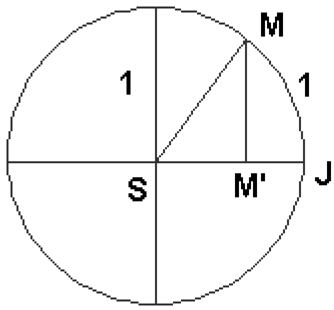
# Goniometrické funkcie

## *Oblúková miera*

Goniometrické funkcie sú funkcie, ktoré sa používajú pri meraní uhlov (Goniometria – Meranie Uhla). Pri týchto funkciách sa uvažuje o veľkostiach uhlov udaných v oblúkovej miere. Jednotkou je *radián* (rad). Jeden radián je veľkosť rovinného uhla zovretého dvoma polpriamkami, ktoré na krružnici s polomerom 1 opísanej ich začiatku (jednotková kružnica) vytínajú oblúk veľkosti 1.




Plný uhol má veľkosť $2\pi$ radiánov. Kedže plný uhol má tiež 360°, prepočet medzi stupňami a radiánmi je jednoduchý ( $1rad = \frac{360}{2\pi}$ , $1° = \frac{2\pi}{360}$ ).

## *Orientovaný uhol*

Orientovaným uhlom $\widehat{AVB}$ nazývame usporiadanú dvojicu polpriamok $VA$ a $VB$ v tomto poradí. Bod V nazývame vrcholom orientovaného uhla, polpriamku $VA$ začiatočným ramenom orientovaného uhla a polpriamku $VB$ koncovým ramenom orientovaného uhla. Základnou veľkosťou orientovaného uhla rozumieme veľkosť toho uhla, ktorý opíše začiatočné rameno otáčaním v kladnom smere do koncového ramena najkratšou cestou. Kladný smer je proti smeru hodinových ručičiek.

Pre veľkosti orientovaného uhla platí 1. Základná veľkosť je v intervale $\langle 0,2\pi)$

2.Ak $\alpha$ je niektorá veľkosť orientovaného uhla, všetky veľkosti tohto uhla môžeme vyjadriť ako $\alpha + 2k\pi$, kde $k \quad Z$ .

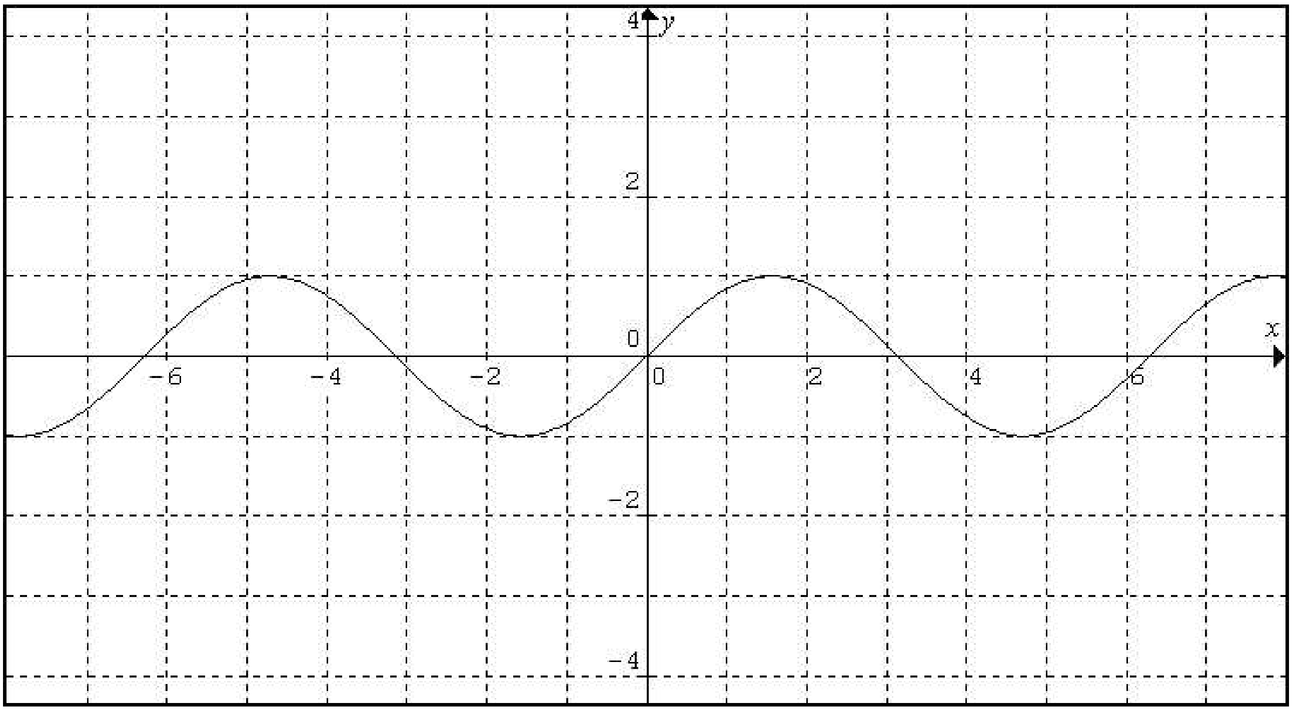
## *Goniometrické funkcie na jednotkovej kružnici*

Jednotková kružnica je kružnica so stredom v začiatku súradnicovej sústavy a polomerom 1. Kedže goniometrické funkcie merajú uhly, nakreslíme do súradnicovej sústavy orientovaný uhol s veľkosťou x, ktorého vrcholom bude bod $[0,0] \equiv S$ a začiatočným ramenom polpriamka

. Priesečník koncového ramena s kružnicou nazveme M a jeho kolmý priemet na x-ovú os M'. Potom x-ová súradnica budu M bude kosínus (cos) uhla x a y-ová súradnica bude sínus (sin) uhla x. Ďalšie dve goniometrické funkcie sú tangens (tg) a kotangens (cotg). Tangens je definovaný ako podiel $\frac{\sin}{\cos}$ a kotangens ako $\frac{\cos}{\sin}$. Na jednotkovej kružnici je tangens reprezentovaný ako y-ová súradnica priesečníka priamky, na ktorej leží koncové rameno orientovaného uhla, a dotyčnice ku kružnici v bode [0,1]. Kotangens je x-ová súradnica priesečníka priamky, na ktorej leží koncové rameno orientovaného uhla, a dotyčnice ku kružnici v bode [1,0].

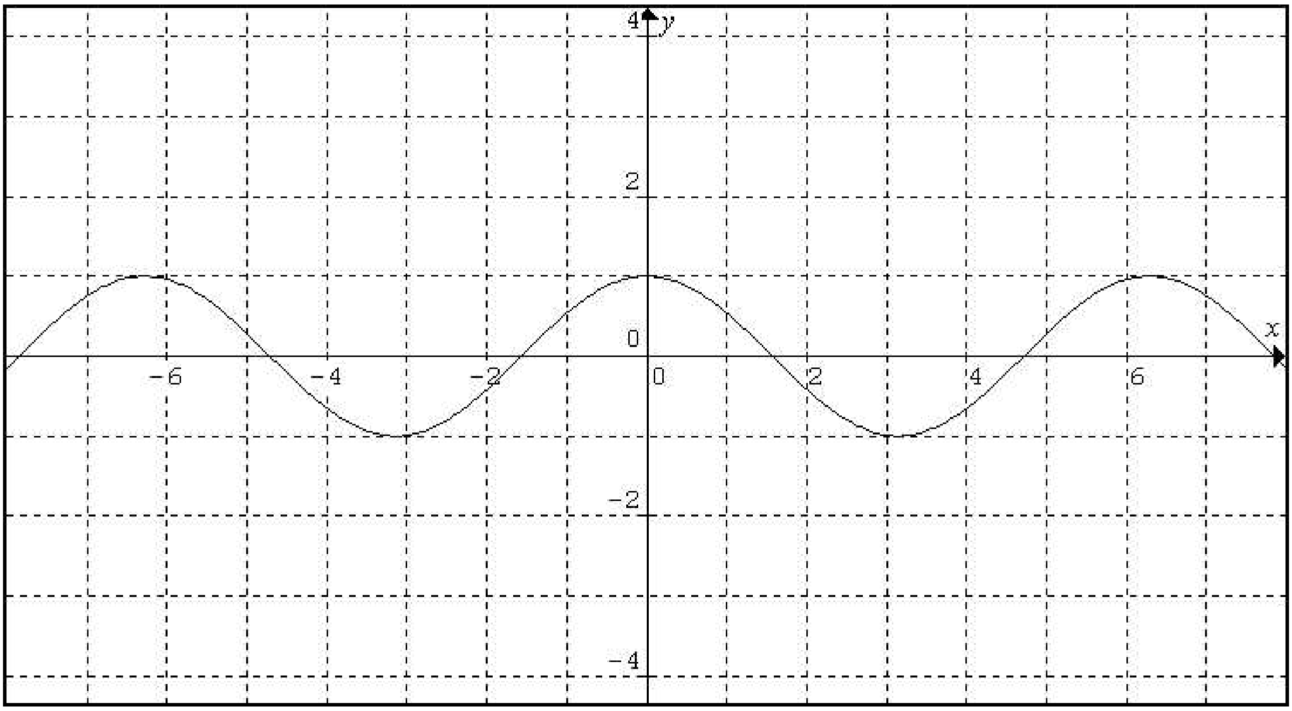
## *Sínus*

Definičným oborom je celá množina reálnych čísel. Oborom hodnôt je uzavretý interval<-1,1>. Sínus je periodická funkcia s periódou 2π. Jej hodnota je pre prvý a druhý kvadrant kladná, a pre tretí a štvrtý záporná. Sínus je nepárna funkcia. Jej grafom je sínusoida. Sínusoida je rastúca na každom z intervalov<-π/2+2kπ;π/2+2kπ>a klesajúca na intervale<π/2+2kπ,3π/2+2kπ>. Sínus je ohraničený. Nulové body sú body x=kπ. Extrémy sú $x=\frac{\pi}{2}\quad k\pi$ .



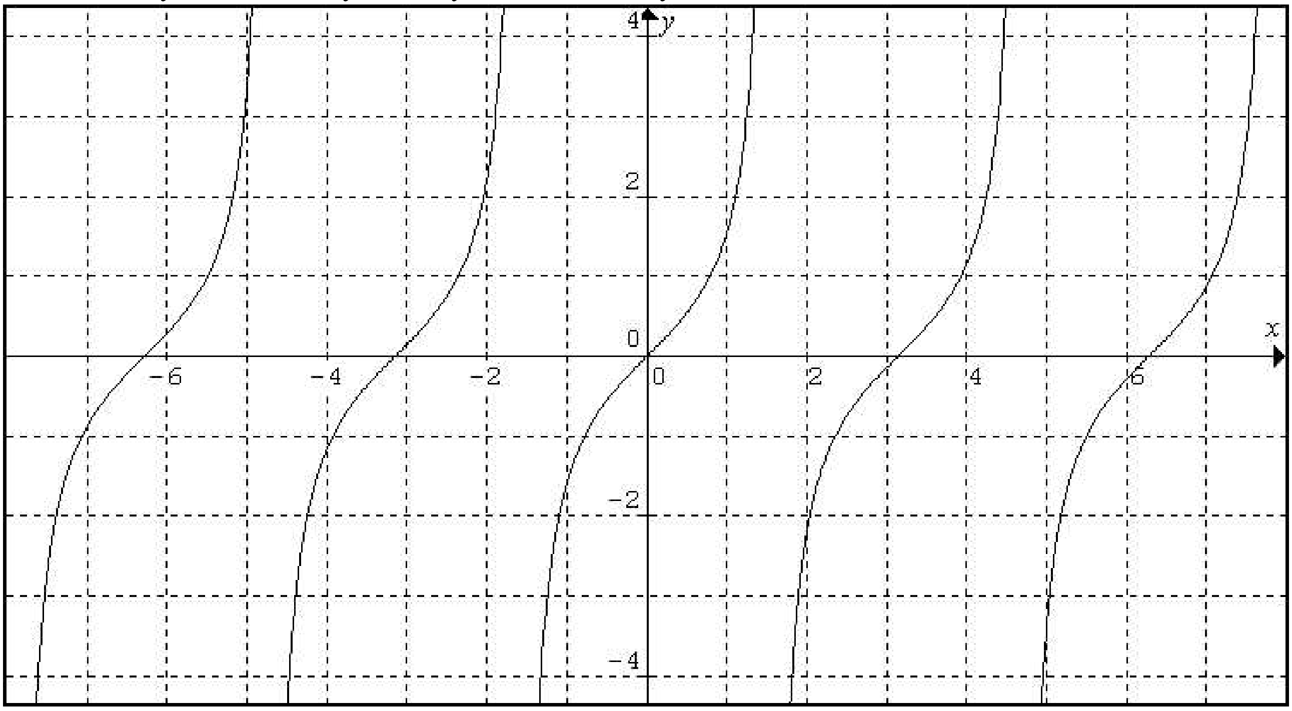

## *Kosínus*

Definičným oborom je celá množina reálnych čísel. Oborom hodnôt je uzavretý interval<-1,1>. Kosínus je periodická funkcia s periódou 2π. Jej hodnota je pre prvý a štvrtý kvadrant kladná, a pre druhý a tretí záporná. Kosínus je párna funkcia. Jej grafom je kosínusoida. Kosínusoida je rastúca na každom z intervalov<-π+2kπ;2kπ>a klesajúca na intervale<2k π,π+2kπ>. Kosínus je ohraničený. Nulové body sú body $x=\frac{\pi}{2}\quad k\pi$ . Extrémy sú x=kπ.



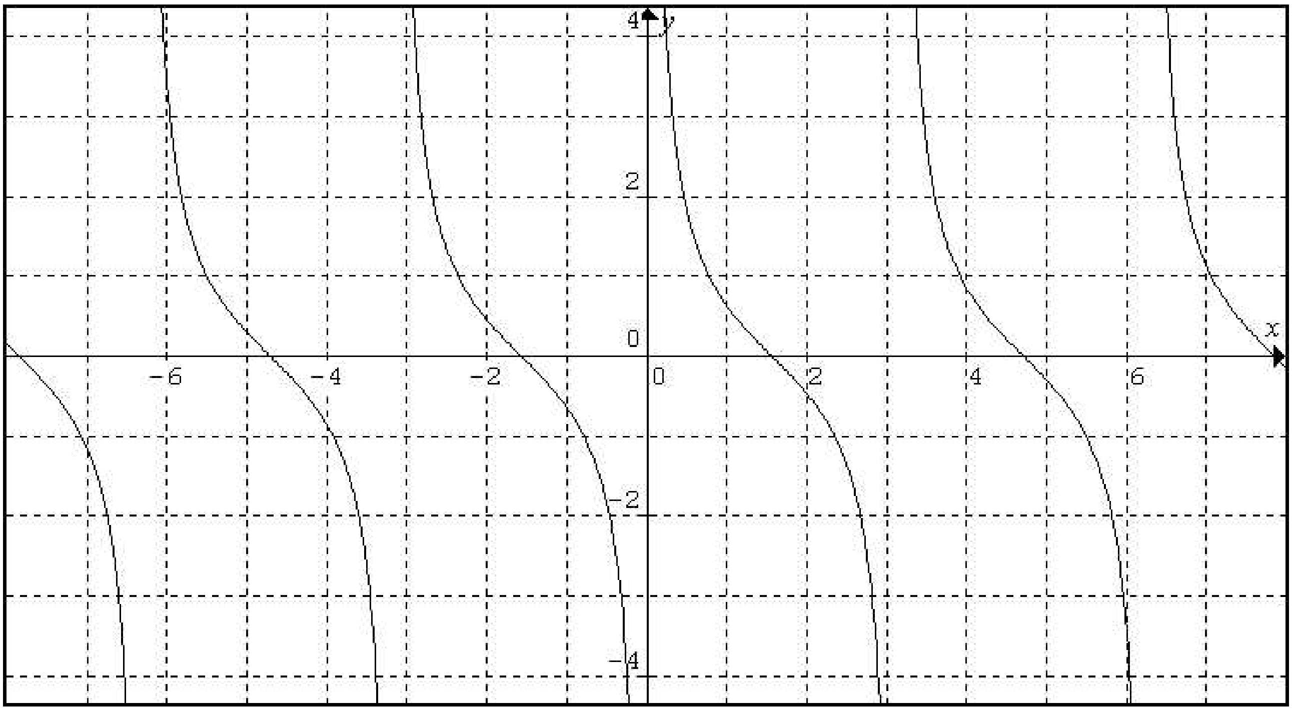

## *Tangens*

Definičným oborom je celá množina reálnych čísel okrem nepárnych násobkov π/2. Oborom hodnôt je celá množina reálnych čísel. Tangens je periodická funkcia s periódou π. Jej hodnota je pre prvý a tretí kvadrant kladná a pre druhý a štvrtý záporná. Tangens je nepárna funkcia. Jej grafom je tangentoida. Tangentoida je rastúcana každom z intervalov(π/2+k π;3 π/2+k π). Tangens je neohraničený. Nulové body sú body x=kπ.  Extrémy nemá.




## *Kotangens*

Definičným oborom je celá množina reálnych čísel okrem párnych násobkov π/2. Oborom hodnôt je celá množina reálnych čísel. Kotangens je periodická funkcia s periódou π. Jej hodnota je pre prvý a tretí kvadrant záporná a pre druhý a štvrtý kladná. Kotangens je nepárna funkcia. Jej grafom je kotangentoida. Kotangentoida je rastúcana každom z intervalov(kπ,π+kπ). Kotangens je neohraničený Nulové body sú body $x=\frac{\pi}{2}\quad k\pi$ . Extrémy nemá.




## *Niektoré hodnoty*

| ***x*** | ***0*** | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | ***2π*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***sin x*** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| ***cos x*** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
| ***tg x*** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | * | 0 | * | 0 |
| ***cotg x*** | * | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | * | 0 | * |

## *Základné vzťahy*

Základným vzťahom medzi sínusom a kosínusom je $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$. Vyplýva to z pytagorovej vety v trojuholníku SMM'. Vzťah medzi tangensom a kotangensom je $tg(x)=\frac{1}{cotg(x)}$ (Vyplýva z definície).

## *Hodnoty záporného argumentu*

sin(-x) = -sin(x)

cos(-x) = cos(x)

tg(-x) = -tg(x)

cotg(-x) = -cotg(x)

## *Súčtové vzorce*

Pri dokazovaní bude potrebný vzorec na zistenie dĺžky úsečky, keď poznáme súradnice koncových bodov. Nech Je úsečka AB, a jej koncové body majú súradnice [$X_A$, $Y_A$] a [$X_B$, $Y_B$]. Potom jej dĺžka je $|AB| = \sqrt{(X_A \quad X_B)^2 \quad (Y_A \quad Y_B)^2}$ .

Základným súčtovým vzorcom je cos(x-y) = sin(x)sin(y) + cos(x)cos(y). Dôkaz bude pre $x > y \quad x,y \quad (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Nakreslíme si uhly $x$ a $y$ a priesečníky ich koncových ramien s jednotkovou kružnicou označíme A (pre x) a B(pre y). a ďalej uhol x-y ≅ BSA. Jeho priesečník koncového ramena s jednotkovou kružnicou bude C a bod [1,0] bude J.

Body: A[cos(x), sin(x)]
B[cos(y), sin(y)]
C[cos(x-y), sin(x-y)]
J[1,0]

Platí: $|AB| = |CJ|$ .

$$|AB| = \sqrt{(\cos x \quad \cos y)^2 \quad (\sin x \quad \sin y)^2}$$

$$|CJ| = \sqrt{(\cos(x \quad y) \quad 1)^2 \quad (\sin(x \quad y) \quad 0)^2}$$

$$\sqrt{(\cos x \quad \cos y)^2 \quad (\sin x \quad \sin y)^2} = \sqrt{(\cos(x \quad y) \quad 1)^2 \quad (\sin(x \quad y) \quad 0)^2} \qquad ()^2$$

$$(\cos x \quad \cos y)^2 \quad (\sin x \quad \sin y)^2 = (\cos(x \quad y) \quad 1)^2 \quad (\sin(x \quad y) \quad 0)^2$$

$\cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos(x)\cos(y) + \sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin(x)\sin(y) = \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + 2 + \sin^2(x-y)$

cos(x-y) = sin(x)sin(y) + cos(x)cos(y)

Pre vzorec cos(x+y) = sin(x)sin(y) – cos(x)cos(y) sa využije to, že kosínus je párny, sínus nepárny a x+y = x-(-y).

Pre vzorec sin(x+y) = sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x) sa využije to, že $\cos(\frac{\pi}{2} \quad x) = \sin x$ a $\sin(\frac{\pi}{2} \quad x) = \cos x$ a pre sin(x-y) = sin(x)cos(y) – sin(y)cos(x) to, že sin(-x) = -sin x

## *Vzorce pre dvojnásobný argument*

sin(2x) = sin(x+x) = 2sin(x)cos(x)

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

## *Vzorce pre polovičný argument*

$1 = \sin^2 y + \cos^2 y$

$\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$

Sčíta sa to.

$$\cos^2 y = \frac{1 \quad \cos(2y)}{2}$$

$$|\cos y| = \sqrt{\frac{1 \quad \cos(2y)}{2}}$$

Nech $y = \frac{x}{2}$

$$\left|\cos(\frac{x}{2})\right| = \sqrt{\frac{1 \quad \cos x}{2}}$$

Pre sínus:

$1 = \sin^2 y + \cos^2 y$

$-\cos(2y) = -\cos^2 y + \sin^2 y$

$$\left|\sin(\frac{x}{2})\right| = \sqrt{\frac{1 \quad \cos x}{2}}$$

## *Súčet a rozdiel hodnôt goniometrických funkcií*

sin(a+b) = sin(a)cos(b)+cos(a)sin(b)

sin(a-b) = sin(a)cos(b)-cos(a)sin(b)

Sčíta sa to.

sin(a+b) + sin(a-b)= sin(a)cos(b)+cos(a)sin(b) + sin(a)cos(b)-cos(a)sin(b)

Nech $a = \frac{x \quad y}{2}$ a $b = \frac{x \quad y}{2}$ .

Potom:

$$\sin x \quad \sin y = 2 \sin \frac{x \quad y}{2} \cos \frac{x \quad y}{2}$$

$$\sin x \quad \sin y = 2 \cos \frac{x \quad y}{2} \sin \frac{x \quad y}{2}$$

$$\cos x \quad \cos y = 2 \cos \frac{x \quad y}{2} \cos \frac{x \quad y}{2}$$

$$\cos x \quad \cos y = \quad 2 \sin \frac{x \quad y}{2} \sin \frac{x \quad y}{2}$$

## *Cyklometrické funkcie*

Určujeme ich ako funkcie inverzné ku goniometrickým s podmienkou, že vezmeme vhodný interval n ajväčšej dĺžky, kde sú goniometrické funkcie prosté.

Ich názvy sa tvoria pridaním predpony arkus pred názov príslušnej goniometrickej funkcie (arkussínus (arcsin), arkuskosínus(arccos), arkustangens(arctg), arkuskotangens(arccotg)).

Vzorce pre tangens a kotangens sa tvoria tak, že $tg\, a = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $cotg\, a = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

# Vzorce

sin(-x) = -sin(x)

cos(-x) = cos(x)

tg(-x) = -tg(x)

cotg(-x) = -cotg(x)

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

$$tg(x)=\frac{1}{cotg(x)}$$

cos(x-y) = sin(x)sin(y) + cos(x)cos(y)

cos(x+y) = sin(x)sin(y) – cos(x)cos(y)

sin(x+y) = sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x)

sin(x-y) = sin(x)cos(y) – sin(y)cos(x)

$$tg(x \quad y)=\frac{tg\,x \quad tg\,y}{1 \quad tg(x)\,tg(y)}$$

$$tg(x \quad y)=\frac{tg\,x \quad tg\,y}{1 \quad tg(x)\,tg(y)}$$

sin(2x) = 2sin(x)cos(x)

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$tg\,2x=\frac{2tgx}{1 \quad tg^2 x}$$

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1 \quad \cos x}{2}}$$

$$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1 \quad \cos x}{2}}$$

$$\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1 \quad \cos x}{1 \quad \cos x}}$$

$$\sin x \quad \sin y=2\sin\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$$

$$\sin x \quad \sin y=2\cos\frac{x \quad y}{2}\sin\frac{x \quad y}{2}$$

$$\cos x \quad \cos y=2\cos\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$$

$$\cos x \quad \cos y= \quad 2\sin\frac{x \quad y}{2}\sin\frac{x \quad y}{2}$$