Pojem limity

Existencia limity funkcie v bode vyjadruje istú ustálenosť hodnôt funkcie v okolí tohoto bodu. Voľne povedané, funkcia f má v bode p limitu L, ak

hodnoty funkcie f v číslach blízkych p sú blízke L.

Pod **bodom** rozumieme ľubovoľné reálne číslo ako aj každú z hodnôt $\pm\infty$. Pod okolím bodu rozumieme ľubovoľný otvorený interval obsahujúci tento bod.

Funkcia f má v bode p **limitu** L, ak sú splnené tieto podmienky:

- Pre každé okolie U bodu p platí $(U - \{p\}) \cap D(f) \neq \emptyset$
- pre každé okolie V bodu L existuje také okolie U bodu p, že platí

ak $x \in (U - \{p\}) \cap D(f)$, tak $f(x) \in V$.

Fakt, že funkcia f má v bode p limitu L označujeme $\lim_{x\to p} f(x) = L$.

Ak bod p v predchádzajúcej definícii je reálne číslo, tak hovoríme o limite vo **vlastnom bode**, v opačnom prípade hovoríme o limite v **nevlastnom bode**. Ak hodnota L limity je reálne číslo, tak hovoríme o **vlastnej limite**, v opačnom prípade hovoríme o **nevlastnej limite**.

Ak má funkcia f v bode p vlastnú limitu, hovoríme, že v bode p **konverguje** alebo **je konvergentná**, v opačnom prípade v bode p **diverguje** alebo **je divergentná**.

Funkcia f má v bode p **limitu** L **zľava (sprava)** , ak má v bode p limitu L funkcia $f_{/(-\infty,p)}$ $(f_{/(p,\infty)})$, označenie: $\lim_{x\to p^-} f(x) = L$ ($\lim_{x\to p^+} f(x) = L$). Limity zľava a sprava nazývame spoločným názvom **jednostranné limity**.
Poznamenajme ešte, že ak má funkcia v niektorom bode limitu, tak táto je určená jednoznačne.

Počítanie limít

Pri počítaní limity funkcie f v bode p postupujeme nasledovne:

1. Ak je f spojitá v bode p, tak $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
2. Ak funkcia f nie je spojitá v bode p, tak sa ju snažíme upraviť na funkciu, ktorá s ňou sa zhoduje všade mimo bodu p a je spojitá v p alebo na funkciu, ktorej limitu poznáme.
3. Môžeme tiež použiť iný postup, ktorý je popísaný v časti 7.9.

Pri úpravách limít používame pravidlá, z ktorých najdôležitejšie uvedieme.

Pravidlá pre vlastné limity

1. Funkcia f definovaná v niektorom okolí bodu p je spojitá v bode p vtedy a len vtedy, ak $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
2. Limita "zachováva" algebrické operácie: ak $\lim_{x\to p} f(x) = F$ a $\lim_{x\to p} g(x) = G$ a $c \in \mathbf{R}$, tak
   - $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = F+G$,
   - $\lim_{x\to p}(f-g)(x) = F-G$,
   - $\lim_{x\to p} c.f(x) = c.F$,
   - $\lim_{x\to p}(f.g)(x) = F.G$,
   - $\lim_{x\to p}(\frac{f}{g})(x) = \frac{F}{G}$, ak $G \neq 0$.
3. Pravidlo substitúcie: Nech $x = f(t)$ je spojitá v bode a, prostá v okolí bodu a, pričom $p = f(a)$. Potom ak $\lim_{t\to a} g(f(t)) = L$, tak aj $\lim_{x\to p} g(x) = L$.
4. Ak funkcie f a g majú v bode p limitu a pre každé x z niektorého okolia bodu p s možnou výnimkou bodu p platí $f(x) \leq g(x)$, tak $\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x)$.

5. Ak $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L$ a pre každé x z niektorého okolia bodu p s možnou výnimkou bodu p platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$, tak existuje aj $\lim_{x\to p} g(x)$ a platí $\lim_{x\to p} g(x) = L$.
6. Ak $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená v okolí bodu p, tak $\lim_{x\to p} (f.g)(x) = 0$.

Poznámka. Tretie pravidlo tohoto zoznamu sa v praxi najčastejšie používa v podobe:

Nech $\lim_{x\to p} g(x) = L$ a funkcia f je spojitá v bode L. Potom $\lim_{x\to p} f(g(x)) =$ $f(\lim_{x\to p} g(x)) = f(L)$.

Pravidlá pre nevlastné limity, typy limít

Najčastejšie počítame limitu funkcie f v bode, v ktorom nie je definovaná, prípadne nie je spojitá, pričom f vzniká pomocou algebrických operácií z jednoduchších funkcií, ktorých limity v danom bode sme schopní počítať. Ak tieto limity dosadíme do príslušných operácií, dostávame výraz, ktorý nemá zmysel. Tento výraz nazývame **typom** limity. Napríklad $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ je typu $\frac{0}{0}$ a $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{|x|}}$ je typu 1^∞. Na výpočet niektorých typov limít môžeme použiť nasledujúce pravidlá, v ktorých symbol 0^+ (0^-) znamená, že limita príslušnej funkcie je rovná 0, a naviac hodnoty funkcie v istom okolí daného bodu sú len kladné (záporné), napríklad $\lim_{x\to 0} x^4 = 0^+$. Písmeno r označuje ľubovoľné **nenulové** reálne číslo a písmeno k označuje ľubovoľné **kladné** reálne číslo:

$\frac{r}{\pm\infty} = 0$	$\frac{k}{0^+} = \infty$	$\frac{k}{0^-} = -\infty$
$k.\infty = \infty$	$k.(-\infty) = -\infty$	$\infty.(-\infty) = -\infty$
$r + \infty = \infty$	$r - \infty = -\infty$	
$k^\infty = 0,\ \text{ak } 0 < \text{k} < 1$		$k^\infty = \infty,\ \text{ak k} > 1$

Výsledky ďalších typov limít, ako napríklad $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty$ nie sú jednoznačne určené. Pri ich počítaní používame uvedené pravidlá aj napriek tomu, že nevieme, či počítaná limita existuje. Ak takto vypočítame limitu, jej existencia dodatočne "legalizuje" náš postup. Poznamenajme ešte, že v nasledujúcej kapitole v časti 7.9 je uvedená technika, ktorá veľmi zjednodušuje postup počítania väčšiny obtiažnych limít.

Niekoľko dôležitých limít

Nakoniec uvedieme niekoľko dôležitých limít. V nasledujúcich vzťahoch je $a > 0,\ a \neq 1$.

$\lim_{x\to\infty} x^a = 0,\ \text{ak } a < 0,$ $\lim_{x\to\infty} x^a = \infty,\ \text{ak } a > 0,$

$\lim_{x\to\infty} a^x = 0,\ \text{ak } a < 1,$ $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty,\ \text{ak } a > 1,$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1,$ $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln\ a,$

$\lim_{x\to 0^+} x \log_a\ x = 0,$ $\lim_{x\to 1} \frac{\log_a\ x}{x-1} = \frac{1}{\ln\ a},$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a\ x}{x} = 0.$

Nech $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ a $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ sú mnohočleny a $c > 1$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c^x}{P_k(x)} = \begin{cases} \infty, & a_k > 0, \\ -\infty, & a_k < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} P_k(x) = \begin{cases} \infty, & a_k > 0, \\ -\infty, & a_k < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P_k(x) = \begin{cases} \infty, & (-1)^k sign(a_k) > 0, \\ -\infty, & (-1)^k sign(a_k) < 0, \end{cases}$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \frac{a_n}{b_n}, & k = n, \\ \infty, & k > n \text{ a } \frac{a_k}{b_n} > 0, \\ -\infty, & k > n \text{ a } \frac{a_k}{b_n} < 0. \end{cases}$$

Analogické výsledky poslednej limity v bode $-\infty$ môžeme odvodiť substitúciou $t = -x$.

Príklady

Teraz uvedieme niekoľko typických príkladov výpočtu limít.

Príklad 19. Zistime existenciu limít funkcií $f : y = x + 1$, $g : y = \frac{x^2-1}{x-1}$, $h : y = \frac{1}{|x-1|}$, $i : y = \frac{1}{x-1}$ a $j : y = \frac{x-1}{|x-1|}$ v bode 1.

Riešenie: $\lim_{x\to 1} x + 1 = 2$, pretože ide o spojitú funkciu.

Funkciu g upravíme na spojitú funkciu zhodnú s ňou mimo bodu 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$$

Zaveďme substitúciu $t = |x - 1|$. Potom

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = \infty.$$

Funkcia i nemá v bode 1 limitu, ale má nevlastné obidve jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty.$$

a

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = \infty.$$

Podobne sa ukáže, že funkcia j má v bode 1 limitu zľava -1 a limitu sprava 1. ♣

Príklad 20. Ukážeme platnosť posledných dvoch vzťahov v časti 6.6.4.

Riešenie: Odporúčame čitateľovi určiť, ktoré pravidlá a limity v príslušných krokoch používame. Nech $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ a $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ sú mnohočleny. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right)$$

Výsledok vyplýva z faktu, že limita výrazu v zátvorke je a_k a použitia pravidiel pre nevlastné limity.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k})}{x^k(b_n x^{n-k} + b_{n-1}x^{n-k-1} + \ldots + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{x^k})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k})}{x^{n-k}(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-k}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{a_k}{b_n} =$$

$$\frac{a_k}{b_n} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-k}}.$$

Výsledok vyplýva z toho, že posledná limita sa rovná $0,\ 1,\ \infty$ podľa toho, či $k < n$, $k = n$ alebo $k > n$ $\clubsuit$.

Príklad 21. Zistime existenciu limít funkcií $f:\ y = \frac{8x^3}{x^6+3}$, $g:\ y = \frac{-2x^2+25x+111}{3x^2-4x}$, $h:\ y = \frac{11x^4+29x}{85-7x^3}$ a $i:\ y = \left(\frac{2x-5}{4-x}\right)^3$ v bodoch $\pm\infty$.

Riešenie:
Použijúc výsledky predchádzajúceho príkladu dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\frac{2}{3}, \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty.$$

Použijúc substitúciu $t = -x$ dostávame

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} f(-t) = \lim_{t\to\infty} = \frac{-8t^3}{t^6+3} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{-2t^2-25t+111}{3t^2+4t} = -\frac{2}{3}$$

a

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{11t^4-29t}{85+7t^3} = \infty.$$

Limitu funkcie i vypočítame podľa poznámky v časti 6.6.2

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-5}{4-x}\right)^3 = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{4-x}\right)^3 = (-2)^3 = -8.$$

Podobným postupom dostaneme rovnakú limitu v bode $-\infty$. ♣

Príklad 22. Vypočítajme $K = \lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{2x-3}{7-4x}$, $L = \lim_{x\to 3} 5^{\frac{x-2}{3-x}}$ a $M = \lim_{x\to 0^+} x^x$.

Riešenie: Použitím poznámky v časti 6.6.2 dostaneme

$$K = \arcsin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{7-4x}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Pri výpočte limity L najskôr zavedieme substitúciu $t = \frac{x-5}{3-x}$ a uvedomíme si, že $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{3-x} = \infty$ a $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{3-x} = -\infty$ Preto limita L neexistuje, ale existujú príslušné jednostranné limity

$$L^- = \lim_{x\to 3^-} 5^{\frac{x-5}{3-x}} = \lim_{t\to\infty} 5^t = \infty$$

a

$$L^+ = \lim_{x\to 3^+} 5^{\frac{x-5}{3-x}} = \lim_{t\to -\infty} 5^t = 0.$$

V prípadoch, keď je premenná x v základe aj exponente funkcie (ako pri limite M), používame vzťah $x = a^{\log_a x}$ platný pre všetky $x > 0$ a vhodné a, najčastejšie používame hodnotu $a = e$.

$$M = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

♣

Príklad 23. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$.

Riešenie:

$$L = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{x^4-1}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

Príklad 24. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$.

Riešenie: $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x} . \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+5-5}{x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. ♣

Príklad 25. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 7x}$.

Riešenie:
$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}\frac{7}{3}}\frac{1}{\cos 3x}=\frac{3}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}=\frac{3}{7}$.

♣

Príklad 26. Vypočítajme $L=\lim_{x\to 0}\frac{2^{2x+1}-1}{x}$.

Riešenie: $L=\lim_{x\to 0}\frac{2^{2x+3}-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8.4^x-8}{x}=8\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}=8\ln 4$ ♣.

Príklad 27. Vypočítajme $L=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+9}-x)$.

Riešenie:

$$L=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+9}-x)=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+9}-x)\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+9-x^2)}{\sqrt{x^2+9}+x}=\lim_{x\to\infty}9\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1)}=\frac{9}{2}.$$

♣

Príklad 28. Vypočítajme $L=\lim_{x\to\infty}3^{-x}\cos\ 5x$ a $K=\lim_{x\to-\infty}3^{-x}\cos\ 5x$.

Riešenie: Periodické funkcie nemajú limitu v nevlastných bodoch, preto v tomto príklade nemôžeme aplikovať pravidlá pre algebrické operácie. Limitu L však môžeme vypočítať podľa pravidla 5 v časti 6.6.3, pretože

$$\lim_{x\to\infty}3^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3^x}=0$$

a funkcia $\cos\ 5x$ je ohraničená. Preto $L=0$.
Na druhej strane

$$\lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = \lim_{t\to\infty} 3^t = \infty.$$

Pretože funkcia $\cos\ 5x$ strieda znamienka, hodnota $3^{-x}\cos\ 5x$ pre $x\to\infty$ bude oscilovať, t.j. nadobúdať ľubovoľne veľké kladné a ľubovoľne malé záporné hodnoty. Preto limita K neexistuje. $\clubsuit$

Nasledujúci príklad predstavuje dôležité tvrdenie.

Príklad 29. Každá algebrická rovnica nepárneho stupňa, t.j. rovnica

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad n \text{ je nepárne}$$

má aspoň jedno reálne riešenie.

Riešenie: Podľa Príkladu 20 majú limity ľavej strany v bodoch $\pm\infty$ opačné znamienka (odôvodnite!). Podľa tvrdenia z časti 6.5.5 preto existuje riešenie tejto rovnice. Premyslite si, prečo tvrdenie neplatí aj pre párne čísla n. $\clubsuit$

Použitie derivácie pri výpočte limít

Vypočty limít "typu $\frac{0}{0}$" sú často veľmi komplikované. Názorná predstava hovorí, že limita takéhoto typu závisí od "rýchlosti", akou sa hodnoty funkcií v čitateli a menovateli blížia k 0. Toto je vyjadrené v nasledujúcom pravidle.

L'Hospitalovo pravidlo

Nech

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
2. v istom okolí čísla a majú obidve funkcie f a g deriváciu,
3. existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Užitočnosť tohoto pravidla vynikne ešte viac, ak si uvedomíme, že limity "typov $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} " môžeme pomocou úprav previesť na limitu "typu $\frac{0}{0}$ ".

Príklad 27. Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítame niekoľko limít. Pri počítaní každej limity samostatne overte predpoklady použitia pravidla.

Riešenie:

Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a\ x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln\ a}}{1}=0.$$

Typ $0.\infty$:

$$\lim_{x\to 0+}x\ln\ x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\ x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}-x=0.$$

Niekedy používame L'Hospitalovo pravidlo viackrát za sebou.

Typ $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln\ x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln\ x}{(x-1)\ln\ x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln\ x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Typ 1^{∞}: (použijeme rovnosť $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$)

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\ \cos 2x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ \cos 2x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x}{1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Pozor na nesprávne použitie L'Hospitalovho pravidla:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = -\infty.$$

Nájsť chybu v tomto postupe a opraviť ju necháme na čitateľa. ♣