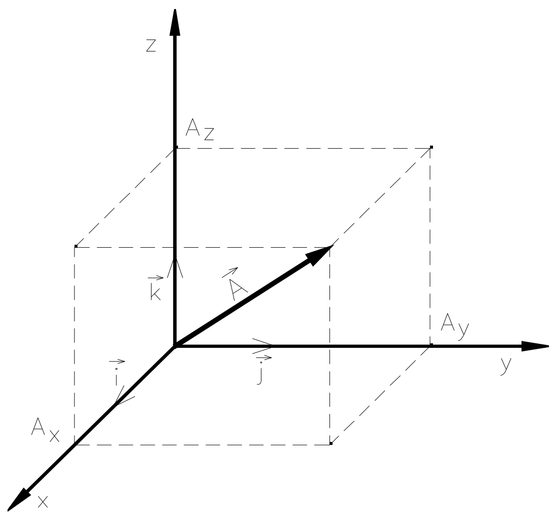
Stručný prehľad matematického aparátu použitého v kurze fyziky

Spracoval: Doc. RNDr. Quido Jackuliak, CSc.

I. Vektory

V predmete fyzika sa pracuje s fyzikálnymi veličinami. Všetky sa dajú vyjadriť pomocou tenzorov rôzneho rádu a ich vlastných jednotiek. Tenzor nultého rádu je číslo, ktoré používame pri označení množstva fyzikálnej veličiny v jej vlastných jednotkách. Niektoré fyzikálne veličiny majú okrem množstva aj smer v priestore alebo vzhľadom na určitú plochu. Prvé budeme popisovať tenzormi 1. rádu - vektormi , druhé - tenzormi vyššieho rádu. Vektorová fyzikálna veličina je definovaná nasledovne. Aby fyzikálna veličina bola vektorom, je nutné, aby tri čísla vyjadrujúce túto veličinu sa pri prechode z jednej súradnicovej sústavy do inej súradnicovej sústavy transformovali tak, ako zložky polohového vektora , t.j. $x_i = \alpha_{ij}\, x_j$.

V Euklidovom priestore si vektor $\boldsymbol{A}$ môžeme rozpísať do tvaru $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$, kde A_x, A_y, A_z sú projekcie tohto vektora na osi *x, y, z* a ***i, j, k*** sú jednotkové vektory vo smere týchto osí, ako je to znázornené na obrázku 1.



Obr.1 Zobrazenie vektora v Euklidovom priestore

V závislosti od usporiadania osí súradnicová sústava môže byť pravotočivá alebo ľavotočivá. Na obr.1 máme pravotočivú súradnicovú sústavu. Komutatívny zákon, ktorý v nej platí, bude mať pre dva vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ tvar:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = (A_x+B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z+B_z)\boldsymbol{k}.$$

Vektory môžeme nielen medzi sebou sčítať, ale aj násobiť. Podľa toho, či násobenie vedie ku skaláru alebo k vektoru, hovoríme o skalárnom a vektorovom súčine. Skalárny súčin dvoch vektorov dostaneme, ak vynásobíme hodnotu prvého vektora na projekciu druhého vektora na smer prvého vektora alebo opačne. Označovať ho budeme bodkou medzi vektormi a okrúhlymi zátvorkami. Môžeme napísať:

$$(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) = A\,B \cos\vartheta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \,,$$

kde ϑ je úhol medzi vektormi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Vektorový súčin dvoch vektorov je vektor,hodnota ktorého je rovná obsahu rovnobežníka opísaného týmito vektormi a jeho smer je kolmý na túto plochu. Vektorový súčin budeme označovať znamienkom x medzi vektormi a hranatými zátvorkami. V pravotočivej súradnicovej sústave môžeme napísať $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (A_yB_z - B_yA_z)\,\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$. Jeho absolutná hodnota bude rovná $Ab \sin\vartheta$. Pre vektorový súčin môžeme použiť skrátený zápis pomocou determinantu

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Pre vektorový súčin komutatívny zákon neplatí, lebo $[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}] = -[\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}]$.

Dvojitý vektorový súčin $[\,\boldsymbol{A} \times [\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\,]\,]$ je vektor, ktorý môžeme vyjadriť pomocou dvoch vektorov nasledovne:

$$[\,\boldsymbol{A} \times [\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\,]\,] = \boldsymbol{B}\,(\,\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}\,) - \boldsymbol{C}\,(\,\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}\,).$$

Zmiešaný súčin je definovaný ako súčin troch vektorov:

$$(\boldsymbol{A}\bullet[\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}]\,) = (\boldsymbol{B}\bullet[\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}]) = (\boldsymbol{C}\bullet[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]\,).$$

Zmiešaný súčin je skalár a jeho hodnota sa rovná objemu telesa so stranami ***A***,***B***.***C***. Môžeme ho vyjadriť aj pomocou determinantu

$$(\boldsymbol{A}\bullet\,[\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\,]\,) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

II. Derivácie

Vo fyzike budeme veľmi často potrebovať vedieť vypočítať rýchlosť zmeny funkcie v danom bode. Nech f(x) je spojitá na intervale hodnot x, v ktorom budeme skúmať jej zmenu. Zvolíme si malú zmenu hodnoty x rovnú Δx a budeme skúmať, ako sa chová pomer rozdielu hodnôt funkcie v bodoch x +Δx a x k hodnote Δx. Matematicky to môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Ak budeme interval Δx zmenšovať k nule, dostaneme zmenu funkcie f(x) v bode x. Matematicky si to vyjadríme nasledovne: $.= \frac{df(x)}{dx}$.

Tento výraz budeme volať deriváciou funkcie f(x) podľa x.

Často sa budeme stretávať s funkciami, ktoré majú viacej premenných. Ak chceme zistiť zmenu takejto funkcie od premenných, musíme najprv zistiť zmenu tejto funkcie od jednej premennej. Takúto zmenu budeme volať parciálnou deriváciou podľa zvolenej premennej. Vypočítame ju podobne ako deriváciu funkcie od jednej premennej, a to tak, že zafixujeme ostatné premenné (t.j. pri výpočte derivácie ich budeme brať ako konštanty). Aby sme v zápise rozlíšili parciálnu deriváciu od derivácie funkcie jednej premennej, budeme ju označovať tak, že namiesto písmena d budeme používať grécke písmeno ∂. Napr. $\partial f/\partial t$ - parciálna derivácia funkcie f podľa času. Celkovú zmenu funkcie viacerých premenných vyjadruje veličina, ktorú voláme gradient a o ktorej sa zmienime nižšie.

Niekedy budeme potrebovať vedieť chovanie funkcie f(x) okolo určitého bodu. V tomto prípade nám poslúži Taylorov rad. Podľa Taylora hodnota funkcie f(x) v bode x v blízkosti určitého bodu napr. x_o sa dá vypočítať ak rozložíme funkciu do nasledovného radu

$$f(x) = f(x_o) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(x - x_o) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x - x_o)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(x - x_o)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}(x - x_o)^n .$$

V prípade funkcie viacerých premenných berú sa namiesto derivácie n-tého rádu všetky parciálne derivácie n-tého rádu a vynásobia vzdialenosťami zodpovedajúcich súradníc v n-tej mocnine.

III. Integrály

Okrem rýchlosti zmeny funkcie, bude nás veľmi často zaujímať aj obsah plochy ohraničenej zdola osou x a zhora určitou funkciou f(x), a to medzi dvomi konkrétnymi bodmi *a* a *b*. Toto sa dá dosiahnuť nasledovne. Rozdelíme úsečku $\overline{ab}$ na malé dieliky Δx a každý vynásobíme hodnotou funkcie f(x) v strede úsečky Δx a potom všetky násobky sčítame. Označíme si tento súčet $\Phi_n(x)$.

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

Ak teraz prejdeme k limite, t.j. Δx sa bude blížiť k nule a $n \to \infty$, dostaneme limitnú hodnotu,ktorú budeme volať hodnota určitého integrálu funkcie f(x) na úsečke $\overline{ab}$ a označíme si ho nasledovne :

$$\Phi(a,b) = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Ak existuje taká spojitá funkcia F(x), že hodnota integrálu Φ(a,b) sa dá vyjadriť rozdielom hodnôt funkcie F(x) v bodoch *b* a *a*, ak sa úsečka $\overline{ab}$ nachádza v obore definície tejto funkcie, t.j. môžeme napísať $\Phi(a,b) = F(b) - F(a)$, potom budeme volať túto funkciu F(x) neurčitým integrálom funkcie f(x). Neurčitý integrál funkcie f(x) budeme označovať nasledovne

$$F(x) = \int f(x)dx\,.$$

Je zrejmé, že derivácia funkcie F(x) je funkcia f(x). Takáto definícia integrálu ale neplatí v prípade funkcie viacerých premenných. Funkcia viacerých premenných je integrovateľná len vtedy, ak výraz

$$df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

je úplným diferenciálom, t.j. existuje taká funkcia $F(x_1, x_2, \ldots x_k)$, ktorá závisí len od súradníc a nie od spôsobu , akým prejdeme z jednej polohy do druhej.

Vo fyzike sa budeme pohybovať v priestore, t.j. často po krivkách a nie len po priamkach. Pritom budeme chcieť vedieť napr. prácu sily na takejto dráhe, ak samotná sila bude závisieť od súradníc bodov v ktorých je priložená. Vieme, že elementárna práca sily $\boldsymbol{F}$ na malom úseku dráhy d$\boldsymbol{l}$ je rovná ich skalárnému súčinu. Môžeme napísať $dA = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l}$. Celková práca sily $\boldsymbol{F}$ na určitej časti krivky *L* bude rovná súčtu elementárnych prác, a jeho limitná hodnota je integrál. Je teda potrebné si zaviesť pojem krivkového integrála. Pod krivkovým integrálom budeme rozumieť integrál vektora $\boldsymbol{a}$ vzatého po určitej krivke *L*. Môžeme napísať

$$\int_L \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \int_L (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{l}_1)\, dl \quad ,$$

kde $\boldsymbol{l}_1$ je jednotkový vektor, smer ktorého je smer elementu krivky dl, t.j. $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_1 dl$. Skalárny súčin $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{l}_1)$ sa často píše ako a_l, čiže projekcia vektora $\boldsymbol{a}$ na vektor $\boldsymbol{l}_l$. Potom krivkový integrál môžeme prepísať do tvaru $\int_L a_l dl$.

Podobne ako krivkový integrál môžeme si zadefinovať plošný integrál. Majme určitú vektorovú veličinu **A** a táto nám prechádza cez plochu S. Nás zaujíma množstvo tejto veličiny, ktoré prechádza cez túto plochu. Zvolíme si preto elementárnu plošku ds. V trojrozmernom priestore bude ale táto elementárna ploška orientovaná, čo znamená že bude vektorom, označíme si ju teda d$\boldsymbol{s}$. Kladný smer smeruje von z vydutej strany plošky. V prípade roviny je treba dohodnúť sa na kladnom smere. Veličinu rovnú skalárnemu súčinu vektora $\boldsymbol{A}$ na danej ploške a elementárnej plošky d$\boldsymbol{s}$ budeme volať elementárnym tokom vektora $\boldsymbol{A}$ cez plošku d$\boldsymbol{s}$ a označíme si ju ako dΦ. Označme si jednotkový vektor elementárnej plošky ako $\boldsymbol{n}$ a potom $d\Phi = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n})ds$. Celkový tok Φ vektora $\boldsymbol{A}$ cez plochu S dostaneme sčítaním jednotlivých elementárnych tokov. Ak prejdeme k limite, dostaneme integrál vektora $\boldsymbol{A}$ cez plochu S. Môžeme teda napísať

$$\Phi = \iint_S (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n})ds = \iint_S A_n ds\,.$$

IV. Operátory

Ďalším pojmom, s ktorým sa budeme stretávať vo fyzike, sú operátory. Operátor je symbol, ktorý ukazuje, akú operáciu máme vykonať s výrazom, ktorý je napísaný za operátorom. S niektorými operátormi sa teraz zoznámime.

IV.1. ***Gradient***

Nech φ(x,y,z) je určitá skalárna funkcia. Rýchlosť jej zmeny môžeme vyjadriť vektorom, v smere ktorého bude najrýchlejšia zmena φ. Tento vektor môžeme zapísať pomocou operátora gradient, skrátene grad.

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} = \vec{\Delta}\varphi \quad .$$

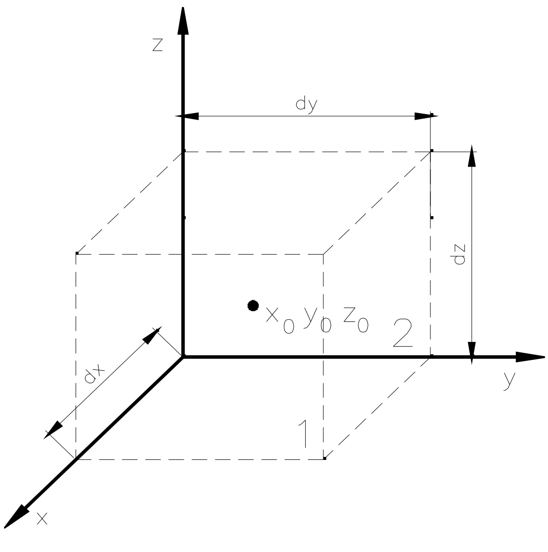
Ak φ bude funkciou určitého skalárneho poľa, potom gradient φ bude mierou rýchlosti zmeny tohto poľa v bode (x,y,z).

IV.2. ***Divergencia***

Budeme sa stretávať aj s vektorovými poliami. Pri práci s nimi budú dôležité dve diferenciálne operácie. Jedna privádza ku skaláru, ktorý ukazuje stupeň rozbiehavosti vektorového poľa, druhá k vektoru, charakterizujúcemu zakrivenosť vektorového poľa. Prvú operáciu dosiahneme limitným prechodom toku vektora pri zmenšovaní uzavretého povrchu v bod, druhú analogickým pochodom použitým k cirkulácii.

Aby sme dosiahli spomenutý skalár, najprv vypočítame tok vektora ***F*** z vnútra elementu objemu dxdydz so stredom v bode (x_o,y_o,z_o). Na obr.2 je znázornený tento elementárny objem. Rozložíme si x-ovú zložku vektora ***F*** v okolí bodu (x_o,y_o,z_o) do Taylorovho radu a dostaneme

$$F_x = F_x(x_o, y_o, z_o) + \frac{\partial F_x}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial F_x}{\partial y}(y - y_o) + \frac{\partial F_x}{\partial z}(z - z_o) + \ldots$$



Obr.2 Znázornenie elementárneho objemu v Euklidovom priestore okolo bodu x_o,y_o,z_o.

kde derivácie sa berú v bode (x_o,y_o,z_o).

Plošný integrál normálnej zložky ***F*** na ploche **1** bude

$$\iint_1 F_x ds = dydz[F_x(x_o, y_o, z_o) + \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \text{vyššie dife-}$$

renciály. Plošný integrál normálnej zložky ***F*** na ploche **2** bude

$$\iint_2 F_x ds = -\,dydz[F_x(x_o, y_o, z_o) - \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}dx + \quad \text{vyššie}$$

diferenciály. Znak mínus pred zátvorkami znamená, že sa integruje zložka ***F*** vo smere vonkajšej normály, ktorá na ploche **2** je rovná $-F_x$. Súčet týchto integrálov je rovný $\frac{\partial F_x}{\partial x}dxdydz$, ak zanedbáme veľmi malé hodnoty vyšších rádov. Pretos presnosťou malých vyšších rádov môžeme napísať

$$\oiint(\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s}) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Skalárnu veličinu $\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$ voláme divergenciou vektora $\boldsymbol{F}$ v bode (x,y,z), skrátene div a jej presná definícia je nasledovná

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\lim_{\text{objem}\to 0}\frac{\oiint(\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{s})}{\text{objem}}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

IV.3. ***Gausová veta.***

Vlastnosť additivity toku a definícia divergencie vektora **F** nám dovoľujú získať dôležitý a výhodný spôsob výpočtu toku vektora z vnútra ľubovolného priestoru. V dôsledku additivity tok z vnútra celej oblasti musí byť rovný súčtu tokov zo všetkých elementárnych oblastí nachádzajúcich sa vo vnútri uvedenej oblasti. Pretože platí predchádzajúca rovnica integrály po elementárnom objemu dV môžeme zapísať ako div $\boldsymbol{F}$ dV a to znamená, že platí nasledovná veta o divergencii $\oiint_S(\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{s})=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$, kde objemový integrál berieme po celej oblasti ohraničenej povrchom, po ktorom sa vedie integrovanie plošného integrála na ľavej strane rovnice. Táto rovnica sa volá Gausová veta v matematike.

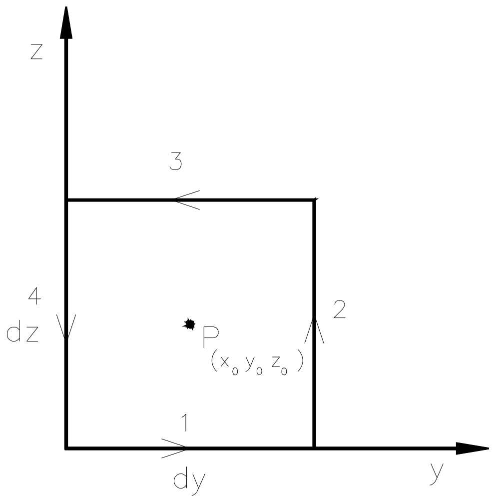
IV.4. ***Rotácia vektora***

Zostáva nám preskúmať diferenciálny operátor, ktorý premeňuje vektor na iný vektor. Tento operátor nám umožňuje zistiť mieru turbulentnosti vektorového poľa. Aby sme mohli vypočítať turbulentnosť vektorového poľa v bode P, vypočítame cirkuláciu okolo elementu plochy s nachádzajúcim sa na nej bodom P a podelíme ju plochou tohto elementu. Napríklad vezmeme element plochy kolmý na osu x, pozri obr.3. Potom integrál cirkulácie okolo dráhy $1\to 2\to 3\to 4$bude

$$\oint(\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l})=\int_1 F_y\mathrm{d}y+\int_2 F_Z\mathrm{d}z-\int_3 F_y\mathrm{d}y-\int_4 F_z\mathrm{d}z=F_y(x_o,y_o,z_o)\mathrm{d}y-\frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\mathrm{d}y+F_z(x_o,y_o,z_o)\mathrm{d}z+$$

$$+\frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\mathrm{d}z-F_y(x_o,y_o,z_o)\mathrm{d}y-\frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\mathrm{d}y-F_z(x_o,y_o,z_o)+\frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial F_y}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Pre elementy kolmé k osiam y a z dostaneme



Obr.3 Schématické zobrazenie elementárnej plošky a dráhy, po ktorej sa berie integrál cirkulácie.

$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ a $\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Ak elementárna plocha zvira s osami ľubovoľné uhly, dostaneme veľmi zložité výrazy. Zjednodušiť sa to dá ale tak, že výrazy $\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$,budeme chápať ako x-ové,y-ové a z-ové zložky vektora. Takto definovaný vektor sa volá rotácia vektora,skrátene rot. Môžeme teda napísať

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

IV.5. ***Stokesová veta***

Vezmime si ľubovoľný povrch S, ktorý je ohraničený uzavretou krivkou L. Rozdelíme povrch S na elementy ds a zložíme cirkulácie okolo týchto elementov. Podľa definície rotácie tento súčetmôže byť napísaný ako $\oiint_S \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{s})$,kde vektor d$\boldsymbol{s}$ zodpovedá veľkosťou ploške ds a má smer normály k povrchu tejto plošky a integrál sa berie po celej ploche S. Ale v dôsledku additivity cirkulácie integrál $\oiint_S \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{s})$ musí byť rovný cirkulácii po krivke L. To znamená, že môžeme napísať $\oiint_S \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{s}) = \oint_L (\boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$ Táto rovnica sa volá Stokesová veta.

IV.6. ***Práca s operátormi***

Ak sa bližšie pozrieme na operátory gradientu, divergencie a rotácie, vidíme, že namiesto týchto troch operátorov môžeme použiť jeden vektorový operátor a operácie skalárneho a vektorového súčinu. Tento operátor sa volá operátor Hamiltona (nabla) a jeho tvar je nasledovný:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Teraz môžeme zapísať gradient skalárnej funkcie φ ako grad φ = ∇φ, divergenciu vektora $\boldsymbol{F}$ ako skalárny súčin operátora nabla a vektora $\boldsymbol{F}$, div $\boldsymbol{F} = (\nabla \bullet \boldsymbol{F})$ a rotáciu vektora $\boldsymbol{F}$ ako vektorový súčin operátora nabla a vektora $\boldsymbol{F}$, rot $\boldsymbol{F} = [\nabla \times \boldsymbol{F}]$.

Operátor nabla môžeme použiť aj dvakrát po sebe. Dostaneme tri prípady:

$\nabla [\nabla \times \boldsymbol{V}]$ = div rot $\boldsymbol{V}$ = 0

$[\nabla \times (\nabla U)]$ = rot grad U = 0

$(\nabla\bullet(\nabla U))$ = div grad U = ∇^2 = Laplaceho operátor $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Napíšme si niektoré operácie s operátormi, s ktorými sa môžeme stretnúť vo fyzike. Označíme si konštantu ako c, skalárnu funkciu ako U a vektor ako $\boldsymbol{V}$.

Potom

grad c = 0

grad $(U_1 + U_2)$ = grad U_1 + grad U_2

grad (cU) = c grad U

div c = 0

div $(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2)$ = div $\boldsymbol{V}_1$ + div $\boldsymbol{V}_2$div (c$\boldsymbol{V}$) = c div $\boldsymbol{V}$

div (U $\boldsymbol{V}$) = U div $\boldsymbol{V}$ + ($\boldsymbol{V}$ • grad U)div [$\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2$] = ($\boldsymbol{V}_2$• rot$\boldsymbol{V}_1$) - ($\boldsymbol{V}_!$• rot $\boldsymbol{V}_2$)

div $\boldsymbol{r}$ = 3 (kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor)

div (φ(r) $\boldsymbol{r}$) = 3 φ(r) + $\boldsymbol{r}$ φ(r)

rot (c$\boldsymbol{V}$) = c rot$\boldsymbol{V}$

rot $(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2)$ = rot $\boldsymbol{V}_1$ + rot $\boldsymbol{V}_2$

rot (U•$\boldsymbol{V}$) = U rot $\boldsymbol{V}$ + [grad U x $\boldsymbol{V}$]

V. Niektoré derivácie a integrály funcie jednej premennej použité v kurze Fyziky.

Derivácie

Funkcia	Derivácia	Funkcia	Derivácia
c (konštanta)	0	ln x	1/x
x	1	sin x	cos x
x^n	$n\,x^{n-1}$	cos x	- sin x
1/x	$-1/x^2$	tg x	$1/(\cos^2 x)$
$1/x^n$	$-\,n/x^{n-+1}$	ctg x	$-\,1/(\sin^2 x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$	arccotg x	$-\frac{1}{1+x^2}$

Neurčité integrály
Pre X = ax + b

1. $\int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$ okrem $n=-1$ 2. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$

Pre $X = a^2 \pm x^2$

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} Y \qquad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} & \text{pre znamienko +} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{pre znamienko "}-\text{" ak } |x| < a \\ \frac{!}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} & \text{pre znamienko "}-\text{" ak } |x| > a \end{cases}$$

$$\int \sin ax \; dx = -\frac{1}{a} \cos ax \qquad \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \qquad \int \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \qquad \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

Určité integrály

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad \text{ak} \quad a > 0 \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^2} \quad \text{ak} \quad a > 0$$