FUNKCIONÁLNE POSTUPNOSTI A RADY

1.1Funkcionálne postupnosti

Definícia 1.1. Každú postupnosť, ktorej členy sú funkcie, nazývame postupnosťou funkcií (resp. funkcionálnou postupnosťou).

Definícia 1.2. Postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré sú definované na množine S, je konvergentná v bode $a \in S$ vtedy a len vtedy, ak v tomto bode konverguje číselná postupnosť $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$, t.j. ak platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = b$.

Množinu všetkých bodov a, v ktorých funkcionálna postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, nazývame oborom konvergencie danej postupnosti.

Ak postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M a naviac ak pre každé $a \in M$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$, kde $f(x)$ je nejaká funkcia, hovoríme, že postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii $f(x)$ na množine M (resp. $f(x)$je limitou postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$).

Definícia 1.3. Postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M, $M \subset S$, ak konverguje v každom bode množiny M, t.j. ak platí $\forall x \in M, \forall e \rangle 0, \exists n_0 \in N, \forall n \rangle n_0, n \in N : |f_n(x) - f(x)| \langle e$.

Poznámka 1.1. Vzhľadom k tomu, že pri predchádzajúcej definícii sa na funkcionálnu postupnosť pozeráme ako na číselnú postupnosť v jednotlivých bodoch, tento typ konvergencie nazývame bodová konvergencia funkcionálnej postupnosti.

1.2Funkcionálne rady

Definícia 1.5. Nech $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ..\}$ je postupnosť funkcií, pričom každá z nich je definovaná v každom bode množiny S. Výraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$ nazývame funkcionálnym radom.

Príklady funkcionálnych radov:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + ...$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+...$

Vezmime si napríklad rad 1. Ak za x zvolíme nejaké konkrétne reálne číslo, dostaneme číselný rad. Napríklad

pre $x=2$ dostaneme $\sum_{n=1}^{\infty}2^n=2+2^2+2^3+...$

pre $x=\frac{1}{3}$ dostaneme $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+...$

pre $x=-1$ dostaneme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+...$

....

O každom z týchto radov vieme (na základe teórie číselných radov) rozhodnúť o jeho konvergencii.

Podobne ako u číselných radov môžeme vytvoriť postupnosť čiastočných súčtov

$$s_1(x)=f_1(x)$$
$$s_2(x)=f_1(x)+f_2(x)$$
$$s_3(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$$
....
$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+...+f_n(x)$$
....

Funkcie $s_1(x), s_2(x),...$ nazývame čiastočnými súčtami funkcionálneho radu. Postupnosť funkcií $\{s_1(x), s_2(x),..., s_n(x),..\}$ nazývame postupnosťou čiastočných súčtov funkcionálneho radu.

Pojmy konvergencie a divergencie funkcionálnych radov súvisia s postupnosťou čiastočných súčtov.

Definícia 1.6. Nech $a\in S$. Hovoríme, že funkcionálny rad konverguje (diverguje) v bode a, ak v tomto bode konverguje (diverguje) postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Funkcionálny rad konverguje (diverguje) na množine $M\subset S$, ak konverguje (diverguje) v každom bode tejto množiny. T.j., ak v každom bode $x\in M$

existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, potom túto limitnú funkciu nazývame súčtom funkcionálneho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na množine M .

Túto skutočnosť môžeme zapísať nasledovne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = s(x), x \in M$$

Poznámka 1.4. V definícii 1.2. sme sa na funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pozerali v každom bode a z množiny M ako na číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$. Tento typ konvergencie nazývame bodovou konvergenciou funkcionálneho radu na množine M . Množinu M nazývame oborom konvergencie funkcionálneho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Príklad 1.4. Nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Riešenie: Máme daný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$.

V každom bode $x \in R$ je tento rad geometrickým radom, ktorý konverguje, ak je $|q| \langle 1$ a diverguje, ak je $|q| \geq 1$.

V našom prípade $q = x$, t.j. rad konverguje, ak $|x| \langle 1$, diverguje, ak $|x| \geq 1$.

Obor konvergencie je interval $(-1,1)$ a pre každé číslo $x \in (-1,1)$ platí rovnosť (na základe vzorca pre súčet geometrického radu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x} .$$

Príklad 1.5. Nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

Riešenie: Daný rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots$ je opäť geometrickým radom s kvocientom $q = \frac{1}{x}$, preto môžeme postupovať ako v predchádzajúcom prípade.

Rad konverguje, ak $\left|\frac{1}{x}\right|\langle 1$, z čoho po úprave nerovnice dostaneme $|x|\rangle 1$, t.j. $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

Oborom konvergencie je množina $(-\infty,-1) \cup (1.\infty)$ a platí na nej rovnosť
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

Poznámka 1.5. Z definície 1.2. vidíme, že konvergenciu alebo divergenciu funkcionálneho radu v bode môžeme zistiť pomocou kritérií konvergencie číselných radov. Napríklad pri použití ďAlembertovho limitného kritéria postupujeme nasledovne:

najskôr vypočítame limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$.

Vo všetkých bodoch $x \in R$, ktoré vyhovujú nerovnici $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|\langle 1$, funkcionálny rad konverguje.

Vo všetkých bodoch $x \in R$, ktoré vyhovujú nerovnici $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|\rangle 1$, funkcionálny rad diverguje.

V tých bodoch $x \in R$, pre ktoré platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = 1$, musíme konvergenciu vyšetriť iným spôsobom (použiť napr, porovnávacie alebo integrálne kritérium).

Príklad 1.6. Nájdite obor konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.e^{-nx}$.

Riešenie: Na základe poznámky 1.2. vypočítame príslušnú limitu:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1).e^{-(n+1)x}}{n.e^{-nx}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1).e^{-nx}.e^{-x}}{n.e^{-nx}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1).e^{-x}}{n}\right| = \left|e^{-x}\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \left|e^{-x}\right|.$$

Ak $\left|e^{-x}\right|\langle 1$, t.j. $x\rangle 0$, daný rad konverguje.

Ak $\left|e^{-x}\right|\rangle 1$, t.j. $x\langle 0$, daný rad diverguje.

Zostáva nám vyriešiť otázku, ak $\left|e^{-x}\right| = 1$, t.j. $x = 0$.

V bode $x=0$ dostaneme z funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-nx}$ číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n.0} = \sum_{n=1}^{\infty} n.1$. Tento rad nespĺňa nutnú podmienku konvergencie, t.j. diverguje.

Oborom konvergencie funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-nx}$ je interval $(0,+\infty)$.

1.3. Mocninové rady

Ďalej sa budeme zaoberať špeciálnym prípadom funkcionálnych radov – mocninovými radmi. Premenná x sa v nich vyskytuje len v rôznych mocninách, sú to vlastne akési „nekonečné polynómy".

Definícia 1.8. Mocninovým (potenčným) radom so stredom v bode x_0 nazývame funkcionálny rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

kde reálne čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nazývame koeficientami a číslo x_0 nazývame stredom mocninového radu.

Vzhľadom k tomu, že mocninový rad je funkcionálnym radom, pojmy obor konvergencie a súčet radu majú preň ten istý význam ako u funkcionálnych radov. Na rozdiel od nich však obor konvergencie mocninových radov nemôže byť prázdna množina.

Ak počítame hodnotu mocninového radu v bode $x=x_0$ (t.j. zisťujeme tak, či v bode x_0 konverguje), dostaneme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0-x_0)^n = a_0 + a_1(x_0-x_0) + a_2(x_0-x_0)^2 + \ldots + a_n(x_0-x_0)^n + \ldots = a_0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

ktorý je konvergentný a jeho súčet je a_0. Dokázali sme nasledujúce tvrdenie:

Veta 1.7. Každý mocninový rad konverguje aspoň v jednom bode, a to vo svojom strede.

Príklad 1.8. Nájdite obor konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Riešenie: Daný rad je funkcionálnym radom, môžeme preto postupovať ako v predchádzajúcich príkladoch. Na základe D´alambertovho kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| = |x-x_0|.\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Označme (ak existuje, je konečná a nenulová) $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Rad konverguje, ak $|x-x_0|.l\langle 1$, z čoho po úprave dostaneme $|x-x_0|\langle \frac{1}{l}$. Znamená to, že rad konverguje v tých bodoch x, ktoré ležia vo vnútri intervalu so stredom v bode x_0 a polomerom $\frac{1}{l}$.

Rad diverguje, ak $|x-x_0|.l\rangle 1$, z čoho po úprave dostaneme $|x-x_0|\rangle \frac{1}{l}$. T.j. rad diverguje v bodoch, ktoré ležia mimo intervalu.

Ak $|x-x_0|.l = 1$, t.j. $|x-x_0| = \frac{1}{l}$, o konvergencii alebo divergencii radu nevieme na základe tohto kritéria rozhodnúť.

Ak $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, potom z D´alambertovho kritéria dostaneme

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = 0\langle 1$ pre každé $x\in R$, t.j. rad konverguje v každom bode.

Ak $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, potom z D´alambertovho kritéria dostaneme

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \infty\rangle 1$ pre každé $x\in R$, t.j. rad diverguje v každom bode okrem bodu $x = x_0$.

Podobne (úvahy prenechávame čitateľovi) by sme mohli postupovať aj pri použití Cauchyho kritéria. Z neho vypočítame $l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Hľadanie oboru konvergencie môžeme pre mocninové rady zjednodušiť.

Ak limita $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, resp. $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ je konečná o nenulová, označme $r = \frac{1}{l}$. Číslo r nazývame polomerom konvergencie mocninového radu.

Ak $l = 0$, kladieme $r = \infty$.

Ak $l = \infty$, kladieme $r = 0$.

Dokázali sme tak nasledujúcu vetu:

Veta 1.8. Je daný mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, ktorý má stred v bode x_0 a ktorého polomer konvergencie je r. Potom platí:

1.) Ak je polomer konvergencie nenulové číslo, potom daný rad konverguje na otvorenom intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$ a diverguje na otvorených intervaloch $(-\infty, x_0 - r), (x_0 + r, \infty)$

2.) Ak je polomer konvergencie $r = \infty$, potom mocninový rad konverguje v každom bode $x \in R$.

3.) Ak je polomer konvergencie $r = 0$, potom mocninový rad konverguje len v bode $x = x_0$, t.j. len vo svojom strede.

Interval $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ so stredom v bode x_0 a s polomerom r nazývame intervalom konvergencie mocninového radu.

Poznámka 1.7. Pomocou vety 1.8. nájdeme interval konvergencie mocninového radu. Aby sme dostali obor konvergencie, musíme ešte vyšetriť konvergenciu (resp. divergenciu) v krajných bodoch intervalu.

Príklad 1.9. Nájdite obor konvergencie radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3n+1}$.

Riešenie: Je to mocninový rad so stredom v bode $x_0 = 2$ a koeficientami $a_n = \frac{1}{3n+1}$. Najskôr vypočítame jeho polomer konvergencie.

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3(n+1)+1}}{\frac{1}{3n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+1}{3n+4}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = 1$$

Potom $r = \frac{1}{l} = \frac{1}{1} = 1$.

Podľa vety 1.8. je interval konvergencie $I = (x_0 - r, x_0 + r) = (2-1, 2+1) = (1,3)$.

Ostáva nám zistiť konvergenciu v krajných bodoch intervalu.

Ak $x = 1$, dostaneme číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Dostali sme rad so striedavými znamienkami, v ktorom $a_n = \frac{1}{3n+1}$. Na určenie konvergencie použijeme Leibnitzovo kritérium.

Je zrejmé, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a limita $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} = 0$, teda sú splnené oba predpoklady Leibnitzovho kritéria a rad konverguje.

Ak $x = 3$, dostaneme číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$.

Dostali sme rad s kladnými členmi. Pri zisťovaní konvergencie použijeme porovnávacie kritérium.

$\forall n \in N$ platí nerovnosť $\frac{1}{3n+1} \geq \frac{1}{4n}$.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Na základe poznatkov o Riemanových radoch rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, z porovnávacieho kritéria vyplýva aj divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$.

Obor konvergencie je $\langle 1,3)$.

Príklad 1.10. Nájdite obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Riešenie: Stredom tohto mocninového radu je $x = 0$. Vypočítame jeho polomer konvergencie:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Ak $l = 0$, podľa vety 1.8. kladieme $r = \infty$.

Oborom (a zároveň intervalom) konvergencie tohto radu je množina všetkých reálnych čísel R.

Príklad 1.11. Nájdite obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$.

Riešenie: Tento mocninový rad má stred konvergencie číslo $x_0 = -3$. Polomer konvergencie vypočítame teraz pomocou odmocninného kritéria: $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

V tomto prípade (viď vetu 1.8.) kladieme polomer konvergencie $r = 0$.

Tento mocninový rad konverguje len vo svojom strede, jeho oborom konvergencie je množina $\{-3\}$.

1.4 Operácie s mocninovými radmi

Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ sú dva mocninové rady s rovnakými stredmi.

Potom ich súčtom (rozdielom) je rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \ .$$

Ak c je ľubovoľná konštanta (vzhľadom na n), potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n (x-x_0)^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Z teórie funkcie jednej premennej z Matematiky I. poznáme nasledujúce vlastnosti konečných súčtov:

Súčet spojitých funkcií je spojitá funkcia.

Derivácia súčtu je súčet derivácií (pokiaľ existujú).

Integrál (určitý aj neurčitý) súčtu je súčet integrálov (pokiaľ existujú).

Mocninový rad je súčet nekonečného počtu funkcií, pričom každá z nich je spojitá, diferencovateľná aj integrovateľná. Pre tento typ súčtu (mocninový rad) môžeme spomínané vlastnosti rozšíriť aj na nekonečný počet funkcií. Na intervale konvergencie môžeme mocninový rad derivovať aj integrovať člen po člene, pričom interval konvergencie ostane zachovaný (môže sa zmeniť len konvergencia v krajných bodoch). Hovorí o tom nasledujúca veta:

Veta 1.13. Nech mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konverguje na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$, kde $r \rangle 0$ a jeho súčet na tomto intervale je funkcia $s(x)$, t.j. $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Potom platí:

a) Súčet $s(x)$ je spojitá funkcia na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$.

b) Súčet $s(x)$ má na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$ derivácie všetkých rádov, ktoré dostaneme derivovaním radu $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ člen po člene, t.j. $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$.

c) Súčet $s(x)$ má na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$ primitívnu funkciu, ktorú dostaneme integrovaním radu $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ člen po člene, t.j. $\int s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$.

d) Pre každé dve čísla $a, b \in (x_0 - r, x_0 + r)$ existuje integrál $\int_a^b s(x)dx$, ktorý dostaneme integrovaním radu $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ na intervale $\langle a, b \rangle$, t.j. $\int_a^b s(x)dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \right]_a^b$.

Príklad 1.12. Nájdite obor konvergencie a súčet mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Riešenie: Stred konvergencie tohto mocninového radu je $x_0 = 0$. Vypočítajme jeho polomer konvergencie:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ z čoho dostaneme } \quad r = \frac{1}{l} = 1.$$

Interval konvergencie je $(-1,1)$. Zistíme ešte konvergenciu v krajných bodoch intervalu.

V bode $x=-1$ dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, ktorý konverguje na základe Leibnitzovho kritéria (harmonický rad so striedavými znamienkami).

V bode $x=1$ dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ktorý diverguje (Riemanov rad, v ktorom $a=1$).

Obor konvergencie daného mocninového radu je teda interval $\langle -1,1)$.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ vznikol integrovaním mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ na intervale $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right]dx=\int\left[1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots\right]dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ je zároveň radom geometrickým. Z vlastností geometrického radu zistíme, že jeho interval konvergencie je $(-1,1)$ a jeho súčet je

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-x}\quad \text{pre}\quad x\in(-1,1).$$

Podľa vety 1.13. na intervale $(-1,1)$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right]dx=\int\left[\frac{1}{1-x}\right]dx=-\ln|1-x|+c\,.$$

Ostáva ešte vypočítať konštantu c. Na jej výpočet použijeme poslednú rovnosť, ktorá platí pre všetky $x\in(-1,1)$, teda aj pre $x=0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0+0+\ldots 0+\ldots=0=-\ln|1-0|+c=-0+c\Rightarrow c=0$$

Súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln|1-x|$ pre $x\in(-1,1)$.

Poznámka 1.10. Pri počítaní súčtov radov často postupujeme rýchlejším spôsobom. Postup ukážeme na predchádzajúcom príklade. Z vety 1.13. vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ môžeme na intervale konvergencie (ktorý určíme neskôr) derivovať člen po člene, t.j. zameniť poradie sumácie a derivácie:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

Po formálnom zderivovaní radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ sme dostali geometrický rad, krorého obor konvergencie je interval $(-1,1)$. Rovnaký interval konvergencie (nie obor) má aj pôvodný rad. Ak súčet geometrického radu je $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, potom pre pôvodný rad platí

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]' = [s(x)]' = \frac{1}{1-x}$$

z čoho dostaneme

$s(x) = \int\frac{1}{1-x}dx = -\mathbf{ln}|1-x| + c$ pre $x \in (-1,1)$.

Konštantu c vypočítame (rovnako ako v príklade 1.12.) dosadením stredu daných radov.

Príklad 1.13. Nájdite súčet mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty}n\ x^n$.

Riešenie: Pri hľadaní súčtu radu sa snažíme zistiť, z akého geometrického radu vznikol. Vzhľadom na to, že derivovaním, integrovaním a násobením konštantou sa interval konvergencie mocninového radu nemení, budeme ho hľadať pri geometrickom rade (tam je to najjednoduchšie).

Aby sme integrovaním „odstránili“ koeficient n, musíme z radu $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ vyňať konštantu x. (Pozor, premennou vzhľadom na sumáciu je n!)

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

Najskôr nájdeme súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

Označme súčty oboch radov $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ a $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

$$\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int nx^{n-1}dx\right] = \sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

Dostali sme geometrický rad s kvocientom x, môžeme vypočítať jeho interval konvergencie a súčet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x} \text{ , ak } x \in (-1,1)$$

Interval konvergencie pôvodného radu je tiež $(-1,1)$, teda úpravy, ktoré sme robili formálne, platia pre každé x z tohto intervalu.

Dostali sme $\int [s_1(x)] dx = \dfrac{x}{1-x}$.

Potom $s_1(x) = \left[\dfrac{x}{1-x}\right]' = \dfrac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$s(x) = x \cdot s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Súčet mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ je funkcia $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ pre $x \in (-1,1)$.

Niekedy musíme riešiť aj opačný problém – máme danú funciu, ku ktorej chceme nájsť taký mocninový rad, aby bola jeho súčtom. Pomôže nám v tom nasledujúca veta:

Veta 1.14.(O jednoznačnosti vyjadrenia funkcie mocninovým radom) Nech funkcia $s(x)$ je na otvorenom intervale I súčtom mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ aj radu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$. Potom pre každé $n = 0,1,2,3,\dots$ platí $a_n = b_n$, t.j. oba mocninové rady sú rovnaké.

1.5.Taylorov rad

Vráťme sa k problému zo záveru predchádzajúcej kapitoly: Ako nájsť k danej funkcii $f(x)$ taký mocninový rad so stredom v bode x_0, aby $f(x)$ bola jeho súčtom? Z vety 1.14. vyplýva, že ak sa nám taký rad podarí nájsť, sú už jeho koeficienty dané jednoznačne. Môžeme ich vypočítať pomocou hodnôt derivácií funkcie $f(x)$ v bode x_0 takto:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\ \dots,\ a_n = \frac{f'''(x_0)}{n!},\ \dots$$

Mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, ktorého koeficienty a_n vypočítame týmto spôsobom z funkcie $f(x)$, sa nazýva jej Taylorov rad.

Definícia 1.10. Nech funkcia $f(x)$ má v bode x_0 derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

nazývame Taylorovým radom funkcie f so stredom v bode x_0 a označujeme $T(f, x_0)$ (resp. $T(f, x_0, x)$, ak potrebujeme hodnotu Taylorovho radu v bode x).

Najčastejšie používame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode $x_0 = 0$, ktorý nazývame aj Maclaurinovým radom.

V rade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

označme znakom $R_n(f, x_0, x)$ zvyšok po n-tom člene, t.j.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2} + \ldots .$$

Súčtom Taylorovho radu na jeho intervale konvergencie nemusí byť funkcia $f(x)$, z ktorej sme rad vypočítali. Závisí to od správania postupnosti zvyškov $\{R_n(f, x_0, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Veta 1.17. Nech má funkcia $f(x)$ v bode x_0 derivácie všetkých rádov. Potom na intervale I obsahujúcom bod x_0 platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

vtedy a len vtedy, ak pre každé číslo $x \in I$ platí $\lim_{n\to\infty} R_n(f, x_0, x) = 0$.

Príklad 1.14. Nájdite Taylorov rad funkcie $f(x) = e^x$ so stredom v bode $x_0 = 0$.

Riešenie: Taylorov rad tejto funkcie nájdeme pomocou definície 1.10. Najskôr vypočítame hodnoty jednotlivých derivácií v bode $x_0 = 0$.

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1$

....

$f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1$

....

Po dosadení dostaneme Taylorov rad funkcie

$$T(e^x, 0, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

V príklade 1.10. sme vypočítali, že oborom konvergencie tohto radu je interval $(-\infty, \infty)$. Dá sa dokázať (napr. Kluvánek, Mišík, Švec:Matematika I.), že pre tento rad platí $\lim_{n \to \infty} R_n(f, x_0, x) = 0$. Súčtom radu je funkcia $f(x) = e^x$, t.j. pre každé $x \in R$ platí rovnosť

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Príklad 1.15. Nájdite Taylorove rady funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$ so stredmi v bode 0.

Riešenie: Najskôr nájdeme (podľa definície 1.10.) Taylorov rad funkcie $y = \sin x$.

$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y(0) = 0$

$y' = \cos x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 1$

$y'' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 0$

$y''' = -\cos x \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = -1$

$y^{(4)} = \sin x \quad \Rightarrow \quad y^{(4)}(0) = 0$

....

$$y^{(n)}=\mathbf{sin}\left(x+n\frac{p}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad y^{(n)}(0)=\mathbf{sin}\,n\frac{p}{2}=\left\langle\begin{array}{l}0\mathbf{............}n=2k\\(-1)^k\mathbf{...}n=2k+1\end{array}\right.$$

....

Vyjadrenie n-tej derivácie dostaneme zo základných vzťahov, platiacich pre goniometrické funkcie ($\mathbf{cos}\,x=\mathbf{sin}\left(x+\frac{p}{2}\right)$).

$$T(\mathbf{sin}\,x,0,x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\mathbf{...}+\frac{\mathbf{sin}\,n\frac{p}{2}}{n!}x^n+\mathbf{...}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{sin}\,n\frac{p}{2}}{n!}x^n$$

Všetky párne členy Taylorovho radu sú nuly, môžeme ich teda z konečného súčtu vynechať. Rad, ktorý tak dostaneme, má tvar

$$T(\mathbf{sin}\,x,0,x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\mathbf{...}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Dá sa ľahko dokázať (prenechávame to čitateľovi), že oborom konvergencie tohto mocninového radu je interval $(-\infty,\infty)$. Ostáva nám ešte dokázať, že súčtom radu na tejto množine je funkcia $y=\mathbf{sin}\,x$. Pri dôkaze opäť môžeme použiť odhad zvyšku po n-tom (resp. 2n+1-om) člene.

Pre každé $x\in R$ platí rovnosť

$$\mathbf{sin}\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\mathbf{...}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Podobnými úvahami môžeme ukázať, že Taylorov rad funkcie $y=\mathbf{cos}\,x$ so stredom v bode 0 je

$$T(\mathbf{cos}\,x,0,x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\mathbf{...}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,$$

pričom oborom konvergencie je celá množina R a súčtom radu je funkcia $y=\mathbf{cos}\,x$, t.j. platí rovnosť

$$\mathbf{cos}\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\mathbf{...}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad\text{pre každé } x\in R.$$

Príklad 1.16. Nájdite Taylorov rad funkcie $y=(1-x)^a,\,a\in R$ so stredom v bode 0.

Riešenie: Podobne, ako v predchádzajúcich príkladoch, vypočítame najskôr príslušné derivácie:

$$y=(1-x)^a \quad \Rightarrow \quad y(0)=1$$

$$y'=a(1-x)^{a-1}(-1) \quad \Rightarrow \quad y'(0)=-a$$

$$y''=a(a-1)(1-x)^{a-2}(-1)^2 \quad \Rightarrow \quad y''(0)=a(a-1)$$

$$y'''=a(a-1)(a-2)(1-x)^{a-3}(-1)^3 \quad \Rightarrow \quad y'''(0)=-a(a-1)(a-2)$$

....

$$y^{(n)}=a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(1-x)^{a-n}(-1)^n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n)}(0)=(-1)^n a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)$$

Na prehľadnejší zápis Taylorovho radu tejto funkcie je vhodné rozšíriť definíciu kombinačných čísel, ktorú poznáme so strednej školy.

Nech $a\in R, n\in N$. Potom kombinačné číslo $\binom{a}{n}$ definujeme nasledovne:

$\binom{a}{n}=\dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}$, pričom kladieme $\binom{a}{0}=1$.

Taylorov rad tejto funkcie môžeme zapísať

$$T\left((1-x)^a,0,x\right)=\binom{a}{0}-\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2-\binom{a}{3}x^3+\ldots+(-1)^n\binom{a}{n}x^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{a}{n}x^n$$

Obor konvergencie tohto radu zistíme pomocou ďAlembertovho kritéria.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\binom{a}{n+1}x^{n+1}}{(-1)^n\binom{a}{n}x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a-n)x}{n+1}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a-n}{n+1}\right|=|x|.|-1|=|x|$$

Tento rad konverguje v bodoch spĺňajúcich nerovnosť $|x|\langle 1$, v bodoch , v ktorých je $|x|\rangle 1$ rad diverguje. V bodoch 1 a -1 môže rad buď konvergovať alebo divergovať (jeho správanie závisí od čísla a).

Na intervale $(-1,1)$ platí rovnosť

$$(1-x)^a=\binom{a}{0}-\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2-\binom{a}{3}x^3+\ldots+(-1)^n\binom{a}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{a}{n}x^n .$$

Rovnako môžeme postupovať aj pri počítaní rozvoja funkcie $y=(1+x)^a$ (alebo môžeme použiť substitúciu $y=-t$). Maclaurinov rad tejto funkcie, t.j. rad

$$(1+x)^a = \binom{a}{0}+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\ldots+\binom{a}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\,, \qquad x\in(-1,1)$$

nazývame aj binomickým radom.

Poznámka 1.12. Z príkladu 1.16 pri rôznych voľbách čísla a dostávame Taylorove rady rôznych funkcií. Napríklad, ak $a=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{15}{48}x^3+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2n}x^n\ .$$

V predchádzajúcich príkladoch sme hľadali Taylorove rady funkcií pomocou definície. Niekedy je však výhodnejšie použiť dôsledok vety o jednoznačnosti rozvoja funkcie do mocninového radu.

Dôsledok (vety 1.14.) Nech je funkcia $f(x)$ na intervale I súčtom mocninového radu so stredom v bode x_0, Potom tento rad je už Taylorovým radom tejto funkcie.

Príklad 1.17. Nájdite Taylorov rad funkcie $y=arctgx$ so stredom v bode 0.

Riešenie: Ak túto funkciu zderivujeme, dostaneme $y'=arctg'x=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Funkcia $\dfrac{1}{1+x^2}$ je súčtom geometrického radu, ktorého prvý člen je 1 a kvocient $-x^2$. Oborom konvergencie tohto radu je interval $(-1,1)$.

Pre $x\in(-1,1)$ platí rovnosť

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ .$$

Integrovaním radu člen za členom dostaneme

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Poznámka 1.13. Podobným spôsobom môžeme nájsť aj Maclaurinove rady niektorých iných funkcií, napríklad $y = arc\cot gx$, $y = \ln(1+x)$, $y = \ln(1-x)$. Pre posledné dve funkcie sú to rady

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ak } x \in (-1,1\rangle$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ak } x \in \langle -1,1).$$

Pomocou posledných dvoch radov môžeme približne počítať prirodzené logaritmy len pre malé čísla. Na výpočet logaritmov väčších čísel požívame nasledujúci Maclaurinov rozvoj

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{kde } x \in (-1,1),$$

ktorý vypočítame z predchádzajúcich použitím operácií s radmi (stačí si uvedomiť, že $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$).

Príklad 1.18. Nájdite Taylorov rad funkcie $y = \arcsin x$ so stredom v bode 0.

Riešenie: Po zderivovaní tejto funkcie dostaneme $y' = \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

V príklade 1.16. sme našli Taylorov rad funkcie $y = (1-x)^a$. Pre každé $x \in (-1,1)$ a pre každé reálne číslo a platí

$$(1-x)^a = \binom{a}{0} - \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 - \binom{a}{3}x^3 + \ldots + (-1)^n \binom{a}{n} x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{a}{n} x^n .$$

Ak v poslednej rovnosti zvolíme $a = -\frac{1}{2}$ a $x = t^2$ dostaneme

$$\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}t^{2n} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} t^{2n}$$

Integrovaním člen po člene (viď veta 1.13.) tohto radu na intervale $(-1,1)$ dostaneme

$$\arcsin t = t + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{t^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$$

$$= t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

čo je na základe vety o jednoznačnosti rozvoja funkcie do mocninového radu Taylorov rad funkcie $y = \arcsin t$ pre $t \in (-1,1)$.

1.6.Aplikácie Taylorových radov

Taylorove rady používame na približné výpočty hodnôt niektorých funkcií a všade tam, kde je pre nás výhodné (resp. nevyhnutné) nahradiť elementárnu funkciu jej Taylorovým radom, t.j. nekonečným polynómom.

Príklad 1.19. Vypočítajte približne čísla $e, e^3, \sqrt{e}$.

Riešenie: Taylorov rozvoj funkcie $y = e^x$ so stredom v bode 0 je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Jeho obor konvergencie je celá množina R, t.j. za x môžeme zvoliť ľubovoľné reálne číslo.

Ak $x = 1 \Rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \doteq 2{,}708333$

Ak $x = 3 \Rightarrow e^3 = 1 + 3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots \doteq 1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} = \frac{393}{24} \doteq 16.375$

Ak

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2!} + \frac{\frac{1}{8}}{3!} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} + \ldots \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{633}{384} \doteq 1.6484$$

Výpočty v týchto príkladoch sú len ilustračné (zobrali sme len prvých päť členov radu) , presnejšie hodnoty by sme dostali, keby sme sčítali viac členov.

Poznámka 1.14. Z predchádzajúceho príkladu vidíme, že Taylorov rad funkcie $y = e^x$ konverguje rýchlejšie pre malé hodnoty čísla x, s rastúcim x je konvergencia pomalšia (hoci rad konverguje v každom bode).

Podobne môžeme počítať aj hodnoty goniometrických funkcií (použitím príslušných Taylorových radov), prirodzené logaritmy (tu si treba dať pozor na obor konvergencie a vzhľadom naň vybrať vhodný rad), odmocniny (pomocou binomického rozvoja) a podobne.

Na záver teórie Riemanovho integrálu (skriptá Matematika I.) sme uviedli elementárne funkcie, ktorých integrál sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. V týchto prípadoch môžeme primitívnu funkciu nájsť použitím rozvoja integrovanej funkcie do mocninového radu.

Príklad 1.20. Pomocou Taylorovho rozvoja integrovanej funkcie vypočítajte $\int \frac{\sin x}{x} dx$.

Riešenie: Taylorov rad funkcie $y = \sin x$ so stredom v bode 0 je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Jeho obor konvergencie je $(-\infty, \infty)$.

Reálne číslo $x \neq 0$ je vzľadom na sumačnú premennú v rade konštanta, teda rad funkcie $y = \frac{\sin x}{x}$ má ten istý obor konvergencie, pričom

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} .$$

Na základe vety o integrovaní mocninových radov člen po člene dostaneme

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \frac{x^9}{9! \cdot 9} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)}$$

pre každé $x \in R, x \neq 0$.

Rovnako postupujeme aj pri výpočte určitého integrálu, pričom hodnotu integrálu vypočítame Newton-Leibnitzovým vzťahom. Presnosť výpočtu závisí od počtu použitých členov výsledného radu. Veľkosť chyby môžeme odhadnúť pomocou niektorého z tvarov zvyšku.

Poznámka 1.15. Taylorove rady sa v matematike využívajú na množstvo ďalších úloh. Môžeme pomocou nich počítať limity, derivácie, riešiť diferenciálne rovnice.

1.7 Príklady

1. Nájdite obor konvergencie mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 3^n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

2. Derivovaním alebo integrovaním vhodného radu nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

3. Derivovaním alebo integrovaním vhodného mocninového radu a vhodnou voľbou x nájdite súčet číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n(n+1)}$.

4. Použitím rozvoja integrovanej funkcie do mocninového radu vypočítajte $\int\frac{e^x}{x}dx$, $\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{4}}\frac{\cos x}{x}$, $\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}$.

5. Pomocou vhodného mocninového radu približne vypočítajte $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\ln 2$, $\sqrt[3]{4}$, $arctg\left(\frac{1}{5}\right)$.