Vektorová analýza

Reálná (skalární) funkce reálné (skalární) proměnné: $f = f(t)$ např. kmitavý pohyb.

Vektorová funkce reálné(skalární) proměnné je zobrazení, které reálnému číslu $t \in$ R přiřadí vektor $\boldsymbol{r}(t)$ v E_3.

Jestliže funkci $P = \boldsymbol{r}(t)$ interpretujeme jako polohu pohybujícího se bodu v čase *t*, pak derivace $\boldsymbol{r}'(t)$ znamená vektor rychlosti tohoto bodu v čase *t*. Jeho směr je směr tečny ke dráze bodu. Pro po částech hladkou křivku (která má spojité derivace v intervalu) $P = (t + t^3; 1 + t^2)$ platí: $P' = (1 + 3t^2; 2t^2)$. Jestliže $P_0 = (2;2)$ pak $P_0' = (4;2)$ a $t_0 = 1$. Například pohyb po kružnici.

Skalární funkce vektorového argumentu je zobrazení $E_3 \to$ R. Například atmosférický tlak.
Vektorová funkce vektorového argumentu je zobrazení $E_3 \to E_3$. Například rychlost kapaliny.
Skalární pole charakterizují koncové body radiusvektoru.
Vektorové pole charakterizují vektory připojené na radiusvektor.
Matematický model skalárního pole je funkce $f : u = f(x, y, z)$.
Matematický model vektorového pole je $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} = A_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$

$$= (A_x(x, y, z); A_y(x, y, z); A_z(x, y, z))$$

Vlastnosti polí:

1) Základní

Hladina skalárního pole (ekvipotenciální) plocha je množina bodů (radiusvektorů), v nichž skalární pole nabývá téže hodnoty. Pro dim = 2 hovoříme o **izopletách** skalárního pole. Například teplotní pole = izotermy. Matematické vyjádření hladiny:

$\boxed{f(x, y, z) = C}$, kde *C* je konstanta.

Příklad 1: Určete hladinu skalárního pole $f : u = 4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4$ procházející bodem $\mathrm{M} = (1; -2)$.

Řešení: $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = C$ dosadíme bod M $\Rightarrow C = 0$

$$4(x^2 - 2x) - (y^2 + 6y) - 4 = 0$$

$$4[(x-1)^2 - 1] - [(y+3)^2 - 9] - 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 - (y+3)^2 - 4 + 9 - 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 - (y+3)^2 = -1$$

$$-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$$

Výsledek: Hladina skalárního pole procházející bodem M je hyperbola s osou rovnoběžnou s osou *y*, středem $\mathrm{S} = (1; -3)$, vedlejší poloosou $b = \frac{1}{2}$ a hlavní poloosou $a = 1$.

2) Diferenciální

Vektorová čára (siločára) vektorového pole je orientovaná křivka v prostoru, jejíž tečný vektor v každém bodě charakterizuje směr vektorového pole. Diferenciální rovnice silových čar jsou:

$$\boxed{\frac{A_x}{\mathrm{d}x} = \frac{A_y}{\mathrm{d}y} = \frac{A_z}{\mathrm{d}z}}$$

Siločáry = průsečnice dvou systémů ploch.

Příklad 2: Stanovte silové čáry vektorového pole $\boldsymbol{A} : z\,\boldsymbol{j} - y\,\boldsymbol{k}$ a určete jejich geometrický význam.

Řešení: $\boldsymbol{a} = (0; z; -y)$

$$\frac{0}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{\mathrm{d}y} = \frac{-y}{\mathrm{d}z}$$

a dostáváme soustavu diferenciálních rovnic: $\dfrac{0}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z}{\mathrm{d}y}$

$$\frac{z}{\mathrm{d}y} = -\frac{y}{\mathrm{d}z}$$

odtud: $0 = z\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow x = C_1$, což jsou roviny rovnoběžné s rovinou yz

$z\,\mathrm{d}z = -y\,\mathrm{d}y \Rightarrow z\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \int z\,\mathrm{d}z + \int y\,\mathrm{d}y = C_2 \Rightarrow y^2 + z^2 = C_2$, což je systém rotačních válcových ploch s osou rotace v ose x.

Výsledek: Siločáry jsou systém kružnic v rovinách $x = C$ (konstantě) se středem na ose x a poloměrem $r \in [0; \infty)$.

Hustota silových čar je počet silových čar procházejících jednotkou nekonečně malé plochy kolmé na siločáru vektorového pole v daném bodě a udává velikost vektoru pole v tomto bodě.

$$\boxed{|\boldsymbol{A}| = \lim_{|\Delta S \to 0|} \frac{\Delta Q}{|\Delta S|}}$$, kde $|\Delta S| =$ plošný obsah a $\Delta Q =$ počet siločar.

Fyzikální interpretace

Skalární pole je část prostoru, ve které je definována skalární funkce $f(x, y, z, t)$ souřadnic a času. Každému bodu je tím přiřazena v každém okamžiku jistá hodnota funkce f. Nezávisí-li funkce f na čase t, jsou její hodnoty v každém místě stálé a pole se nazývá **statické** nebo **stacionární**. V takovém poli jsou definovány tzv. **ekviskalární plochy** neboli **hladiny** pole; na každé z nich má funkce f konstantní hodnotu. Hladina, na které je $f = f_0 =$ konst. má rovnici $f(x, y, z) = f_0$.

Vektorové pole je část prostoru, v jehož každém bodě je dán jistý vektor $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ jehož složky jsou funkcemi souřadnic a času. Nezávisí-li tyto složky na čase, je vektorové pole časově stálé, **neproměnné** (**stacionární**), nezávisí-li ani na souřadnicích, je vektorové pole **homogenní**, jeho vektory jsou všude stejně velké a souhlasně rovnoběžné (vektor $\boldsymbol{A}$ je konstantní).
Příklad skalárního pole – teplotní pole.
Příklad vektorového pole – gravitační pole.

Derivace funkce *f* ve směru *s*

Derivace funkce $f: u = f(x, y, z)$ v bodě $\mathrm{M} = (x; y; z)$ ve směru $\boldsymbol{s} = (s_1; s_2; s_3)$ tzv. **směrová derivace** je skalár (číslo):

$$\boxed{f_s'(\mathrm{M}) = \frac{\partial f(\mathrm{M})}{\partial \boldsymbol{s}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \boldsymbol{s_0} = \frac{1}{|\boldsymbol{s}|} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (s_1; s_2; s_3), \text{kde}\, |\boldsymbol{s}| = \sqrt{{s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2}}$$

Směrová derivace funkce *f* v bodě M ve směru vektoru ***s*** popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu M ve směru vektoru ***s***. Předpokládáme, že funkce *f* je diferencovatelná v bodě M. (Funkce *f* je diferencovatelná v bodě M, jestliže má spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě M.)

Příklad 3: Určete derivaci funkce *f*: $u = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y\right)$ v bodě $\mathrm{M} = (1;2)$ ve směru $\boldsymbol{s} = (1;1)$.

Řešení: $|\boldsymbol{s}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y} \xrightarrow{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y} \xrightarrow{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^2}$$

$$f_s'(\mathrm{M}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^2}; \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^2}\right) \cdot (1;1)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathrm{e} + \mathrm{e}^2}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Výsledek: Derivace funkce *f* ve směru ***s*** $f_s'(\mathrm{M}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Operátor nabla

Operátor je zobrazení $M \to N$, kde M, N jsou vhodné množiny.

Hamiltonův operátor = Operátor nabla ∇ je symbolický vektor o souřadnicích :

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}}$$

Gradient skalárního pole

Gradient skalárního pole funkce $f(x, y, z)$ v bodě $\mathrm{M} = (x; y; z)$ je vektor:

$$\boxed{\textbf{grad}\ f(\mathrm{M}) = \nabla f(\mathrm{M}) = \frac{\partial f(\mathrm{M})}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(\mathrm{M})}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(\mathrm{M})}{\partial z}\boldsymbol{k}}$$

Předpokládáme, že funkce *f* je diferencovatelná v bodě M. Gradient je vektor maximální změny, udává tedy směr, kdy skalární funkce *f* nejrychleji roste. Záporný gradient (– **grad** *f*(M)) se nazývá **spád funkce** *f*, udává tedy směr, kdy funkce *f* nejrychleji klesá. Gradient je kolmý k hladině a ukazuje směr, ve kterém funkce nejrychleji roste.

Příklad 4: Vypočítejte gradient funkce *f*: $u = x + y + z + xyz + \mathrm{e}^{xyz}$ v bodě $\mathrm{M} = (0;1;2)$.

Řešení: $\mathbf{grad}\ f(\mathrm{M}) = \nabla f(\mathrm{M})$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + yz + \mathrm{e}^{xyz} \cdot yz \ \xrightarrow{\mathrm{M}}\ 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + xz + \mathrm{e}^{xyz} \cdot xz \ \xrightarrow{\mathrm{M}}\ 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 1 + xz + \mathrm{e}^{xyz} \cdot xy \ \xrightarrow{\mathrm{M}}\ 1$$

Výsledek: Gradient funkce *f* v bodě M $\mathbf{grad}f(\mathrm{M}) = (5;1;1) = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Divergence vektorového pole

Divergence vektorového pole $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$ je <u>skalár (číslo):</u>

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Divergence vyjadřuje **tok vektorového pole objemovou jednotkou**. Představuje tedy div ***A***(M) tok vektorového pole ***F*** vně orientovanou plochou, která uzavírá bod M a ohraničuje nekonečně malý objem vztažený na jednotku tohoto objemu. Tok znamená, že plochou *S* protéká kapalina tak, že vektor $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ udává rychlost proudění v každém bodě plochy *S*. Divergence div ***A***(P) je mírou vzniku {**zdroje (zřídla)**, div ***A***(P) > 0} nebo zániku {**odtoky (nory)** div ***A***(P) < 0} silových čar v okolí bodu P vektorového pole ***F***.

Vektorové pole ***F***: ***A*** = ***F***(***r***) v němž $\forall \boldsymbol{r} \in D(\boldsymbol{F})$ platí div ***A***(***r***) = 0 nazýváme **polem solenoidálním {nezřídlovým (bez zřídel)}**.

Divergence rychlosti proudící kapaliny udává specifickou vydatnost (vydatnost na jednotku objemu) zřídel, ze kterých vytéká (nebo ve kterých se ztrácí) kapalina. Jestliže ***A***(P) udává intenzitu gravitačního pole buzeného nějakými tělesy, potom div ***A***(P) značí specifickou hmotu těchto těles. Jestliže ***A***(P) znamená intenzitu elektrického pole, pak div ***A***(P) dává objemovou hustotu náboje budícího to pole.

Příklad 5: Stanovte divergenci vektorového pole ***A***: $\boldsymbol{a} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right); -\sqrt{y^2 + z^2}; \ln x \sin x\right)$ v bodě $\mathrm{M} = (1;2;0)$.

Řešení: $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\mathrm{M})$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \ \xrightarrow{\mathrm{M}}\ \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \ \xrightarrow{\mathrm{M}}\ -1$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} = -0{,}6$$

Výsledek: Divergence vektorového pole ***A*** $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = -0{,}6$.

Rotace vektorového pole

Rotace vektorového pole $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$ je vektor:

$$\textbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Rotace (hustota vírů) **rot** $\boldsymbol{A}$(M) udává směr osy (jako její tečný vektor), kolem které se soustava silových čar v bodě M zakřivuje, přitom velikost tohoto vektoru udává hustotu vírů v bodě M. Vyčerpávajícím způsobem tedy pojem „vírový“ charakterizuje vektorové pole a jeho nezávislost na volbě souřadnicového systému.

Vektorové pole $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$ se nazývá **potenciálové** na $M \subset E_3$, jestliže existuje funkce f mající spojité parciální derivace f'_x, f'_y, f'_z na M splňující rovnosti $f'_x = A_x$, $f'_y = A_y$, $f'_z = A_z$. Funkci f nazýváme **potenciálovou funkcí, kmenovou funkcí** vektorového pole $\boldsymbol{A}$. **Potenciálem** pak rozumíme funkci $-f$. Vektorové pole $\boldsymbol{A}$ je **potenciálové {nevírové (nerotační)}** na M, právě když **rot** $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}$ ve všech bodech množiny M.

Jestliže $\boldsymbol{A}$ interpretujeme jako rychlostní pole proudící tekutiny, pak **rot** $\boldsymbol{A}$ udává hustotu cirkulace v bodě M vzhledem k rovině takového směru, kdy je největší a směr **rot** $\boldsymbol{A}$ je kolmý na tuto rovinu.

Příklad 6: Vypočítejte rotaci vektorového pole $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{a} = xz\,\boldsymbol{i} + \left(y^2 + xz\right)\boldsymbol{j} + (z - xyz)\,\boldsymbol{k}$ v bodě $\mathrm{P} = (-1;2;1)$.

Řešení: $\textbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\mathrm{P}) =$

$$\textbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -xz \overset{\mathrm{P}}{\rightarrow} 1 \qquad \frac{\partial A_y}{\partial z} = x \overset{\mathrm{P}}{\rightarrow} -1$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = x \overset{\mathrm{P}}{\rightarrow} -1 \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x} = -yz \overset{\mathrm{P}}{\rightarrow} -2$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = z \overset{\mathrm{P}}{\rightarrow} 1 \qquad \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

$$\textbf{rot}\,\boldsymbol{A} = (-xz - x)\,\boldsymbol{i} + (x + yz)\,\boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k} \overset{P}{\rightarrow} \textbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = 2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (2;1;1)$$

Výsledek: Rotace vektorového pole $\boldsymbol{A}$ v bodě P $\textbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = (2;1;1)$.

Složené operátory:

Laplaceův operátor = Operátor delta Δ je divergence gradientu skalární funkce *f* = div (**grad** *f*)

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{div}(\mathbf{grad}f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{gathered}}$$

Laplaceova diferenciální rovnice $\Delta f = 0$.

Příklad 7: Stanovte divergenci gradientu skalární funkce *f*:
$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + 2xy - 4x + 2y - 4z$ v bodě $\mathrm{M} = (1;1;1)$.

Řešení: $\operatorname{div}(\mathbf{grad}f(\mathrm{M})) = \Delta f(\mathrm{M})$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - 4 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 4 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6$$

$\Delta f(\mathrm{M}) = 2 + 4 + 6 = 12$

Výsledek: Divergence gradientu funkce *f* $\Delta f(\mathrm{M}) = 12$.

Nulový operátor Ô je vektorový součin Hamiltonových operátorů

$$\boxed{\hat{\mathbf{O}} = \nabla \times \nabla}$$

Platí pro něho: **Ô** *f* = ***o*** a **Ô** ***A*** = 0, kde ***o*** = nulový vektor a 0 = nula.

Divergence rotace vektorové funkce *A* = div (**rot** ***A***) = **Ô** ***A***

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \boldsymbol{A} = \hat{\mathbf{O}} \cdot \boldsymbol{A} = 0}$$

Příklad 8: Vypočítejte divergenci rotace vektorového pole ***A***: $\boldsymbol{a} = xz\,\boldsymbol{i} + (y^2 + xz)\boldsymbol{j} + (z - xyz)\boldsymbol{k}$ v bodě $\mathrm{P} = (-1;2;1)$.

Řešení: z příkladu 6 vyplývá, že $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = (2;1;1)$
$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0 + 0 + 0 = 0$

Výsledek: Divergence rotace vektorového pole ***A*** v bodě P $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$.

Rotace gradientu skalární funkce *f* = rot (grad *f*) = Ô*f*

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f) = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = \hat{\mathbf{O}}f = \boldsymbol{o}}$$

Příklad 9: Vypočítejte rotaci gradientu skalární funkce *f*:
$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + 2xy - 4x + 2y - 4z$.

Řešení: Z příkladu 7 vyplývá, že $\mathbf{grad}f = (2x + 2y - 4)\boldsymbol{i} + (4y + 2x + 2)\boldsymbol{j} + (6z - 4)\boldsymbol{k}$
$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f) = (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (2-2)\boldsymbol{k} = (0;0;0) = \boldsymbol{o}$

Výsledek: Rotace gradientu funkce f $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f) = \boldsymbol{o}$.

Křivkové integrály

Orientovaná křivka – souhlasně s parametrickým vyjádřením
nesouhlasně s parametrickým vyjádřením.
Cyklicky orientovaná křivka – souhlasně s parametrickým vyjádřením
nesouhlasně s parametrickým vyjádřením.

Křivkový integrál ve skalárním poli = křivkový integrál I. druhu

Křivka *L* je zadána funkcí $\boldsymbol{F}(t)$: $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$, kde $t \in [a,b]$
$\boldsymbol{F}'(t)$: $\boldsymbol{r}'(t) = x'(t)\,\boldsymbol{i} + y'(t)\,\boldsymbol{j} + z'(t)\,\boldsymbol{k}$

Křivka *L* je po částech hladká tzn. v každém bodě intervalu $[a,b]$ existují tečné vektory tj. $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$. Skalární funkce $f : f(x, y, z)$ je spojitá v každém bodě křivky a d*s* je délka elementu křivky

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[\boldsymbol{F}(t)] \cdot |\boldsymbol{F}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x(t); y(t); z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t}$$

Aplikace křivkového integrálu ve skalárním poli:

– plošný obsah válcové plochy procházející křivkou *L* a ohraničené rovinou *z* = 0, plochou $\boldsymbol{\Phi} : z = f(x, y)$), vytvořené přímkami rovnoběžnými s osou *z* protínajícími křivku *L*,
– jestliže skalární funkce *f* = 1, pak vyjadřuje délku křivky *L*,
– hmotnost vlákna, jestliže *f* je jeho hustota,
– statické momenty vlákna a těžiště vlákna,
– pokud je ve všech bodech křivky síla ve směru tečny, pak výpočet práce.

Příklad 1: Stanovte křivkový integrál I. druhu ze skalární funkce *f*: $u = xyz$ podél křivky *L*. Křivka *L* je dána těmito parametrickými rovnicemi: $x = t$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$$

$$z = \frac{1}{2}t^2, \text{ kde } t \in [0;1].$$

Řešení: $x'(t) = 1$

$y'(t) = \sqrt{2}\sqrt{t}$

$z'(t) = t$, kde $t \in [0;1]$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+2t+t^2}$$

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 t\cdot\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot\sqrt{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\cdot(t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1\left(t^{\frac{11}{2}}+t^{\frac{9}{2}}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{t^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}}+\frac{t^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{13}+\frac{2}{11}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{22+26}{143}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{143}$$

Výsledek: Křivkový integrál I. druhu z funkce f podél křivky L $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\frac{16\sqrt{2}}{143}$.

Křivkový integrál ve vektorovém poli = cirkulace = křivkový integrál II. druhu

Křivka L je zadána funkcí $\boldsymbol{F}(t)$: $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{i}+y(t)\,\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k}$, kde $t\in[a,b]$

$\boldsymbol{F}'(t)$: $\boldsymbol{r}'(t)=x'(t)\,\boldsymbol{i}+y'(t)\,\boldsymbol{j}+z'(t)\,\boldsymbol{k}$

Křivka L je po částech hladká orientovaná křivka.

Vektorová funkce $\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\,\boldsymbol{i}+A_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j}+A_z(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$ a délka elementu orientované křivky je d$\boldsymbol{r}$. Křivkový integrál II. druhu závisí na orientaci křivky jen co do znaménka.

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L \boldsymbol{A}(\boldsymbol{F}(t))\cdot\boldsymbol{F}'(t)\,\mathrm{d}t=\int_L A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z=$$

$$\int_a^b\Big(A_x(x(t);y(t);z(t))\cdot x'(t)+A_y(x(t);y(t);z(t))\cdot y'(t)+A_z(x(t);y(t);z(t))\cdot z'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

Aplikace křivkového integrálu ve vektorovém poli:

– výpočet práce v silovém poli, jestliže se hmotný bod pohybuje po orientované křivce L pod účinkem síly, jejíž hodnota je v libovolném bodě M křivky daná vektorem $\boldsymbol{A}$(M), pak tento integrál vyjadřuje jakou práci vykoná síla, než přejde celou křivku. Je-li vektorové pole $\boldsymbol{A}$ silové pole, pak tento integrál vyjadřuje práci vektoru $\boldsymbol{A}$ na křivce L (jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{t}$ je ve směru orientace křivky L),
– nezávislost centrálního silového pole na integrační cestě (potenciál silového pole),
– potenciál gravitačního pole,
– množství tepla, které plyn při přechodu ze stavu A do stavu B pohltí (v termodynamice),
– výpočet množství tepla, které pohltí grammolekula ideálního plynu, když ho při stálé teplotě necháme rozpínat z objemu V_1 na objem V_2,
– gravitační potenciál hmotného oblouku,
– moment setrvačnosti hmotného oblouku.

Příklad 2: Stanovte hodnotu cirkulace vektorové funkce $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+x\,\boldsymbol{j}$ podél křivky $\boldsymbol{L}$: $y=x^2$ s počátečním bodem A, kde $x_\mathrm{A}=1$ a koncovým bodem B, kde $y_\mathrm{B}=2$.

Řešení: Parametrické vyjádření křivky $\boldsymbol{L}$: $x=t$

$y=t^2$, kde $t\in[1;2]$

$x'(t)=1$

$y'(t)=2t$

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 (1\cdot 1 + t\cdot 2t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(2t^2+1\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{3+t}\right]_1^2 = \frac{16}{3}+2-\frac{2}{3}-1 = 1+\frac{14}{3} = \frac{17}{3}$$

Výsledek: Cirkulace vektoru $\boldsymbol{A}$ podél křivky $\boldsymbol{L}$ $\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{17}{3}$.

Příklad 3: Dokažte, že křivkový integrál vektorové funkce $\boldsymbol{F}$ nezávisí na integrační cestě, určete její potenciál a stanovte jeho hodnotu na křivce $\boldsymbol{L}$ z bodu $\mathrm{A} = (0;1)$ do bodu $\mathrm{B} = (3;-4)$, jestliže: $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{a} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}$.

Řešení: Křivkový integrál nezávisí na integrační cestě, jestliže $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{o}$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}$$

Křivkový integrál nezávisí na integrační cestě.

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+C \qquad \text{a} \qquad \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2}+C$$

Kmenová funkce $f : z = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C$.

Potenciál je tedy roven $-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+C$.

Hodnota křivkového integrálu $\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = \frac{9}{2}+\frac{16}{2}-0-\frac{1}{2} = 4+8 = 12$

Výsledek: Hodnota křivkového integrálu z bodu A do bodu B podél křivky $\boldsymbol{L}$ $\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 12$.

Ve fyzice má význam i tento křivkový integrál II. druhu, jehož výsledkem je <u>vektor:</u>

$$\boxed{\int_L \boldsymbol{A}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}\mathrm{d}t = \int_a^b \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x(x(t);y(t);z(t)) & A_y(x(t);y(t);z(t)) & A_z(x(t);y(t);z(t)) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{vmatrix}\mathrm{d}t}$$

Například magnetická indukce od proudovodiče v počátku.

Plošné integrály

Plošný integrál ve skalárním poli = plošný integrál I. druhu

a) Plocha *S* zadaná parametricky:

Plocha S: $\boldsymbol{r} = x(u,v)\,\boldsymbol{i} + y(u,v)\,\boldsymbol{j} + z(u,v)\,\boldsymbol{k}$, kde $(u,v) \in A$ (A je rovinná oblast)

Plocha S je jednoduchá hladká plocha.

Gaussovy koeficienty E, F, G na ploše S jsou:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_u \\ F &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v \\ G &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_v \end{aligned}}$$

Element plochy je dS

Skalární funkce je $f: u = f(x,y,z)$, kde f je spojitá

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_A f[x(u,v); y(u,v); z(u,v)]\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

b) Plocha *S* zadaná explicitně, funkcí:

Plocha S: $z = g(x,y)$ a její průmět do roviny xy je obrazec A, funkce g a její parciální derivace g_x' a g_y' jsou spojité na A.

Skalární funkce je $f: u = f(x,y,z)$, f je spojitá. Element plochy je dS.

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_A f[x,y,g(x,y)]\sqrt{\left(1 + g_x'^2(x,y) + g_y'^2(x,y)\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

Plocha S: $x = g(y,z)$ a její průmět do roviny yz je obrazec A

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_A f[g(y,z),y,z,]\sqrt{\left(1 + g_y'^2(y,z) + g_z'^2(y,z)\right)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Plocha S: $y = g(x,z)$ a její průmět do roviny xz je obrazec A

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_A f[x,g(x,z),z]\sqrt{\left(1 + g_x'^2(x,z) + g_z'^2(x,z)\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z}$$

Obsah plochy *S* je dán vzorcem:

$$\boxed{\iint_S \mathrm{d}S = \iint_A \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$, nebo

$$\boxed{\iint_S \mathrm{d}S = \iint_A \sqrt{\left(1 + g_x'^2(x,y) + g_y'^2(x,y)\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$ a analogicky podle průmětu plochy S.

Aplikace plošného integrálu ve skalárním poli:

– jestliže skalární funkce $f(x,y,z)$ má význam hustoty v bodě $(x;y;z)$ plochy *S*, pak tento plošný integrál vyjadřuje hmotnost plochy *S*. Speciálně, jestliže $f(x,y,z)=1$ v každém bodě plochy *S*, pak představuje obsah plochy *S*,

– moment setrvačnosti plochy při hustotě $f(x,y,z)$,

– statické momenty hmotné plochy a těžiště.

Příklad 1: Stanovte hmotnost kulové plochy *S* se středem v bodě $O=(0;0;0)$ a poloměrem *R*, $R>0$, je-li hustota v každém bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy *z*.

Řešení: Parametrické vyjádření kulové plochy $\boldsymbol{r} = R\cos u\sin v\,\boldsymbol{i} + R\sin u\sin v\,\boldsymbol{j} + R\cos v\,\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}'_u = -R\sin u\sin v\boldsymbol{i} + R\cos u\sin v\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}'_v = R\cos u\cos v\,\boldsymbol{i} + R\sin u\cos v\,\boldsymbol{j} - R\sin v\,\boldsymbol{k}$$

$$E = \boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u = (-R\sin u\sin v; R\cos u\sin v;0)\cdot(-R\sin u\sin v; R\cos u\sin v;0) = R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u\sin^2 v = R^2\sin^2 v$$

$$F = \boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v = (-R\sin u\sin v; R\cos u\sin v;0)\cdot(R\cos u\cos v; R\sin u\cos v;-R\sin v) = -R^2\sin u\sin v\cos u\cos v + R^2\cos u\sin v\sin u\cos v = 0$$

$$G = \boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v = (R\cos u\cos v; R\sin u\cos v;-R\sin v)\cdot(R\cos u\cos v; R\sin u\cos v;-R\sin v) = R^2\cos^2 u\cos^2 v + R^2\sin^2 u\cos^2 v + R^2\sin^2 v = R^2\cos^2 v + R^2\sin^2 v = R^2$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{R^4\sin^2 v} = R^2|\sin v|$$

hustota je rovna vzdálenosti libovolného bodu $\mathrm{X}=(x;y;z)$ od bodu $\mathrm{Y}=(0;0;z)$ na ose z, což je $\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_A f[x(u,v);y(u,v);z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$\iint_A \sqrt{R^2\cos^2 u\sin^2 v + R^2\sin^2 u\sin^2 v}\cdot R^2|\sin v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = R^3\iint_A \sin^2 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}u\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2v)\,\mathrm{d}v = R^3 2\pi\frac{1}{2}\left[v-\frac{\sin 2v}{2}\right]_0^{\pi} = R^3\pi^2$$

Výsledek: Hmotnost kulové plochy o hustotě f $\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = R^3\pi^2$.

Příklad 2: Vypočítejte $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S$, kde S je část roviny $x + y + z = 1$ ležící v I. oktantu.

Řešení: Plocha S je zadána funkcí $z = 1 - x - y$, odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \text{ a } \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \text{ a } \mathrm{d}S = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S = \iint\limits_A xy(1-x-y)\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy(1-x-y)\,\mathrm{d}y =$$

$$\sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(xy - xy^2 - x^2 y\right)\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 \left(x - 3x^2 + 3x^3 - x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

Výsledek: $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S = \dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

Příklad 3: Určete plošný obsah plochy dané rovnicí $\boldsymbol{r} = u\cos v\,\boldsymbol{i} + u\sin v\,\boldsymbol{j} + u^2\,\boldsymbol{k}$, $u \in [0,1]$ a $v \in [0,2\pi]$.

Řešení: Element plochy $\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\left(1+4u^2\right)u^2 - 0} = u\sqrt{1+4u^2}$

$$\iint\limits_S \mathrm{d}S = \iint\limits_A \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 u\sqrt{1+4u^2}\,\mathrm{d}u \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v = \frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Výsledek: Plošný obsah plochy je $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)$.

Příklad 4: Určete plošný obsah plochy o rovnici $z = \sqrt{4 - x^2}$ a $x^2 + y^2 \le 4$.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \text{ a } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\iint\limits_S \mathrm{d}S = \iint\limits_A \sqrt{\left(1 + g_x'^2(x,y) + g_y'^2(x,y)\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$2\int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4 - x^2}} = 2\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot 2[y]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = 4\int_{-2}^{2} \mathrm{d}x = 16$$

Výsledek: Plošný obsah plochy je 16.

Plošný integrál ve vektorovém poli = plošný integrál II. druhu = tok vektoru *A* plochou *S*

a) Plocha *S* zadaná parametricky:

Plocha S: $\boldsymbol{r} = x(u,v)\,\boldsymbol{i} + y(u,v)\,\boldsymbol{j} + z(u,v)\,\boldsymbol{k}$ $\quad (u,v) \in A$ (A je rovinná oblast).
Plocha $\boldsymbol{S}$ je omezená (tj. lze ji obklopit koulí s konečným poloměrem) a orientovaná jednotkovým vektorem normály $\boldsymbol{n}_0$ a je to tedy plocha dvoustranná.

Normálový vektor plochy $\boldsymbol{S}$: $\boxed{\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}$.

Element orientované plochy je d$\boldsymbol{S}$, element plochy je dS.

Vektorová funkce $\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}|\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = |\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{array}}$$

b) Plocha *S* zadaná explicitně, funkcí:

Plocha S: $z = g(x,y)$ a její průmět do roviny xy je obrazec A, funkce g a její parciální derivace g_x' a g_y' jsou spojité na A.
Plocha $\boldsymbol{S}$ je omezená (tj. lze ji obklopit koulí s konečným poloměrem) a orientovaná jednotkovým vektorem normály $\boldsymbol{n}_0$ a je to tedy plocha dvoustranná.

Normálový vektor plochy $\boldsymbol{S}$: $\boxed{\boldsymbol{n} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = -g'_x\boldsymbol{i} - g'_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}$

Vektorová funkce $\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S = \iint_A \boldsymbol{A}\cdot\left(-g'_x\boldsymbol{i} - g'_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A \left(-A_x g'_x - A_y g'_y + A_z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ \displaystyle\iint_A \left[-A_x(x,y,g(x,y))g'_x(x,y) - A_y(x,y,g(x,y))g'_y(x,y) + A_z(x,y,g(x,y))\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{array}}$$

c) Plocha *S* zadaná implicitně, funkcí:

Plocha $\boldsymbol{S}$: $G(x,y,z) = 0$

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S = \iint_A \boldsymbol{A}\cdot \mathbf{grad}\,G(x,y,z)\,\mathrm{d}A}$$

Pro výpočet toku vektoru $\boldsymbol{A}$ orientovanou plochou $\boldsymbol{S}$ se používají i tyto identické zápisy:

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S = \iint_S A_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + A_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + A_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Aplikace plošného integrálu ve vektorovém poli:

– jestliže A je vektor rychlosti kapaliny, pak tento plošný integrál udává množství kapaliny, které proteče plochou za jednotku času,
– tok vektoru orientovanou plochou, například tok intenzity elektrického pole,
– gravitační potenciál plochy v bodě,
– Gaussova věta o elektrostatickém poli – pomocí ní se vypočítá kapacita kondenzátoru tvořeného dvěma soustřednými kovovými koulemi,

– výpočet elektromotorické síly vodiče tvaru křivky umístěného v magnetickém poli,
– výpočet síly, kterou hmotná plocha přitahuje hmotný bod, který na ní neleží,
– výpočet celkového proudu protékajícího v elektrolytické vaně,
– výpočet množství energie protékající plochou za jednotku času ve směru orientace (těleso je v jedné části chlazeno a v druhé ohříváno).

Příklad 5: Stanovte tok vektoru $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a} = (2y-1)\boldsymbol{i} + (xy-2x)\boldsymbol{j} + (1-xz)\boldsymbol{k}$ vnější stranou horní poloviny kulové plochy o poloměru $r = 3$ a se středem v počátku soustavy souřadné

Řešení: Parametrické vyjádření kulové plochy: $\boldsymbol{r} = 3\cos u \sin v\, \boldsymbol{i} + 3R \sin u \sin v\, \boldsymbol{j} + 3\cos v\, \boldsymbol{k}$,

kde $u \in [2, 2\pi]$ a $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3\sin u \sin v & 3\cos u \sin v & 0 \\ 3\cos u \cos v & 3\sin u \cos v & -3\sin v \end{vmatrix} =$$

$$9\left(\cos u \sin^2 v; \sin u \sin^2 v; \sin v \cos v\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \left(6\sin u \sin v - 1; 9\cos u \sin u \sin^2 v - 6\cos u \sin v; 1 - 9\cos u \sin v \cos v\right)$$

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v =$$

$$9\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9\sin^2 u \cos u \sin^4 v - 9\cos u \sin^2 v \cos^2 v + \sin v \cos v - \cos u \sin^2 v\right) \mathrm{d}v =$$

$$9\int_0^{2\pi} \left(\frac{27}{16}\pi \sin^2 u \cos u + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\cos u\right) \mathrm{d}u = 9\left[\frac{27}{16}\pi \left[\frac{\sin^3 u}{3}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}[u]_0^{2\pi} - \frac{\pi}{4}[\sin u]_0^{2\pi}\right] =$$

$$9\pi$$

Výsledek: Tok vektoru $\boldsymbol{A}$ vnější stranou horní poloviny kulové plochy je 9π.

Příklad 6: Stanovte tok vektoru $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ orientovanou plochou $\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{S}$ je část paraboloidu $z = 4 - x^2 - y^2$ ležícího nad rovinou xy orientovaného normálou vně plochy.

Řešení: $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ a $g'_x(x, y) = -2x$ a $g'_y(x, y) = -2y$ a tedy

vektor normály $\boldsymbol{n} = (2x; 2y; 1)$

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_0\, \mathrm{d}S = \iint_A \left(x; y; 4 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x; 2y; 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_A \left(4 + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \Rightarrow \text{po}$$

transformaci do polárních souřadnic

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \left(4 + \rho^2\right)\rho\, \mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{4\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 24\pi$$

Výsledek: Tok vektoru $\boldsymbol{A}$ orientovanou plochou $\boldsymbol{S}$ je 24π.

Integrální věty

Gauss-Ostrogradského věta

Gauss-Ostrogradského věta popisuje vztah mezi tokem vektoru $\boldsymbol{A}$ plochou $\boldsymbol{S}$ orientovanou vnější normálou a trojným integrálem divergence vektoru $\boldsymbol{A}$ na tělese, jehož hranicí je plocha $\boldsymbol{S}$. Nechť G je těleso, jehož hranici tvoří uzavřená plocha $\boldsymbol{S}$ orientovaná jednotkovým vektorem $\boldsymbol{n}_0$ vnější normály. Nechť je dáno vektorové pole $\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$, přičemž div $\boldsymbol{A}$ je spojitá funkce na otevřené množině (např. otevřené kouli) obsahující G a $\boldsymbol{S}$. Pak platí:

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0 \,\mathrm{d}S = \iiint_G \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Použití:
Pomocí této věty lze stanovit objem V_G množiny G pomocí plošného integrálu. Stačí volit $A_x(x,y,z) = x$, $A_y(x,y,z) = y$, $A_z(x,y,z) = z$. Pak platí:

$$\boxed{V_G = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S}$$

Plošný integrál ve vektorovém poli udává množství kapaliny, které proteče plochou $\boldsymbol{S}$ za jednotku času. Toto množství udává též trojný integrál na pravé straně, který je limitou integrálních součtů, kde se sčítají hodnoty div $\boldsymbol{A}$ v bodech množiny G („uvnitř" $\boldsymbol{S}$). V některých bodech je div $\boldsymbol{A} > 0$ (nazývají se zřídla), v jiných je div $\boldsymbol{A} < 0$ (nazývají se odtoky (nory)), případně div $\boldsymbol{A} = 0$. Jestliže $\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S > 0$, pak to znamená, že ze zřídel vytéká více kapaliny než odtéká odtoky. V případě $\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S < 0$ je tomu naopak. V prvním případě plochou kapalina odtéká a v druhém případě kapalina do plochy vtéká. Při interpretaci pole pak v prvním případě vznikají v bodě siločáry (zdroj v poli), ve druhém siločáry zanikají (nora) a pokud div $\boldsymbol{A} = 0$ je pole solenoidální a nejsou v něm nory ani zřídla.

Fyzika používá pojem **objemový integrál skalární funkce *f*** přes objem V tělesa G, pro který platí:

$$\boxed{\int_V f\,\mathrm{d}V = \iiint_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Jde o výpočet hmotnosti nehomogenního tělesa, kde funkce f představuje rozložení hmotnosti (funkce hustoty). Jde o jednu z aplikací trojného integrálu.

Ve fyzice má Gauss-Ostrogradského věta význam i pro skalární funkci f (například tlak kapaliny), jejímž výsledkem je <u>vektor:</u>

$$\oint_{\boldsymbol{S}} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathbf{grad}f\,\mathrm{d}V$$

Příklad 1: Pomocí věty Gauss-Ostrogradského vypočítejte tok vektoru $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + xyz\,\boldsymbol{j} + (-2xz)\boldsymbol{k}$ vnější stranou plochy $\boldsymbol{S}$, což je kvádr definovaný takto: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ a $0 \le z \le 2$.

Řešení: $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 2x + xz - 2x = xz$

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_0 \,\mathrm{d}S = \iiint_G \operatorname{div} \boldsymbol{A} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^2 xz\,\mathrm{d}z = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 [y]_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

Výsledek: Tok vektoru $\boldsymbol{A}$ plochou $\boldsymbol{S}$ $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_0 \,\mathrm{d}S = 2$.

Stokesova věta

Stokesova věta popisuje vztah mezi plošným integrálem ve vektorovém poli a křivkovým integrálem na jejím okraji u ploch s okrajem.

Nechť $\boldsymbol{S}$ je plocha s okrajem orientovaná jednotkovým vektorem $\boldsymbol{n}_0$ normály. Nechť okraj tvoří jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka $\boldsymbol{L}$. Dále nechť je zadáno vektorové pole $\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$, přičemž A_x, A_y, A_z mají spojité parciální derivace na otevřené množině (např. otevřené kouli) obsahující $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{L}$. Křivka $\boldsymbol{L}$ je orientovaná ve smyslu orientace plochy $\boldsymbol{S}$.
Pak platí:

$$\boxed{\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_0 \,\mathrm{d}S = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

Použití:

Výpočet plošného integrálu převodem na křivkový a naopak, protože tato věta jinými slovy vyjadřuje, že tok vektoru **rot** $\boldsymbol{A}$ plochou $\boldsymbol{S}$ je roven cirkulaci vektoru $\boldsymbol{A}$ po jejím okraji. Jestliže je **rot** $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}$, pak je $\boldsymbol{A}$ potenciálové vektorové pole $\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$.

Stokesova věta nachází uplatnění v nauce o proudění tekutin a v nauce o elektromagnetickém poli např. Faradayův zákon elektromagnetické indukce.

Příklad 2: Pomocí věty Stokesovy stanovte cirkulaci vektoru $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a} = -z\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}$ podél kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a z = 1 orientovanou kladně z bodu (0; 0; 0).

Řešení: $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (0;-1;1)$

$\boldsymbol{n} = (0;0;-1)$ a obsah kruhu je $\pi r^2 = 4\pi$

$$\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_0 \,\mathrm{d}S = \iint_S -\,\mathrm{d}S = -4\pi$$

Výsledek: Cirkulace vektoru $\boldsymbol{A}$ podél křivky $\boldsymbol{L}$ $\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -4\pi$.

Greenova věta

Greenova věta popisuje vztah mezi křivkovým integrálem druhého druhu v rovině na jednoduché uzavřené křivce ***L*** a dvojným integrálem na množině, pro niž je křivka ***L*** hranicí.

Uvažujme množinu $M \subset E_2$, jejíž hranici tvoří jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka ***L***. Předpokládejme, že funkce A_x, A_y a jejich parciální derivace jsou spojité na *M* i ***L***.
Pak platí:

$$\boxed{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L A_x(x,y)\,\mathrm{d}x + A_y(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_M \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

Jestliže ***A*** interpretujeme jako rychlostní pole proudící tekutiny, křivkový integrál $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ se nazývá cirkulace proudění podél křivky ***L***. Toto číslo závisí na tom, zda a nakolik se tekutina víří. Při ustáleném proudění v nějakém potrubí se rovná nule. Tedy **rot *A*** udává hustotu cirkulace v bodě M_0 vzhledem k rovině takového směru, kdy je největší a směr **rot *A*** je kolmý na tuto rovinu. Vhodným využitím je výpočet obsahu S_M obrazce *M* pomocí křivkového integrálu druhého druhu.

Příklad 3: Užitím věty Greenovy stanovte cirkulaci vektorového pole $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a} = -x^2 y\,\boldsymbol{i} + xy^2\,\boldsymbol{j}$ podél uzavřené křivky ***L***: $x^2 + y^2 = a^2$ ležící v rovině z = 0, kladně orientované.

Řešení: $\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = y^2 + x^2$

$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_A \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a po transformaci do polárních souřadnic dostáváme:

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^a \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{a^4}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi\, a^4}{2}$$

Výsledek: Cirkulace vektorového pole ***A*** podél křivky ***L*** $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \dfrac{\pi\, a^2}{2}$.

Fyzikální odvození

Gradient a potenciál

Předpokládejme, že se nacházíme v gravitačním poli. Vektor intenzity ***K*** gravitačního pole je určen podílem síly ***F***, jíž gravitační pole ve zvoleném místě působí na zkušební hmotný bod malé hmotnosti vložený do tohoto místa, a hmotnosti *m'* tohoto hmotného bodu. Máme-li popsat pole pomocí potenciální energie sondy v jednotlivých místech, dostaneme totéž pole, jestliže k potenciálním energiím v jednotlivých místech přičteme tutéž konstantu. Pro $r \to \infty$ ji položíme rovnu 0. Aby popis pole nebyl na konkrétní sondě závislý, tak vydělíme potenciální energii sondy její hmotností a dostáváme novou veličinu, která se nazývá **gravitační potenciál**, číselně udává potenciální energii, kterou by měl hmotný bod jednotkové hmotnosti v místě vzdáleném o *r* od gravitačního centra, kdybychom ho v tomto místě do pole vložili. **Přírůstek potenciálu** ve zvoleném místě je roven práci síly ***F'*** přemáhající sílu pole ***F*** při přemístění zkušebního hmotného bodu z nekonečna do místa ve vzdálenosti *r*, dělené hmotností *m'* zkušebního hmotného bodu. Známe-li intenzitu pole jako vektorovou funkci souřadnic nebo průvodiče, tedy $\boldsymbol{K}(x,y,z)=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$, umožňuje integrál $-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ zcela obecně přepočítat vektorové pole intenzity ve skalární pole potenciálu, má-li potenciál v nekonečnu nulovou hodnotu.

Silové pole, jehož příkladem je gravitační pole, lze znázornit nebo mapovat plochami, na nichž má potenciál tutéž hodnotu. Tyto plochy se nazývají **hladiny potenciálu** nebo **ekvipotenciální plochy**. Jejich obecná rovnice je tedy $U(x,y,z)=U(\boldsymbol{r})=$ konst. Intenzita $\boldsymbol{K}$ je v místě M kolmá k hladině potenciálu procházející tímto bodem.

Vektor intenzity $\boldsymbol{K}$, kolmý k hladině potenciálu ve zvoleném místě M, míří ve směru, v němž potenciál klesá, tedy směrem k tělesu, které gravitační pole budí. Jeho velikost je dána podílem úbytku potenciálu (záporným přírůstkem dU) při přechodu na sousední hladinu v bezprostředním okolí vyšetřovaného místa M a průmětu dn příslušného posunutí d$\boldsymbol{r}$ do směru normály k hladině procházející tímto místem. Podíl přírůstku skalární veličiny a vzdálenosti, v níž tento přírůstek vzniká, nazýváme **růstem skalární veličiny**, a podíl úbytku veličiny a vzdálenosti, v níž vzniká, nazýváme **spádem skalární veličiny**; spád je tedy záporným růstem.

$$\boldsymbol{K}=-\frac{\mathrm{d}U}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\alpha}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\text{, růst}=\frac{\mathrm{d}U}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}\text{, spád}=-\frac{\mathrm{d}U}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}$$

Postupujeme-li ve směru kolmém k hladinám, je d$\boldsymbol{r}$ = dn nejkratší vzdálenost, v níž se z místa M dostaneme na hladinu, jíž přísluší potenciál lišící se od potenciálu U o elementární přírůstek dU. Tento maximální růst veličiny nazýváme **gradientem skalární veličiny** a značíme **grad** U. Gradient skalární veličiny má charakter vektoru, protože jen v jednom jediném směru ležícím v normále k hladině skalární veličiny v příslušném místě má růst nebo spád maximální velikost. V témže paprsku leží také vektor intenzity pole $\boldsymbol{K}$, jehož velikost (úbytek potenciálu –dU dělený vzdáleností dn) je shodný s velikostí maximálního spádu potenciálu v příslušném místě. Vektor intenzity $\boldsymbol{K}$ silového pole je v každém jeho místě co do velikosti i směru určen maximálním spádem potenciálu U čili záporným gradientem potenciálu U. Použijeme-li Hamiltonův operátor nabla můžeme psát: $\boldsymbol{K}=-\mathbf{grad}U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=-\nabla U$

Tok intenzity gravitačního pole neboli silový tok

Tento pojem je odvozen od proudění tekutiny, představující pole vektoru rychlosti, jíž se částice tekutiny pohybují. Je-li proudění tekutiny ustáleno, lze toto pole znázornit **proudnicemi** neboli **proudovými čarami**; tečny k nim v jednotlivých jejich bodech mají směr rychlosti $\boldsymbol{v}$ proudění tekutiny. Ve zvláštním případě jsou proudnice rovnoběžné přímky rozložené v prostoru stejně hustě, tzn. že rychlost proudící tekutiny je ve všech bodech stejná co do směru a velikosti.

Mysleme si v tekutině proudící tímto způsobem rovinnou plochu plošného obsahu S kolmou ke směru proudění a utvořme součin $\boldsymbol{v}S$. Tento součin udává množství tekutiny (posuzované podle objemu), prošlé plochou za jednotku času, a říkáme mu **objemový tok** tekutiny. Ve vektorovém poli intenzity (obecně síly) odpovídají proudnicím tzv. **silové čáry** neboli **siločáry**, jejichž tečny určují v každém bodě směr intenzity pole, a tedy i směr zrychlení, které pole v tomto místě udílí hmotnému bodu. Má-li intenzita všude ve vyšetřovaném prostoru stejnou velikost a stejný směr, a je tedy všude znázorněna stejným vektorem, nazýváme takové pole **homogenním**, siločáry jsou v něm rovnoběžné přímky.

Utvoříme-li v takovém poli součin $N(S)=\boldsymbol{K}S$, kde S je plošný obsah rovinné plochy kolmé k vektoru intenzity, a tedy kolmé k siločarám, nazýváme jej analogicky s proudící tekutinou **tokem intenzity** (**silovým tokem**, obecně **tokem vektoru** $\boldsymbol{K}$) plochou S. Vektorové pole si můžeme znázornit libovolným počtem siločar procházejících zvolenou plochou S; tento počet můžeme však volit také tak, aby byl roven velikosti součinu $|\boldsymbol{K}| \cdot |S|$, tedy velikosti toku intenzity $|N(S)|$ plochou S. Velikost intenzity $|\boldsymbol{K}|$ je pak rovna zlomku $\dfrac{|N(S)|}{|S|}$, který udává počet siločar jdoucích plochou jednotkové velikosti kolmou k siločarám, tento počet nazýváme **hustotou siločar**.

Jestliže tedy tečna k siločáře určuje směr vektoru intenzity v příslušném místě, pak hustota siločar je měřítkem pro velikost intenzity silového pole. Je-li v homogenním poli rovinná plocha velikosti S orientována šikmo, prochází jí menší počet siločar, než je-li k nim kolmá, tok intenzity $N(S)$ touto plochou je tedy menší. Pro jeho velikost je rozhodující průmět plochy S do roviny kolmé k siločarám. Velikost rovinné plochy i její orientaci v prostoru lze znázornit vektorem $\boldsymbol{S}$, který je k ní kolmý a jehož velikost je rovna velikosti plochy. Tento vektor pak svírá s intenzitou pole $\boldsymbol{K}$ týž úhel α jako plocha S s rovinou kolmou k intenzitě, tedy kolmou k siločarám; tok intenzity $\boldsymbol{K}$ touto šikmou orientovanou plochou lze vyjádřit ve formě skalárního součinu $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{S}$. Vektor $\boldsymbol{S}$, charakterizující rovinnou plochu, může být orientován na tu nebo onu stranu, úhel, který vektor $\boldsymbol{S}$ svírá s intenzitou $\boldsymbol{K}$, může být ostrý nebo tupý. Je-li ostrý, vychází tok intenzity kladně, je-li tupý, pak tok intenzity má záporné znaménko. Snadno nyní symbolicky vyjádříme tok intenzity libovolnou (obecně zakřivenou, ale po částech hladkou) plochou i v nehomogenním poli, jde-li o uzavřenou plochu S vymezující v prostoru jistý objem V.

$$N(S) = \iint_S \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{nebo} \quad \mathrm{N(V)} = \oiint_{S(V)} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Znak plošného integrálu má zdůraznit, že jde o plošnou integraci provedenou přes celý povrch příslušné plochy. U uzavřené plochy orientujeme všechny vektory d$\boldsymbol{S}$ tak, že míří kolmo ven z prostoru vymezeného plochou $S(V)$, a tok intenzity touto plochou označujeme jako **výtok vektoru *K*** z objemu V. Vychází-li výtok záporně, pak jde naopak o **vtok vektoru *K*** do objemu V.

Předpokládejme konečnou část prostoru omezeného zvolenou uzavřenou plochou $S(V)$. Vychází-li výtok intenzity (obecně vektoru) z tohoto prostoru větší než nula, pak analogicky s proudící tekutinou vytéká plochou $S(V)$ více, než do ní vtéká; uvnitř plochy jsou tedy jakési prameny, v nichž přídavný tok vzniká; říkáme jim **zřídla toku intenzity** (obecně toku vektoru). Je-li naproti tomu celkový výtok záporný a celkový vtok kladný, pak část vtékajícího toku v něm tedy zaniká a říkáme, že uvnitř plochy jsou **propady** neboli **nory toku intenzity** (obecně vektoru), které můžeme považovat za záporná zřídla. Je-li celkový výtok plochou nulový nebo je vytékající tok stejně velký jako vtékající tok, pak uvnitř plochy nejsou ani zřídla ani propady příslušného toku, pokud nejsou stejně velké.

U uzavřené plochy v gravitačním poli je celkový tok intenzity nulový nebo vychází záporně, jde tedy vždy o vtoky, takže tělesa uvnitř plochy, jež jsou zdrojem gravitačního pole, představují vždy propady silového toku. Naproti tomu zdroje elektrického pole, charakterizované kladnými a zápornými elektrickými náboji, jsou zřídly nebo propady příslušného silového toku podle toho, který náboj převládá. Stejně jako posuzujeme vydatnost pramene podle množství vody, které vydává za jednotku času, tedy podle jeho objemového výtoku, je **výtok intenzity** (obecně vektoru) **mírou pro vydatnost neboli mohutnost zřídla příslušného toku vektoru a vtok mírou pro mohutnost propadu** (záporného zřídla). Výtok intenzity je úměrný celkové hmotnosti m (v elektrostatice je analogicky úměrný celkovému elektrickému náboji Q) příslušející tělesům budícím gravitační (elektrické) pole, jež mají vlastnost zřídel a propadů silového toku, takže i **hmotnost *m* a elektrický náboj *Q* jsou touž mírou** (vzhledem ke konstantě úměrnosti pouze v jiném měřítku) **pro vydatnost zřídel a propadů**, a to jaksi přirozenou mírou, neboť fyzikálně charakterizují schopnost těles budit v prostoru konkrétní silové pole (gravitační, elektrické).

Naproti tomu výtok intenzity (obecně vektoru) z uzavřené plochy vyjadřuje vydatnost zřídel a propadů uvnitř plochy abstraktně bez zřetele k fyzikálním vlastnostem objektů, jež jako zřídla a propady působí, nebo zda tam vůbec takové objekty jsou.

Místní **měrnou vydatnost spojitě rozložených zřídel, charakterizovanou výtokem intenzity** nazýváme **divergencí vektoru *K*** (česky bychom mohli říci "rozbíhání" vektoru ***K***) a označujeme div ***K***.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{K} = \frac{\text{výtok vektoru } \boldsymbol{K} \text{ z objemového prvku}}{\text{objemový prvek}}$$

Číselně udává výtok vektoru ***K*** (v tomto případě výtok intenzity gravitačního pole) z objemu jednotkové velikosti. Divergence je „množství siločar vzniklé nebo zaniklé v jednotkovém objemu“ podle toho, je-li kladná nebo záporná, jde-li tedy v příslušném místě o zřídlo nebo propad. Divergence vektoru je skalární veličina a je tedy funkcí souřadnic, a to funkcí příslušející skalárnímu poli. Složky vektoru pole jsou též funkcemi souřadnic, a divergence je tedy určena derivacemi těchto složek podle souřadnic; přitom jde vždy o přírůstek složky vektoru při postupu o délkovou jednotku ve směru příslušné složky (její přírůstky v ostatních směrech k ní kolmých nemají vliv), a proto používáme znaku parciální derivace.

$$\oint\!\!\oint_{S(V)} \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\,\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}V = \iiint_{V} (\nabla\cdot\boldsymbol{K})\,\mathrm{d}V$$

To je forma Gaussovy věty používané v matematice a umožňující převést prostorový integrál na plošný a naopak. Říká, že plošný integrál libovolného vektoru přes libovolnou uzavřenou plochu $S(V)$ je roven objemovému integrálu divergence tohoto vektoru, vzatému přes celý objem V, omezený plochou $S(V)$.

Gradient zahrnuje operaci, která skalární pole potenciálu přeměnila ve vektorové pole intenzity. Lze-li vektor charakterizující vektorové pole vyjádřit jako gradient potenciálu, jak je tomu např. u intenzity gravitačního pole vztahem $\boldsymbol{K} = -\mathbf{grad}\ U = -\nabla U$, máme, že $\mathrm{div}\,\boldsymbol{K} = \mathrm{div}\,(-\mathbf{grad}\ U) = -\nabla\cdot(\nabla U) = -\Delta U$, kde **Laplaceův operátor** Δ je skalární součin Hamiltonova vektorového operátoru s ním samým, tedy:

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

V gravitačním poli je $\mathrm{div}\,\boldsymbol{K} = -4\pi k\rho$ takže:

$$\Delta U = 4\pi k\rho \qquad \text{nebo}\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi k\rho$$

Tato rovnice se nazývá **Poissonova rovnice**. Známe-li prostorové rozložení hustoty těles, která jsou zdrojem gravitačního pole, lze řešením této rovnice určit prostorové rozložení potenciálu tohoto pole $U(x, y, z)$ a utvořením jeho gradientu v každém místě pak intenzitu pole. V místech, kde není rozložena žádná hmotnost, přechází Poissonova rovnice v jednodušší **rovnici Laplaceovu** $\Delta U = 0$.

Cirkulace vektoru *K*

Tento název je opět odvozen od chování proudící tekutiny. Vytéká-li např. tekutina otvorem ve dně nádoby, pozorujeme na její hladině vířivé proudění **vír** vyznačující se tím, že částice tekutiny se pohybují přibližně v soustředných kruzích. Částice tedy cirkulují kolem středu víru rychlostí ***v*** a mírou této cirkulace a současně intenzity (mohutnosti) víru je součin rychlosti částic ***v*** a délky kruhové dráhy $2\pi\boldsymbol{r}$, po níž se touto rychlostí částice pohybují; zkráceně pak říkáme, že cirkulace

$\Gamma = 2\pi\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{v}$. Vedeme-li v takto proudící tekutině uzavřenou křivku L, která není shodná s dráhami částic, pak se po této křivce částice tekutiny nepohybují, utvoříme-li však v každém bodě křivky skalární součin vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ v daném místě a elementu d$\boldsymbol{l}$ křivky čili součin průmětu rychlosti do směru tečny a elementu křivky a tyto součiny sečteme podél celé křivky, je tento součet roven součinu průměrné velikosti průmětů rychlosti a délky l uzavřené křivky a to jako při skutečné cirkulaci částic kolem středu víru, a proto v přeneseném smyslu mluvíme o cirkulaci vektoru $\boldsymbol{v}$ podél uzavřené křivky.

Cirkulace vektoru $\boldsymbol{v} = \oint\limits_{L(S)} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.

Je zřejmé, že v každém vektorovém poli není cirkulace příslušného vektoru nulová jako v gravitačním poli (a podobně i v elektrickém poli). Nyní provedeme přechod od konečné části prostoru, v němž uzavřená křivka L probíhá, do zvoleného místa M na ploše ohraničené křivkou L. Plošný obsah této plochy označme ΔS. Jako jsme k divergenci vektoru došli zmenšováním objemu ΔV kolem vyšetřovaného místa, zmenšujeme nyní neomezeně plochu ΔS. V limitě $\Delta S \to 0$ dává podíl cirkulace vektoru $\boldsymbol{K}$ po obvodu plošky ΔS a této plošky hodnotu konečné velikosti, ale tato hodnota záleží na prostorové orientaci plošky d$\boldsymbol{S}$, v níž v limitě přechází plocha ΔS a jež jako elementární má charakter vektoru. Kromě velikosti této limity musíme také udat, k jakému směru v prostoru se vztahuje, má tedy vektorový charakter. Volíme takový směr, aby byla limita v daném místě M vektorového pole $\boldsymbol{K}$ maximální. Tato limita určuje nový vektor, který nazýváme **rotací** neboli **rotorem vektoru** $\boldsymbol{K}$, příslušného vektorovému poli, a označujeme **rot** $\boldsymbol{K}$.

Číselně je tedy rotace vektoru jeho cirkulace podél obvodu rovinné plochy jednotkového plošného obsahu, má-li tato plocha takovou orientaci v prostoru, že cirkulace je maximální. Cirkulace v daném místě M je největší kolem plošky, jejíž vektor d$\boldsymbol{S}$ s vektorem $\nabla \times \boldsymbol{K}$ svírá úhel $\alpha = 0$, čili kolem plošky dS kolmé k vektoru $\nabla \times \boldsymbol{K}$. Tuto vlastnost požadujeme právě u rotace vektoru $\boldsymbol{K}$, z čehož plyne závěr, že:

$$\left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \int\limits_{L(\Delta S)} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \right)_{\max} \boldsymbol{n^0} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{K} = \nabla \times \boldsymbol{K} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \right) \times \left(K_x \boldsymbol{i} + K_y \boldsymbol{j} + K_z \boldsymbol{k} \right)$$

Ve vektorovém poli vektoru $\boldsymbol{K}(x,y,z)$ je tedy v každém místě rotace vektoru $\boldsymbol{K}$ určena vektorovým působením Hamiltonova operátoru nabla na vektor $\boldsymbol{K}$ zleva, přičemž jeho fyzikální význam záleží v tom, že jeho skalární součin s vektorem d$\boldsymbol{S}$ příslušejícím malé plošce určuje cirkulaci vektoru $\boldsymbol{K}$ podél obvodu této plošky:

Cirkulace $= \mathbf{rot}\, \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\nabla \times \boldsymbol{K} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

Rotace vektoru $\nabla \times \boldsymbol{K}$ představuje početní operaci, která převádí vektorové pole vektoru $\boldsymbol{K}$ ve vektorové pole rotoru $\boldsymbol{K}$. Představme si, že ve vektorovém poli **rot** $\boldsymbol{K}$ máme libovolnou uzavřenou křivku L ohraničující plochu S libovolného tvaru, ovšem neuzavřenou. Sečteme-li elementární cirkulace u celé plochy S, ruší se v tomto součtu při stejném smyslu oběhu navzájem skalární součiny $\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ u všech obvodů plošek dS, z nichž se plocha skládá, vyjma úseky ležící na uzavřené křivce $L(S)$ ohraničující plochu S, takže skalární součiny $\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ příslušející těmto úsekům tvoří dohromady cirkulaci vektoru $\boldsymbol{K}$ podél křivky $L(S)$. Docházíme tedy k **Stokesově větě**:

$$\oint\limits_{L(S)} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint\limits_{S} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \left(\nabla \times \boldsymbol{K} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Křivkový (dráhový) integrál vektoru $\boldsymbol{K}$ podél libovolné uzavřené křivky $\boldsymbol{L}$ je roven plošnému integrálu rotace vektoru $\boldsymbol{K}$ přes libovolnou plochu $\boldsymbol{S}$, jež je křivkou $\boldsymbol{L}$ ohraničena. Skalární součin **rot** $\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ lze také nazvat elementárním tokem vektoru **rot** $\boldsymbol{K}$ ploškou d$\boldsymbol{S}$, a proto lze Stokesovu větu vyslovit také takto: Tok vektoru **rot** $\boldsymbol{K}$ libovolnou (neuzavřenou) plochou $\boldsymbol{S}$ je roven cirkulaci vektoru $\boldsymbol{K}$ podél uzavřené křivky $\boldsymbol{L}$ omezující plochu $\boldsymbol{S}$. Umožňuje převádět integrál vektoru podél uzavřené křivky na integrál plošný.

Charakterizace vektorových polí místně, tedy lokalizace těchto vlastností:

Gravitační pole a podobně i elektrostatické pole se vyznačuje tím, že cirkulace příslušné intenzity je rovna nule, takže i rotace intenzity je všude, kde se pole rozprostírá, rovna nule. Takové vektorové pole nazýváme **nevírovým**. Za to má gravitační a elektrostatické pole zřídla a propady, takže tam, kde jsou, je divergence vektoru intenzity od nuly různá. Pole pak nazýváme **zřídlovým**: $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{K} = \nabla \times \boldsymbol{K} = \boldsymbol{o}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{K} = \nabla \cdot \boldsymbol{K} \neq 0$ (pole nevírové a zřídlové).

Je-li rotace vektoru $\boldsymbol{B}$, charakterizujícího vektorové pole, od nuly různá, jak je tomu např. u magnetického pole, v proudící kapalině apod., nazýváme pole **vírovým**, a je-li přitom divergence příslušného vektoru všude v prostoru nulová, nazýváme pole **nezřídlovým**:
$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{o}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (pole vírové a nezřídlové).

Obecné vektorové pole, které je **jak zřídlové, tak vírové**, vznikne superpozicí obou těchto hlavních druhů fyzikálních vektorových polí. Příkladem je obecné elektromagnetické pole.

V případě nevírového pole utvořme vektorový součin $\nabla \times (\nabla U)$, kde U je skalární veličina. Vektorový součin dvou vektorů téhož směru je vždy roven nule, takže $\nabla \times (\nabla U) = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,U) = \boldsymbol{o}$. Je-li tedy rotace vektoru $\boldsymbol{K}$ příslušející vektorovému poli rovna nule, lze vždy tento vektor vyjádřit jako gradient (nebo záporný gradient podle fyzikálního významu) skalární funkce $\boldsymbol{K} = \mathbf{grad}\,U = \nabla U$; tuto funkci nazýváme **skalárním potenciálem**.

Mějme vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$; skalární součin vektoru $\boldsymbol{a}$ s vektorovým součinem $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je vždy roven nule, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, protože vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{a}$ a skalární součin dvou kolmých vektorů je roven nule. Podobně pro Hamiltonův operátor máme $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$. Je-li tedy divergence vektoru $\boldsymbol{B}$ příslušejícího vektorovému poli rovna nule, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, existuje vždy vektor $\boldsymbol{A}$, který má tu vlastnost, že rotace tohoto vektoru je rovna vektoru $\boldsymbol{B}$, tedy $\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

Vektor $\boldsymbol{A}$, který má analogickou vlastnost jako skalární potenciál U, že z něho lze početní operací (v tomto případě vektorovou) odvodit vektor $\boldsymbol{B}$ příslušející poli, které má fyzikální význam (např. magnetickému poli), nazýváme **vektorovým potenciálem**.