mathrm{N}$$

Pre dutý valec $(b = 1)$

$$a_1 = \tfrac{2}{3}g \approx 6{,}54\ \mathrm{m.s^{-2}}; \quad F_t = 0$$

5.6. Horizontálna kruhová doska hmotnosti 100 kg a polomeru 1,5 m sa otáča okolo zvislej osi prechádzajúcej cez jej stred a robí za minútu 10 otáčok. Pritom na kraji dosky stojí človek s hmotnosťou 70 kg. Ako sa zmení frekvencia otáčania a akú prácu vykoná človek, keď prejde z kraja dosky do jej stredu?

Úvaha:

Zadané veličiny	Hľadané veličiny
m_1 = 100 kg	Δf = ?
m_2 = 70 kg	A = ?
R = 1,5 m	
f = 1/6 s^{-1}	

Práca, ktorú vykoná človek bude rovná rozdielu kinetickej energie sústavy po prejdení človeka do stredu platformy a kinetickej energie v počiatočnom stave. Pretože sústava vykonáva len rotačný pohyb bude kinetická energia vyjadrená vzťahom

$$E_k = \frac{J\,\omega^2}{2}\,, \tag{1}$$

kde J je moment zotrvačnosti sústavy a ω - uhlová rýchlosť sústavy.

Potom môžeme vyjadriť prácu, ktorú vykonal človek nasledovným vzťahom

$$A = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2\ . \tag{2}$$

Uhlovú rýchlosť ω_2 môžeme stanoviť zo zákona zachovania momentu hybnosti, pretože sústava doska s človekom je čiastočne izolovaná sústava. Vyplýva to z toho, že v horizontálnej rovine nepôsobia na sústavu žiadne vonkajšie sily a vo zvislom smere sa podľa zadania nepohybuje. Preto bude platiť

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2\ . \tag{3}$$

Riešenie:

Pre momenty zotrvačnosti sústavy v počiatočnom a konečnom stave budú platiť vzťahy

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 \ , \tag{4}$$

$$J_2 = \frac{m_1 R^2}{2} \ . \tag{5}$$

kde R je polomer dosky, m_1 – hmotnosť dosky a m_2 – hmotnosť človeka.
ω bude rovné $2\pi f$, kde f je počet otáčok za sekundu. Dosadením rovníc (4) a (5) do rovnice (3) dostaneme

$$\left(\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2\right)\omega_1 = \omega_2 \frac{m_1 R^2}{2} \ . \tag{6}$$

A odtiaľ $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{m_1 R^2 + 2m_2 R^2}{m_1 R^2} = \omega_1 \dfrac{m_1 + 2m_2}{m_1}$.

Keďže $\omega = 2\pi f$

$$f_2 = f_1 \frac{m_1 + 2m_2}{m}$$

a

$$f_2 = \frac{1\text{s}^{-1}}{6}\,\frac{100\text{ kg} + 140\text{ kg}}{100\text{ kg}} = 0{,}4\text{ s}^{-1} \ .$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 0{,}4\text{s}^{-1} - \frac{1}{6}\text{s}^{-1} = \frac{7}{30}\text{s}^{-1} \ .$$

Dosadením do rovnice (2) výrazov pre momenty zotrvačnosti a keď ω_2 vyjadríme pomocou rovnice (3), dostaneme po úprave výraz pre hľadanú prácu

$$A = \frac{1}{2}\frac{m_1 R^2}{2}\left(\frac{m_1 + 2m_2}{m_1}\right)^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2\right)\omega_1^2$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1 + 2m_2}{m_1}\right)^2 \frac{m_1}{2} - \left(\frac{m_1 + 2m_2}{2}\right)\right](2\pi f_1 R)^2$$

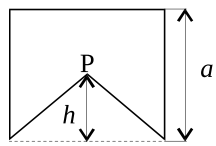
$$A = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{100\text{ kg} + 140\text{ kg}}{100\text{ kg}}\right)^2 50\text{ kg} - \left(\frac{100\text{ kg} + 140\text{ kg}}{2}\right)\right]\left(2\pi \frac{1}{6} 1{,}5\right)^2 \text{m}^2.\text{s}^{-2}$$

$$A = 562{,}5\text{ N}$$

Neriešené príklady

5.7. Štvorcová platňa o strane 0,1 m leží na vodorovnej podložke. Z platne vyrežeme rovnoramenný trojuholník so základňou rovnou jednej strane dosky, pozri obr.35. Aká musí byť výška trojuholníka, aby doska zavesená v bode P, kde sa nachádza vrchol trojuholníka, zostala visieť vo vodorovnej polohe?
[0,063 m]

5.8. Vypočítajte polohu ťažiska rovnorodej kruhovej dosky o polomere R = 0,5 m, v ktorej bol urobený štvorcový otvor so stranou a = R/2 vo vzdialenosti R/2 od stredu dosky. [$\cong$ 0,02 mm od stredu dosky]



Obr.35

5.9.* Tenký homogénny drôt je ohnutý do tvaru polkružnice polomeru R. Nájdite polohu ťažiska vzhľadom na stred krivosti ak R sa rovná 30 cm! [60/π cm]

5.10. Nájdite polohu ťažiska rovnorodého kužeľa výšky v !
[Ťažisko sa nachádza v 3/4 výšky od vrcholu kužeľa]

5.11. Dve častice P_1 a P_2 s hmotnosťami m_1 a m_2 sa nachádzajú vo vzdialenosti d od seba. V čase $t = 0$ sa častica P_2 začala pohybovať rýchlosťou v_2 v priamke preloženej ich spojnicou a vzďaľuje sa od častice P_1. Súčasne častica P_1 sa začala pohybovať rýchlosťou v_1 v smere kolmom na túto spojnicu. Vyšetrite, aký je pohyb ťažiska tejto sústavy:

a) zvoľte si vhodne ortonormálny vzťažný systém a vyjadrite polohu ťažiska tejto sústavy v čase $t = 0$;
b) vyjadrite, ako sa mení polohový vektor ťažiska s časom;
c) zistite rovnicu dráhy ťažiska;
d) vypočítajte rýchlosť ťažiska a jeho zrýchlenie;
e) Aký pohyb vykonáva ťažisko?

Riešte pre hodnoty m_1= 2g, m_2 = 3g, d = 5 cm, v_1= 1 cm.s^{-1}, v_2= 2 cm.s^{-1}!

[a) x_T = 3 cm; y_T = 0. b) $\boldsymbol{r} = (3\,\text{cm} + 1{,}2\,\text{cm.s}^{-1} \cdot t\,)\boldsymbol{i} + \;0{,}4\text{cm.s}^{-1} \cdot t \cdot \boldsymbol{j}$.

c) $y = \frac{1}{3}x - 1\text{cm}$. d) 1,26 cm.s^{-1}; 0 . e) Priamočiary, rovnomerný.]

5.12. Sústava pozostávajúca z troch častí, hmotnosti ktorých sú m_1=5g, m_2=10g a m_3=15g, sa nachádza v ortonormálnom vzťažnom systéme. V čase t = 0 je ich poloha určená súradnicami, ktorých hodnoty v zátvorkách sú udané v cm: P_1 (3,4,5), P_2(-2,4,-6) a P_3 (0,0,0) .

a) Nájdite polohu ťažiska v čase t = 0;
b) nájdite zrýchlenie a polohu ťažiska v čase t=10s, ak na sústavu začala pôsobiť v čase t=0 v smere osi x konštantná sila $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ N .

[a) $x_t(0)$ = -0,17 cm; $y_t(0)$ = 2 cm; $z_t(0)$ = -1,17 cm; b) a = 0,333 m.s^{-2}; x_t(t) = 16,7 cm; y_t(t) = 2 cm; z_t(t) = -1,17 cm.]

5.13. Stanovte maximálnu hodnotu momentu zotrvačnosti obdĺžnikovej homogénnej dosky hmotnosti 0,6 kg s rozmermi strán 10 cm a 20 cm vzhľadom na os kolmú k rovine dosky a prechádzajúcu cez dosku. [$1 \cdot 10^{-2}$ kg.m^2]

5.14. Nájdite moment zotrvačnosti rovnorodej dosky tvaru rovnoramenného trojuholníka s ramenami b a základňou $2a$ vzhľadom na os kolmú na základňu a prechádzajúcu protiľahlým vrcholom, ak hmotnosť dosky je m ! [$(1/6)ma^2$]

5.15. Aký priemer má kruhový kotúč s hmotnosťou 8 kg, ktorého moment zotrvačnosti J = 1,69 kg.m^2? [d = 1,3m]

5.16. Kovový prstenec má nasledovné rozmery: vonkajší priemer 58 cm, vnútorný priemer 50 cm, šírka 6 cm. Moment zotrvačnosti J = 0,8058 kg.m^2. Z akého materiálu môže byť prstenec zhotovený? [ρ=2,7g/cm^3 , hliník]

5.17. O koľko treba predĺžiť homogénnu tyč dĺžky 75 cm, aby sa jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom tyče zdvojnásobil?
[19,5cm].

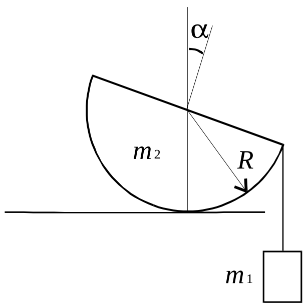
5.18. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os masívneho dreveného valca s hmotnosťou 6 kg, s priemerom 12 cm a s dĺžkou 1 m treba strojnásobiť obalením do oloveného plášťa. Aký hrubý musí byť olovený plášť? [1,36 mm]

5.19.* Stanovte minimálnu hodnotu momentu zotrvačnosti polkruhovej homogénnej dosky hmotnosti 2 kg s polomerom obvodu 15 cm vzhľadom na os kolmú k rovine dosky. [$14{,}4\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg.m^2}$]

5.20. Karoséria auta má hmotnosť 300 kg, 4 kolesá, ktoré možno považovať za masívne kotúče, majú hmotnosť 25 kg. Zotrvačnosť celkovej hmotnosti, ktorú treba prekonať pri uvedení auta do chodu, treba zväčšiť o určitú hodnotu, ktorá má zohľadniť moment zotrvačnosti kolies. Koľko % celkovej hmotnosti treba pripočítať? [12,5%]

5.21. Na jeden koniec vodorovnej tyče hmotnosti 3 kg dlhej 1,5 m zavesíme teleso hmotnosti 15 kg. V akej vzdialenosti od tohto konca musíme tyč podoprieť, aby bola v rovnováhe vo vodorovnej polohe? [0,125 m]

5.22. Drevená doska je ponorená vo vode tak, že je jedným koncom položená na kameň vyčnievajúci nad hladinu a druhým voľne spočíva vo vode. Ponorená časť predstavuje 35% jej dĺžky. Aká je hustota dreva dosky? [580 $\mathrm{kgm^{-3}}$]



Obr.36

5.23. Závažie hmotnosti 1 kg je zavesené na okraji homogénnej polgule polomeru *R*, hmotnosti 10 kg, ktorá je uložená svojou vypuklou plochou na vodorovnej podložke, pozri obr. 36. Pri akom uhle odklonu α nastala rovnováha sústavy ? [α=15°]

5.24. Kruhový kotúč s hmotnosťou 5 kg a s priemerom 30 cm treba zo stavu pokoja za 0,5 sekundy jeden raz otočiť. Aká sila F musí tangenciálne zaúčinkovať na obvode kotúča? [19N]

5.25. Akú uhlovú rýchlosť dosiahne zotrvačník hmotnosti 20 kg a s priemerom 60 cm, keď počas 12 sekúnd poháňame krútiacim momentom 6 Nm? Na začiatku bol zotrvačník v pokoji. [80 $\mathrm{s^{-1}}$].

5.26. Aký je moment zotrvačnosti kotvy elektromotora, ktorej otáčky v dôsledku trenia v ložiskách (trecí moment M = 0,819 N.m) počas 4,5 sekundy klesnú z n_1 = 1500 ot/min na n_2 = 400 ot/min? [0,032 $\mathrm{kg.m^2}$].

5.27. Ležiaci hranol s hmotnosťou 20 kg a dĺžkou 6 m treba na jednom konci zdvihnúť za 1 sekundu do výšky 1 m. Aká sila je na to potrebná? [111 N].

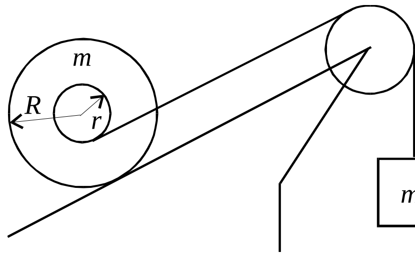
5.28. Vypočítajte zrýchlenie a maximálnu rýchlosť, ktorú dosiahne plný valec, ak ho spustíme po naklonenej rovine z výšky 5 m. Hmotnosť valca je 50 kg a jeho polomer 0,1 m. Naklonená rovina zviera s vodorovnou rovinou uhol 30°. Odpor vzduchu zanedbajte. Pohyb valca po naklonenej rovine uvažujte bez preklzania.
[3,27 $\mathrm{m.s^{-2}}$; 8,08 $\mathrm{m.s^{-1}}$]

5.29. Vrtuľka ventilátora sa otáča rýchlosťou 900 otáčok za minútu. Po vypnutí ventilátora sa vrtuľka otáčala rovnomerne spomalene a do zastavenia urobila 75 otáčok. Práca brzdiacich síl bola 44.4 J. Vypočítajte dobu za ktorú sa ventilátor zastavil, moment zotrvačnosti vrtuľky a brzdiaci moment síl. [10 s, 0,01 $\mathrm{kg.m^2}$, 0,094 $\mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$]

5.30.* Guľa bola vrhnutá na vodorovnej rovine tak, že v prvom okamihu mala len postupnú rýchlosť. V dôsledku trenia o rovinu sa začala otáčať. Vypočítajte, aká časť kinetickej energie sa spotrebovala na prácu síl trenia od začiatku pohybu do času, keď sa guľa začala odvaľovať po rovine bez preklzávania? [2/7]

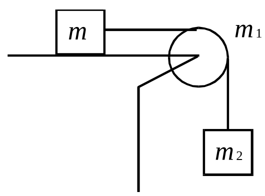
5.31. Zotrvačník sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou odpovedajúcej frekvencii 10 otáčok za sekundu. Jeho kinetická energia je 8000 J. Za akú dobu otáčavý moment síl rovný 50 Nm zväčší jeho uhlovú rýchlosť na dvojnásobnú.
[≅ 5 s]

5.32. Na naklonenej rovine leží cievka (pozri obr.37) o polomere R =0,1 m, ktorej hmotnosť m = 5 kg je prakticky rozložená len na jej plášti. Na osi cievky polomeru r = 0,05 m je navinutá niť, vedená cez nehmotnú kladku a pripevnená k voľne visiacemu telesu hmotnosti m_1 = 5 kg. Vypočítajte pri akom uhle sklonu α naklonenej roviny sa bude ťažisko cievky nachádzať v pokoji. Trenie medzi cievkou a stolom je zanedbateľné. [53,1°]



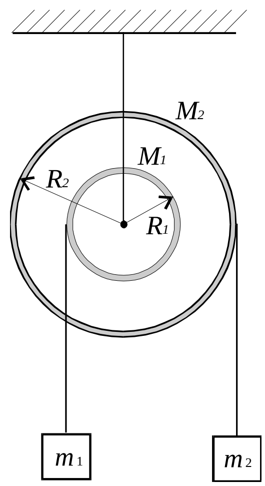
Obr.37

5.33. Hmotnosť telesa na stole je 5 kg a koeficient trenia medzi stolom a telieskom je k = 0,01. Hmotnosť kladky, ktorú tvorí plný disk, je 2 kg a jej polomer je 0,1 m. Hmotnosť visiaceho závažia je 1 kg, pozri obr. 38. Vypočítajte prácu síl trenia od počiatku pohybu počas 3s!
[2,9 J]



Obr.38

5.34. Dvojstupňová kladka (pozri obr.39) pozostáva z dvoch napevno spojených tenkých obručí, polomery, ktorých sú R_1=0,2 m a R_2=0,4 m a hmotnosti M_1 = 2 kg a M_2 = 6 kg. Na každý stupeň kladky sú namotané nite na konci ktorých sú upevnené závažia o hmotnosti m_1=10 kg a m_2 = 6 kg. Vypočítajte zrýchlenia závaží m_1 a m_2 a silu, ktorou sústava pôsobí na podves. [0,327 m.s^{-2}; 0,654m.s^{-2} ; 234,8 N]



Obr.39

5.35. Rotor motora s momentom zotrvačnosti 500 g.cm^2 dostane v stave pokoja prúdový impulz, ktorý vyvolá hnací impulz momentu sily, vyznačujúci sa lineárnym poklesom z počiatočnej hodnoty 2 N.cm na nulovú hodnotu za čas 20 ms. Akú uhlovú rýchlosť rotor získa? [4 s^{-1}]

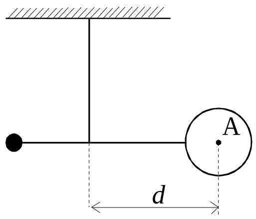
5.36. Trecia spojka je tvorená dvomi kotúčmi, ktoré pri vzájomnom pritláčaní prenášajú trením hnací moment motora na poháňanú sústavu. Zistite mechanickú účinnosť spojky za predpokladu, že otáčky motora i trecí moment spojky sú počas rozbehu konštantné a moment pôsobí až kým sa otáčky oboch kotúčov vyrovnajú. [50%]

5.37. Homogénna kruhová doska polomeru 0,1m sa nachádza vo vertikálnej rovine a môže sa otáčať okolo vodorovnej osi kolmej na dosku a vzdialenej od stredu dosky 0,03m. Dosku vychýlime z rovnovážnej polohy do polohy, v ktorej je stred dosky vo výške osi a potom ju voľne pustíme. Vypočítajte počiatočné uhlové zrýchlenie dosky a uhlovú rýchlosť pri prechode rovnovážnou polohou! Trenie na osi zanedbajte!
[$\varepsilon \cong 49{,}88$ s^{-2}; $\omega \cong 10$ s^{-1}]

5.38. Guľa a plný valec , ktoré majú rovnakú hmotnosť, polomer a postupnú rýchlosť, sa začínajú pohybovať nahor po naklonenej rovine. Ktoré z týchto dvoch telies dosiahne väčšiu výšku? Vypočítajte pomer výšok, ktoré dosiahnu tieto telesá. [valec vystúpi vyššie; 1,07]

5.39. Oceľová trubka dĺžky 1,2 m a hmotnosti 2 kg je zavesená za jeden koniec. V ktorom mieste (merané od bodu závesu) do nej musíme udrieť kladivom hmotnosti 2 kg vo vodorovnom smere, aby sa kladivo po náraze (dokonale pružnom) neodrazilo, ale ostalo stáť? Akú rýchlosť malo kladivo, ak sa tyč vychýlila o uhol 0,2 rad?
[0,7 m; 0,97 m.s^{-1}]

5.40.* Oceľová guľa je zavesená tak, že kýva ako fyzikálne kyvadlo s maximálnym kmitočtom. Pri svojom pohybe mala v rovnovážnom bode moment hybnosti 4 kg.m^2.s^{-1} a kinetickú energiu 1 J. Vypočítajte vzdialenosť bodu závesu od ťažiska. [0,05m]



Obr.39

5.41. Guľka hmotnosti $5 \cdot 10^{-3}$ kg, ktorá letí rýchlosťou v = 800 m/s, naráža do bodu A balistického kyvadla v tvare disku (pozri obr. 39) a zastaví sa. Vzdialenosť bodu A od osi otáčania je 0,5 m. Moment zotrvačnosti balistického kyvadla je 0,025 kg.m^2. Vypočítajte počiatočnú uhlovú a postupnú rýchlosť stredu disku! Ráz považujte za absolútne nepružný. [80 s^{-1}; 40 m.s^{-1}]

5.42. Horizontálna kruhová doska hmotnosti 80 kg o polomere 1 m sa otáča s uhlovou rýchlosťou 20 otáčok za minútu. V jej strede stojí človek a v roztiahnutých rukách drží činky. Vypočítajte, aký počet otáčok za minútu bude robiť doska, ak človek spustením rúk zmenší svoj moment zotrvačnosti z 2,94 kg.m^2 na 0,98 kg.m^2! Koľkokrát sa zväčší kinetická energia dosky s človekom? [21 ot/min, 1,05 krát]

5.43. Kruhová doska rotuje okolo dokonale hladkej osi uhlovou rýchlosťou 100 πs^{-1}. Moment zotrvačnosti dosky vzhľadom na rotačnú os je 0,03 kg.m^2. Doska sa približuje k druhej kruhovej doske, uloženej na tej istej osi. Moment zotrvačnosti druhej dosky vzhľadom na os, na ktorej je uložená, je 0,01 kg.m^2 a je v pokoji do tej doby, kým na ňu nenarazí prvá. Po náraze, pretože je povrch dosiek drsný, uvedie sa aj druhá do pohybu. Vypočítajte spoločnú uhlovú rýchlosť sústavy! Vypočítajte koľko tepla vzniklo pri náraze!
[75 πs^{-1}; $Q \cong$ 370 J]