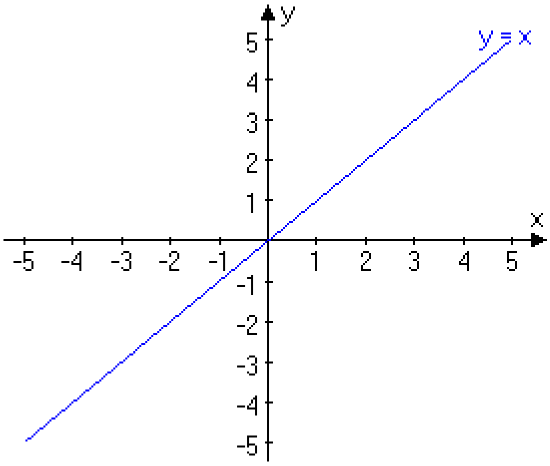
Funkcia a jej vlastnosti



1. Funkcia *f* reálnej premennej *x* je :

- každé zobrazenie ***f*** v množine všetkých reálnych čísel;
- množina ***f*** všetkých usporiadaných dvojíc$[x,y] \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ pre ktorú platí:
  ku každému $x \in \boldsymbol{R}$ existuje najviac jedno $y \in \boldsymbol{R}$ tak, že $[x,y] \in \boldsymbol{f}$.
- predpis ***f*** , ktorý každému $x \in \boldsymbol{R}$ priraduje najviac jedno $y \in$ R tak, že $y = \boldsymbol{f}(x)$.

2. Definièný obor funkcie *f* - D(*f*) :

- je množina všetkých $x \in \boldsymbol{R}$, ku ktorým existuje práve jedno $y \in \boldsymbol{R}$ tak, že
  $[x,y] \in \boldsymbol{f}$, $y = \boldsymbol{f}(x)$.

3. Obor hodnôt funkcie *f* - H(*f*) :

- je množina všetkých $y \in \boldsymbol{R}$, ku ktorým existuje aspon jedno $x \in \boldsymbol{R}$ tak, že
  $[x,y] \in \boldsymbol{f}$, $y = \boldsymbol{f}(x)$.

4. Vlastnosti funkcií :

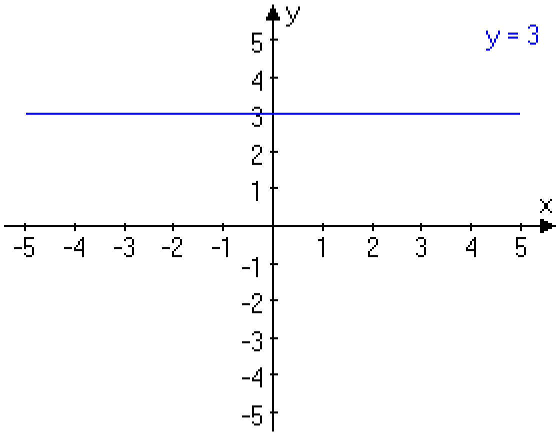
Funkcia ***f*** je na množine ***M*** :

a) **rastúca** $\Leftrightarrow \forall\ x1,x2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak x1>x2, tak $\boldsymbol{f}(x1) > \boldsymbol{f}(x2)$
b) **klesajúca** $\Leftrightarrow \forall\ x1,x2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak x1>x2, tak $\boldsymbol{f}(x1) < \boldsymbol{f}(x2)$
c) **nerastúca** $\Leftrightarrow \forall\ x1,x2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak x1>x2, tak $\boldsymbol{f}(x1) \le \boldsymbol{f}(x2)$
d) **neklasajúca** $\Leftrightarrow \forall\ x1,x2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak x1>x2, tak $\boldsymbol{f}(x1) \ge \boldsymbol{f}(x2)$
e) **prostá** $\Leftrightarrow \forall\ x1,x2 \in \boldsymbol{M}$ platí, ak $x1 \ne x2$, tak $\boldsymbol{f}(x1) \ne \boldsymbol{f}(x2)$
f) **ohraničená zhora** $\Leftrightarrow$ existuje $h \in \boldsymbol{R}$, že $\forall\ x \in \boldsymbol{M}$ platí $\boldsymbol{f}(x) \le h$
g) **ohraničená zdola** $\Leftrightarrow$ existuje $d \in \boldsymbol{R}$, že $\forall\ x \in \boldsymbol{M}$ platí $\boldsymbol{f}(x) \ge h$
h) **ohraničená** $\Leftrightarrow$ je ohraničená zhora a súcasne je ohraničená zdola

Funkcia f má na množine ***M*** v bode $a \in \boldsymbol{M}$:

a) **minimum** $\Leftrightarrow \forall\ x \in \boldsymbol{M}$ platí $\boldsymbol{f}(x) \ge \boldsymbol{f}(a)$
a) **maximum** $\Leftrightarrow \forall\ x \in \boldsymbol{M}$ platí $f(x) \le \boldsymbol{f}(a)$

Konštantná funkcia



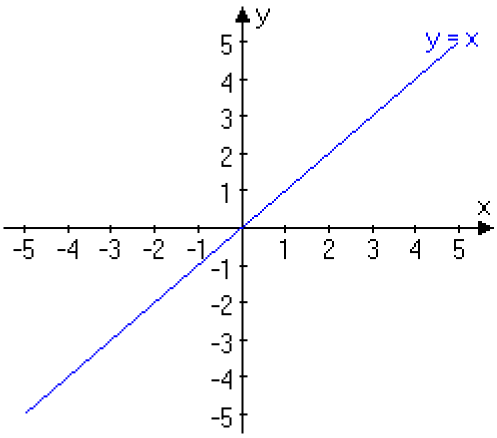
Konštantná funkcia je každá funkcia určená predpisom y = b , kde b ∈ ***R***
Grafom každej konštantnej funkcie ***f*** ak ***D***(*f*) = ***R*** je priamka .

Vlastnosti funkcie :
D(*f*) = ***R*** , ***H***(*f*) = b
- nie je prostá
- je ohraničená
- v každom bode x ∈ *R* má maximum aj minimum .

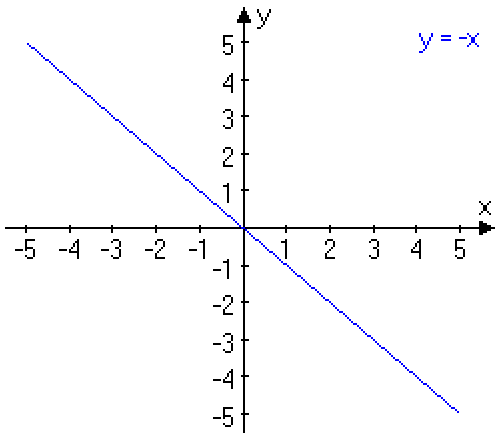
Lineárna funkcia

Lineárna funkcia je každá funkcia určená predpisom **y = ax + b**
kde *a*,*b* ∈ ***R*** a *a* ≠ 0

a > 0



a < 0

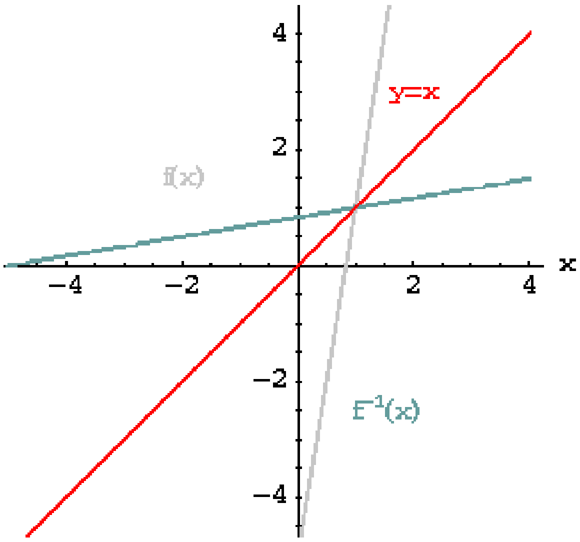


Vlastnosti lineárnej funkcie :

D(*f*) = ***R*** , ***H***(*f*) = ***R***
- rastúca
- nie je ohraničená
- nemá extrémy

D(*f*) = ***R*** , ***H***(*f*) = *R*
- klesajúca
- nie je ohraničená
- nemá extrémy

Inverzná funkcia



Definícia inverznej funkcie :

Ak je ***f*** prostá funkcia, tak k nej existuje práve jedna funkcia, označíme $\boldsymbol{f}^{\mathbf{-1}}$, ktorá je určená takto :

a)Jej definičný obor je ***H***(*f*), to znamená ***D***(f^{-1}) = ***H***(*f*)

b)Každému y ∈ ***D***(f^{-1}) je priradené práve to x ∈ ***D***(*f*), pre ktoré platí *f*(x) = y

Funkciu $\boldsymbol{f^{-1}}$ nazývame funkcia inverzná k funkcii *f*.

Teda platí:

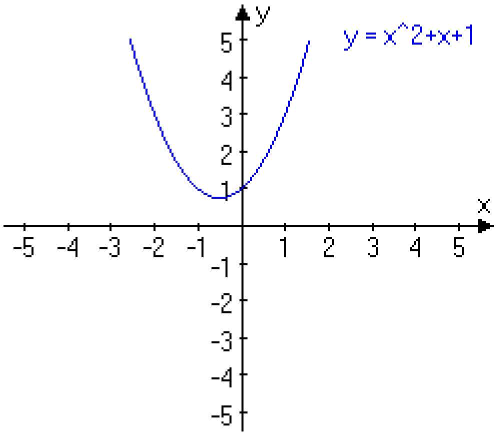
D(f^{-1}) = ***H***(*f*)   a   ***H***(f^{-1}) = ***D***(*f*)

Ak je ***f*** rastúca funkcia, je rastúca aj funkcia $\boldsymbol{f}^{-1}$.
Ak je ***f*** klesajúca funkcia, je klesajúca aj funkcia $\boldsymbol{f}^{-1}$.

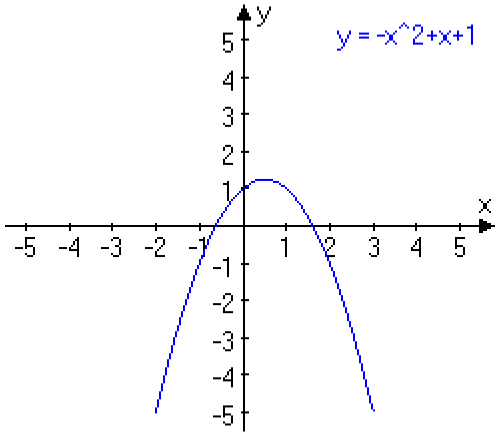
Kvadratická funkcia

Kvadratická funkcia je každá funkcia určená predpisom **$y = ax^2 + bx + c$** ,
kde $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ a $a \neq 0$
Grafom kvadratickej funkcie ak ***D***(*f*) = ***R*** je parabola(alebo čast paraboly), ktorej os je rovnobežná s osou y.

a > 0



a < 0



Vlastnosti kvadratickej funkcie :

súradnice vrcholu V[-b/2a,c-b^2/4a]

***D*(*f*) = *R* , *H*(*f*) = < c-b^2/4a ; ¥**)

na < **-b/2a** ; **¥**) je rastúca

na (**- ¥** ; **-b/2a** > je klesajúca

je ohraničená zdola
ostré minimum v bode x = **-b/2a**

súradnice vrcholu V[-b/2a,c-b^2/4a]

***D*(*f*) = *R* , *H*(*f*) = (- ¥ ; c-b^2/4a** >

na < **-b/2a** ; **¥**) je klesajúca

na (**- ¥** ; **-b/2a** > je rastúca

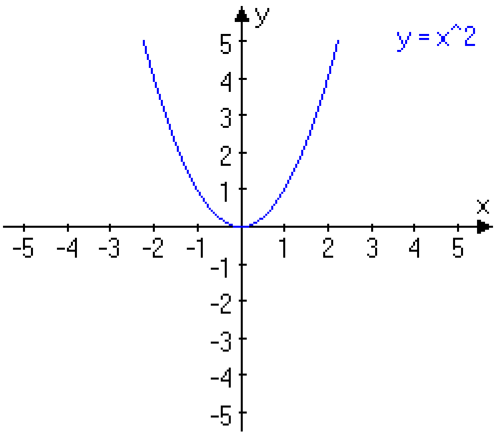
je ohraničená zhora
ostré maximum v bode x = **-b/2a**

Mocninová funkcia

Mocninová funkcia je každá funkcia určená predpisom $\mathbf{y = x^n}$, kde $n \in R$ a $n \neq 0$

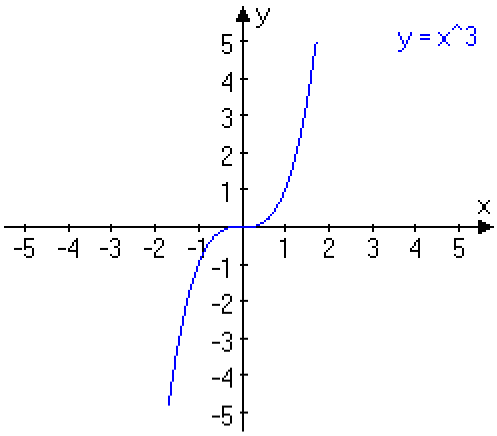
1. *n* Î N

a) *n* je párne



D(*f*) = ***R*** , **H**(*f*) = < 0; ∞)
- je rastúca na < 0; ∞)
- je klesajúca na (- ∞ ; 0 >
- je ohraničená zdola
- má ostré minimumv bode x = 0
- je párna

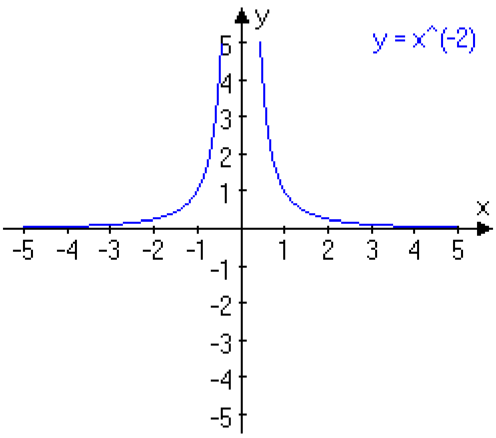
b) *n* je nepárne



D(*f*) = ***R*** , **H**(*f*) = ***R***
- je rastúca
- nie je ohraničená
- nemá extrémy
- je nepárna

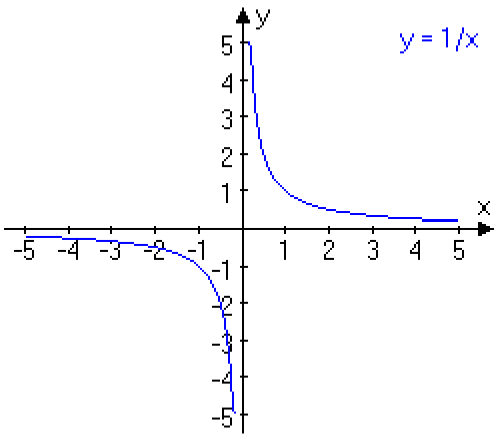
2. *n* Î Z^-

c) *n* je párne



D(*f*) = ***R*** - {0} , **H**(*f*) = (0; ∞)
- je rastúca na (- ∞ ; 0)
- je klesajúca na (0; ∞)
- je ohraničená zdola
- nemá extrémy
- je párna

d) *n* je nepárne

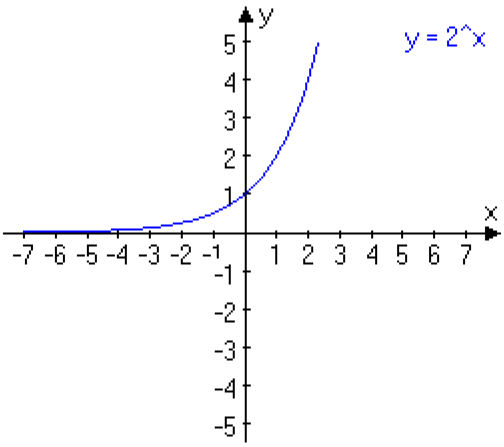


D(*f*) = ***R*** - {0} , **H**(*f*) = ***R*** - {0}
- je klesajúca na (- ∞ ; 0)
- je klesajúca na (0 ; ∞)
- nie je ohraničená
- nemá extrémy
- je nepárna

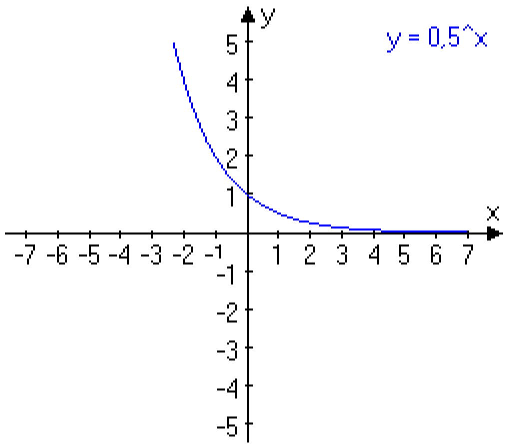
Exponenciálna funkcia

Exponenciálna funkcia je určená predpisom $\mathbf{y = a^x}$, $a \in R^+ - \{1\}$.
Grafom exponenciálnej funkcie je exponenciálna krivka .

a > 1



0 < a < 1



D(f) = $\boldsymbol{R}$, **H**(f) = (0; ∞)
- je rastúca, teda prostá
- ohraničená len zdola
- nemá extrémy
- $f(0) = 1$, $f(1) = a$

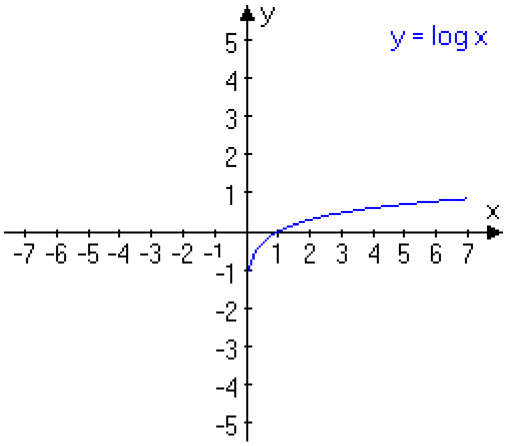
D(f) = $\boldsymbol{R}$, **H**(f) = (0; ∞)
- je klesajúca, teda prostá
- ohraničená len zdola
- nemá extrémy
- $f(0) = 1$, $f(1) = a$

Logaritmická funkcia

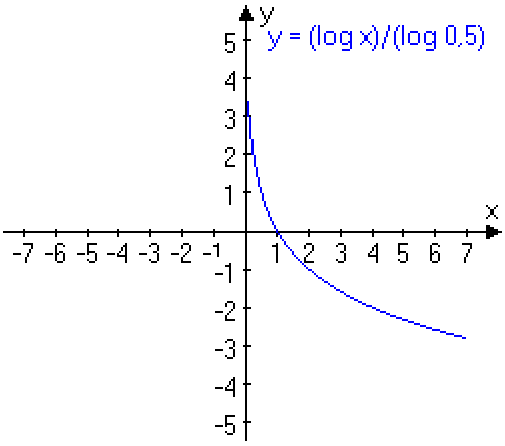
Logaritmická funkcia so základom $a \in R^+ - \{1\}$ je funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$.
Je to funkcia určená predpisom $\mathbf{x = a^y}$, čo zapisujeme $\mathbf{y = \log_a x}$ (čítame logaritmus x
pri základe a).

Grafom logaritmickej funkcie je logaritmická krivka.

a > 1



0 < a < 1



D(f) = **(0; ¥)** , **H**(f) = ***R***
- je rastúca, teda prostá
- nie je ohraničená
- nemá extrémy
- $f(1) = 0$, $f(a) = 1$

D(f) = **(0; ¥)** , **H**(f) = ***R***
- je klesajúca, teda prostá
- nie je ohraničená
- nemá extrémy
- $f(1) = 0$, $f(a) = 1$

Funkčné hodnoty logaritmickej funkcie sa nazývajú ***logaritmy*** .

Logaritmus :
- Logaritmus čísla $x > 0$ pri základe $a \in R^+ - \{1\}$ je také číslo y , pre ktoré platí $a^y = x$.
  číslo y zapisujeme $\log_a x$.

Dekadický logaritmus :
- Ak základ a = 10 , logaritmus nazývame dekadický a základ nepíšeme.
  Teda $\log_{10} x = \log x$.

Prirodzený logaritmus :
- Ak základ a = e (Eulerovo číslo), logaritmus nazývame prirodzený a píšeme
  $\log_e x = \ln x$