Spojitosť

Spojitosť funkcie v čísle je lokálna vlastnosť, ktorá dáva do súvisu hodnotu funkcie v čísle s hodnotami v jeho okolí.

Voľne povedané, funkcia f je spojitá v čísle r zo svojho definičného oboru, ak hodnoty funkcie f v číslach blízkych r sú blízke hodnote $f(r)$.

Presne povedané, funkcia f je **spojitá v čísle (bode)** r zo svojho definičného oboru, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $x \in (r-\delta, r+\delta) \bigcap D(f)$ platí $f(x) \in (f(r)-\varepsilon, f(r)+\varepsilon)$.

Čísla z definičného oboru, v ktorých je funkcia spojitá, sa volajú **body spojitosti**. Čísla z definičného oboru, v ktorých funkcia spojitá nie je, sa volajú **body nespojitosti**.
Spojitá funkcia je taká funkcia, ktorá je spojitá v každom čísle svojho definičného oboru.
Funkcia f je **spojitá v intervale** $(a,b) \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode tohoto intervalu.
Funkcia f je **spojitá v čísle (bode)** r zo svojho definičného oboru **zľava (sprava)**, ak je v bode r spojitá funkcia $f_{/(-\infty,r>}$ ($f_{/<r,\infty)}$).
Spojité funkcie majú veľa vlastností, ktoré z nich robia dôležitý objekt štúdia.

Spojitosť a elementárne funkcie

Elementárne funkcie sú spojité.
Funkcia $y = sign(x)$ je nespojitá v bode 0. Iným príkladom nespojitých funkcií sú funkcie celá a zlomková časť čísla. Celá časť čísla x je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x a značí sa $[x]$. Zlomková časť čísla x je $\{x\} = x - [x]$. Obidve tieto funkcie sú nespojité v každom celom čísle.

Spojitosť a operácie s funkciami

Funkcie vytvorené operáciami zo spojitých funkcií bývajú spojité:

1. Zúženie spojitej funkcie je spojitá funkcia.
2. Ak sú v čísle r spojité funkcie f a g, tak sú v čísle r spojité aj funkcie $f+g$, $f-g$ a $f.g$ a tiež funkcia $\frac{f}{g}$, ak $g(r) \neq 0$.
3. Ak je funkcia f spojitá v čísle r a funkcia g je spojitá v čísle $f(r)$, tak funkcia $g \circ f$ je spojitá v čísle r.
4. Ak je prostá funkcia spojitá, tak aj k nej inverzná funkcia je spojitá.

Spojitosť a graf

Voľne povedané:
ak je graf funkcie súvislá krivka, tak je funkcia spojitá.

Spojitosť a globálne vlastnosti

1. Funkcia spojitá v uzavretom intervale je v tomto intervale ohraničená.
2. Funkcia spojitá v uzavretom intervale má v tomto intervale maximum aj minimum.
3. Ak je spojitá funkcia prostá v niektorom intervale, tak je v tomto intervale aj rýdzo monotónna.

Spojitosť a riešenie rovníc

Ak f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a $f(a)$ a $f(b)$ majú opačné znamienka, tak rovnica $f(x) = 0$ má v intervale (a, b) aspoň jedno riešenie.
Pre použitie tejto vlastnosti pozri časť 6.6 a 7.14.

Príklad 17. Zistime body nespojitosti funkcií $e(x) = 4x^3 - 5x$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \{x\}.[x+1]$, $h(x) = sign(8 + 2x - x^2)$.

Riešenie: Funkcie e a f sú elementárne a preto spojité. Prvá funkcia je aj spojitá v $\mathbf{R}$, druhá má bod nespojitosti v čísle 1. Obidve funkcie $\{x\}$ aj $[x]$ sú spojité v každej neceločíselnej hodnote x a preto aj ich súčin, funkcia g je spojitá v týchto číslach. Ak načrtneme graf g, vidíme, že je nespojitá vo všetkých celých číslach s výnimkou čísla 1. Funkcia h bude nespojitá v tých číslach, v ktorých sa mení znamienko funkcie $y = 8 + 2x - x^2$ (odôvodnite!) a to sú čísla -2 a 4. ♣

Príklad 18. Nájdime číslo p, pre ktoré je funkcia f definovaná po častiach

$$f(x) = \begin{cases} 3x - p, & x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

spojitá.

Riešenie: Keďže obidve funkcie $y = 3x - p$ aj $y = x^2 + 2$ sú spojité (tá prvá pre každú hodnotu p), funkcia f je nezávisle na hodnote p spojitá v každom nenulovom čísle. Ak načrtneme graf funkcie f v intervale $(0, \infty)$, vidíme, že pre hodnoty x "blízke" 0 sú hodnoty $f(x)$ "blízke" 2. Aby bola funkcia f spojitá v čísle 0, je nutné (a postačujúce), aby $f(0) = 3.0 - p = 2$, preto $p = -2$. ♣