JOZEF ELIAŠ — JÁN HORVÁTH — JURAJ KAJAN — ROBERT ŠULKA

ZBIERKA ÚLOH
Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

4. časť

JOZEF ELIAŠ – JÁN HORVÁTH – JURAJ KAJAN
ROBERT ŠULKA

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

4. časť

3. vydanie

alfa

VYDAVATEĽSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY
BRATISLAVA

Publikácia je štvrtou časťou Zbierky úloh z vyššej matematiky. Každá kapitola obsahuje stručné zhrnutie základných pojmov a viet potrebných na riešenie úloh, uvedených v príslušnom odseku, niekoľko vyriešených vzorových príkladov s typickými metódami riešenia a napokon úlohy na samostatné riešenie. Zbierka obsahuje 1804 úloh aj s výsledkami.

Je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického smeru, pre poslucháčov matematiky prírodovedeckých fakúlt univerzít, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní.

1. vydanie 1970
2. vydanie 1972
3. vydanie 1979

Redakcia teoretickej literatúry – vedúci redaktor prom. fyz. Sergej Troščák

---

OBSAH

Predhovor 7

1. Nekonečné rady

1,1. Číselné rady . . . . 9 (256)*)
1,2. Operácie s radmi 18 (256)
1,3. Postupnosť funkcií 21 (257)
1,4. Funkcionálne rady 23 (257)
1,5. Mocninové rady 30 (257)
1,6. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou nekonečných radov, Besselova diferenciálna rovnica, Gaussova diferenciálna rovnica, Legendrova diferenciálna rovnica 40 (259)
1,7. Ortogonálne systémy funkcií. Ortogonálne rady 47 (260)
1,8. Fourierove rady 51 (261)

2. Základy integrálneho počtu funkcie viac premenných

2,1. Dvojný integrál 58 (263)
2,2. Trojný a n-rozmerný integrál 67 (264)
2,3. Transformácia n-rozmerných integrálov 75 (265)
2,4. Obsah rovinných útvarov 81 (265)
2,5. Objem telies 84 (266)
2,6. Obsah plochy 88 (266)
2,7. Fyzikálne aplikácie 91 (266)
2,8. Nevlastné viacrozmerné integrály 98 (267)

3. Parametrické integrály

3,1. Integrály závislé od parametra 104 (267)
3,2. Nevlastné parametrické integrály 108 (267)
3,3. Eulerove integrály 117 (268)
3,4. Fourierov integrál 121 (268)

4. Krivkové integrály

4,1. Krivkové integrály I. a II. druhu 124 (269)
4,2. Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty 130 (269)
4,3. Greenova veta 135 (269)
4,4. Geometrické a fyzikálne aplikácie krivkového integrálu 139 (269)

5. Plošné integrály

5,1. Plošné integrály I. a II. druhu 145 (270)
5,2. Stokesova veta, veta Gaussova—Ostrogradského 152 (270)
5,3. Geometrický a fyzikálny význam plošného integrálu 157 (270)
5,4. Základy teórie poľa 162 (271)

---

*) Čísla v zátvorke označujú číslo strany, na ktorej sú príslušné výsledky.

6. Základy teórie funkcie komplexnej premennej

6,1. Funkcia komplexnej premennej, elementárne transcendentné funkcie 170 (271)
6,2. Limita a spojitosť funkcie komplexnej premennej 176 (273)
6,3. Derivácia funkcie komplexnej premennej a analytická funkcia 179 (273)
6,4. Konformné zobrazenie 184 (274)
6,5. Integrál funkcie komplexnej premennej 201 (277)
6,6. Nekonečné rady 208 (277)
6,7. Laurentov rad. Singulárne body funkcie 218 (278)
6,8. Rezíduum funkcie a jeho aplikácie 224 (279)
6,9. Konformné zobrazenie mnohouholníkov 232 (280)
6,10. Aplikácie funkcie komplexnej premennej v teórii rovinného poľa 240 (282)

7. Výsledky

Literatúra 285

PREDHOVOR

Táto 4. časť Zbierky úloh z vyššej matematiky je pokračovaním prvých troch častí. Obsahuje látku z nekonečných radov, integrálneho počtu funkcie dvoch a viac premenných a základy teórie funkcie komplexnej premennej. Táto látka sa preberá v druhom a treťom ročníku vysokých škôl technického smeru.

Spracovanie látky, usporiadanie príkladov, úloh a ich výsledkov, je podobné ako v prvých troch častiach. Pri odvolávaní sa na látku z predchádzajúcich častí používame takéto označenie: Napríklad 4,7/I alebo 2,3/III znamená článok 4.7 prvej časti, resp. článok 2,3 z tretej časti Zbierky.

Za všetky pripomienky na odstránenie nedostatkov a zlepšenie tohto diela, prípadne doplnky budeme čitateľom veľmi povďační.

Ďakujeme lektorom J. Chavkovi, odb. asistentovi Katedry matematiky SF VŠT v Košiciach a doc. RNDr. V. Šedovi, CSc. z Katedry matematiky PF UK v Bratislave za mnohé cenné pripomienky k zlepšeniu tejto knihy. Súčasne ďakujeme RNDr. J. Zámožíkovi, CSc. za nakreslenie obrázkov a Nakladateľstvu Alfa za starostlivosť, ktorú venovalo vydaniu tejto publikácie.

Autori

1. NEKONEČNÉ RADY

1,1. Číselné rady

Nech je daná číselná postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$. Výraz

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{alebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

nazývame *nekonečným radom* alebo krátko *radom*.
Nech

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Číslo s_n nazývame *n-tým čiastočným súčtom radu* (1) a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *postupnosťou čiastočných súčtov radu* (1).

Ak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu s, hovoríme, že rad (1) je *konvergentný* a má súčet s. Píšeme:

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{alebo} \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Ak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, hovoríme, že rad (1) je *divergentný* a nemá súčet.

Rad

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \tag{2}$$

nazývame *zvyškom* radu (1) po n-tom člene.

Veta 1. Rad (1) je konvergentný a s je jeho súčet vtedy a len vtedy, keď je konvergentný rad (2), ktorého súčet je $s - s_n$.

Veta 2. (*Bolzano—Cauchyho kritérium.*) Nutná a postačujúca podmienka konvergencie radu (1) je, aby ku každému $\varepsilon > 0$ existovalo také prirodzené číslo N, že pre každé $n > N$ a pre každé prirodzené číslo p platí:

$$| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} | < \varepsilon .$$

Veta 3. (*Nutná podmienka konvergencie.*) Ak rad (1) je konvergentný, tak $\lim a_n = 0$.

Veta 4. Ak rad absolútnych hodnôt členov radu (1)

$$| a_1 | + | a_2 | + \ldots + | a_n | + \ldots \tag{3}$$

je konvergentný, tak aj rad (1) je konvergentný.

Ak rad (3) je konvergentný, tak rad (1) nazývame *absolútne konvergentným*. Ak rad (1) konverguje a rad (3) diverguje, tak rad (1) nazývame *relatívne konvergentným*.

Rad $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$, pre ktorý platí $| a_n | \leqq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, nazývame *majorantným k radu* (1).

Kritériá pre konvergenciu a divergenciu radov

Veta 4. Ak k radu (1) existuje konvergentný majorantný rad, tak rad (1) je absolútne konvergentný.

Ak rad (1) je divergentný, tak aj k nemu majorantný rad je divergentný.

Veta 5. Ak $\lim_{n\to\infty} (|a_n|/|b_n|)$ je vlastná a rôzna od 0, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ sú buď oba konvergentné, buď oba divergentné.

Veta 6. (*D'Alembertovo podielové kritérium.*) Ak pre rad (1) sú skoro všetky členy*) postupnosti $\{|a_{n+1}/a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ menšie, alebo sa rovnajú číslu q, $q < 1$ [väčšie alebo sa rovnajú 1], tak rad je absolútne konvergentný [divergentný].

Veta 7. (*D'Alembertovo limitné kritérium.*) Ak pre rad (1) je $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$, tak rad (1) je absolútne konvergentný. Ak $\lim_{n=\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$, rad (1) je divergentný.

Veta 8. (*Cauchyho odmocninové kritérium.*) Ak pre rad (1) sú skoro všetky členy postupnosti $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ menšie, alebo sa rovnajú číslu q, $q < 1$ [väčšie alebo sa rovnajú 1], tak je rad (1) absolútne konvergentný [divergentný].

Veta 9. (*Cauchyho limitné kritérium.*) Ak je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, je rad (1) absolútne konvergentný, ak je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, je rad (1) divergentný.

Veta 10. (*Raabeho kritérium.*) Ak pre rad (1) sú skoro všetky členy postupnosti $\{n(1 - |a_{n+1}/a_n|)\}_{n=1}^{\infty}$ väčšie, alebo sa rovnajú číslu q, $q > 1$ [menšie alebo sa rovnajú 1], tak rad (1) absolútne konverguje [diverguje].

Veta 11. (*Raabeho limitné kritérium.*) Nech $\lim_{n\to\infty} [n(1 - |a_{n+1}/a_n|)] = p$. Ak $p > 1$, rad (1) absolútne konverguje. Ak $p < 1$ rad (1) diverguje.

Veta 12. (*Cauchyho integrálne kritérium.*) Nech pre rad (3) existuje spojitá funkcia $f(x)$, pre ktorú platí:

1. $f(x)$ je nerastúca pre $x \in \langle K, \infty)$,
2. $f(n) = |a_n|$ pre $n > K$.

Potom, ak existuje $\int_K^{\infty} f(x)\,dx$, rad (1) je absolútne konvergentný, ak $\int_K^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, rad (3) je divergentný.

Rad

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}a_n,$$

kde $a_n > 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$ alebo $a_n < 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$, nazývame *radom so striedavými znamienkami*.

Veta 13. (*Leibnizovo kritérium.*) Nech $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť, potom nutnou a postačujúcou podmienkou, aby rad so striedavými znamienkami (4) konvergoval, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Rad
$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n + \ldots \tag{5}$$

nazývame *geometrickým radom* a číslo q nazývame jeho *kvocientom*.

Veta 14. Geometrický rad (5), pre ktorý $a_1 \neq 0$, je konvergentný, ak $|q| < 1$ a je divergentný, ak $|q| \geq 1$.

*) Pozri Ú. 1, 3.11.

Veta 15. Rad

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0 \tag{6}$$

(zovšeobecnený harmonický rad) je konvergentný pre $\alpha > 1$ a divergentný pre $\alpha \leqq 1$.

Príklad 1. Pomocou limity postupnosti čiastočných súčtov nájdime súčet radu

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \ldots . \tag{7}$$

Riešenie. Pre n-tý člen radu (7) platí:

$$a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1/4}{4n-3} - \frac{1/4}{4n+1}$$

a pre n-tý čiastočný súčet radu platí:

$$s_n = \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-7} - \frac{1}{4n-3}\right) + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4n+1}\right].$$

Ďalej platí:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}.$$

Daný rad je konvergentný a jeho súčet je $s = 1/4$.

Príklad 2. Zistime, či rad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{16 + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1} + \sqrt{n}} + \ldots \tag{8}$$

je konvergentný.

Riešenie. Pre n-tý člen daného radu platí:

$$\frac{1}{4^{n-1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

To znamená, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/4)^{n-1}$ je majorantným radom k danému radu (8). Tento majorantný rad je konvergentný geometrický rad ($q = 1/4$). Podľa vety 4 aj daný rad (8) je konvergentný.

Príklad 3. Vyšetrime konvergenciu radu

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots ;$$

Riešenie. Máme $a_n = 2^n/n$, $a_{n+1} = 2^{n+1}/(n+1)$.
Keďže platí:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)}{2^n/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1,$$

podľa D'Alembertovho limitného kritéria daný rad je divergentný.

Príklad 4. Zistime, či rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 + 6}{8n^3 + 3}\right)^n$ konverguje.

Riešenie. Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^3+6}{8n^3+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+6}{8n^3+3} = \frac{3}{8} < 1.$$

Podľa Cauchyho limitného kritéria daný rad konverguje.

Príklad 5. Zistime, či rad $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ je konvergentný.

Riešenie: O rade $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n/n^2)$ nemožno podľa d'Alembertovho alebo Cauchyho limitného kritéria zistiť či konverguje, pretože príslušné limity sa rovnajú 1. Podľa Raabeho limitného kritéria máme:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n^2 \ln(n+1)}{(n+1)^2 \ln n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\, n \ln \frac{n+1}{n} = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2$$

a teda daný rad je konvergentný.

Príklad 6. Vyšetrime, či rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ konverguje.

Riešenie. Použijeme Cauchyho integrálne kritérium. Funkcia $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$ pre $x \in \langle 1, \infty)$ spĺňa podmienky vety 12 a platí:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \lim_{\xi\to\infty} \left[-e^{1/x}\right]_1^{\xi} = e - 1.$$

Podľa vety 12 daný rad je konvergentný.

Príklad 7. Zistime, či rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ konverguje.

Riešenie. Daný rad je radom so striedavými znamienkami. Postupnosť $\left\{\left|\sqrt[n]{2} - 1\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, lebo pre každé prirodzené číslo n platí:

$$2^{\frac{1}{n+1}} - 1 < 2^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Ďalej platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} - \lim_{n\to\infty} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Podľa Leibnizovho kritéria daný rad konverguje.

V úlohách 1 až 3 je daný n-tý člen a_n nekonečného radu. Napíšte prvých päť členov radu.

1. $a_n = \dfrac{1}{[3 - (-1)^n]^n}$. 2. $a_n = \dfrac{4n-3}{n^2+n+1}$.

3. $a_n = \dfrac{[1 - \sin(n\pi/2)]\cos(n\pi)}{n!}$.

V úlohách 4 až 7 nájdite n-tý člen daného radu, ak sú všetky členy radu vytvorené podľa toho istého pravidla.

4. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots$ 5. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots$

6. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots$

7. $1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7} + \dots$

V úlohách 8 až 10 je daný n-tý čiastočný súčet s_n radu. Napíšte tento rad a nájdite jeho súčet.

8. $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. 9. $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

10. $s_n = \frac{n-2}{2n}$.

V úlohách 11 až 15 nájdite súčet nekonečného radu.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{7}\right)^n$.

16. Ktoré racionálne číslo má nekonečný nerýdzoperiodický desatinný rozvoj $0{,}4\overline{90} = 0{,}490\,9090\dots$.

V úlohách 17 až 21 nájdite súčet radu.

17. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \dots$.

18. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \dots$.

19. a) $a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx + \dots$, kde $|a| < 1$;
b) $a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx + \dots$, kde $|a| < 1$.

20. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$. 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

22. Priamo z definície súčtu nekonečného radu dokážte, že dané rady konvergujú a nájdite ich súčet. Koľko členov daného radu treba najmenej vziať, aby čiastočný súčet aproximoval súčet daného radu s chybou menšou ako ε.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$, $\varepsilon = 0{,}0001$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $\varepsilon = 10^{-8}$.

V úlohách 23 až 37 pomocou porovnávacieho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n + 1}$.

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n}{1 + n^2}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n - 4)^2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{3}{8}\right)^n$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n + 1}}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n - 1})$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}{n}$.

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\sqrt{n}}}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$.

V úlohách 38 až 40 dokážte, že dané rady sú divergentné.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n + 1}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2(-1)^n n}{n + 1}$.

V úlohách 41 až 50 pomocou d'Alembertovho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{6^n}}$, kde $\varphi(2n) = \frac{1}{2}$ a $\varphi(2n + 1) = \sqrt{6}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + 1}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 1}{(\sqrt{2})^n}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n + 1)!}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

V úlohách 51 až 55 pomocou Cauchyho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n-1}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^{n+1}}$.

55. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{3^{2k}} + \ldots$.

V úlohách 56 až 59 pomocou Raabeho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{101 \,.\, 102 \,.\, \ldots \,.\, (100+n)}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{1+1/2+\ldots+1/n}}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$.

V úlohách 60 až 65 pomocou Cauchyho integrálneho kritéria rozhodnite o konvergencii radov:

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$.

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

63. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln n}$.

64. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$.

V úlohách 66 až 81 vyšetrite konvergenciu radov s kladnými členmi:

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$.

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$.

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

70. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (6n-7)(6n-4)}{1 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (8n-11)(8n-7)}$.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}}$.

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\,(n+3)!\,3^n}{(2n)!}$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

78. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(1/n)}{\operatorname{tg}(1/\sqrt{n})}$.

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)}$.

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^3}$.

82. Pomocou nutnej podmienky konvergencie radu dokážte rovnosti:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n!} = 0$;

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(4n)!} = 0$;

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

V úlohách **83** až **88** pomocou Leibnizovho kritéria rozhodnite o konvergencii radov:

83. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2}{2^n}$.

84. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

85. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln(2n+1)}$.

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\pi$.

V úlohách **87** až **98** rozhodnite o konvergencii radov so striedavými znamienkami. V prípade konvergencie zistite, či daný rad je absolútne alebo len relatívne konvergentný.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3-(-1)^n}{2n}$.

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3^n}\right)$.

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

90. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+2}{n+1}$.

91. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

92. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^2}$.

93. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

94. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3\,.\,5\,.\,\ldots\,.(2n+1)}{2\,.\,5\,.\,\ldots\,.(3n-1)}$.

95. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{1}{4^n}$.

96. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n}{6^n}$.

97. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^{100}\, 99^n}{100^n}$.

99. Nech f je kladná, nerastúca funkcia na intervale $\langle 1, \infty)$. Dokážte, že ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, tak pre zvyšok tohto radu $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ platí odhad

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

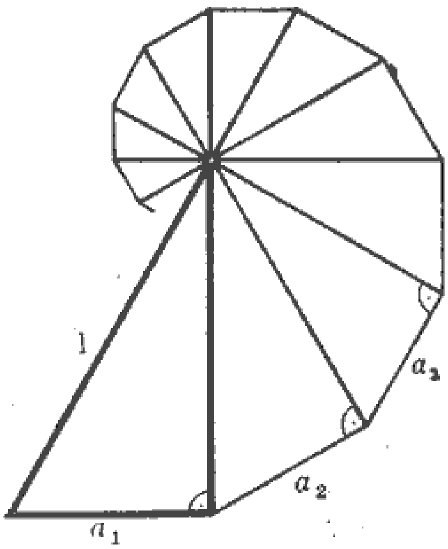
100. Nájdite súčet radu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ s chybou menšou ako 0,1;

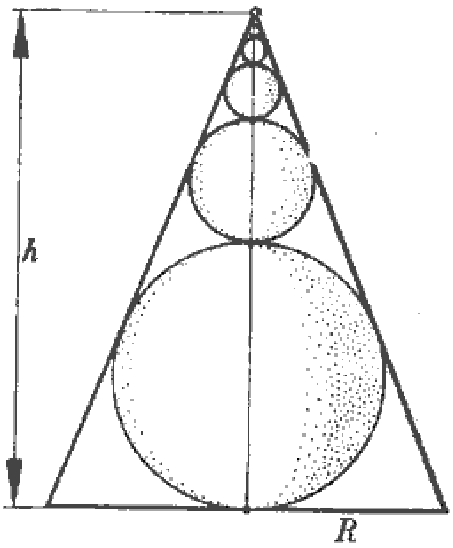
b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ s chybou menšou ako 0,01;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n - 3}$ s chybou menšou ako 0,03.

101. Prepona pravouhlého trojuholníka sa rovná 1. Na jeho jednej odvesne ako prepone je zostrojený jemu podobný trojuholník atď. (*obr. 1*). Zistite, či rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, kde a_n sú dĺžky druhých odvesien týchto trojuholníkov.



Obr. 1



Obr. 2

102. Do rotačného kužeľa, ktorého výška je h a základňa má polomer R, sú postupne vpísané gule (*obr. 2*). Nájdite súčet objemov týchto gúľ.

103. Dokážte, že ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n = a_{p_n} + a_{p_n+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1}$, $p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \dots$, ktorý teda vznikne zlúčením členov daného radu pri ich nezmenenom poradí, je konvergentný a má rovnaký súčet. Obrátené tvrdenie je nepravdivé. Uveďte príklad.

104. Dokážte, že ak členy radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sú kladné a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, (o A_n pozri predchádzajúci príklad) je konvergentný, potom aj daný rad je konvergentný.

105. Dokážte, že z Cauchyho limitného kritéria vyplýva d'Alembertovo limitné kritérium. Obrátené tvrdenie je nepravdivé. Ukážte to na rade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

106. Dokážte, že členy relatívne konvergentného radu možno bez premiestňovania zlúčiť tak, aby nový rad bol absolútne konvergentný.

107. Dokážte, ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ konverguje, tak aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje.

108. Dokážte, že ak rady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^3, \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^3, \sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^3$ konvergujú, potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ ($a_n b_n c_n \geqq 0$) konverguje.

109. Dokážte, že z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$, ak $a_n \geqq 0$.

110. Dokážte: ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

111. Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $t_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$. Dokážte, ak $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom aj $\lim_{n\to\infty} t_n = s$. Nájdite príklad na to, že z existencie $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ nevyplýva ešte existencia $\lim_{n\to\infty} s_n$.

1,2. Operácie s radmi

Majme dva nekonečné rady

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

a ľubovoľné číslo α. Potom môžeme utvoriť ďalšie nekonečné rady

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \tag{3}$$

s n-tým členom $(a_n + b_n)$,

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \tag{4}$$

s n-tým členom $(a_n - b_n)$,

$$\alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) \tag{5}$$

s n-tým členom αa_n,

$(a_1b_1) + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1) + \ldots =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda b_{n-\lambda+1})$ s n-tým členom $(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1) = \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda b_{n-\lambda+1})$. (6)

Rad (3) nazývame *súčtom*, rad (4) *rozdielom*, rad (6) *súčinom* radov (1) a (2) a rad (5) *súčinom čísla α a radu* (1).

Veta 1. Ak sú rady (1) a (2) konvergentné, potom sú aj rady (3) a (4) konvergentné a pre ich súčty platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n).$$

Veta 2. Nech $\alpha \neq 0$. Potom rad (5) je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad (1) a pre ich súčty platí:

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n).$$

Veta 3. Ak jeden z radov (1) a (2) je absolútne konvergentný a druhý je konvergentný [absolútne konvergentný], potom aj rad (6) je konvergentný [absolútne konvergentný] a pre ich súčty platí:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda b_{n-\lambda+1}). \tag{7}$$

Nech $\{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}$ je postupnosť prirodzených čísiel, v ktorej sa každé prirodzené číslo vyskytuje práve raz. Potom o nekonečnom rade

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \tag{8}$$

hovoríme, že vznikol z nekonečného radu (1) premiestnením členov.

Veta 4. Keď je rad (1) absolútne konvergentný, potom je aj rad (8) absolútne konvergentný a obidva rady majú rovnaký súčet.

Veta 5. Ak je rad (1) relatívne konvergentný, potom existuje také premiestnenie radu (1), že rad (8) je alebo divergentný, alebo je konvergentný a jeho súčet je ľubovoľné vopred zvolené číslo.

Príklad 1. Utvorme súčin geometrických radov $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$ a vypočítajme jeho súčet.

Riešenie. Obidva rady sú absolútne konvergentné, a preto aj ich súčin je absolútne konvergentný a podľa vety 3 platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{3^{\lambda-1}5^{n-\lambda}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}.$$

Príklad 2. Ukážme, že rad

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \ldots \tag{9}$$

je relatívne konvergentný. Vhodným premiestnením jeho členov utvorme divergentný rad.

Riešenie. Pre čiastočné súčty radu (9) platí $s_n = 0$, pre $n = 2k$ a $s_n = 1/n$, pre $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Z toho vyplýva, že $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ a teda rad (9) je konvergentný a má súčet 0.

Porovnaním radu absolútnych hodnôt z radu (9)

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \tag{10}$$

s harmonickým radom dostávame, že rad (10) je divergentný. Daný rad (9) je preto relatívne konvergentný. Podľa vety 5 existuje také premiestnenie členov radu (9), že nový rad bude divergentný. Uvažujme o rade

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}+1} - \frac{1}{2^{k-1}+2} - \ldots - \frac{1}{2^k} + \ldots,$$

Nech postupnosť čiastočných súčtov tohto radu je $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$. Utvorme z nej vybranú postupnosť $\{\sigma_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ podľa postupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 4, 6, 8, 12, 16, \ldots, k_n, \ldots\}_{n=1}^{\infty}$, kde $k_n = 2^l + 2^{l-1}$ pre $n = 2l - 1$, $k_n = 2^{l+1}$ pre $n = 2l$, $l = 1, 2, \ldots$. Pre n párne je $\sigma_{k_n} = \sigma_{2^{l+1}} = 0$ a pre n nepárne je:

$$\sigma_{k_n} = \sigma_{2^l+2^{l-1}} = \frac{1}{2^{l-1}+1} + \frac{1}{2^{l-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^l} > \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} + \ldots + \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^l} \cdot 2^{l-1} = \frac{1}{2}.$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{k_n}$ a teda aj $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ neexistuje. Rad (11) je preto divergentný.

112. Najdite súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-3)^n + 7^{n+1}}{14^n}$.

113. Zistite, či môže byť súčet:

a) dvoch divergentných radov,

b) divergentného a konvergentného radu,

konvergentný rad.

114. Nájdite súčet radu $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,x^n$ tak, že utvoríte rozdiel $s - xs$.

115. Nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ ak platí $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$, kde a_n je koeficient pri x^n.

116. Vynásobte rady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} na^{n-1}$, a je číslo,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$, $a > 0$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

117. Nájdite druhú mocninu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$, a je číslo.

118. Pomocou súčinu radov nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

119. Utvorte $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$ a zistite, či tento rad konverguje.

120. Dokážte, že platí:

a) $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \ldots = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots\right)$,

b) $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5} - \ldots = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots\right)$.

c) $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{14} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{5} - \ldots = 0.$

121. Dokážte, že rad $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ konverguje a rad $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ diverguje.

122. Členy radu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ premiestite tak, aby sa súčet nového radu rovnal dvojnásobku pôvodného radu.

123. Členy radu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$ premiestite tak, aby nový rad divergoval.

1,3. Postupnosť funkcií

Postupnosť, ktorej všetky členy sú funkcie, nazývame *postupnosťou funkcií* a označujeme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$.

Nech funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sú definované na množine M. Ak číselná postupnosť $\{f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a), \ldots\}$ konverguje [diverguje, nevlastne konverguje], pričom $a \in M$, potom hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ *konverguje [diverguje, nevlastne konverguje] v čísle a.*

Ak postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje [diverguje] v každom čísle množiny M, potom hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje [diverguje] na množine M.*

Oborom konvergencie N postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame množinu všetkých tých čísiel, v ktorých je postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná.

Funkciu f, definovanú na množine M, pre ktorú platí $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$, pre každé číslo $a \in M$, nazývame *limitou danej postupnosti funkcií na množine M*. Ak $M = N$, potom hovoríme iba o *limite postupnosti funkcií* a označujeme $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k f na množine M vtedy a len vtedy, ak ku každému kladnému číslu ε existuje také prirodzené číslo $N(\varepsilon)$, že pre každé prirodzené číslo $n > N(\varepsilon)$ a pre všetky čísla a z množiny M platí $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$.

Veta 1. Nech f je funkcia definovaná na množine M a $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ je postupnosť kladných čísiel, pre ktoré platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Ak pre skoro všetky členy postupnosti funkcií $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ definovaných na množine M a pre všetky čísla a z množiny M platí $|f_n(a) - f(a)| \leq c_n$, potom postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine M.

Veta 2. Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých na intervale J rovnomerne konverguje k funkcii f na intervale J. Potom je jej limita spojitá funkcia na intervale J.

Veta 3. Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých na intervale $\langle a, b\rangle$ rovnomerne konverguje k funkcii f na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Veta 4. Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť diferencovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ a jej limita je funkcia f na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech postupnosť funkcií $\{f_1', f_2', \ldots, f_n', \ldots\}$ spojitých na intervale $\langle a, b\rangle$ rovnomerne konverguje k funkcii g na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí $g = f'$, čiže

$$\lim_{n\to\infty}(f_n') = (\lim_{n\to\infty} f_n)'.$$

Veta 5. Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k funkcii f na intervale J. Nech a je číslo z intervalu J a pre každé prirodzené číslo n platí $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$. Potom platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

čiže

$$\lim_{x\to a}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to a} f_n(x)].$$

Príklad 1. Zistíme, či postupnosť funkcií $\{1/(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje k funkcii $f(x) = 0$ na intervale $(0, \infty)$.

Riešenie. Odhadnime absolútnu hodnotu rozdielu $|f_n(x) - 0|$. Preň platí:

$$\left|\frac{1}{x+n} - 0\right| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}$$

pre každé prirodzené číslo n a pre všetky čísla $x \in (0, \infty)$. Keďže postupnosť kladných čísiel $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 0, podľa vety 1 daná postupnosť funkcií konverguje rovnomerne k funkcii $f(x) = 0$ na intervale $(0, \infty)$.

V úlohách **124** až **131** nájdite obor konvergencie postupnosti funkcií a jej limitu:

124. $\left\{\dfrac{n^2x - 5n}{2n^2 + nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

125. $\left\{\dfrac{x}{2}^{n+2} + \dfrac{x}{3}^{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

126. $\left\{\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

127. $\left\{n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

128. $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

129. $\left\{n \sin \dfrac{x}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

130. $\{\sin^n x + \cos^n x\}_{n=1}^{\infty}$.

131. $\{e^{-nx}\}_{n=1}^{\infty}$.

132. Zostrojte postupnosť spojitých funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervale $\langle -1, 1\rangle$ takto:

a)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1/2^{n-1}, 1\rangle, \\ 2^n & \text{pre } x = 1/2^n, \\ \text{lineárnej funkcii v intervale } (0, 1/2^n) \text{ a } (1/2^n, 1/2^{n-1}), \end{cases}$$

b)

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \in \langle -1, -1/n\rangle \cup \langle 1/n, 1\rangle, \\ n^2x & \text{pre } x \in (-1/n, 1/n) \end{cases}$$

a nájdite jej limitu, ak existuje.

V úlohách **133** až **143** zistite, či dané postupnosti funkcií rovnomerne konvergujú na daných intervaloch:

133. $\{x^n - x^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\langle 0, 1\rangle$.

134. $\{x^n - x^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\langle 0, 1\rangle$.

135. $\left\{\dfrac{nx^2 + 1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(-\infty, \infty)$.

136. $\left\{\dfrac{x\sqrt{2}}{2 + n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\langle 0, 1\rangle$.

137. $\left\{\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\langle 0, 1\rangle$.

138. $\left\{\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(1, \infty)$.

139. $\left\{\dfrac{1}{n^2+1}\cos\dfrac{x}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(-\infty, \infty)$.

140. $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(-\infty, \infty)$.

141. $\left\{\dfrac{\sin x}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(-\infty, \infty)$.

142. $\left\{\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(0, 1)$.

143. $\{e^{-nx}\}_{n=1}^{\infty}$, $\langle 0, \infty)$.

144. Dokážte, že postupnosť $\{x^2 + [\sin n(x + \pi/2)]/n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$, ale $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} (f_n')$.

145. Dokážte, že postupnosť $\{(\operatorname{arctg} x^n)/n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$, ale $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)_{x=1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1)$.

146. Dokážte, že daná postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje nerovnomerne na intervale $\langle 0, 1\rangle$, avšak

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx:$$

a) $\{nx(1-x)^n\}_{n=1}^{\infty}$,

b) $\left\{\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

c) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \in (1/2^n, 1/2^{n-1}), \\ 0 & \text{pre } x \in \langle 0, 1\rangle - (1/2^n, 1/2^{n-1}). \end{cases}$

147. Vypočítajte:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{n^2}\cos x^n\,dx.$$

148. Dokážte, že postupnosť $\{nx\,e^{-nx^2}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na intervale $\langle 0, 1\rangle$; ale

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

149. Zistite, či môže postupnosť nespojitých funkcií rovnomerne konvergovať k spojitej funkcii. Vyšetrite postupnosť $\{\chi(x)/n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkcia,

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne číslo,} \\ 1 & \text{pre } x \text{ racionálne číslo.} \end{cases}$$

1.4. Funkcionálne rady

Majme postupnosť funkcií $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ definovaných na množine M. Výraz

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{1}$$

nazývame *nekonečným radom*, ktorého členy sú funkcie, alebo *funkcionálnym radom*. Funkciu f_i, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ nazývame *i-tým členom* funkcionálneho radu (1).

Funkciu

$$s_i = \sum_{j=1}^{i} f_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{2}$$

nazývame *i-tým čiastočným súčtom* funkcionálneho radu (1).

Postupnosť

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\} \tag{3}$$

nazývame *postupnosťou čiastočných súčtov funkcionálneho radu* (1).

Nekonečný rad

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+k} + \ldots$$

nazývame *zvyškom funkcionálneho radu* (1) po n-tom člene.

Hovoríme, že funkcionálny rad (1) *konverguje* [*diverguje*] *v čísle* a, ak v čísle a konverguje [diverguje] jeho postupnosť čiastočných súčtov.

Hovoríme, že funkcionálny rad (1) *konverguje [diverguje] na množine* M, ak konverguje [diverguje] na množine M jeho postupnosť čiastočných súčtov.

Oborom konvergencie funkcionálneho radu (1) rozumieme obor konvergencie postupnosti jeho čiastočných súčtov.

Ak funkcionálny rad (1) konverguje na množine M, t. j. jeho postupnosť čiastočných súčtov má na množine M limitu s, nazývame funkciu s jeho *súčtom na množine* M.

Ak je množina M oborom konvergencie funkcionálneho radu (1), potom funkciu s nazývame krátko *súčtom funkcionálneho radu* (1) a označujeme takto

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = s(x), \qquad x \in M. \tag{4}$$

Funkcionálny rad (1) *rovnomerne konverguje na množine* M, ak jeho postupnosť čiastočných súčtov rovnomerne konverguje na množine M.

Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots,$$

nazývame *majorantným radom k funkcionálnemu radu* (1) na množine M, ak pre každé číslo $a \in M$ a pre každé prirodzené číslo n platí:

$$|f_n(a)| \leqq c_n.$$

Veta 1. Funkcionálny rad (1) konverguje k číslu b [diverguje] v čísle a vtedy a len vtedy, keď číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f_1(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots \tag{5}$$

konverguje k číslu b [diverguje].

Funkcionálny rad (1) konverguje na množine M vtedy a len vtedy, keď pre každé číslo $a \in M$ číselný rad (5) konverguje.

Funkcionálny rad (1) má na množine M súčet s vtedy a len vtedy, keď pre každé číslo $a \in M$ číselný rad (5) má súčet číslo $s(a)$.

Poznámka. Z uvedeného vyplýva, že konvergenciu alebo divergenciu funkcionálneho radu možno zisťovať pomocou konvergencie alebo divergencie číselných radov [pozri kritériá z čl. 1,1].

Veta 2. Nech pre funkcionálny rad (1) na množine M existuje konvergentný majorantný rad. Potom je funkcionálny rad (1) rovnomerne konvergentný na množine M.

Veta 3. Nech funkcie f_n, $n = 1, 2, \ldots$ sú spojité na intervale I a funkcionálny rad (1) je rovnomerne konvergentný na intervale I. Potom súčet s funkcionálneho radu (1) je spojitá funkcia na intervale I.

Veta 4. Nech funkcionálny rad (1) rovnomerne konverguje na intervale I a má tam súčet s. Nech a, b sú dve čísla z intervalu I a nech existuje $\int_a^b f_n(x)\,dx$, pre $n = 1, 2, \ldots$. Potom existuje aj $\int_a^b s(x)\,dx$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big]\,dx = \int_a^b s(x)\,dx. \tag{6}$$

Ak platí rovnosť (6), hovoríme, že funkcionálny rad (1) môžeme *integrovať člen za členom.*

Veta 5. Nech funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ majú na ohraničenom intervale $\langle a, b\rangle$ primitívne funkcie $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, ktoré zvoľme tak, aby funkcionálny rad

$$F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + \ldots \tag{7}$$

bol konvergentný aspoň v jednom bode intervalu (a, b). Nech funkcionálny rad (1) je rovnomerne konvergentný na intervale (a, b). Potom je funkcionálny rad (7) rovnomerne konvergentný na intervale (a, b) a jeho súčet na tomto intervale je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx + c, \tag{8}$$

kde c je vhodné číslo.

Ak platí rovnosť (8), hovoríme, že funkcionálny rad (1) môžeme integrovať člen za členom.

Veta 6. Nech funkcie f_n, pre $n = 1, 2, \ldots$ majú na otvorenom intervale I spojité derivácie. Nech funkcionálny rad (1) konverguje aspoň v jednom čísle z intervalu I. Nech funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n' + \ldots \tag{9}$$

rovnomerne konverguje na intervale I. Potom funkcionálny rad (1) konverguje na intervale I a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big]' \tag{10}$$

pre každé číslo $x \in I$.

Ak platí rovnosť (10), hovoríme, že funkcionálny rad (1) môžeme *derivovať člen za členom.*

Príklad 1. Nájdime obor konvergencie funkcionálneho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\,x^n} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{5x^2} + \frac{1}{8x^3} + \ldots. \tag{11}$$

Riešenie. Všetky členy radu (11) sú definované na množine $M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Pre každé číslo $x = a \in M$ dostaneme z (11) číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\,a^n}, \tag{12}$$

ktorého konvergenciu vyšetríme napr. pomocou d'Alembertovho limitného kritéria. Dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(a)}{f_n(a)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(3n-1)\,a^n}{[3(n+1)-1]\,a^{n+1}}\right| = \frac{1}{|a|} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n-1}{3n+2}\right| = \frac{1}{|a|}.$$

Ak $\frac{1}{|a|} < 1$, čiže $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, číselný rad (12) konverguje.

Ak $\frac{1}{|a|} > 1$, čiže $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, číselný rad (12) diverguje.

Ak $a = 1$, číselný rad (12) má tvar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \ldots . \tag{13}$$

Porovnaním s radom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ zistíme, že rad (13) je divergentný.

Ak $a = -1$, číselný rad (12) má tvar

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^n}{3n-1} + \ldots .$$

Z Leibnizovho kritéria pre číselné rady so striedavými znamienkami vyplýva, že je konvergentný.

Oborom konvergencie funkcionálneho radu (11) je množina $(-\infty, -1\rangle \cup (1, \infty)$.

Príklad 2. Dokážme, že funkcionálny rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3+n^2} = \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 2x}{7} + \frac{\sin 3x}{12} + \ldots \tag{14}$$

je rovnomerne konvergentný na intervale $(-\infty, \infty)$.

Riešenie. Nech a je ľubovoľné číslo z intervalu $(-\infty, \infty)$. Potom pre každé prirodzené číslo n platí:

$$\left| \frac{\sin na}{3+n^2} \right| = \frac{|\sin na|}{3+n^2} \leq \frac{1}{3+n^2} < \frac{1}{n^2} .$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ je konvergentný a je majorantným radom k funkcionálnemu radu (14) na intervale $(-\infty, \infty)$. Podľa vety 2 funkcionálny rad (14) rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$.

Príklad 3. Nájdime súčet funkcionálneho radu, ktorý vznikne integrovaním člen za členom radu

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{1}{1+x}, \tag{15}$$

$x \in (-a, a)$, kde $0 < a < 1$.

Riešenie. Aby sme mohli rad (15) integrovať člen za členom, musíme zistiť, či je rovnomerne konvergentný a či jeho členy sú integrovateľné na intervale $I = (-a, a)$. Pre každé $x \in I$ platí $|x| \leq a$. Preto pre každé $x \in I$ a každé číslo $n = 0, 1, 2, \ldots$ je:

$$|(-1)^n x^n| \leq a^n.$$

Teda konvergentný geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ je majorantným radom k funkcionálnemu radu (15) na intervale I. Podľa vety 2 je funkcionálny rad (15) rovnomerne konvergentný na intervale I.

Pretože všetky členy funkcionálneho radu (15) sú spojité na intervale I a teda integrovateľné, platí:

$$\int (1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots)\, dx = \int \frac{1}{1+x}\, dx + c,$$

čiže

$$x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots + (-1)^n x^{n+1}/(n+1) + \ldots = \ln(1+x) + c$$

pre každé $x \in I$, kde c je číslo, ktoré určíme z podmienky rovnosti funkcií v poslednej rovnosti pre $x = 0$. Máme:

$$0 - 0^2/2 + 0^3/3 - \ldots + (-1)^n 0^{n+1}/(n+1) + \ldots = \ln(1+0) + c.$$

Odtiaľ je $c = 0$.

Teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x), \text{ pre } x \in I.$$

V úlohách **150** a **151** nájdite súčet funkcionálneho radu.

150. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x-2)^{n-1}}{3^n}$. **151.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$.

152. Najmenej koľko členov funkcionálneho radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

treba vziať, aby pre jeho čiastočný súčet $s_n(x)$ na intervale $(-\infty, \infty)$ platilo $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$, kde $s(x)$ je súčet tohto funkcionálneho radu, ak a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}001$.

153. Pre číslo $x \geqq 0$ nájdite súčet a zvyšok po n-tom člene funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}$. Pre aké prirodzené číslo n je $|R_n(x)| \leqq 0{,}01$ pre každé číslo $x \geqq 0$.

154. Nájdite súčet a zvyšok po n-tom člene funkcionálneho radu $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)\, x^n$ pre $x \in (0, 1)$. Najmenej koľko členov tohto radu treba vziať, aby $|R_n(x)| \leq 0{,}001$, pre každé číslo $x \in \langle 0{,}1;\ 0{,}9 \rangle$. Najmenej koľko členov tohto radu treba vziať, aby $|R_n(x)| \leqq 0{,}001$ pre $x \in (0, 1)$.

V úlohách **155** až **174** nájdite obor konvergencie daného funkcionálneho radu.

155. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. **156.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\, x^n}{n^n}$.

157. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$. **158.** $\sum_{n=1}^{\infty} (3 - x^2)^n$.

159. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$. **160.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

161. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$. **162.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

163. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (n-1)^2}$. **164.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

165. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n$, $x \neq 0$. **166.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

167. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^{n+1}}$.

168. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}$.

169. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

170. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-nx}$.

171. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx} - 1}$.

172. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n 2x$.

173. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

174. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

V úlohách 175 až 177 nájdite množiny všetkých reálnych čísel, x pre ktoré daný funkcionálny rad konverguje absolútne a kde diverguje.

175. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$.

176. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

177. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$.

178. Pre aké najmenšie prirodzené číslo n je $|R_n(x)| \leq 0{,}01$, ak funkcionálny rad je $x + x(1 - x) + \ldots + x(1 - x)^{n-1} + \ldots$, $x \in (1/2, 1)$.

V úlohách 179 až 190 dokážte, že daný funkcionálny rad rovnomerne konverguje na danej množine.

179. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^2}$, $(-\infty, \infty)$.

180. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$, $\langle 0, \infty)$.

181. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1 + 2nx}}$, $\langle 0, \infty)$.

182. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $\langle 0, \infty)$.

183. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + e^{2x}}$, $(-\infty, \infty)$.

184. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $(-\infty, \infty)$.

185. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$, $(-\infty, \infty)$.

186. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$, $(-a, a)$.

187. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$, $(-\infty, \infty)$.

188. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)\, x^n$, $\langle 0, 1\rangle$.

189. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$, $\langle 0, 2\pi\rangle$.

190. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$, $(0, \infty)$.

191. Nájdite množinu všetkých reálnych čísiel x, pre ktoré funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}/n^3$ rovnomerne konverguje.

192. Dokážte, že funkcionálny rad

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

konverguje nerovnomerne na intervale $(-\infty, \infty)$ a na ľubovoľnom konečnom intervale konverguje rovnomerne.

193. Dokážte, že súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ je spojitá funkcia.

V úlohách 194 a 195 nájdite súčet daného funkcionálneho radu a množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré je spojitou funkciou.

194. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$. **195.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}\right)$.

196. Dokážte, že platí $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)} = \frac{1}{2} \ln 2$.

197. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3}$ na intervale $(-\infty, \infty)$ možno derivovať člen za členom.

198. Dokážte, že pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n}$, ktorý je na intervale $(-\infty, \infty)$ rovnomerne konvergentný, neplatí veta o derivovaní člen za členom funkcionálneho radu.

199. Vypočítajte $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$, keď $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$.

200. Derivovaním člen za členom funkcionálneho radu

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1$$

dokážte rovnosti:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$.

201. Integrovaním člen za členom vhodného geometrického funkcionálneho radu nájdite súčty radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-2)\, 2^{3(n-1)}}$.

V úlohách 202 až 205 derivovaním alebo integrovaním člen za členom nájdite súčet funkcionálneho radu.

202. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

203. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$.

204. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

205. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

206. Dokážte, že pre všetky x z intervalu $(-1, 1)$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1} - 1}{1 + x^{2n-1}} = \frac{1}{1-x}.$$

1,5. Mocninové rady

Rad

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \tag{1}$$

nazývame *mocninovým* alebo *potenčným radom*; čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nazývame jeho *koeficientmi* a číslo a jeho *stredom*.

Majme zhora ohraničenú číselnú postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Najväčšie číslo, ku ktorému existuje z $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná, k nemu konvergujúca postupnosť, nazývame *limes superior* postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme znakom $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n$. Číslo $c = \limsup\limits_{n\to\infty} c_n$ má v tomto prípade tieto vlastnosti:

1. pre každé číslo $x > c$ existuje v postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ len konečný počet členov väčších ako x;

2. pre každé číslo $y < c$ existuje v postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonečne mnoho členov väčších ako y.

Ak je postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ zhora neohraničená, kladieme $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

Ak pre postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, kladieme $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Poznámka 1. Z uvedenej definície vyplýva, že ak je postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, tak $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Veta 1. Pre rad (1) platí:

1. Obor konvergencie radu (1) je interval s koncovými bodmi $a - r$, $a + r$, pričom $r = 1/\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ vtedy a len vtedy, keď $0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$.

2. Obor konvergencie radu (1) je interval $(-\infty, \infty)$ vtedy a len vtedy, keď $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

3. Rad (1) je konvergentný len v svojom strede a vtedy a len vtedy, keď $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.

Číslo r nazývame *polomerom konvergencie* a interval $I = (a - r, a + r)$ ***intervalom konvergencie** mocninového radu* (1).

V prípade 2 hovoríme, že polomer r je ∞, v prípade 3, že polomer r je 0.

Poznámka 2. Veta 1 platí aj v tom prípade, keď namiesto $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ použijeme $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$, pričom $a_n \neq 0$ pre skoro všetky n.

Operácie s mocninovými radmi

Majme mocninové rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \tag{1}$$

a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n. \tag{2}$$

Budeme hovoriť, že rady (1) a (2) sa rovnajú, keď $a_n = b_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$.

Súčtom [*rozdielom*] *radov* (1) a (2) budeme nazývať rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n \qquad \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(x-a)^n\right]. \tag{3}$$

Súčinom mocninového radu (1) *a čísla* k budeme nazývať rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} ka_n(x-a)^n. \tag{4}$$

Súčinom mocninových radov (1) a (2) nazývame rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda b_{n-\lambda}\right)(x-a)^n. \tag{5}$$

Nech s je súčet mocninového radu (1), ktorý má polomer konvergencie $r > 0$, a nech $I = (a-r, a+r)$. Potom platia vety.

Veta 2. Rad (1) pre každé $x_0 \in I$ absolútne konverguje.

Veta 3. Nech interval $I_1 = \langle c, d\rangle \subset I$. Potom rad (1) rovnomerne konverguje na I_1.

Veta 4. Súčet s je spojitou funkciou na I.

Veta 5. Súčet s má na I derivácie všetkých rádov, ktoré dostaneme derivovaním radu (1) člen za členom.

Veta 6. Súčet s má na I primitívnu funkciu, ktorú dostaneme integrovaním radu (1) člena za členom.

Veta 7. Pre každé dve čísla $b, c \in I$ existuje integrál $\int_b^c s(x)\,dx$, ktorý dostaneme integrovaním radu (1) člena za členom na intervale $\langle b, c\rangle$.

Veta 8. Ak s je na I súčtom mocninového radu (1) a mocninového radu (2), tak rady (1) a (2) sa rovnajú.

Veta 9. Ak rad (1) konverguje aj v čísle $a + r$ [$a - r$], potom platí:

$$s(a+r) = \lim_{x\to(a+r)-} s(x) \qquad \left[s(a-r) = \lim_{x\to(a-r)+} s(x)\right],$$

t. j. $s(x)$ je v čísle $a + r$ [$a - r$] zľava [sprava] spojitá.

Veta 10. Nech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{pre} \qquad x \in (-r, r), \tag{6}$$

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \qquad \text{pre} \qquad y \in (-\varrho, \varrho), \tag{7}$$

pričom platí $|a_0| = |f(0)| < \varrho$. Potom pre funkciu $g[f(x)]$ v okolí bodu $x = 0$ možno nájsť mocninový rad so stredom 0 tak, že rad (6) dosadíme do radu (7), vykonáme príslušné operácie a usporiadame podľa rastúcich mocnín x.

Taylorov rad

Nech funkcia f má v čísle a derivácie všetkých rádov. Mocninový rad

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \tag{8}$$

nazývame *Taylorovým radom funkcie* f v čísle a a označujeme ho $T(f, a, x)$ alebo len $T(f, a)$.

Veta 11. Nech funkcia f má v čísle a derivácie všetkých rádov. Potom na intervale I platí:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

vtedy a len vtedy, keď pre každé $x \in I$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f, a, x) = 0$.*)

Veta 12. (Základné mocninové rady.)

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$

3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$

4. $(1+x)^p = 1 + \dbinom{p}{1}x + \dbinom{p}{2}x^2 + \dots + \dbinom{p}{n}x^n + \dots, \qquad x \in (-1, 1),$**)

kde p je číslo a $\dbinom{p}{n} = \dfrac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}$.

5. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \qquad x \in (-1, 1\rangle.$

6. $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right), \qquad x \in (-1, 1).$

7. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad x \in \langle -1, 1\rangle.$

Príklad 1. Nájdime interval konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}. \tag{9}$$

Riešenie. Rad (9) je mocninový rad so stredom $a = 3$. Interval konvergencie nájdeme podľa vety 1. Počítajme $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$. Máme:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)\,5^{n+1}}{1/n5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n5^n}{(n+1)\,5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}.$$

*) O zvyšku $R_n(f, a, x)$ pozri 3,6/II.

**) V bodoch $x = -1$ a $x = 1$ rad absolútne konverguje pre $p \geq 0$. Pre $p \in (-1, 0)$ v bode $x = -1$ rad diverguje a v $x = 1$ relatívne konverguje. Pre $p \leq -1$ rad v bodoch $x = -1$ a $x = 1$ diverguje.

Podľa poznámky 1 existuje $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ a rovná sa 1/5. Podľa vety 1 a poznámky 2 polomer konvergencie radu (9) je $r = 1/(1/5) = 5$ a interval konvergencie $J = (-2, 8)$.

Rozhodnime ešte o konvergencii radu (9) v číslach $x = -2$ a $x = 8$. Po dosadení do (9) dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \tag{10}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Rad (10) je rad so striedavými znamienkami a podľa Leibnizovho kritéria konverguje. Rad (11) je harmonický rad, a ten (pozri vetu 15 z čl. 1,1) diverguje.

Rad (9) je teda konvergentný na intervale $\langle -2, 8)$.

Príklad 2. Rozviňme funkciu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad a > 0$$

do mocninového radu so stredom $a = 0$.

Riešenie. Mocninový rad danej funkcie nájdeme pomocou radu 4 z vety 12. Preto upravme danú funkciu takto

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a}\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Zo základného radu 4 z vety 12 pre $p = -1/2$ dostaneme:

$$f(x) = \frac{1}{a}\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{-1/2}{1}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2\,.\,1}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n(n-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \ldots\right]$$

pre $(x/a)^2 \in (-1, 1\rangle$. Z tohto máme:

$$f(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^4}{a^5} - \ldots + (-1)^n \frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2n}\frac{x^{2n}}{a^{2n+1}} + \ldots$$

pre $x \in \langle -a, a\rangle$.

Príklad 3. Nájdime súčet radu

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Riešenie. Z príkladu 2, ak $a = 1$, máme:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2n}x^{2n} + \ldots \text{ pre } x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Podľa vety 6 pre každé $x \in (-1, 1)$ platí:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{2}x^2\,dx + \int \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4\,dx + \ldots +$$
$$+ \int (-1)^n \frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2n}x^{2n}\,dx + \ldots + C.$$

Z tohto máme:

$$\ln (x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\frac{x^5}{5} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots + C$$

pre každé $x \in (-1, 1)$, pričom konštantu C musíme ešte vypočítať. Položme $x = 0$. Z poslednej rovnosti dostaneme $C = 0$. Rad (12) je teda konvergentný a jeho súčet je $\ln (x + \sqrt{1 + x^2})$ pre $x \in (-1, 1)$.

Príklad 4. Do mocninového radu rozviňme funkcie $f(x) = \sinh x$, $g(x) = \cosh x$.

Riešenie. Platí $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ pre $x \in (-\infty, \infty)$. Základný rad 1 z vety 12 je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Pre číslo $-x$ dostaneme:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Odčítaním resp. sčítaním týchto radov a po úprave dostaneme:

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x\ (-\infty, \infty).$$

Taylorov rad pre funkcie viac premenných

Nech funkcia $f(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bode $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ diferenciály všetkých rádov. Potom rad

$$f(A) + \frac{1}{1!}\,df(A, X) + \frac{1}{2!}\,d^2f(A, X) + \ldots + \frac{1}{n!}\,d^nf(A, X) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,d^nf(A, X),$$

kde $d^0f(A, X) = f(A)$, nazývame *Taylorovým radom* [v prípade, že $A = (0, 0, \ldots, 0)$ aj *Maclaurinovým radom*]. Rozdiel $f(X) - T_n(f, A; X) = R_n(f, A; X)$, $n = 1, 2, \ldots$, kde $T_n(f, A; X)$ je n-tý Taylorov polynóm (pozri 1,8/III), nazývame *zvyškom Taylorovho radu po n-tom Taylorovom polynóme.*

Veta 13. $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,d^nf(A, X)$ na okolí $O(A)$ bodu A vtedy a len vtedy, keď $\lim_{n \to \infty} R_n(f, A; X) = 0$ pre každé $X \in O(A)$.

Príklad 5. Nájdime Taylorov rad pre funkciu $f(X) = f(x, y) = \ln (x + y)$ v bode $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Riešenie. $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \ln 1 = 0$. Ďalej ľahko zistíme, že

$$\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}\right]_{(x,y)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = (-1)^{n+1}\,(n-1)!, \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Preto

$$d^nf(A, X) = \frac{1}{n!}\,(-1)^{n+1}\,(n-1)!\left[\binom{n}{0}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \binom{n}{n}\left(y - \frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^n$$

a hľadaný Taylorov rad je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^n = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^n + \ldots = (x + y - 1) - \frac{1}{2}(x + y - 1)^2 + \frac{1}{3}(x + y - 1)^3 - \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x + y - 1)^n + \ldots . \tag{12}$$

Poznámka. Niekedy možno nájsť Taylorov rad pre funkcie viac premenných použitím základných mocninových radov pre funkciu jednej premennej a vhodných operácií s mocninovými radmi.

Príklad 6. Nájdime Taylorov rad pre funkciu $f(X) = f(x, y) = \ln(x + y)$ v bode $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ bez použitia vety 13.

Riešenie. Aby sme mohli použiť vzorec 5 z vety 12, položme $x + y = 1 + u$. Pre každé číslo $u = x + y - 1 \in (-1, 1\rangle$ platí $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{u^n}{n} + \ldots$, čiže $\ln(x + y) = (x + y - 1) - \frac{1}{2}(x + y - 1)^2 + \frac{1}{3}(x + y - 1)^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x + y - 1)^n + \ldots$ pre $0 < x + y \leq 2$, čo je vzťah (12).

V úlohách 207 až 216 vypočítajte polomer konvergencie mocninového radu.

207. $\sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)\, 5^{n-1} x^{n-1}$.

208. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

209. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n - 1)!(2n - 1)}$.

210. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$.

211. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 3^n}{\sqrt{2^n}}$.

212. $\sum_{n=1}^{\infty} [3 + (-1)^n]\, x^n$.

213. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^n (2n)!} x^n$.

214. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^n}{2n - 1}$.

215. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 1)^n}{2^n (n + 1)(n + 2)}$.

216. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x - 2)^n$.

V úlohách 217 až 226 nájdite obor konvergencie mocninových radov.

217. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

218. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - 1)!}{n^n} x^n$.

219. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$.

220. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.

221. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

222. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$.

223. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}$.

224. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

225. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(2n-1)!!}$.*)

226. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

V úlohách 227 až 232 nájdite interval konvergencie mocninového radu. Vyšetrite jeho konvergenciu v koncových bodoch intervalu konvergencie.

227. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

228. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$.

229. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

230. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

231. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$.

232. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin^2 \frac{1}{n}\right)\left(x-1\right)^n$.

V úlohách 233 až 238 nájdite Taylorov rad danej funkcie so stredom a.

233. $\frac{1}{x}$, $a = 3$.

234. $x^{3/2}$, $a = 1$.

235. c^x, $c > 0$, $a = 0$.

236. $\sin^2 x$, $a = 0$.

237. $\ln (x + 2)$, $a = 0$.

238. $e^x \sin x$, $a = 0$.

V úlohách 239 až 254 použitím základných mocninových radov a operácií s nimi nájdite mocninový rad danej funkcie so stredom $a = 0$. Nájdite jeho obor konvergencie.

239. $\sqrt{1+x}$.

240. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

241. $\frac{1}{(1+x)^3}$.

242. $\frac{x}{2-x}$.

243. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

244. $\frac{x^3+2x}{x^2-2}$.

245. $x e^{-2x}$.

246. $(1+x) e^{-x}$.

247. $\cos^2 x$.

248. $\sin 3x + x \cos 3x$.

249. $e^{-x} \sin x$.

250. $\ln (1 + x - 2x^2)$.

251. $\ln (1 - x + x^2)$.

252. $(1 + x) \ln (1 + x)$.

253. $\ln \sqrt[3]{(1+2x)/(1-x)}$.

254. $(1-x)^2 \cosh \sqrt{x}$.

*) Pre $n = 2k$ je $n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k$, pre $n = 2k + 1$ je $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k + 1)$.

V úlohách 255 až 258 nájdite prvé 4 členy mocninového radu.

255. $\ln(1 + e^x)$.

256. $(1 + x)^x$.

257. $e^{\sin x}$.

258. $\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}$.

259. Z rovnosti

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

nájdite koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Dokážte, že sú to tzv. *Fibonacciho čísla*, pre ktoré platí $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqq 2$.

260. Pomocou rovnosti

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + x} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2} - x}\right)$$

nájdite vzorec pre člen a_n Fibonacciho postupnosti.

V úlohách 261 až 264 derivovaním alebo integrovaním vhodného mocninového radu člena za členom nájdite mocninový rad danej funkcie a zistite jeho obor konvergencie.

261. $\operatorname{arctg} x$.

262. $\arcsin x$.

263. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

264. $(1 + x) \operatorname{arctg} x$.

V úlohách 265 až 272 nájdite mocninový rad so stredom $a = 0$ danej funkcie a jeho interval konvergencie.

265. $(1 + e^x)^3$.

266. $\cosh^3 x$.

267. $\dfrac{x - 3}{(x + 1)^2}$.

268. $\operatorname{arctg} \dfrac{2x}{2 - x^2}$.

269. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

270. $\dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x}$.

271. $(\arcsin x)^2$.

272. $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

V úlohách 273 až 278 derivovaním alebo integrovaním vhodného radu nájdite súčet daného radu.

273. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n}$.

274. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

275. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x - 3)^{2n}}{2n}$.

276. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{2^n}$.

277. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n + 1)}{2} x^{n-1}$.

278. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^n$.

V úlohách **279** až **284** pomocou vhodného mocninového radu nájdite súčet daného radu.

279. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

280. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n}{4^{3n}}$.

281. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)!}$.

282. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}$.

283. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$.

284. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}$.

V úlohách **285** až **287** nájdite súčet mocninového radu pomocou vhodného geometrického radu.

285. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-1}$.

286. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3n+1) x^n$.

287. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$.

V úlohách **288** až **290** nájdite primitívnu funkciu použitím rozvoja integrovanej funkcie do mocninového radu a najdite interval konvergencie.

288. $\int \frac{\sin x}{x} \, dx$.

289. $\int \frac{e^x}{x} \, dx$.

290. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

V úlohách **291** až **294** vypočítajte určité integrály ako funkciu hornej hranice pomocou rozvoja integrovanej funkcie do mocninového radu.

291. $\int_0^x \frac{1}{1-x^9} \, dx$.

292. $\int_0^x \sqrt{1+x^3} \, dx$.

293. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, dx$.

294. $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx$.

V úlohách **295** až **309** pomocou vhodných mocninových radov vypočítajte dané číslo s chybou menšou ako 10^{-4}.

295. $\sqrt[3]{4}$.

296. $\sqrt[9]{516}$.

297. $\sqrt[10]{1\,027}$.

298. $\sqrt[11]{2\,000}$.

299. $\sqrt{e}$.

300. $1/\sqrt[4]{e}$.

301. $\sin(1/2)$.

302. $\sin 18°$.

303. $\cos 10°$.

304. $\operatorname{tg} 14°$.

305. $\operatorname{cotg} 35°$.

306. $\operatorname{arctg}(1/5)$.

307. $\ln 2$.

308. $\ln 5$.

309. $\log e$.

V úlohách **310** až **315** nájdite určité integrály pomocou rozvoja integrovanej funkcie do mocninového radu s chybou menšou ako 10^{-3}.

310. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

311. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

312. $\displaystyle\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$.

313. $\displaystyle\int_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$.

314. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

315. $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx$.

V úlohách **316** až **318** nájdite Taylorov rad pre funkciu f v bode A, ak:

316. $f(x, y) = e^{x+y}$, $A = (1, -1)$.

317. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, $A = (1, 1)$.

318. $f(x, y) = \sin(x + y)$, $A = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

V úlohách **319** až **327** nájdite Maclaurinov rad funkcie f, ak:

319. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$.

320. $f(x, y) = \dfrac{1 - x + y}{1 + x - y}$.

321. $f(x, y) = e^x \cos y$.

322. $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$.

323. $f(x, y) = \sin x \sinh y$.

324. $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

325. $f(x, y) = \ln(1 - x - y + xy)$.

326. $f(x, y) = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$.

327. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{1 + xy}$.

328. Násobením radov dokážte:

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x+y)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots =$$
$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{1\,.\,2} + \frac{y^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right).$$

1,6. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou nekonečných radov, Besselova diferenciálna rovnica, Gaussova diferenciálna rovnica, Legendrova diferenciálna rovnica

Veta 1. Nech koeficienty lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu

$$p_0(x)\,y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = q(x) \tag{1}$$

sú polynómy alebo mocninové rady so stredom v čísle a, ktoré konvergujú v okolí $O(a)$. Nech $p_0(x) \neq 0$ pre každé číslo $x \in O(a)$. Potom existuje jediné riešenie diferenciálnej rovnice (1) v tvare mocninového radu so stredom v čísle a:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k, \tag{2}$$

ktorý konverguje v okolí $O(a)$ a spĺňa začiatočné podmienky $y(a) = c_0$, $y'(a) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = c_{n-1}$, kde $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sú ľubovoľné čísla.

Veta 2. Nech v lineárnej diferenciálnej rovnici

$$(x-a)^n\,p_0(x)\,y^{(n)} + (x-a)^{n-1}\,p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0 \tag{3}$$

sú koeficienty $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ polynómy alebo mocninové rady so stredom v čísle a, ktoré konvergujú v okolí čísla $O(a)$, pričom $p_0(a) \neq 0$. Potom existuje aspoň jedno riešenie diferenciálnej rovnice (3) v tvare zovšeobecneného mocninového radu

$$y = (x-a)^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k, \tag{4}$$

kde $b_0 \neq 0$ a číslo r je reálnym koreňom určujúcej rovnice

$$\binom{r}{n} n!\,p_0(a) + \binom{r}{n-1}(n-1)!\,p_1(a) + \ldots + \binom{r}{1} 1!\,p_{n-1}(a) + p_n(a) = 0, \tag{5}$$

pričom rad (4) konverguje aspoň v okolí $O(a)$.

Poznámka 1. Pri hľadaní riešenia diferenciálnej rovnice (1) v tvare mocninového radu (2) postupujeme tak, že:
a) vypočítame formálne derivácie radu (2),
b) dosadíme do diferenciálnej rovnice (1) a usporiadame podľa mocnín dvojčlena $x-a$,
c) porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách $(x-a)^k$ dostaneme systém lineárnych rovníc pre koeficienty c_k radu (2),
d) dosadíme vypočítané koeficienty c_k do radu (2) a nájdeme jeho interval konvergencie I.

V každom uzavretom intervale $I_1 \subset I$ rad (2) rovnomerne a absolútne konverguje a je na intervale I_1 riešením lineárnej diferenciálnej rovnice (1).

Poznámka 2. Mocninový rad (2) je Taylorov rad $T(y, a)$ pre hľadané riešenie y. Preto namiesto toho, aby sme podľa uvedeného postupu hľadali koeficienty c_k radu (2), stačí:
a) vypočítať derivácie $y^{(k)}(a)$, $k = 1, 2, \ldots$ z danej diferenciálnej rovnice (1),
b) dosadiť vypočítané derivácie do Taylorovho radu $T(y, a)$ a nájsť jeho interval konvergencie.

V každom uzavretom intervale $I_2 \subset I$ rad $T(y, a)$ rovnomerne a absolútne konverguje a je na intervale I_2 riešením lineárnej diferenciálnej rovnice (1).

Poznámka 3. Pri použití vety 2 postupujeme podobne ako podľa poznámky 1 s tým rozdielom, že číslo r nájdeme z určujúcej rovnice (5).

Poznámka 4. Ak niektoré korene $r_1, r_2, \ldots, r_m$ určujúcej rovnice (5), pre ktoré platí $r_1 < r_2 < \ldots < r_m$, navzájom sa všetky líšia o celé číslo, potom im odpovedajúce lineárne nezávislé riešenia majú tvar

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} (x-a)^{r_j}\, g_{k,k-j} \ln^{k-j}(x-a), \tag{6}$$

$k = 1, 2, \ldots, m$ a všetky funkcie $g_{k,k-j}$ možno vyjadriť v tvare mocninového radu so stredom v čísle a.

Poznámka 5. Aj v prípade, že určujúca rovnica (5) má komplexne združené korene, možno radom (4) riešiť diferenciálnu rovnicu (3). Ak rovnica (5) má korene $\alpha + \beta$ i, $\alpha - \beta$ i, potom platí:

$$(x - a)^r = (x - a)^\alpha [\cos (\beta \ln |x - a|) + \mathrm{i} \sin (\beta \ln |x - a|)], \tag{7}$$

pričom reálna a imaginárna časť radu (4) tvorí dvojicu reálnych lineárne nezávislých riešení diferenciálnej rovnice (3).

Poznámka 6. Zovšeobecnenými mocninovými radmi možno riešiť aj iné, nelineárne diferenciálne rovnice.

Poznámka 7. Ak pravá strana diferenciálnej rovnice (1) je periodická funkcia, možno hľadať jej riešenie v tvare Fourierovho radu, a to tak, že:

a) pravú stranu diferenciálnej rovnice rozvinieme do Fourierovho radu,
b) hľadané riešenie vyjadríme v tvare Fourierovho radu a dosadíme do diferenciálnej rovnice,
c) porovnáme príslušné koeficienty.

Besselova diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0, \qquad n \geqq 0 \tag{8}$$

nazývame *Besselovou diferenciálnou rovnicou.*

Pre kladné nie celé číslo n sú jej riešením Besselove (valcové, cylindrické) funkcie prvého druhu n-tého stupňa $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$, pričom platí:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n + k + 1)}\ ^{*)} \tag{9}$$

a

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (x/2)^{-n+2k}}{k!\,\Gamma(n + k + 1)}. \tag{10}$$

Funkcie $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (8) a jej všeobecné riešenie je:

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x). \tag{11}$$

Pre prirodzené číslo n je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (8)

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \tag{12}$$

kde je:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (x/2)^{n+2k}}{k!\,(n + k)!} \tag{13}$$

a pre funkciu $Y_n(x)$, ktorú nazývame Besselovou (valcovou, cylindrickou) funkciou druhého druhu n-tého stupňa, platí:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln (x/2) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n - k - 1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, (x/2)^{n+2k}}{k!\,(n + k)!} [\varphi(k) + \varphi(n + k)], \tag{14}$$

kde $\varphi(k) = -\gamma + 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varphi(0) = -\gamma$ a $\gamma = 0{,}577\,2\ldots$ je Eulerova konštanta.

---

*) O gama-funkcii $\Gamma(x)$ pozri čl. 3,3.

Pre nie celé číslo n sa definuje

$$Y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi}[\cos n\pi \,.\, J_n(x) - J_{-n}(x)]$$

a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (8) je dané vzťahom (12).

Gaussova diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu

$$x(1 - x)\, y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x]\, y' - \alpha\beta y = 0, \tag{15}$$

kde α, β, γ sú čísla, nazývame *Gaussovou diferenciálnou rovnicou*. Pre ľubovoľné $\gamma \neq 0$, jej riešením na intervale $(-1;\, 1)$ je funkcia $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, pre ktorú platí:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\,\beta(\beta + 1)}{2!\gamma(\gamma + 1)}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha + 1) \,.\, \ldots \,.\, [\alpha + (k - 1)]\,\beta(\beta + 1) \,.\, \ldots \,.\, [\beta + (k - 1)]}{k!\gamma(\gamma + 1) \,.\, \ldots \,.\, [\gamma + (k - 1)]}x^k + \ldots \tag{16}$$

a nazývame ju *hypergeometrickou (Gaussovou)* funkciou. Pre nie celé číslo γ jej všeobecné riešenie na intervale $(0,\, 1)$ je:

$$y = c_1F(\alpha, \beta, \gamma, x) + c_2x^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x). \tag{17}$$

Legendrova diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n(n + 1)\, y = 0, \tag{18}$$

kde n je číslo, nazývame *Legendrovou diferenciálnou rovnicou*.

Jej všeobecné riešenie pre $x \in (-1,\, 1)$ je:

$$y = c_1\left[1 - \frac{n(n + 1)}{2!}x^2 + \frac{(n - 2)\, n(n + 1)\,(n + 3)}{4!}x^4 - \ldots\right] +$$
$$+ c_2\left[x - \frac{(n - 1)\,(n + 2)}{3!}x^3 + \frac{(n - 3)\,(n - 1)\,(n + 2)\,(n + 4)}{5!}x^5 - \ldots\right]. \tag{19}$$

Ak n je celé kladné číslo, má Legendrova diferenciálna rovnica jedno riešenie $P_n(x)$, ktoré je polynóm. Pre polynómy $P_n(x)$ platí:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \,.\, n!}[(x^2 - 1)^n]^{(n)} \tag{20}$$

a nazývame ich *Legendrovými polynómami*.

Príklad 1. Nájdime riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice $y'' - x^2y = 0$, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Riešenie. Keďže koeficienty diferenciálnej rovnice sú $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x^2$, $x \in (-\infty,\, \infty)$, existuje podľa vety 1 riešenie v tvare mocninového radu

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots. \tag{21}$$

Ak postupujme podľa poznámky 1, potom

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots, \tag{22}$$
$$y'' = 2c_2 + 3 \,.\, 2c_3x + 4 \,.\, 3c_4x^2 + \ldots + n(n - 1)\, c_nx^{n-2} + \ldots.$$

Po dosadení do danej diferenciálnej rovnice a úprave máme:

$$2c_2 + 3 \,.\, 2c_3x + (-c_0 + 4 \,.\, 3c_4)\, x^2 + (-c_1 + 5 \,.\, 4c_5)\, x^3 + \ldots +$$
$$+ [-c_{n-2} + (n + 2)\,(n + 1)\, c_{n+2}]\, x^n + \ldots = 0.$$

Porovnaním pre koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ dostávame systém lineárnych rovníc

$$\left.\begin{aligned} 2c_2 &= 0 \\ 3 . 2c_3 &= 0 \\ -c_{n-2} + (n+2)(n+1)\, c_{n+2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{23}$$

Odtiaľ $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_{n+2} = c_{n-2}/[(n+2)(n+1)]$, pre $n = 2, 3, \ldots$. Zo začiatočných podmienok a zo vzťahov (21), (22) a (23) vyplýva $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1/(3 . 4)$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_7 = 0$, $c_8 = 1/(3 . 4 . 7 . 8)$, $c_9 = 0, \ldots$.

Vo všeobecnosti je $c_n = 0$, pre $n \neq 4k$ a $c_{4k} = \prod_{j=1}^{k} (4j - 1)\, 4j$.

Hľadaný mocninový rad je:

$$y = 1 + \frac{x^4}{3 . 4} + \frac{x^8}{3 . 4 . 7 . 8} + \ldots + \frac{x^{4k}}{\prod\limits_{j=1}^{k} 4j(4j-1)} + \ldots. \tag{24}$$

Podľa d'Alembertovho kritéria je:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{4k}x^{4k}}{c_{4k-4}x^{4k-4}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{x^4}{4k(4k-1)} = 0.$$

Preto mocninový rad (24) je hľadaným riešením na intervale $(-\infty, \infty)$.

Príklad 2. Nájdime všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice $y'' - xy' - y = 0$.

Riešenie. Hľadajme všeobecné riešenie $y = c_1y_1 + c_2y_2$, kde riešenia y_1, y_2 spĺňa začiatočné podmienky $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0)$, $y_2'(0) = 1$. Tieto riešenia tvoria fundamentálny systém, keďže ich wronskián v čísle 0 je $W(y_1, y_2) = 1$.

Obe riešenia hľadajme v tvare Taylorovho radu

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Príslušné derivácie určíme z danej diferenciálnej rovnice a začiatočných podmienok. Derivovaním danej diferenciálnej rovnice máme:

$$y^{(3)} - xy'' - 2y' = 0,$$

$$y^{(4)} - xy^{(3)} - 3y'' = 0.$$

Matematickou indukciou dokážeme, že:

$$y^{(n)} - xy^{(n-1)} - (n-1)\, y^{(n-2)} = 0 \tag{25}$$

pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$.

Pre y_1 dostaneme zo začiatočných podmienok a z rovnice (25) $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_1''(0) = 1$, $y_1^{(3)}(0) = 0$, $y_1^{(4)}(0) = 1 . 3, \ldots$ a vo všeobecnosti je $y_1^{(n)}(0) = 0$ pre n nepárne, $y_1^{(n)}(0) = (n-1)!!$ pre n párne.

Podobne pre y_2 máme:

$y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, $y_2''(0) = 0$, $y_2^{(3)}(0) = 2$, $y_2^{(4)}(0) = 0$, $y_2^{(5)}(0) = 4 . 2, \ldots$. Vo všeobecnosti je $y_2^{(n)}(0) = 0$ pre n párne a $y_2^{(n)}(0) = (n-1)!!$ pre n nepárne.

Úhrnom máme:

$$y = c_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 . 4} + \frac{x^6}{2 . 4 . 6} + \ldots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!!} + \ldots\right) + c_2\left(x + \frac{x^3}{1 . 3} + \frac{x^5}{1 . 3 . 5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \ldots\right). \tag{26}$$

Podľa d'Alembertovho kritéria zistíme podobne ako v príklade 1, že oba mocninové rady konvergujú v intervale $(-\infty, \infty)$. Podľa vety 1 sú teda riešením danej diferenciálnej rovnice na intervale $(-\infty, \infty)$ a (26) je jej všeobecné riešenie na intervale $(-\infty, \infty)$.

Príklad 3. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 1/16)\,y = 0$ v intervale $(0, \infty)$.

Riešenie. Zaveďme substitúciu $t = 3x$, dostaneme $y' = 3\dfrac{dy}{dt}$, $y'' = 9\dfrac{d^2y}{dt^2}$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice a úprave máme:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{16}\right)y = 0.$$

To je Besselova diferenciálna rovnica pre $n = 1/4$ a teda jej všeobecné riešenie je:

$$y = c_1J_{1/4}(t) + c_2J_{-1/4}(t).$$

Všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je:

$$y = c_1J_{1/4}(3x) + c_2J_{-1/4}(3x), \qquad x \in (0, \infty).$$

V úlohách **329** až **336** nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare mocninového radu, ktoré spĺňa uvedené začiatočné podmienky.

329. $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$.

330. $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$.

331. $y' = -xy^2 + 2\cos x$, $y(0) = 1$.

332. $y'' = (1 + x^2)\,y$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

333. $y'' - y\,e^x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

334. $y'' - y\cos x = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

335. $y'' - xy' - y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

336. $y'' - xy' + y^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

V úlohách **337** až **339** pomocou mocninového radu nájdite jedno riešenie, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky, a potom znížením radu riešte danú diferenciálnu rovnicu.

337. $y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

338. $(1 - x)\,y'' + xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

339. $(1 - x^2)\,y'' - xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

V úlohách **340** až **347** nájdite všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare mocninového radu.

340. $(1 + x)\,y' - ny = 0$.

341. $y'' + 4xy = 0$.

342. $y'' - xy' + xy = 0$.

343. $(1 - x^2)\,y'' - 4xy' - 2y = 0$.

344. $y'' + xy' - (2x^2 + 1)\,y = 0$.

345. $y'' + (1 - x)^{-1}\,y = 0$.

346. $y'' + y\sin x = 0$.

347. $xy'' + y\ln(1 - x) = 0$.

V úlohách **348** až **351** nájdite všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare zovšeobecnených mocninových radov.

348. $4xy'' + 2y' + y = 0$.

349. $x^2y'' - x^2y' + (x - 2)\,y = 0$.

350. $9x^2y'' - (x^2 - 2)\,y = 0$.

351. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)\,y' - (x + 1)\,y = 0$.

V úlohách **352** a **353** nájdite periodické riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare Fourierovho radu.

352. $y'' + y' + y = |\sin x|$. **353.** $y^{(3)} - y' - y = \dfrac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}$.

354. Napíšte nekonečné rady určujúce Besselove funkcie prvého a druhého druhu pre $n = 0, 1, 1/2$.

V úlohách **355** až **367** nájdite všeobecné riešenie daných diferenciálnych rovníc tak, že ich vhodnou zámenou premenných prevediete na Besselovu diferenciálnu rovnicu.

355. $(x - 1)^2 y'' + (x - 1) y' + x(x - 2) y = 0$.

356. $xy'' + (2x + 1) y' + (2x + 1) y = 0$.

357. $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 9) y = 0$.

358. $x^2y'' + xy' + (x - 4) y/4 = 0$.

359. $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.

360. $xy'' - 3y' + xy = 0$.

361. $x^2y'' + 9xy' + (x^3 + 4) y = 0$.

362. Dokážte, že platí $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ pre n celé číslo.

363. Dokážte, že platí $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = 2nJ_n(x)/x$.

364. Dokážte, že platí $J_0'(x) = -J_1(x)$.

365. Dokážte, že platí $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$.

366. Dokážte, že platí $[x^nJ_n(x)]' = x^nJ_{n-1}(x)$.

367. Dokážte, že platí $[x^{-n}J_n(x)]' = -x^{-n}J_{n+1}(x)$.

368. Nájdite tvar vynútených kmitov kruhovej membrány s polomerom a, ktoré sú budené striedavým zaťažením $q = q_0 \sin(\omega t + \varphi)$ rovnomerne rozdelenom na plochu membrány. Pre kmity membrány platí diferenciálna rovnica

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q(r, t)}{T},$$

kde pre odchýlku z rovnovážnej polohy platí $u(r, t) = F(r) . \sin(\omega t + \varphi)$, pričom ω je kruhová frekvencia a φ je fázový posuv vynútených kmitov membrány. Pritom r je vzdialenosť od stredu membrány, T je veľkosť napínajúcej sily prepočítaná na jednotku dĺžky obvodu membrány, ϱ je plošná hustota membrány a $c = \sqrt{T/\varrho}$. Úlohu riešte za predpokladu, že membrána je na obvode pevne uchytená, t. j. $u(a, t) = 0$.

Úlohy **369** a **370** riešte pomocou Gaussovej diferenciálnej rovnice.

369. $x(x^2 - 1) y'' + (x^2 - 2) y' - 4xy = 0$.

370. $16(x^3 - 1)^2 y'' + 27xy = 0$.

371. Ukážte, že pre $|x| < 1$ je všeobecným riešením Legendrovej diferenciálnej rovnice funkcia

$$y = c_1 F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1+n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + c_2 x F\left(\frac{1-n}{2}, 1+\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

V úlohách **372** až **375** dokážte nasledujúce vlastnosti hypergeometrickej funkcie.

372. $F(1, 1, 1, x) = 1/(1-x)$.

373. $F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n$.

374. $2xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

375. $xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right) = \operatorname{arctg} x$.

376. Napíšte prvých sedem Legendrových polynómov a znázornite ich.

377. Dokážte, že pre n celé číslo je všeobecné riešenie Legendrovej diferenciálnej rovnice tvaru $y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$, kde $P_n(x)$ je Legendrov polynóm n-tého stupňa a pre funkciu $Q_n(x)$ platí:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n \ln \frac{1+x}{1-x}\right]^{(n)} - \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

V úlohách **378** až **381** riešte na základe výsledku predchádzajúcej úlohy dané diferenciálne rovnice.

378. $x^2(x^2-1)\,y'' + 2x^3 y' + 6y = 0$.

379. $x(x^2+1)\,y'' + (2x^2+1)\,y' - 2xy = 0$.

380. $(x^2-1)\,y'' + 6xy' - 6y = 0$.

381. $x^2(x^2-1)\,y'' + 2x(2-x^2)\,y' - [(n^2+n-2)\,x^2 + 6]\,y = 0$, kde n je prirodzené číslo.

382. Riešte diferenciálnu rovnicu $(1/\sin\vartheta)\,[\sin\vartheta y'(\vartheta)]' + p(p+1)\,y(\vartheta) = 0$ tak, že ju zámenou premenných prevediete na Legendrovu diferenciálnu rovnicu a použijete výsledok úlohy 371.

383. Dokážte:
a) $nP_n(x) = (2n-1)\,xP_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x)$,
b) $(x^2-1)\,P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$,
c) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)\,P_n(x)$.

384. Dokážte, že súčet koeficientov v polynóme $P_n(x)$ sa rovná 1.

385. Dokážte, že všetky korene rovnice $P_n(x) = 0$ sú reálne a ležia v intervale $(-1, 1)$.

1,7. Ortogonálne systémy funkcií. Ortogonálne rady

Nech funkcia f je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, t. j. je alebo spojitá, alebo má konečný počet bodov nespojitosti prvého druhu na intervale $\langle a, b\rangle$ [bod nespojitosti c prvého druhu je taký bod nespojitosti funkcie f, v ktorom existujú limity $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$].

Strednou kvadratickou odchýlkou funkcií f a g s váhou p nazývame číslo

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, p(x) \, \mathrm{d}x}, \tag{1}$$

kde p je nezáporná, po čiastkach spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$.

Skalárnym súčinom funkcií f a g s váhou p nazývame číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, p(x) \, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde p je nezáporná, po čiastkach spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$.

Normou funkcie f s váhou p nazývame číslo $N(f) = \sqrt{(f, f)} = \varrho(f, 0) = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, p(x) \, \mathrm{d}x}$.

Funkcie f a g sú ortogonálne na intervale $\langle a, b\rangle$ s váhou p, ak ich skalárny súčin sa rovná nule

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, p(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Poznámka. Ak $p(x) = 1$, $x \in \langle a, b\rangle$, potom hovoríme, že funkcie f, g sú *ortogonálne na intervale* $\langle a, b\rangle$.

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť po čiastkach spojitých funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$. Postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *ortogonálnym systémom* s váhou p na intervale $\langle a, b\rangle$, ak platí:

$$(f_j, f_k) = \int_a^b f_j(x)\, f_k(x)\, p(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

pre $j \neq k$ a $N(f_n) \neq 0$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$.

Ortogonálny systém funkcií s váhou p v intervale $\langle a, b\rangle$ sa nazýva *ortonormálnym systémom* s váhou p, ak $N(f_n) = 1$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$.

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonálny systém s váhou p na intervale $\langle a, b\rangle$. *Zovšeobecneným Fourierovým radom funkcie g*, po čiastkach spojitej na intervale $\langle a, b\rangle$, nazývame rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) + \ldots, \tag{3}$$

kde čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ nazývame *Fourierovými koeficientmi funkcie g* a pre ne platí:

$$c_n = \frac{(g, f_n)}{(f_n, f_n)} = \frac{\int_a^b g(x)\, f_n(x)\, p(x) \, \mathrm{d}x}{\int_a^b f_n^2(x)\, p(x) \, \mathrm{d}x}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje podľa stredu* k funkcii f v intervale $\langle a, b\rangle$, ak postupnosť stredných kvadratických odchýlok $\{\varrho(f, f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, p(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Ortonormálny systém funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ s váhou p v intervale $\langle a, b\rangle$ je **uzavretý** (vzhľadom na množinu po čiastkach spojitých funkcií), ak zovšeobecnený Fourierov rad ľubovoľnej, po čiastkach spojitej funkcie g v intervale $\langle a, b\rangle$ konverguje podľa stredu ku g.

Veta 1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormálny systém s váhou p v intervale $\langle a, b\rangle$. Zo všetkých lineárnych kombinácií $k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_nf_n$, kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú čísla, má pre dané prirodzené číslo n najmenšiu kvadratickú odchýlku od funkcie f n-tý čiastočný súčet zovšeobecneného Fourierovho radu tejto funkcie.

Veta 2. Nech c_k, $k = 1, 2, \ldots$ sú Fourierove koeficienty funkcie f, potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqq \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x \tag{5}$$

(*Besselova nerovnosť*) a

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{6}$$

Veta 3. Zovšeobecnený Fourierov rad po čiastkach spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ konverguje podľa stredu k funkcii f vtedy a len vtedy, ak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x \tag{7}$$

kde c_k, $k = 1, 2, \ldots$ sú Fourierove koeficienty funkcie f (*Parsevalova rovnosť*).

Veta 4. (*O úplnosti uzavretého ortonormálneho systému.*) Ak je po čiastkach spojitá funkcia g ortogonálna ku každej funkcii ortonormálneho systému $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ s váhou p na intervale $\langle a, b\rangle$, potom je $g(x) = 0$ pre každé číslo $x \in \langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu bodov.

Veta 5. (*O jednoznačnosti.*) Ak dve po čiastkach spojité funkcie f a g majú ten istý zovšeobecnený Fourierov rad vzhľadom na daný ortonormálny systém s váhou p na intervale $\langle a, b\rangle$, potom $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu bodov.

Veta 6. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je uzavretý ortonormálny systém s váhou p na intervale $\langle a, b\rangle$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_nf_n$ je zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f po čiastkach spojitej na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech tento rad je rovnomerne konvergentný na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_nf_n$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu bodov.

Veta 7. Nech funkcia f a jej derivácia je po čiastkach spojitá na intervale $(-1, 1)$. Nech existuje integrál $\int_{-1}^{1} f^2(x)\, \mathrm{d}x$. Potom zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém Legendreových polynómov konverguje k $f(a)$ v každom bode a spojitosti funkcie f, pričom $a \in (-1, 1)$.

Veta 8. Nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ a je aj so svojou deriváciou na každom konečnom intervale $(-b, b)$ po čiastkach spojitá. Nech existuje integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f^2(x)\, \mathrm{d}x$. Potom zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém Hermiteových polynómov, ortogonálnych s váhou $p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ na intervale $(-\infty, \infty)$, konverguje v každom bode a spojitosti funkcie f k $f(a)$.

Veta 9. Nech je funkcia f definovaná na intervale $\langle 0, \infty)$ a je aj so svojou deriváciou v každom konečnom intervale $\langle 0, b\rangle$ po čiastkach spojitá. Nech existuje integrál $\int_0^\infty e^{-x}f^2(x)\,dx$. Potom zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém Laguerrových polynómov, ortogonálnych s váhou $p(x) = e^{-x}$ na intervale $\langle 0, \infty)$, konverguje v každom bode a spojitosti funkcie f k $f(a)$.

Veta 10. Nech funkcia f a jej derivácia je po čiastkach spojitá na intervale $\langle -1, 1\rangle$. Nech existuje integrál $\int_{-1}^{1} f^2(x)/\sqrt{1-x^2}\,dx$. Potom zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém Čebyševových polynómov, ortogonálnych s váhou $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ na intervale $(-1, 1)$, konverguje v každom bode a spojitosti funkcie f k $f(a)$.

Veta 11. Nech je f po čiastkach spojitá funkcia v intervale $\langle 0, 1\rangle$, ktorú možno vyjadriť ako rozdiel dvoch neklesajúcich funkcií. Nech funkcia $|f(x)|\sqrt{x}$ je integrovateľná v intervale $\langle 0, 1\rangle$. Potom zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém v úlohe 394 konverguje k $f(a)$ v každom čísle a z intervalu $(0, 1)$, v ktorom je funkcia spojitá.

Príklad. Rozviňme funkciu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad x \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{pre} \quad x \in \langle -1, 0) \end{cases}$$

do zovšeobecneného radu podľa Legendrových polynómov $P_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, ak vieme, že postupnosť $\{P_{n-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tvorí ortogonálny systém na intervale $\langle -1, 1\rangle$ a $N^2(P_{n-1}) = 2/(2n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Riešenie. Hľadaný rad bude mať tvar

$$c_1P_0(x) + c_2P_1(x) + \ldots + c_nP_{n-1}(x) + \ldots,$$

pričom pre jeho Fourierove koeficienty platí:

$$c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\,P_{n-1}(x)\,dx}{N^2(P_{n-1})} = \frac{2n-1}{2}\int_0^1 P_{n-1}(x)\,dx.$$

Posledný určitý integrál vypočítame pomocou rekurentného vzťahu pre Legendrove polynómy

$$(2n+1)\,P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x),$$

(pozri úlohu 383c z 1.6). Keďže $P_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dostaneme:

$$c_n = \frac{2n-1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2n-1}\,[P'_n(x) - P'_{n-2}(x)]\,dx = \frac{1}{2}\,[P_n(x) - P_{n-2}(x)]_0^1$$

čiže

$$c_n = \frac{1}{2}\,[P_{n-2}(0) - P_n(0)]$$

pre $n = 2, 3, \ldots$ a $c_1 = 1/2$. Z vlastnosti Legendrových polynómov vyplýva (pozri článok 1.6) $P_{2k+1}(0) = 0$ a $P_{2k}(0) = (-1)^k\,(2k-1)!!/(2k)!!$. Po dosadení do vzťahu pre c_n máme:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{4}, \ldots, c_{2k+1} = 0, \quad c_{2k+2} = (-1)^k\left(2k + \frac{3}{2}\right)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}$$

pre $k = 1, 2, \ldots$.

Zovšeobecnený Fourierov rad funkcie f je:

$$\frac{1}{2}\,P_0(x) + \frac{3}{4}\,P_1(x) - \frac{7}{8}\,P_3(x) + \ldots + (-1)^k\left(2k + \frac{3}{2}\right)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\,P_{2k+1}(x) + \ldots$$

pre $x \in \langle -1, 1\rangle$. Kedže daná funkcia f spĺňa predpoklady vety 7, platí pre všetky čísla $x \neq 0$ z intervalu $\langle -1, 1\rangle$,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(2k + \frac{3}{2}\right) \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} P_{2k+1}(x).$$

386. Dokážte, že funkcie $\sin(n \arccos x)$ a $\cos(n \arccos x)$ sú ortogonálne na intervale $\langle -1, 1\rangle$ s váhou $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

V úlohách 387 až 389 dokážte, že daná postupnosť funkcií tvorí ortogonálny systém na intervale J.

387. $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, $J = \langle 0, \pi\rangle$. **388.** $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$, $J = \langle 0, \pi\rangle$.

389. $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$, $J = \langle 0, 2\pi\rangle$.

V úlohách 390 až 393 dokážte, že daná postupnosť tvorí ortogonálny systém s váhou $p(x)$ na intervale J a nájdite normu n-tého člena tejto postupnosti. Napíšte aspoň prvé tri členy tejto postupnosti.

390. $\{P_{n-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $P_n(x)$ je Legendrov polynóm n-tého stupňa, $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = (1/2^n n!)\,[(x^2-1)^n]^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, a $p(x) = 1$, $J = \langle -1, 1\rangle$.

391. $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $T_n(x)$ je Čebyševov polynóm n-tého stupňa, $T_0(x) = 1$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

392. $\{H_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $H_n(x)$ je Hermiteov polynóm, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ a $p(x) = e^{-x^2}$, $J = (-\infty, \infty)$.

393. $\{L_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $L_n(x)$ sú Laguerrove polynómy, $L_n(x) = (e^x/n!)\,[x^n e^{-x}]^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ a $p(x) = e^{-x}$, $J = \langle 0, \infty)$.

394. Nech $J_\nu(x)$ je Besselova funkcia ν-tého rádu a $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ sú kladné korene rovnice $J_\nu(x) = 0$ alebo rovnice $J'_\nu(x) = 0$. Dokážte, že postupnosť funkcií $\{J_\nu(\lambda_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonálny systém s váhou $p(x) = x$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$.

395. Dokážte, že pre Laguerrove polynómy platí:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

Na základe toho odvoďte rekurentný vzťah

$$L_n(x) = L'_n(x) - L'_{n+1}(x).$$

396. Dokážte, že pre Laguerrove polynómy platí:

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)\,L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

397. Dokážte, že pre Čebyševove polynómy platí:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

V úlohách 398 až 401 rozviňte dané funkcie v intervale $\langle -1, 1\rangle$ podľa Čebyševových polynómov.

398. $f(x) = x^3$.

299. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

400. $f(x) = |x|$.

401. $f(x) = \arcsin x$.

V úlohách **402** až **405** rozviňte dané funkcie v intervale $\langle -1, 1\rangle$ podľa Legendrových polynómov.

402. $f(x) = |x|$.

403. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$.

404. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

405. $f(x) = \arcsin x$.

406. Dokážte, že zovšeobecnený Fourierov rad funkcie $f(x) = \mathrm{e}^x$ podľa Legendrových polynómov začína takto

$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) P_0(x) + \frac{3}{\mathrm{e}} P_1(x) + \frac{5}{2}\left(\mathrm{e} - \frac{7}{\mathrm{e}}\right) P_2(x) + \dots .$$

V úlohách **407** až **410** rozviňte danú funkciu v intervale $(-\infty, \infty)$ podľa Hermiteových polynómov.

407. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

408. $f(x) = |x|$.

409. $f(x) = \cos ax$.

410. $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$.

V úlohách **411** a **412** nájdite rozvoj danej funkcie v intervale $\langle 0, \infty)$ podľa Laguerrových polynómov.

411. $f(x) = x^n$.

412. $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$.

V úlohách **413** a **414** nájdite rozvoj daných funkcií do zovšeobecneného Fourierovho radu podľa Besselových funkcií.

413. $f(x) = 1$.

414. $f(x) = x^2$.

1,8. Fourierove rady

Funkcionálny rad

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{l} x + b_n \sin\frac{2\pi n}{l} x\right) \tag{1}$$

nazývame *trigonometrickým radom* s periódou l, kde l je kladné číslo. Čísla a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \dots$ nazývame *koeficientmi radu* (1).

Ak $b_n = 0$, pre $n = 1, 2, \dots$ rad (1) sa nazýva *kosínusovým trigonometrickým radom*, ak $a_n = 0$, pre $n = 0, 1, 2, \dots$ rad (1) sa nazýva *sínusový trigonometrický rad*.

Nech funkcia f je na intervale $\langle a, a + l\rangle$, pričom $l > 0$, po čiastkach spojitá. Trigonometrický rad (1), v ktorom pre jeho koeficienty platí:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x) \cos\frac{2\pi n}{l} x \,\mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x) \sin\frac{2\pi n}{l} x \,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{2}$$

nazývame *Fourierovým radom funkcie* f na intervale $\langle a, a + l\rangle$ a čísla a_n, b_n určené vzťahmi (2) *Fourierovými koeficientmi funkcie* f pre interval $\langle a, a + l\rangle$.

Poznámka. Postupnosť funkcií $\sqrt{2/l}\,\{1/\sqrt{2}, \cos(2\pi x/l), \sin(2\pi x/l), \cos(4\pi x/l), \ldots, \cos(2\pi n x/l), \sin(2\pi n x/l), \ldots\}$, tvorí na intervale $\langle a, a + l\rangle$ ortonormálny systém. Preto je Fourierov rad (1) zvláštny prípad zovšeobecneného Fourierovho radu.

Nech funkcia f definovaná na intervale $\langle a, a + l\rangle$ má v každom čísle $x \in (a, a + l)$ limitu zľava a limitu sprava, v čísle a má limitu sprava v čísle $a + l$ má limitu zľava. Potom funkciu $\bar{f}$, pre ktorú platí:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\lim\limits_{t\to a+} f(t) + \lim\limits_{t\to(a+l)-} f(t)] & \text{pre } x = a, \\ \frac{1}{2}[\lim\limits_{t\to x+} f(t) + \lim\limits_{t\to x-} f(t)] & \text{pre } x \in (a, a + l), \\ \bar{f}(x + l) = \bar{f}(x), \text{ pre každé číslo } x, \end{cases} \tag{3}$$

nazývame *normalizovaným periodickým pokračovaním funkcie* f pre interval $\langle a, a + l\rangle$.

Hovoríme, že funkciu f možno rozvinúť do trigonometrického radu, ak existuje taký trigonometrický rad (1), že pre každé číslo x jeho súčet je $f(x)$.

Veta 1. Nech M je obor konvergencie trigonometrického radu (1) a s jeho súčet. Potom súčet s je periodická funkcia, pre ktorú platí $s(x + l) = s(x)$ pre každé číslo $x \in M$.

Veta 2. Ak je trigonometrický rad (1) kosínusový [sínusový] trigonometrický rad s oborom konvergencie M a má súčet s, potom súčet s je párna [nepárna] funkcia.

Veta 3. Nech f je párna [nepárna] funkcia na intervale $\langle -l/2, l/2\rangle$, $l > 0$. Potom pre jej Fourierove koeficienty pre interval $\langle -l/2, l/2\rangle$ platí:

$$\left[\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x) \cos\frac{2\pi n}{l}x\,dx, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right] \tag{4}$$

$$\left[\begin{aligned} a_n &= 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x) \sin\frac{2\pi n}{l} x\,dx \quad \text{pre } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right]. \tag{5}$$

Veta 4. Nech f je periodická a po čiastkach spojitá funkcia na intervale $\langle a, a + l\rangle$, $l > 0$, pričom pre každé x platí $f(x + l) = f(x)$. Ak je funkcia f párna [nepárna], Fourierov rad funkcie f pre interval $\langle a, a + l\rangle$ je kosínusový [sínusový] a platí pre neho (4) [(5)].

Veta 5. Nech je funkcia f po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, a + l\rangle$, $l > 0$ a rad (1) je jej Fourierov rad pre interval $\langle a, a + l\rangle$. Potom platí:

a) *(Parsevalova rovnosť)*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f^2(x)\,dx, \tag{6}$$

b) rad

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n}\right)$$

je absolútne konvergentný.

Veta 6. Nech funkcia f a jej prvá derivácia f' sú na intervale $\langle a, a + l\rangle$ po čiastkach spojité. Nech $\bar{f}$ je normalizované periodické pokračovanie funkcie f pre interval $\langle a, a + l\rangle$. Potom pre Fourierov rad (7) funkcie f na intervale $\langle a, a + l\rangle$ platí:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{l}\right) \tag{7}$$

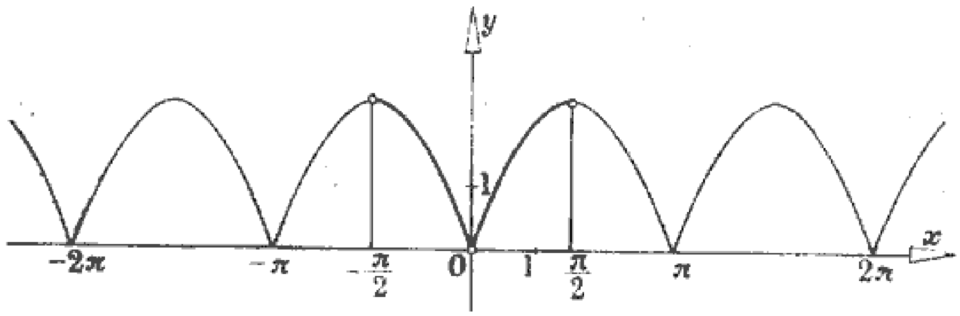
pre každé číslo $x \in (-\infty, \infty)$.

Veta 7. **Ak funkcia f je periodická s periódou l, pričom funkcie f, f' sú na intervale $\langle a, a + l\rangle$ po čiastkach spojité a pre každý bod nespojitosti c funkcie f platí:**

$$f(c) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to c+} f(x) + \lim_{x\to c-} f(x)\right],$$

potom ju možno rozvinúť do trigonometrického radu. Za tento rad možno vziať napr. jej Fourierov rad pre interval $\langle a, a + l\rangle$.

Veta 8. **Nech je funkcia f periodická s periódou l a spojitá na intervale $\langle a, a + l\rangle$. Nech jej prvá derivácia f' je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, a + l\rangle$. Potom Fourierov rad funkcie f pre interval $\langle a, a + l\rangle$ rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$ k funkcii f.**



Obr. 3

Príklad 1. Nájdime Fourierov rad funkcie $f(x) = \frac{9}{4}\,|\sin x|$ pre interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

Riešenie. Daná funkcia $f(x) = \frac{9}{4}\,|\sin x|$ je párna v intervale $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Preto podľa vety 3 pre jej Fourierove koeficienty, kde $l = \pi$, platí:

$$a_0 = \frac{9}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx, \qquad a_n = \frac{9}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx\,dx, \qquad b_n = 0$$

pre $n = 1, 2, \ldots$. Z toho dostávame:

$$a_0 = \frac{9}{\pi}\left[[-\cos x]\right]_0^{\pi/2} = \frac{9}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{9}{2\pi}\int_0^{\pi/2} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x]\,dx = \frac{9}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} - \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{9}{2\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{9}{\pi}\,\frac{1}{4n^2-1}.$$

Hľadaný Fourierov rad je:

$$\frac{9}{2\pi} - \frac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = \frac{9}{2\pi} - \frac{9}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \ldots\right)$$

Pre normalizované periodické pokračovanie danej funkcie dostaneme $\bar{f}(x) = \frac{9}{4}\,|\sin x|$, $x \in (-\infty, \infty)$ (*obr. 3*). Ale funkcia f je spojitá a má po čiastkach spojitú deriváciu na intervale $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Preto podľa vety 6 platí:

$$|\sin x| = \frac{9}{2\pi} - \frac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, teda aj pre interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

Fourierov rad pre komplexnú funkciu reálnej premennej.

Nech komplexná funkcia h reálnej premennej je integrovateľná v intervale $\langle a, a + l\rangle$, kde l je kladné číslo. Fourierovým radom komplexnej funkcie h reálnej premennej pre interval $\langle a, a + l\rangle$ nazývame rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i2\pi nx/l} \tag{8}$$

pričom pre $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ platí:

$$c_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+l} h(x) e^{-i2\pi nx/l} \, dx. \tag{9}$$

Normalizovaným periodickým pokračovaním funkcie $h = f + ig$ pre interval $\langle a, a + l\rangle$ nazývame komplexnú funkciu $\bar{h}$ reálnej premennej, pre ktorú platí $\bar{h} = \bar{f} + i\bar{g}$, kde $\bar{f}, \bar{g}$ sú normalizované periodické pokračovania funkcií f, g pre interval $\langle a, a + l\rangle$.

Veta 9. Nech komplexná funkcia h reálnej premennej a jej derivácia h' sú na intervale $\langle a, a + l\rangle$, $l > 0$, po čiastkach spojité. Potom Fourierov rad (8) komplexnej funkcie h reálnej premennej pre interval $\langle a, a + l\rangle$ konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$ k normalizovanému periodickému pokračovaniu funkcie h pre interval $\langle a, a + l\rangle$, t. j. platí:

$$\bar{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{l} \int_a^{a+l} h(x) \, e^{-i2\pi nx/l} \, dx\right] . e^{i2\pi nx/l} \tag{10}$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$.

Veta 10. Nech komplexná funkcia h reálnej premennej má obor definície $(-\infty, \infty)$ a je periodická, t. j. $h(x + l) = h(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, kde l je kladné číslo. Nech funkcie h a h' sú na intervale $\langle a, a + l\rangle$ po čiastkach spojité, pričom v každom bode nespojitosti b funkcie h platí:

$$h(b) = \frac{1}{2} [\lim_{x \to b+} h(x) + \lim_{x \to b-} h(x)].$$

Potom Fourierov rad (8) funkcie h pre interval $\langle a, a + l\rangle$ má na intervale $(-\infty, \infty)$ za súčet funkciu h, čiže funkcia h sa dá rozvinúť do Fourierovho radu.

Príklad 2. Nájdime Fourierov rad funkcie $h(x) = x^2 e^{ix}$ pre interval $\langle -\pi, \pi\rangle$. Pomocou tohto radu nájdime Fourierov rad funkcie $f(x) = x^2 \cos x$ pre interval $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Riešenie. Pre Fourierove koeficienty c_n podľa (9) platí:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{ix} . e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, e^{-i(n-1)x} \, dx.$$

Z toho dostávame:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

a pre $n \neq 1$ je:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{ix^2}{n-1} + \frac{2x}{(n-1)^2} - \frac{2i}{(n-1)^3}\right) e^{-i(n-1)x}\right]_{-\pi}^{\pi},$$

čiže

$$c_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)^2}, \qquad n \neq 1.$$

Pre hľadaný Fourierov rad platí:

$$\bar{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{0} (-1)^{n-1} \frac{2}{(n-1)^2} e^{inx} + \frac{\pi^2}{3} e^{ix} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{(n-1)^2} e^{inx}.$$

kde $h(x)$ je normalizované periodické pokračovanie funkcie h pre interval $\langle -\pi, \pi\rangle$. Keďže platí $h(x) = x^2 \cos x + i\ x^2 \sin x$, z nájdeného Fourierovho radu dostávame:

$$x^2 \cos x = \frac{\pi^2}{3} \cos x - 2 + \frac{1}{2} \cos x - 2 \cos 2x - \frac{2}{9} \cos 2x + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \left[\frac{2}{(n-1)^2} + \frac{2}{(n+1)^2} \right] \cos nx + \ldots,$$

čiže

$$x^2 \cos x = -2 + \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \right) \cos x - \frac{20}{9} \cos 2x + \frac{5}{8} \cos 3x + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{4(n^2+1)}{(n^2-1)^2} \cos nx + \ldots,$$

pre $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

415. Rozviňte do trigonometrického radu bez použitia vzťahov (2) funkciu

a) $f(x) = 1 + \cos^2 x$, b) $f(x) = \sin^4 x$.

V úlohách **416** až **432** nájdite Fourierov rad danej funkcie f v danom intervale.

416. $f(x) = x$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

417. $f(x) = x^2$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

418. $f(x) = |x|$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

419. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

420. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pre } x \in \langle -\pi, 0\rangle, \\ 1 \text{ pre } x \in (0, \pi\rangle. \end{cases}$

421. $f(x) = \sinh ax$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

422. $f(x) = \cos ax$, keď a nie je celé číslo $\langle -\pi, \pi\rangle$.

423. $f(x) = (x + |x|)/2$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

424. $f(x) = |x| - 1$, $\langle -1, 1\rangle$.

425. $f(x) = 110 - x$, $\langle 105, 115\rangle$.

426. $f(x) = e^x$, $\langle -k, k\rangle$, $k > 0$.

427. $f(x) = \cos ax$, a je celé číslo, $\langle 0, \pi\rangle$.

428. $f(x) = x \cos x$, $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

429. $f(x) = e^x - 100$, $\langle 0, 2\pi\rangle$.

430. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi/2\rangle, \\ \pi - x, & x \in \langle \pi/2, \pi\rangle. \end{cases}$

431. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi x}{l}, & x \in \langle 0, l/2\rangle, \\ 0, & x \in (l/2, l\rangle. \end{cases}$

432. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 1, & x \in (1, 2\rangle, \\ 3 - x & x \in (2, 3\rangle. \end{cases}$

V úlohách **433** až **436** rozviňte do trigonometrického radu dané periodické funkcie.

433. $f(x) = \operatorname{sgn} (\cos x)$.

434. $f(x) = |\cos x|$.

435. $f(x) = \arcsin (\cos x)$.

436. $f(x) = x - E(x)$.

V úlohách **437** až **440** rozložte dané funkcie: a) do kosínusového, b) do sínusového trigonometrického radu na danom intervale.

437. $f(x) = x$, $\langle 0, \pi\rangle$.

438. $f(x) = \pi/4 - x/2$, $\langle 0, \pi\rangle$.

439. $f(x) = x^3$, $\langle 0, \pi \rangle$.

440. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ \pi/2, & x \in \langle \pi/2, \pi \rangle. \end{cases}$

441. Nájdite súčty radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

tak, že nájdete Fourierove rady periodických funkcií, ktoré vzniknú z funkcie $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ jej párnym, resp. nepárnym periodickým pokračovaním, resp. periodickým pokračovaním funkcie $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

442. Rozviňte do sínusového trigonometrického radu normalizované periodické pokračovanie funkcie $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a vypočítajte pomocou tohto radu súčet číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/(2n-1)^3$.

443. Nájdite Fourierove rady funkcií x^2, x^3, x^4 v intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ integrovaním člena za členom Fourierovho radu funkcie $f(x) = x$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

V úlohách **444** až **449** zistite, ktoré z Fourierových koeficientov funkcie f pre interval $\langle 0, \pi \rangle$ sa rovnajú nule, ak funkcia f je spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$ a platí pre ňu:

444. $f(x + \pi) = -f(x)$.

445. $f(x + \pi) = f(x)$.

446. $f(-x) = f(x)$,
$f(x + \pi) = -f(x)$.

447. $f(-x) = -f(x)$,
$f(x + \pi) = -f(x)$.

448. $f(-x) = f(x)$,
$f(x + \pi) = f(x)$.

449. $f(-x) = -f(x)$,
$f(x + \pi) = f(x)$.

V úlohách **450** a **451** nájdite Fourierov rad danej periodickej funkcie f.

450. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

451. $f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

452. Nájdite Fourierov rad funkcie f v intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$, ak

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \right|} \, dt.$$

453. Napíšte Parsevalovu rovnosť pre funkciu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pre } a \leq |x| < \pi \end{cases}$$

a pomocou nej nájdite súčty radov $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$.

V úlohách **454** až **456** nájdite Fourierove rady komplexnej funkcie reálnej premennej na danom intervale.

454. $f(x) = (x + a)\,e^{-ix}$, $\langle 0, \pi\rangle$.

455. $f(x) = e^{(1+i)x}$, $\langle 0, 2\pi\rangle$.

456. $f(x) = x^3\,e^{ix}$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

V úlohách **457** a **458** pomocou Fourierovho radu komplexnej funkcie reálnej premennej nájdite Fourierove rady funkcií:

457. $g(x) = xe^{ax}\cos bx$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

458. $g(x) = xe^{ax}\sin bx$, $\langle -\pi, \pi\rangle$.

V úlohách **459** až **463** bez počítania Fourierových koeficientov dokážte:

459. $\dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$, $|a| < 1$.

460. $\dfrac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$, $|a| < 1$.

461. $\dfrac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$, $|a| < 1$.

462. $\ln(1 - 2a\cos x + a^2) = -2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n}\cos nx$, $|a| < 1$.

463. Jednocestný usmerňovač prúdu prepúšťa jednosmerný prúd $i(t) = I_0(\sin\omega t + |\sin\omega t|)/2$, kde ω je kruhová frekvencia prúdu, t je čas. Nájdite amplitúdy jednotlivých harmonických zložiek.

2. ZÁKLADY INTEGRÁLNEHO POČTU FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

2,1. Dvojný integrál

Delenie intervalu v E_2. Majme interval $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Nech $D^{(1)}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, $D^{(1)} = \left\{\langle x_{i-1}, x_i\rangle\right\}_{i=1}^{n}$ a $D^{(2)}$ je delenie intervalu $\langle c, d\rangle$, $D^{(2)} = \left\{\langle y_{j-1}, y_j\rangle\right\}_{j=1}^{m}$. Množinu intervalov $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ v počte $p = mn$ nazývame *delením* intervalu I a označujeme ho takto: $D = D^{(1)} \times D^{(2)}$.

Obsah $m\ (I)$ *intervalu* I je číslo $(b-a)\,(d-c)$.

Normou delenia $D = D^{(1)} \times D^{(2)}$ rozumieme číslo $\|D\| = \max\{\|D^{(1)}\|, \|D^{(2)}\|\}$.

Ak pre každé prirodzené číslo k je dané delenie D_k intervalu I, hovoríme, že je daná postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu I.

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu I nazývame *normálnou postupnosťou delení intervalu I*, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \|D_k\| = 0$.

Integrálny súčet. Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Nech delenie D intervalu I pozostáva z čiastočných intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_p$. V každom čiastočnom intervale I_i zvoľme bod $\Theta_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$. *Integrálnym súčtom* funkcie f pre delenie D intervalu I a pre danú voľbu bodov Θ_i nazývame číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{p} f(\Theta_i)\, m(I_i), \tag{1}$$

kde $m(I_i)$ je obsah i-tého čiastočného intervalu I_i.

Dvojný integrál. Nech je funkcia f ohraničená na intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Číslo J nazývame integrálom funkcie f na intervale I, ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu I a pre ľubovoľnú voľbu bodov $\Theta_i^{(k)}$ je:

$$\lim_{k\to\infty} S_f(D_k) = J.$$

Integrál funkcie f na intervale I označujeme $\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a nazývame *dvojným integrálom funkcie* f na intervale I. Platí

$$\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} S_f(D_k). \tag{2}$$

Ak existuje dvojný integrál funkcie f na intervale I, potom funkciu f nazývame integrovateľnou funkciou na intervale I.

Nech A je ohraničená množina z E_n. Funkciu

$$\chi_A(X) = \begin{cases} 1, & \text{pre} \quad X \in A \\ 0, & \text{pre} \quad X \notin A \end{cases}$$

nazývame *charakteristickou funkciou množiny* A.

Funkcia f je integrovateľná na ohraničenej množine A, ak je funkcia $F_A = \chi_A f$ integrovateľná na istom intervale I, ktorý obsahuje množinu A*). *Integrálom funkcie* f na ohraničenej množine A nazývame číslo $\iint_I F_A(x, y)\,dx\,dy$ a označujeme ho $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$. Platí:

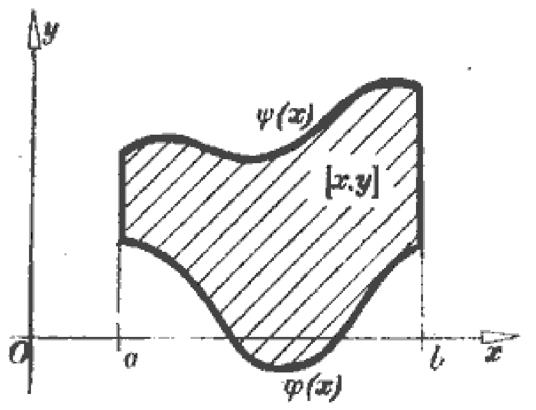
$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint_I F_A(x, y)\,dx\,dy. \tag{3}$$

Merateľná množina. Nech A je ohraničená množina. Ak existuje $\iint_A dx\,dy$, nazývame množinu A *merateľnou* (v zmysle Jordana). Jej *obsahom* nazývame číslo

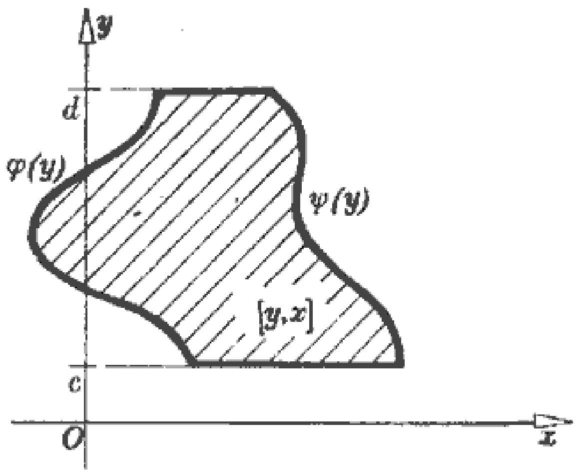
$$m(A) = \iint_A dx\,dy. \tag{4}$$

Ak merateľné množiny A_1, A_2 nemajú spoločné vnútorné body, potom platí:

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2). \tag{5}$$



Obr. 4



Obr. 5

Elementárna oblasť. Elementárnou oblasťou typu $[x, y]$ rozumieme množinu všetkých bodov (x, y) dvojrozmerného euklidovského priestoru, ktorých súradnice vyhovujú nerovnostiam:

$$a \leq x \leq b, \qquad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \tag{6}$$

kde a, b, $a < b$ sú čísla, φ, ψ sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in (a, b)$ platí $\varphi(x) < \psi(x)$ (pozri *obr. 4*).

Elementárnou oblasťou typu $[y, x]$ rozumieme množinu všetkých bodov (x, y) dvojrozmerného euklidovského priestoru, ktorých súradnice vyhovujú nerovnostiam:

$$c \leq y \leq d, \qquad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), \tag{7}$$

kde c, d, $c < d$ sú čísla, φ, ψ sú spojité funkcie na intervale $\langle c, d\rangle$ a pre každé $y \in (c, d)$ platí $\varphi(y) < \psi(y)$ (pozri *obr. 5*).

Elementárne oblasti v E_2 sú merateľné množiny.

*) Táto vlastnosť nezávisí od voľby intervalu I.

Vlastnosti dvojných integrálov

Veta 1. Nech sú funkcie f_i integrovateľné na merateľnej množine A a c_i sú čísla, $i = 1, 2, \ldots, k$. Potom aj funkcia $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i$ je integrovateľná na merateľnej množine A a platí:

$$\iint_A \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k} c_i \iint_A f_i(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Dôsledok 1.

$$\iint_A c_1 f_1(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c_1 \iint_A f_1(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Dôsledok 2.

$$\iint_A [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f_1(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \pm \iint_A f_2(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Veta 2. Nech $A = A_1 \cup A_2$, pričom A_1, A_2 sú merateľné množiny a nemajú spoločné vnútorné body. Nech funkcia f je integrovateľná na množinách A_1, A_2. Potom funkcia f je integrovateľná aj na množine A a platí:

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

Veta 3. Nech funkcie f a g sú integrovateľné na množine A a pre všetky body z A platí $f(x, y) \geqq g(x, y)$. Potom platí:

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqq \iint_A g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{12}$$

Dôsledok 3. Ak pre všetky body z A je $f(x, y) \geqq 0$, potom platí:

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqq 0. \tag{13}$$

Veta 4. Nech funkcia f je integrovateľná na merateľnej množine A a pre všetky body z A je $k \leqq f(x, y) \leqq K$, potom platí:

$$km(A) \leqq \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqq Km(A). \tag{14}$$

Veta 5. Ak je funkcia f spojitá na uzavretej merateľnej oblasti A vzhľadom na oblasť A, potom existuje taký bod $\Theta = (\xi, \eta)$ vnútri oblasti A, že platí:

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(\Theta)\, m(A). \tag{15}$$

Číslo $f(\Theta)$ nazývame *strednou hodnotou funkcie* f na množine A. Platí:

$$f(\Theta) = \frac{1}{m(A)} \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Veta 6. Ak je funkcia f spojitá na merateľnej množine A, tak je na množine A integrovateľná

Veta 7. Ak je funkcia f ohraničená a množina jej bodov nespojitosti má nulový obsah, potom existuje dvojný integrál z funkcie f.

Veta 8. (*Fubiniho veta.*) Nech je funkcia f integrovateľná na elementárnej oblasti A danej nerovnosťami (6). Nech pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ existuje $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$, potom platí:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \Big] dx. \tag{16}$$

Nech je funkcia f integrovateľná na elementárnej oblasti A danej nerovnosťami (7). Nech pre každé $y \in \langle c, d \rangle$ existuje $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$, potom platí:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \Big] dy. \tag{17}$$

Dôsledok 4. Ak je funkcia f spojitá na elementárnej oblasti A, potom $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$, resp. $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dx$ vždy existuje a platí vzorec (16) a (17).

Ak funkcia $f(x, y) = g(x)\, h(y)$, kde g je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ a h je spojitá funkcia na intervale $\langle c, d \rangle$, potom platí:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy,$$

kde $A = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.

Príklad 1. Vypočítajme $\iint_I (2x + 3y - 2)\, dx\, dy$, kde interval $I = \langle -2, 3 \rangle \times \langle 1, 4 \rangle$.

Riešenie. Funkcia $f(x, y) = 2x + 3y - 2$ je spojitá na intervale I. Keďže interval I je merateľná množina, funkcia f je na intervale I integrovateľná. Interval I je elementárna oblasť typu $[x, y]$ daná nerovnosťami:

$$-2 \leq x \leq 3,$$
$$1 \leq y \leq 4,$$

alebo aj elementárna oblasť typu $[y, x]$ daná nerovnosťami:

$$1 \leq y \leq 4,$$
$$-2 \leq x \leq 3.$$

Preto podľa vety 8 môžeme počítať daný integrál dvoma spôsobmi.

Z dôsledku 4 a vzorca (16) dostávame:

$$\iint_I (2x + 3y - 2)\, dx\, dy = \int_{-2}^{3} \Big[\int_1^4 (2x + 3y - 2)\, dy \Big] dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} [2xy + 3y^2/2 - 2y]_1^4\, dx = \int_{-2}^{3} (6x + 16{,}5)\, dx = [3x^2 + 16{,}5x]_{-2}^{3} = 97{,}5.$$

Z dôsledku 4 a vzorca (17) máme:

$$\iint_I (2x + 3y - 2)\, dx\, dy = \int_1^4 \Big[\int_{-2}^{3} (2x + 3y - 2)\, dx \Big] dy =$$

$$= \int_1^4 [x^2 + 3xy - 2x]_{-2}^{3}\, dy = \int_1^4 (15y - 5)\, dy = 5[3y^2/2 - y]_1^4 = 97{,}5.$$

Príklad 2. Vypočítajme $\iint_A xy\, dx\, dy$, kde A je ohraničená množina všetkých bodov z E_2, ktorú ohraničuje parabola $y = 2x - x^2$ a priamka $y = -x$.

Riešenie. Najskôr znázorníme parabolu $y = 2x - x^2$ a priamku $y = -x$ (pozri *obr. 6*). Súradnice ich priesečníkov P_1, P_2 nájdeme riešením systému rovníc:

$$y = 2x - x^2,$$

$$y = -x.$$

Odtiaľ máme $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (3, -3)$. Množina A je elementárna oblasť typu $[x, y]$ daná nerovnosťami:

$$0 \leqq x \leqq 3,$$

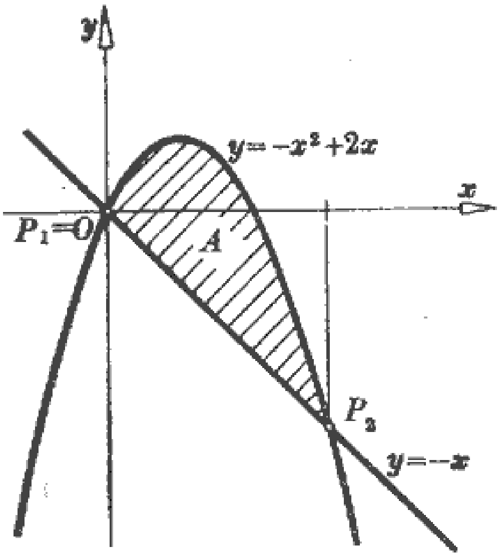
$$-x \leqq y \leqq -x^2 + 2x.$$

Pretože funkcia $f(x, y) = xy$ je spojitá na merateľnej množine A, podľa vety 8 a dôsledku 4' platí:

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_0^3 \Big[\int_{-x}^{-x^2+2x} xy \, dy \Big] dx = \int_0^3 [xy^2/2]_{-x}^{-x^2+2x} dx =$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2} x[(-x^2 + 2x)^2 - (-x)^2] \, dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^5 - 4x^4 + 3x^3) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} [x^6/6 - 4x^5/5 + 3x^4/4]_0^3 = -\frac{243}{40}.$$



Obr. 6

464. Zostrojte a znázornite aspoň jedno delenie D intervalu $I = \langle -2, 7\rangle \times \langle 4, 10\rangle$ tak, aby intervaly $\langle -1, 2\rangle \times \langle 17/4, 21/4\rangle$, $\langle 3, 4\rangle \times \langle 6, 8\rangle$ patrili deleniu D.

465. Nech $D = D^{(1)} \times D^{(2)}$ je delenie intervalu $I = \langle 2, 11\rangle \times \langle -2, 8\rangle$, pričom $D^{(1)}$ je dané deliacimi bodmi 2; 2,5; 3,7; 8,3; 9; 11 a $D^{(2)}$ je dané deliacimi bodmi −2; −1; 1,5; 3,7; 6,5; 7,8; 8. Nájdite $\| D \|$.

466. Nájdite aspoň jednu normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $I = \langle 2, 11\rangle \times \langle -2, 8\rangle$.

467. Vypočítajte integrál $\iint_A xy \, dx \, dy$, kde A je štvorec daný nerovnosťami $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ ako limitu postupnosti integrálnych súčtov. Pritom delenie D_n, $n = 1, 2, \ldots$ oblasti A nech je delenie na n^2 rovnakých štvorcov a body $\Theta_i = (\xi_i, \eta_i)$ zvoľte v pravých horných vrcholoch týchto štvorcov.

V úlohách 468 až 476 znázornite množiny dané systémom nerovností. Zistite, ktoré z nich sú elementárne oblasti a ktoré sa dajú vyjadriť ako súčet elementárnych oblastí.

468. $0 \leqq x \leqq y \leqq 1$.

469. $y \leqq x$, $y \geqq x^2$.

470. $0 \leqq x \leqq 2a$,
$\sqrt{2ax - x^2} \leqq y \leqq 2ax$, $a > 0$.

471. $-1 \leqq x \leqq 1$,
$\sqrt{\dfrac{1 - x^2}{2}} \leqq |y| \leqq \sqrt{1 - x^2}$.

472. $|x| \leqq y \leqq 2.$

473. $1 \leqq |x| \leqq 2,$
$1 \leqq |y| \leqq 2.$

474. $1 \leqq |x| + |y| \leqq 2.$

475. $x^2 + y^2 \leqq 4,$
$|x|/2 \leqq |y| \leqq 2|x|.$

476. $x^2 + y^2 - 1 \geqq 0,$
$4 - x^2 - y^2 \leqq 0, \; |y| > |x|.$

V úlohách **477** až **480** vypočítajte daný integrál.

477. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1 + y^2} dy.$ *)

478. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 \, dy.$

479. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1 + \cos x} y^2 \sin x \, dy.$

480. $\int\limits_0^{\pi/2} dy \int\limits_{\cos y}^{1} x^4 \, dx.$

V úlohách **481** až **490** vypočítajte:

481. $\iint\limits_I x^2 y \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 1, 2\rangle$.

482. $\iint\limits_I (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4) \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

483. $\iint\limits_I \frac{y^2}{1 + x^2} \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

484. $\iint\limits_I \frac{1}{(2x + y + 1)^2} \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 4\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

485. $\iint\limits_I y \, e^{x + y} \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

486. $\iint\limits_I \ln (1 + x)^{2y} \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

487. $\iint\limits_I x \sin y \, dx \, dy$, ak $I = \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$.

488. $\iint\limits_I x^2 y \cos (xy^2) \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

---

*) V ďalšom texte namiesto $\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y) \, dy\right] dx$ používa sa aj znak $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) \, dy$ a podobne aj v iných prípadoch.

489. $\displaystyle\iint_I xy^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

490. $\displaystyle\iint_I E(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

V úlohách **491** až **498** zameňte poradie integrovania.

491. $\displaystyle\int_1^2\left[\int_3^4 f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

492. $\displaystyle\int_0^2\left[\int_{2x}^{6-x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

493. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

494. $\displaystyle\int_1^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

495. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

496. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

497. $\displaystyle\int_0^{2a}\left[\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

498. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^{x^2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_1^3\left[\int_0^{(3-x)/2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

V úlohách **499** až **503** napíšte Fubiniho vetu pre dvojný integrál $\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak je daná množina A.

499. Množina A je trojuholník s vrcholmi $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $D = (0, 1)$.

500. Množina A je lichobežník s vrcholmi $B = (1, 1)$, $C = (3, 1)$, $D = (2, 2)$, $E = (1, 2)$.

501. Množina A je rovnobežník s vrcholmi $B = (0, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = (1, 6)$, $E = (0, 4)$.

502. Množina A je ohraničená hyperbolou $y^2 - x^2 = 1$ a kružnicou $x^2 + y^2 = 9$, pričom obsahuje bod $O = (0, 0)$.

503. Množina A je daná nerovnosťami $x^2 + y^2 \leqq 7$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

V úlohách **504** až **519** vypočítajte daný integrál:

504. $\displaystyle\iint_A (5x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak množina A je trojuholník s vrcholmi $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (0, 1)$.

505. $\iint_A (x - y)\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená priamkami $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$.

506. $\iint_A \sqrt{xy - y^2}\,dx\,dy$, ak množina A je daná nerovnosťami $0 \leqq y \leqq b$, $y \leqq \leqq x \leqq 10y$.

507. $\iint_A (|x| + |y|)\,dx\,dy$, ak množina A je daná nerovnosťou $|x| + |y| \leqq 1$.

508. $\iint_A (x^2 + y)\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená parabolami $y = x^2$ a $y^2 = x$

509. $\iint_A xy\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a priamkou $x = 2$.

510. $\iint_A \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a priamkami $y = x$ a $x = 1$.

511. $\iint_A e^{x/y}\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená parabolou $y^2 = x$ a priamkami $x = 0$, $y = 1$ a $y = 2$.

512. $\iint_A \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená čiarami $y = 1/x$, $y = 4x$, $x = 3$.

513. $\iint_A |xy|\,dx\,dy$, kde množina A je kruh so stredom $S = (0, 0)$ a polomerom a.

514. $\iint_A \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, kde množina A je daná nerovnosťami $x^2 + y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

515. $\iint_A (12 - 3x - 4y)\,dx\,dy$, ak množina A je elementárna oblasť daná nerovnosťou $x^2 + 4y^2 \leqq 4$.

516. $\iint_A \frac{x}{3}\,dx\,dy$, ak množina A je ohraničená krivkou $x = 2 + \sin y$ a priamkami $x = 0$, $y = 0$, $y = 2\pi$.

517. $\iint\limits_A |xy| \, dx \, dy$, ak množina A je daná nerovnosťou $1 \leqq x^2 \leqq y^2 \leqq 4$.

518. $\iint\limits_A |x| \, dx \, dy$, ak množina A je daná nerovnosťami $x^2 \leqq y$, $4x^2 + y^2 \leqq 12$.

519. $\iint\limits_A \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) \, dx \, dy$, kde množina A je kruh daný nerovnosťou $x^2 + y^2 \leqq 4$.

V úlohách **520** a **521** zistite, prečo v daných integráloch pri zmene poradia integrovania dostávame vždy iný výsledok.

520. $\iint\limits_I \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-x/y^2} \, dx \, dy$, kde množina $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

521. $\iint\limits_I \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$, ak $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

522. Zistite, či funkcia $f(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^3}$ je na intervale $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ integrovateľná.

V úlohách **523** a **524** nájdite strednú hodnotu funkcie f na intervale I.

523. $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$, $I = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$.

524. $f(x, y) = xy^2$, $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

V úlohách **525** až **529** odhadnite daný integrál.

525. $\iint\limits_I (x^3 + y^3 - 3xy) \, dx \, dy$, $I = \langle 0, 2 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$.

526. $\iint\limits_A (x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1) \, dx \, dy$, ak množina A je ohraničená priamkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

527. $\iint\limits_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, ak množina A je ohraničená kružnicou $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

528. $\iint\limits_A (1 + y)^x \, dx \, dy$, ak množina A je štvorec daný nerovnosťami $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$.

529. $\iint\limits_A \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \, dx \, dy$, kde množina A je daná nerovnosťou $|x| + |y| \leqq 10$.

2,2. Trojný a n-rozmerný integrál

Delenie intervalu v E_3. Nech I je uzavretý trojrozmerný interval, $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$. Ak sú dané delenia $D^{(i)}$ intervalov $\langle a_i, b_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$ deliacimi bodmi $a_i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \ldots < x_{p_i-1}^{(i)} < x_{p_i}^{(i)} = b_i$, potom delenie D, ktoré pozostáva z $p = p_1p_2p_3$ intervalov $\langle x_{j_1-1}, x_{j_1}\rangle \times \langle x_{j_2-1}, x_{j_2}\rangle \times \langle x_{j_3-1}, x_{j_3}\rangle$ pre všetky $j_1 = 1, 2, \ldots, p_1$, $j_2 = 1, 2, \ldots, p_2$, $j_3 = 1, 2, \ldots, p_3$, nazývame *delením intervalu* I a označujeme ho $D = D^{(1)} \times D^{(2)} \times D^{(3)}$.

Obsah alebo *objem* $V(I)$ intervalu I je číslo $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$.

Normou delenia $D = D^{(1)} \times D^{(2)} \times D^{(3)}$ je číslo $\| D \| = \max\{\| D^{(1)} \|, \| D^{(2)} \|, \| D^{(3)} \|\}$. Postupnosť delení a normálnu postupnosť intervalu I zavádzame úplne analogicky ako pri dvojrozmernom intervale.

Integrálny súčet. Nech I je trojrozmerný interval a funkcia f je ohraničená na intervale I. Nech D je delenie intervalu I, ktoré pozostáva z čiastočných intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_p$. V každom čiastočnom intervale I_i zvoľme bod $\Theta_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$. *Integrálny súčet funkcie* f pre delenie D intervalu I a pre danú voľbu bodov Θ_i je číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{p} f(\Theta_i)\, V(I_i), \tag{1}$$

kde $V(I_i)$ je obsah čiastočného intervalu I_i.

Trojný integrál. Nech je funkcia f ohraničená na intervale I. Číslo J nazývame integrálom funkcie f na intervale I, ak pre ľubovoľnú normálnu postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu I a pre ľubovoľný výber bodov $\Theta_i^{(k)}$ v integrálnych súčtoch $S_f(D_k)$ je $\lim\limits_{k\to\infty} S_f(D_k) = J$.

Integrál funkcie f na intervale I označujeme $\iiint\limits_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Ak existuje integrál funkcie f na intervale I, potom funkciu f nazývame *integrovateľnou funkciou na intervale* I a jej integrál na I nazývame *trojným integrálom* funkcie f na intervale I. Platí

$$\iiint\limits_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{k=\infty} S_f(D_k).$$

Integrálom $\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ funkcie f na ohraničenej množine A nazývame číslo

$$\iiint\limits_I F_A(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

kde $F_A = \chi_A f$, pričom χ_A je charakteristická funkcia množiny A a I je nejaký interval, ktorý obsahuje množinu A*.) Platí

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_I F_A(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{2}$$

Merateľná množina. Ak existuje $\iiint\limits_A dx\, dy\, dz$, nazývame množinu A *merateľnou* (v zmysle Jordana). Jej obsahom alebo objemom nazývame číslo

$$m(A) = \iiint\limits_A dx\, dy\, dz.$$

Ak merateľné množiny A_1, A_2 nemajú spoločné vnútorné body, potom platí:

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

*) Integrál z funkcie f na množine A nezávisí od voľby intervalu I.

Elementárna oblasť v E_3. Nech D je elementárna oblasť v E_2. Nech f a g sú také spojité funkcie dvoch premenných na D, že v D platí $f(x, y) < g(x, y)$. Množinu M všetkých bodov (x, y, z) z E_3 takých, že

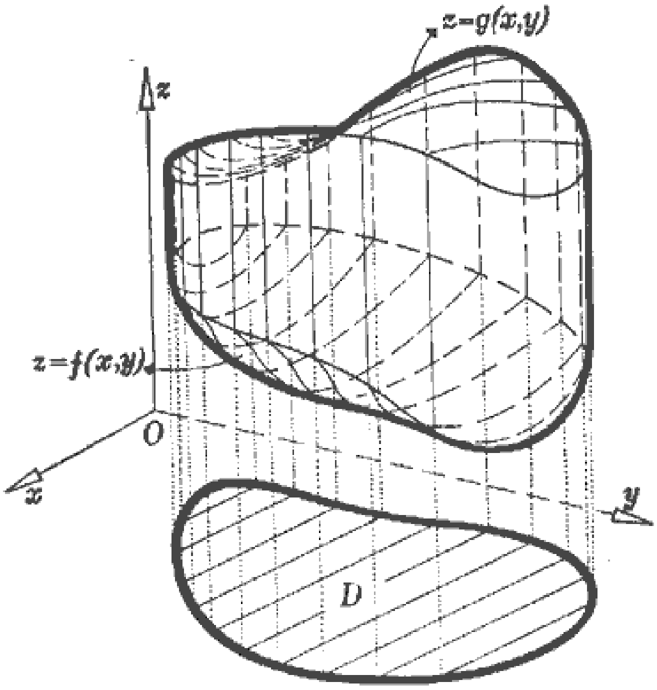
$$(x, y) \in D \quad \text{a} \quad f(x, y) \leqq z \leqq g(x, y) \tag{3}$$

nazývame *elementárnou oblasťou v E_3* (pozri *obr. 7*).

Ak D je elementárna oblasť typu $[x, y]$, resp. typu $[y, x]$, nazývame množinu M *elementárnou oblasťou typu* $[x, y, z]$, resp. typu $[y, x, z]$. Podobne sa definujú elementárne oblasti typov $[y, z, x]$ $[z, x, y]$, $[z, y, x]$, $[x, z, y]$.

Elementárne oblasti v E_3 sú merateľné množiny.

Poznámka 1. Pre trojný integrál platia podobné vety ako pre dvojný integrál (pozri vety 1 až 7 z článku 2,1).



Obr. 7

Veta 1. Nech A je elementárna oblasť v E_3. Nech množina A pozostáva práve z tých bodov (x, y, z), pre ktoré $(x, y) \in B$ a $\varphi(x, y) \leqq z \leqq \psi(x, y)$, pričom B je elementárna oblasť v E_2 a funkcie φ, ψ sú spojité na B. Nech f je integrovateľná funkcia na množine A a pre každý bod $(x, y) \in B$ existuje integrál $\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz$. Potom platí:

$$\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B \Big[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\Big]\,dx\,dy. \tag{4}$$

Poznámka 2. Ak sú pre množinu B a dvojný integrál na pravej strane rovnosti (4) splnené predpoklady vety 8 z predchádzajúceho článku, môžeme vypočítať daný trojný integrál pomocou jednoduchých integrálov. Predpoklady vety 8 sa splňia napr. vtedy, ak je integrovaná funkcia f spojitá na elementárnej oblasti A.

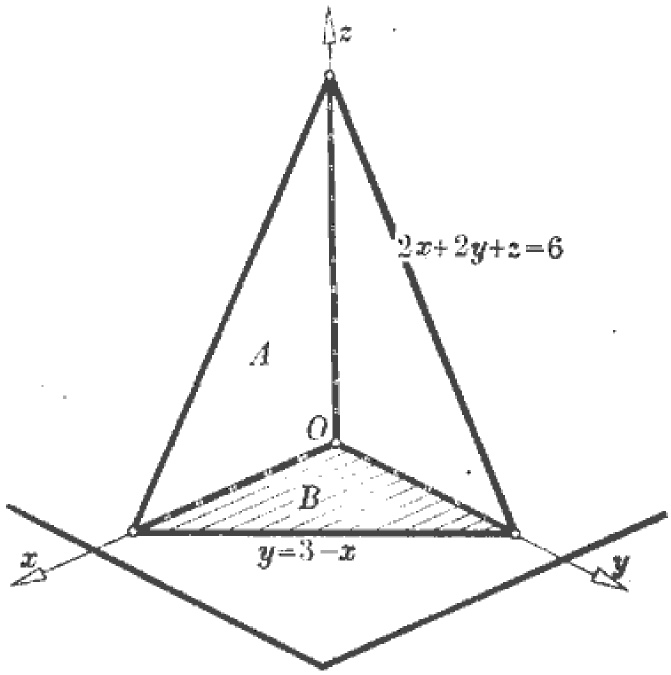
Poznamka 3. Ak je vo vete 1 množina B, napr. elementárna oblasť typu $[x, y]$ daná nerovnosťami $a \leqq x \leqq b$, $h(x) \leqq y \leqq g(x)$, potom máme:

$$\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B \Big[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\Big]\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{h(x)}^{g(x)} \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Poznámka 4. Ak funkcia $f(x, y, z) = g(x)\, h(y)\, k(z)$, pre každý bod $(x, y, z) \in I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$ a h je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, g je spojitá na intervale $\langle c, d\rangle$ a k je spojitá na intervale $\langle e, f\rangle$, potom platí:

$$\iiint_I f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x \int_c^d h(y)\, \mathrm{d}y \int_e^f k(z)\, \mathrm{d}z.$$



Obr. 8

n-rozmerný integrál. Podobne ako dvojný a trojný integrál definujeme n-rozmerný integrál funkcie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n > 3$ na merateľnej množine $A \in E_n$, ktorý označujeme:

$$\iint_A \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Pre n-rozmerný integrál platia podobné vety ako pre dvojný integrál.

Príklad 1. Vypočítajme $\iiint_I (xy^2 + z - 2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0, 3\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 4\rangle$.

Riešenie. Funkcia $f(x, y, z) = xy^2 + z - 2$ je spojitá na intervale I. Keďže I je merateľná množina, je funkcia f na I integrovateľná. Interval I je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ daná nerovnosťami

$$0 \leq x \leq 3, \qquad 0 \leq y \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 4.$$

Podľa vety 1 máme:

$$\iiint_I (xy^2 + z - 2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{I_1} \left[\int_0^4 (xy^2 + z - 2)\, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

pričom $I_1 = \langle 0, 3\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Podľa poznámky 1 platí:

$$\iiint\limits_I (xy^2 + z - 2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^4 (xy^2 + z - 2)\,dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^1 \left[xy^2z + \frac{z^2}{2} - 2z\right]_0^4 dy \right\} dx = \int_0^3 \left\{ \int_0^1 4xy^2\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{4}{3}xy^3\right]_0^1 dx = \frac{4}{3}\int_0^3 x\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 6.$$

Príklad 2. Vypočítajme $\iiint\limits_A y\,dx\,dy\,dz$, kde A je množina všetkých bodov $(x, y, z) \in E_3$, pre súradnice ktorých platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $2x + 2y + z - 6 \leqq 0$.

Riešenie. Popíšme najskôr danú množinu A ako elementárnu oblasť. Množina A je znázornená na *obr. 8.* Z podmienok $z \geqq 0$, $2x + 2y + z - 6 \leqq 0$ pre z vyplýva:

$$0 \leqq z \leqq 6 - 2x - 2y.$$

Množina A je množina všetkých bodov $(x, y, z) \in E_3$, pre ktoré platí:

$$(x, y) \in B, \qquad 0 \leqq z \leqq 6 - 2x - 2y,$$

pričom množina B je kolmý priemet množiny A do roviny $z = 0$ a môžeme ju opísať ako elementárnu oblasť typu $[x, y]$ nerovnosťami:

$$0 \leqq x \leqq 3,$$
$$0 \leqq y \leqq 3 - x.$$

Množina A je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ daná nerovnosťami:

$$0 \leqq x \leqq 3,$$
$$0 \leqq y \leqq 3 - x,$$
$$0 \leqq z \leqq 6 - 2x - 2y.$$

Pretože funkcia $f(x, y, z) = y$ je spojitá na merateľnej množine A, je tam integrovateľná. Podľa vety 1 máme:

$$\iiint\limits_A y\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \left\{ \int_0^{3-x} \left[\int_0^{6-2x-2y} y\,dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^{3-x} \left[yz\right]_0^{6-2x-2y} dy \right\} dx = 2\int_0^3 \left\{ \int_0^{3-x} (3y - xy - y^2)\,dy \right\} dx =$$

$$= 2\int_0^3 \left\{ \int_0^{3-x} [(3 - x)\,y - y^2]\,dy \right\} dx =$$

$$= 2\int_0^3 \left[(3 - x)\,\frac{(3 - x)^2}{2} - \frac{(3 - x)^3}{3}\right] dx = 2\int_0^3 \frac{(3 - x)^3}{6}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{(3 - x)^4}{4}\right]_0^3 = \frac{27}{4}.$$

530. Nájdite normu delenia D intervalu $I = \langle 1, 3\rangle \times \langle -1, 3\rangle \times \langle 1, 5\rangle$, ak $D^{(1)}$ je delenie intervalu $\langle 1, 3\rangle$ dané deliacimi bodmi 1; 1,5; 2; 2,6; 3, $D^{(2)}$ je delenie intervalu $\langle -1, 3\rangle$ dané deliacimi bodmi -1; 1,5; 2,1; 3 a $D^{(3)}$ je delenie intervalu $\langle 1, 5\rangle$ dané deliacimi bodmi 1; 1,7; 2,3; 3; 4,1; 5.

531. Nájdite aspoň jednu normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $I = \langle 1, 3\rangle \times \langle -1, 3\rangle \times \langle 1, 5\rangle$.

V úlohách 532 až 541 znázornite množiny bodov v E_3 dané nerovnosťami; zistite, či sú elementárne oblasti a opíšte ich ako elementárne oblasti.

532. $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ z \leqq 1 - x - 2y$.

533. $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1$. **534.** $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4$.

535. $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 1$.

536. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1,\ z > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

537. $0 \leqq z \leqq y^2,\ x^2 + y^2 \leqq 1$. **538.** $|x| + |y| + |z| - 1 \leqq 0$.

539. $1 \leqq |x| + |y| + |z| \leqq 2$.

540. $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2,\ x^2 + y^2 \leqq rx,\ r > 0$.

541. Štvorsten s vrcholmi $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (0, 0, 3)$.

V úlohách 542 až 547 vypočítajte daný integrál.

542. $$\int_0^1 \left\{\int_0^2 \left[\int_0^3 (x + y + z)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}z.$$

543. $$\int_0^{\pi} \left[\int_0^a \left(\int_0^b z^2 r\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}r\right] \mathrm{d}t.$$

544. $$\int_0^1 \left[\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

545. $$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + y + z + 1}}\,\mathrm{d}z.$$

546. $$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varrho^3 \sin\varphi \cos\varphi\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\varphi.$$

547. $$\int_0^{e-1} \left[\int_0^{e-x-1} \left(\int_0^{x+y-e} \frac{\ln(2 - y - x)}{(x - e)(x + y - e)}\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

V úlohách 548 a 549 zameňte poradie integrovania v trojnásobných integráloch.

548. $$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

549. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dz$.

550. Vyjadrite pomocou jednoduchých integrálov trojný integrál

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

ak A je daná množina:

a) množina A je štvorsten ohraničený rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$,

b) množina A je valec, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, $z = h$, $h > 0$,

c) množina A je kužeľ $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

551. Nech A je množina všetkých bodov z E_3, pre súradnice ktorých platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $z \leqq 1 - x - y$. Opíšte množinu A ako elementárnu oblasť typu $[x, y, z]$, $[y, x, z]$, $[z, x, y]$ a vypočítajte v každom prípade $\iiint\limits_A (1 - x) yz\, dx\, dy\, dz$.

V úlohách 552 až 556 vypočítajte daný integrál.

552. $\iiint\limits_I [(4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1)/5]\, dx\, dy\, dz$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

553. $\iiint\limits_I xy^2z^{1/2}\, dx\, dy\, dz$, ak $I = \langle -2, 1\rangle \times \langle 1, 3\rangle \times \langle 2, 4\rangle$.

554. $\iiint\limits_I (1/x + 1/y + 1/z)\, dx\, dy\, dz$, ak $I = \langle 1, a\rangle \times \langle 1, a\rangle \times \langle 1, a\rangle, a > 1$.

555. $\iiint\limits_I 2\, e^{3x+2y+z}\, dx\, dy\, dz$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

556. $\iiint\limits_I y^2z \cos x\, dx\, dy\, dz$, ak $I = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, b\rangle \times \langle -a/2, a/2\rangle$.

V úlohách 557 až 563 vypočítajte dané integrály, ak množina A je daná nerovnosťami.

557. $\iiint\limits_A xz\, dx\, dy\, dz$, A: $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leqq z \leqq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

558. $\displaystyle\iiint\limits_A \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z \leqq 1.$

559. $\displaystyle\iiint\limits_A z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1,\ z \geqq 0.$

560. $\displaystyle\iiint\limits_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x > 0,\ y > 0,\ 0 < z < c,\ x^2/a^2 + y^2/b^2 < z^2/c^2.$

561. $\displaystyle\iiint\limits_A z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2Rz.$

562. $\displaystyle\iiint\limits_A (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x^2 + y^2 \leqq 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3a^2, a > 0.$

563. $\displaystyle\iiint\limits_A (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon y^2 + z^2 \leqq x^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2,\ x \geqq 0.$

V úlohách 564 až 568 vypočítajte integrály, ak množina A je ohraničená plochami.

564. $\displaystyle\iiint\limits_A (2x + 3y - z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon z = 0,\ z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = b,$ $a > 0, b > 0.$

565. $\displaystyle\iiint\limits_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x = 0,\ y = 0,\ z = 0, x + y + z = 1.$

566. $\displaystyle\iiint\limits_A y\cos(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = \pi/2.$

567. $\displaystyle\iiint\limits_A xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

568. $\displaystyle\iiint\limits_A z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ A\colon z^2 = h^2(x^2+y^2)/R^2,\ z = h.$

569. Nájdite strednú hodnotu funkcie f:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na množine A určenej nerovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 \leqq x + y + z$;

b) $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2}$ na množine A určenej nerovnosťou $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1$.

570. Odhadnite integrály

a) $\iiint\limits_A (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, ak množina A je guľa daná nerovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 16$;

b) $\iiint\limits_A (x^2 + y + z)\,dx\,dy\,dz$, kde množina A je kocka daná nerovnosťami $1 \leqq x \leqq 3$, $1 \leqq y \leqq 3$, $1 \leqq z \leqq 3$.

V úlohách 571 až 578 vypočítajte dané integrály.

571. $\iiiint\limits_I (x^2 + y^2 + z^2 + u^2)\,dx\,dy\,dz\,du$, kde $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

572. $\iiiint\limits_A (1 - x - y - z - u)\,dx\,dy\,dz\,du$, kde množina A je daná nerovnosťami $x + y + z + u \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $u \geqq 0$.

573. $\iiiint\limits_A u^4 e^{y^2}\,dx\,dy\,dz\,du$, kde A je množina daná nerovnosťami $0 \leqq z \leqq u$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq zu$, $0 \leqq x \leqq yzu$.

574. $\iiiint\limits_A xy^2zu\,dx\,dy\,dz\,du$, kde A je množina daná nerovnosťami $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $u \geqq 0$.

575. $\int\int\int\int\int\int\limits_I (x + y + z + u + t + v)^2\,dx\,dy\,dz\,du\,dt\,dv$, kde $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

576. $\int\int\limits_A \dots \int dx_1\,dx_2 \dots dx_n$, ak množina A je daná nerovnosťami $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $\dots$, $x_n \geqq 0$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq 1$.

577. $\int\int\limits_A \dots \int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}\,dx_1 \dots dx_n$, ak množina A je daná nerovnosťou $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq 1$.

578. $\int\int\limits_A \dots \int f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) dx_1 \dots dx_n$, ak množina A je daná nerovnosťou $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2$ a f je spojitá funkcia.

579. Dokážte rovnosť $\int_0^x dx \int_0^{x_1} dx_1 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du$.

580. Dokážte: a) nech $f(X)$, kde $X = (x_1, \ldots, x_n)$ je spojitá funkcia na intervale $I = \langle 0, x\rangle \times \ldots \times \langle 0, x\rangle$. Potom platí $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n =$

$= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \ldots \int_{x_2}^x f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1$, $(n \geqq 2)$;

b) nech f je spojitá funkcia na intervale $\langle 0, x\rangle$. Potom platí:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!}\left[\int_0^x f(t)\, dt\right]^n.$$

581. Nech $z = K(x, y)$ je spojitá funkcia na intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$ a $K_n(x, y) = \int\int_A \ldots \int K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) \ldots K(t_n, y)\, dt_1 \ldots dt_n$, kde $A = \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle \times \ldots \times \langle a, b\rangle$. Dokážte, že $K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t)\, K_m(t, y)\, dt$.

582. Vypočítajte potenciál homogénnej gule s polomerom R a hustotou γ vzhľadom na túto guľu, t. j. nájdite integrál

$$u = \frac{\gamma^2}{2} \int\int\int_A\int\int\int \frac{1}{r}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

kde množina A je určená nerovnosťami $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leqq R^2$, $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leqq R^2$ a $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

2,3. Transformácia n-rozmerných integrálov

Nech zobrazenie $X = \Phi(T)$, ktoré každému bodu $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ z množiny $G \subset E_n$ priradí bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z priestoru E_n, je dané rovnicami:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Zobrazenie (1) nazývame *jednojednoznačné* alebo *prosté* na množine G, ak pre každé dva rôzne body T_1, T_2 z G sú ich obrazy $\Phi(T_1)$, $\Phi(T_2)$ rôzne.

Ak funkcie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ v (1) majú prvé parciálne derivácie podľa všetkých premenných na otvorenej množine G, tak determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \tag{2}$$

nazývame *Jakobiho funkcionálnym determinantom zobrazenia* Φ (*jakobiánom*) a označujeme ho $D_\Phi(T)$ alebo $D_\Phi(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Ak funkcie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ v zobrazení (1) majú spojité prvé parciálne derivácie podľa všetkých premenných na otvorenej množine G a ak pre každý bod $T \in G$ je $D_\Phi(T) \neq 0$, potom zobrazenie Φ nazývame *regulárnym na množine* G.

Príklad 1. Nech je zobrazenie Φ dané rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Toto zobrazenie, ktoré každému bodu (ϱ, φ) priraďuje bod (x, y), má jakobián

$$D_\Phi(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi, & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi, & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho \tag{4}$$

a na množine G danej nerovnosťami $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ je prosté a regulárne. Nazývame ho *transformáciou pomocou polárnych súradníc* [pozri aj (13) z čl. 4,9/I].

Príklad 2. Nech zobrazenie Φ, ktoré každému bodu (ϱ, φ, u) priraďuje bod (x, y, z), je dané rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= u. \end{aligned} \tag{5}$$

Toto zobrazenie má jakobián

$$D_\Phi(\varrho, \varphi, u) = \begin{vmatrix} \cos \varphi, & -\varrho \sin \varphi, & 0 \\ \sin \varphi, & \varrho \cos \varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \varrho \tag{6}$$

a na množine G danej nerovnosťami $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$ je prosté a regulárne. Nazývame ho *transformáciou pomocou cylindrických* (*valcových*) *súradníc* [pozri aj (14) z čl. 4,19/I].

Príklad 3. Nech zobrazenie Φ, ktoré každému bodu $(\varrho, \varphi, \vartheta)$ priradí bod (x, y, z), je dané rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \cos \vartheta \\ y &= \varrho \sin \varphi \cos \vartheta \\ z &= \varrho \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{7}$$

Toto zobrazenie má jakobián

$$D_\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta, & -\varrho\cos\vartheta\sin\varphi, & -\varrho\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta, & \varrho\cos\varphi\cos\vartheta, & -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & \varrho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \varrho^2\cos\vartheta, \qquad (8)$$

a na množine G danej nerovnosťami $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ je prosté a regulárne. Nazývame ho *transformáciou pomocou sférických (guľových) súradníc* [pozri aj (15) z čl. 4,19/I].

Veta 1.

1. Nech zobrazenie Φ, dané rovnicami $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, je prosté a regulárne na oblasti $G \subset E_2$ a túto zobrazí na oblasť $\Phi(G)$.
2. Nech $B \subset G$ a $A \subset \Phi(G)$ sú pri zobrazení Φ sebe odpovedajúce uzavreté merateľné oblasti.
3. Nech $f(x, y)$ je integrovateľná funkcia na A.

Potom platí:

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint_B f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \,.\, |D_\Phi(u, v)|\,du\,dv. \qquad (9)$$

Veta 2.

1. Nech zobrazenie Φ, dané rovnicami $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, je prosté a regulárne v oblasti $G \subset E_3$ a túto zobrazí na oblasť $\Phi(G)$.
2. Nech $B \subset G$ a $A \subset \Phi(G)$ sú pri zobrazení Φ sebe odpovedajúce uzavreté merateľné oblasti.
3. Nech $f(x, y, z)$ je integrovateľná funkcia na A.

Potom platí:

$$\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] \,.\, |D_\Phi(u, v, w)|\,du\,dv\,dw. \qquad (10)$$

Poznámka 1. Vety 1 a 2 možno rozšíriť za príslušných predpokladov 1, 2, 3 na n-rozmerné integrály a platí:

$$\iint \dots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \iint_B \dots \int f[\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T)] \,.\, |D_\Phi(T)|\,dt_1\,dt_2 \dots dt_n. \qquad (11)$$

Poznámka 2. Ak jakobián zobrazenia nemení znamienko a rovná sa nule alebo v jednotlivých bodoch alebo krivkách alebo plochách, potom v mnohých prípadoch zostáva veta o transformácii n-rozmerných integrálov v platnosti. Opodstatnenosť tohto postupu v každom prípade treba vyšetriť zvlášť. V prípade transformácie pomocou polárnych, cylindrických alebo sférických súradníc vety 1 a 2 platia aj za takto rozšírených predpokladov.

Príklad 4. Vypočítajme:

$$\iint_A e^{-x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

pričom množina A je daná nerovnosťami $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$.

Riešenie. Použijeme transformáciu pomocou polárnych súradníc [pozri (3)]. Množina A je pri tejto transformácii obrazom množiny B danej nerovnosťami $1 \leq \varrho \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, ako sa ľahko presvedčíme použitím transformačných vzťahov (3) v daných nerovnostiach. Toto zobrazenie je na množine určenej nerovnosťami $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ prosté a regulárne. Funkcia $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ je spojitá a teda integrovateľná na množine A. Preto podľa vety 1 a podľa vety 8 z čl. 2,1. platí:

$$\iint_A e^{-x^2 - y^2}\,dx\,dy = \iint_B e^{-\varrho^2\cos^2\varphi - \varrho^2\sin^2\varphi}\,|\varrho|\,d\varrho\,d\varphi =$$

$$= \int_1^3 \left(\int_0^{\pi} \varrho\, e^{-\varrho^2}\, d\varphi \right) d\varrho = \pi \int_1^3 \varrho\, e^{-\varrho^2}\, d\varrho = -\frac{\pi}{2} \Big[e^{-\varrho^2} \Big]_1^3 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^9} \right).$$

Príklad 5. Vypočítajme $\iiint\limits_A \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz$, pričom množina A je daná nerovnosťou $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$.

Riešenie. Pri výpočte použijeme zobrazenie dané rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \cos\varphi \cos\vartheta, \\ y &= b\varrho \sin\varphi \cos\vartheta, \\ z &= c\varrho \sin\vartheta. \end{aligned} \tag{12}$$

Jakobián tohto zobrazenia je:

$$D_\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\vartheta, & -a\varrho\sin\varphi\cos\vartheta, & -a\varrho\cos\varphi\sin\vartheta \\ b\sin\varphi\cos\vartheta, & b\varrho\cos\varphi\cos\vartheta, & -b\varrho\sin\varphi\sin\vartheta \\ c\sin\vartheta, & 0, & c\varrho\cos\vartheta \end{vmatrix} = abc\varrho^2\cos\vartheta.$$

Toto zobrazenie je prosté a regulárne na množine bodov, ktorých pravouhlé súradnice $\varrho, \varphi, \vartheta$ sú určené nerovnosťami $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Množina A pri zobrazení (12) je obrazom množiny B danej nerovnosťami $0 \leq \varrho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Funkcia $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2}$ je spojitá a teda integrovateľná na množine A. Preto podľa vety 2, poznámky 2 a vety 1 z čl. 2,2. platí:

$$\iiint\limits_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_B \sqrt{1 - \frac{a^2\varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{b^2\varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta}{b^2} - \frac{c^2\varrho^2\sin^2\vartheta}{c^2}}\,.$$

$$. \, |abc\varrho^2\cos\vartheta|\, d\varrho\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \varrho^2}\, abc\varrho^2 \cos\vartheta\, d\vartheta \right) d\varphi \right] d\varrho =$$

$$= abc \int_0^1 \varrho^2 \sqrt{1 - \varrho^2}\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta = abc \Big[-\frac{\varrho}{4} \sqrt{(1 - \varrho^2)^3} +$$

$$+ \frac{1}{8} \varrho \sqrt{1 - \varrho^2} + \frac{1}{8} \arcsin \varrho \Big]_0^1 \Big[\varphi \Big]_0^{2\pi} \Big[\sin\vartheta \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \,.\, 2\pi \,.\, 2abc = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

V úlohách 583 až 588 zistite, ktoré z daných zobrazení sú regulárne a prosté na množine A. Vypočítajte jakobián týchto zobrazení:

583. $x = u$, $y = uv$, $A = (0, 1) \times (0, 1)$.

584. $x = uv$, $y = u + v$, $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$.

585. $x = u^2 + v^2$, $y = u/v$, $A = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

586. $x = u + 1/v$, $y = v$, $A = (0, \infty) \times (0, 1)$.

587. $x = e^u v,\ y = u^v,\ A' = (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$.

588. $x = a\varrho \cos \varphi,\ y = b\varrho \sin \varphi,\ A = (0, \infty) \times (0, \pi)$.

589. Dokážte, že zobrazenie určené rovnicami $x + y = u,\ y = uv$ zobrazí trojuholník $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x$ na jednotkový štvorec $0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1$.

590. Nájdite zobrazenie, ktorým krivočiary „štvoruholník“ ohraničený krivkami $xy = 1,\ xy = 2,\ x - y + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0,\ (x > 0,\ y > 0)$ prejde v pravouholník, ktorého strany sú rovnobežné zo súradnicovými osami.

591. Pre akú množinu A bude obraz B po transformácii pomocou polárnych súradníc pravouholníkom?

V úlohách **592** až **597** použitím transformácie pomocou polárnych súradníc vyjadrite dvojný integrál $\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy$, ak je daná množina A:

592. $x^2 + y^2 \leqq 9$.

593. Kruh $x^2 + y^2 \leqq ax,\ (a > 0)$.

594. Trojuholník $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x$.

595. Kruhový úsek ohraničený kružnicou $x^2 + y^2 = 4$ a priamkou $x + y = 2$, $(x > 0,\ y > 0)$.

596. Oblasť ohraničená kružnicami $x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 8x$ a priamkami $y = x,\ y = 2x$.

597. Časť medzikružia $a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$.

V úlohách **598** až **600** vykonajte príslušné transformácie v integráloch $\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy$, ak platí:

598. $u = y + \alpha x,\ uv = y$ a $A = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$.

599. $u = x + y,\ v = x - y$ a $A: 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 - x \leqq y \leqq 2 - x$.

600. $x = \varrho \cos^3 \varphi,\ y = \varrho \sin^3 \varphi$ a $A: x^{2/3} + y^{2/3} \leqq a^{2/3}$.

V úlohách **601** až **607** vypočítajte dané dvojné integrály na oblasti A transformáciou pomocou polárnych súradníc.

601. $\iint\limits_A (1 - 2x - 3y)\,dx\,dy$, A je kruh $x^2 + y^2 \leqq 2$.

602. $\iint\limits_A (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, A je štvrťkruh $x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$.

603. $\iint\limits_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, A je kruh $x^2 + y^2 \leqq ax$.

604. $\iint\limits_A \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy$, A je štvrtkruh $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2 + y^2 \leqq 1$.

605. $\iint\limits_A \frac{\ln (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, A je medzikružie $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq e$.

606. $\iint\limits_A \sin \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, A je medzikružie $\pi^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\pi^2$.

607. $\iint\limits_A \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx\, dy$, A je časť medzikružia $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9$, $y \leqq x\sqrt{3}$, $y \geqq \frac{x}{\sqrt{3}}$.

608. Ak je množina A ohraničená krivkami $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, vypočítajte $\iint\limits_A xy\, dx\, dy$ pomocou danej transformácie $y = ux^3$, $y^2 = vx$.

609. Vypočítajte pomocou transformácie $x = a\varrho \cos \varphi$, $y = b\varrho \sin \varphi$ dvojný integrál

$$\iint\limits_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy, \ A \text{ je vnútro elipsy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1.$$

V úlohách **610** až **612** vypočítajte dané trojné integrály na množine A transformáciou pomocou cylindrických súradníc.

610. $\iiint\limits_A dx\, dy\, dz$, A: $x^2 + y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq 6$.

611. $\iiint\limits_A z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, A je oblasť ohraničená rovinami $y = 0$, $z = 0$, $z = a$, $(a > 0)$ a valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$.

612. $\iiint\limits_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, A je množina ohraničená paraboloidom $2z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 2$.

V úlohách **613** až **617** vypočítajte dané trojné integrály na množine A transformáciou pomocou sférických súradníc.

613. $\iiint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, A je časť gule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

614. $\iiint\limits_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, A: $z \geqq 0$, $4 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 9$.

615. $\iiint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, A je guľa $x^2 + y^2 + z^2 \leqq z$.

616. $\iiint\limits_A z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, A je množina ohraničená kužeľovou plochou $z^2 = h^2(x^2 + y^2)/R^2$ a rovinou $z = h$.

617. $\iiint\limits_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, A je množina ohraničená rovinou $z = 0$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2ax$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

618. Použitím transformácie $x = a\varrho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = b\varrho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = c\varrho\sin\vartheta$ vypočítajte:

$$\iiint\limits_A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0),$$

pričom A je vnútro elipsoidu $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leqq 1$.

619. Vypočítajte $\iiint\limits_A \mathrm{e}^{xyz}x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ak je množina A určená nerovnosťami $x \geqq 0$, $y \geqq 1$, $z \geqq 1$, $xyz \leqq 1$ použitím transformácie $x = u$, $y = (u + v)/v$, $z = (u + v + w)/(u + v)$.

2,4. Obsah rovinných útvarov

Nech A je merateľná množina v E_2. Potom pre jej obsah platí

$$P = \iint\limits_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

Príklad 1. Nájdime pomocou dvojného integrálu obsah časti A roviny ohraničenej krivkami $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ a $x = 4$.

Riešenie. Časť A roviny ohraničená danými krivkami je elementárna oblasť typu $[x, y]$ určená nerovnosťami

$$0 \leqq x \leqq 4,$$
$$\sqrt{x} \leqq y \leqq 2\sqrt{x}$$

(pozri *obr. 9*) a preto podľa vzorca (1) a článku 2,1 dostávame:

$$P = \iint\limits_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \Big[\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \int_0^4 [y]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2}\right]_0^4 \frac{16}{3}.$$

Príklad 2. Nájdime pomocou dvojného integrálu obsah časti A roviny ohraničenej lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Riešenie. Pre hľadaný obsah P platí:

$$P = \iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4 \iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

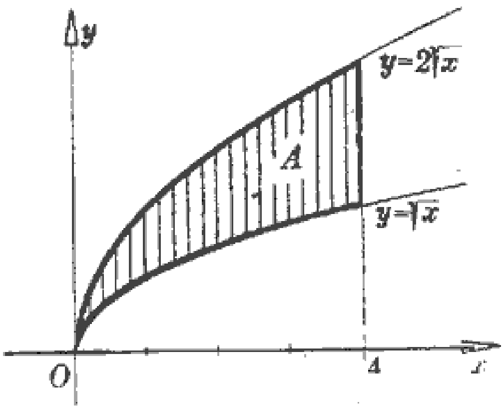
kde B je časť roviny ohraničená danou lemniskátou a osou o_x, ležiaca v prvom kvadrante (pozri *obr. 10*). Keď použijeme transformáciu pomocou polárnych súradníc $x = \varrho \cos \varphi$ a $y = \varrho \sin \varphi$, dostaneme:

$$\iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_C \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi,$$

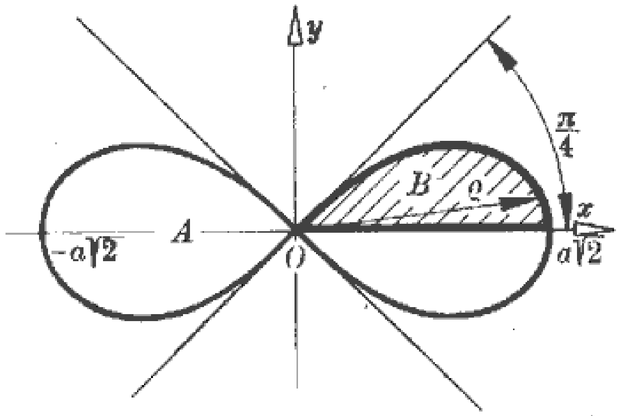
kde C je elementárna oblasť daná nerovnosťami

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \varrho \leq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}.$$



Obr. 9



Obr. 10

Preto ďalej máme

$$\iint_C \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Obsah množiny A je $P = 4\dfrac{a^2}{2} = 2a^2$.

620. Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej priamkami:

$$2x - y = 0,\ 2x - y = 7,\ x - 4y + 7 = 0,\ x - 4y + 14 = 0.$$

621. Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej elipsou $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a priamkou $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

V úlohách 622 až 625 vypočítajte obsah oblasti ohraničenej danými krivkami:

622. $y = \frac{1}{a}(x - a)^2$, $a > 0$, $x^2 + y^2 = a^2$.

623. $x = \frac{y^2 + b^2}{2b}$, $x = \frac{y^2 + a^2}{2a}$, $a > b > 0$.

624. $y = -2$, $y = x + 2$, $y = 2$, $y^2 = x$.

625. $xy = a^2$, $x^2 = ay$, $y = 2a$, $x = 0$ $(a > 0)$.

V úlohách 626 až 633 transformáciou pomocou polárnych súradníc nájdite obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami:

626. $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

627. Kružnicou $x^2 + y^2 = 5$, jej dotyčnicou v bode $A = (1, 2)$ a priamkou $y = 0$.

628. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x + y = a$.

629. Lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

630. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$, $a > 0$.

631. $x^3 + y^3 = axy$.

632. $x^4 + y^4 = 2a^2xy$.

633. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

V úlohách 634 až 639 pomocou zovšeobecnených polárnych súradníc $x = a\varrho \cos^p \varphi$, $y = b\varrho \sin^p \varphi$, kde a, b, p sú vhodne zvolené konštanty, vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami:

634. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

635. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$.

636. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y > 0$.

637. $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

638. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

639. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12} = \frac{xy}{c^2}$.

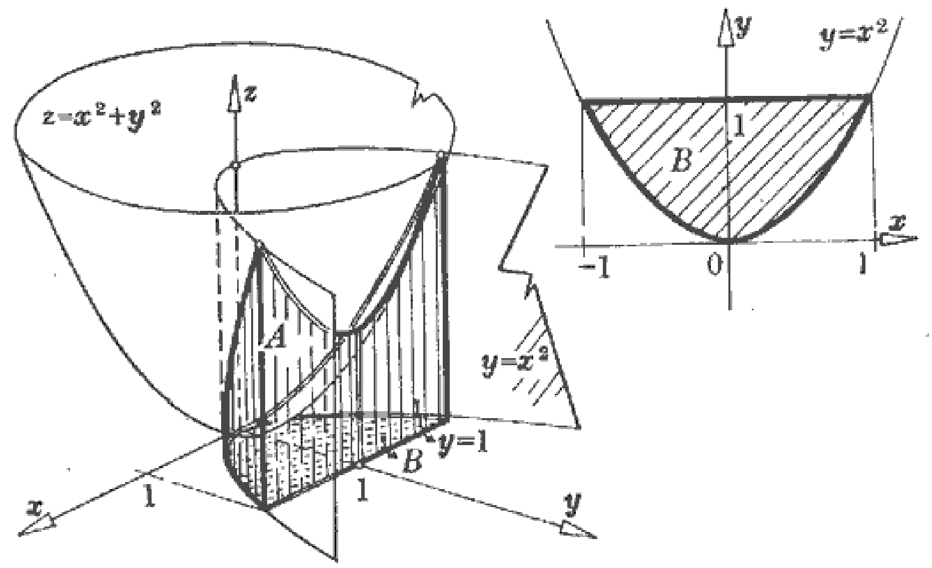
V úlohách **640** až **643** vypočítajte obsah časti A roviny ohraničenej krivkami $\varphi(x, y, a) = 0$, $\varphi(x, y, b) = 0$, $\psi(x, y, \alpha) = 0$, $\psi(x, y, \beta) = 0$ transformáciou určenou rovnicami, ktoré dostanete z rovníc $\varphi(x, y, u) = 0$, $\psi(x, y, v) = 0$, ak A' je ohraničená krivkami.

640. $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $a < b$, $\alpha < \beta$.

641. Hyperbolami $xy = a$, $xy = b$ a parabolami $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$.

642. Parabolami $x^2 = ay$, $x^2 = by$ a priamkami $y = \alpha x$, $y = \beta x$, pričom $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$.

643. $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = \alpha y$, $x^2 = \beta y$, kde $0 < a < b$ a $0 < \alpha < \beta$.



Obr. 11

2,5. Objem telies

Nech A je uzavretá merateľná množina z E_3. Pre objem $V(A)$ množiny A platí:

$$V(A) = \iiint_A \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{1}$$

Nech B je uzavretá merateľná množina z E_2 a funkcie f, g sú také spojité funkcie definované na množine B, že $f(X) < g(X)$ vo vnútri množiny B. Ak množina A trojrozmerného priestoru pozostáva zo všetkých bodov, pre pravouhle súradnice ktorých platí $(x, y) \in B$, $f(x, y) \leqq z \leqq g(x, y)$, nazývame ju *valcovitým telesom* (pozri *obr. 7*). Valcovité teleso A je merateľná trojrozmerná množina a pre jeho objem V platí:

$$V(A) = \iint_B [g(x, y) - f(x, y)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{2}$$

Poznámka. Podobne sa definujú valcovité telesá, ktorých „povrchové priamky" sú rovnobežné so súradnicovou osou o_x, resp. o_y. Pre ich objem platia podobné vzorce ako vzorec (2).

Príklad. 1. Nájdime objem množiny ohraničenej plochami $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

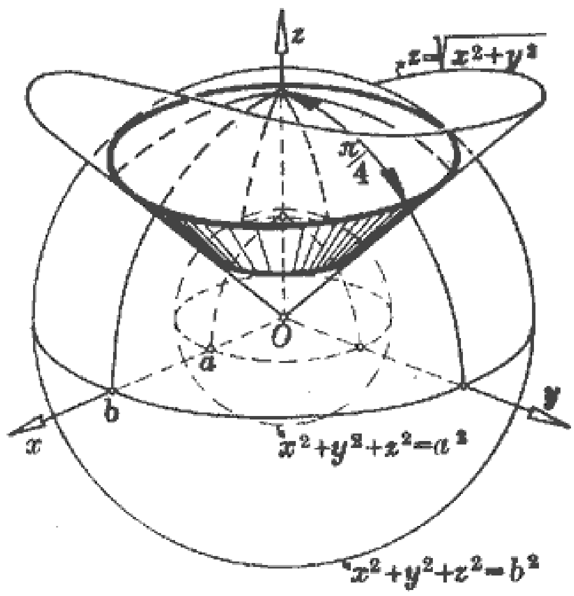
Riešenie. Daná množina A je zdola ohraničená súradnicovou rovinou R_{xy}, zhora rotačným paraboloidom $z = x^2 + y^2$ a z bokov parabolickým valcom $y = x^2$ a rovinou $y = 1$. Množina A

je teda valcovité teleso, pre ktoré platí $(x, y) \in B$, $0 \leqq z \leqq x^2 + y^2$, pričom množina B je elementárna oblasť typu $[x, y]$, $-1 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq 1$ (pozri *obr. 11*). Podľa vzorca (2) pre jej objem platí:

$$V(A) = \iint_B (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \Big[\int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[x^2 y + \frac{y^3}{3}\Big]_{x^2}^{1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \Big(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{88}{105}.$$

Príklad 2. Nájdime objem množiny A ohraničenej plochami $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, pričom $z \geqq 0$ a $0 < a < b$.



Obr. 12

Riešenie. Množina A je teleso ohraničené dvoma koncentrickými guľovými plochami so stredom v začiatku súradnicového systému a „polovicou" kužeľovej plochy $x^2 + y^2 = z^2$ s vrcholom v strede oboch guľových plôch (pozri *obr. 12*). Objem tohto telesa výhodne nájdeme v sférickom súradnicovom systéme. Množina A je totiž obrazom intervalu $a \leqq \varrho \leqq b$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $\pi/4 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$, pri zobrazení Φ danom rovnicami $x = \varrho \cos\varphi \cos\vartheta$, $y = \varrho \sin\varphi \cos\vartheta$, $z = \varrho \sin\vartheta$. Toto zobrazenie je regulárne a prosté na množine určenej nerovnosťami $\varrho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, pričom $D_\Phi = \varrho^2 \cos\vartheta$. Pre $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ nie je dané zobrazenie prosté a pre $\vartheta = \pi/2$, $\vartheta = -\pi/2$ sa $D_\Phi = 0$. Avšak podľa poznámky 2 z článku 2, 3 platí:

$$V(A) = \iiint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big[\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \varrho^2 \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\Big)\mathrm{d}\varphi\Big]\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_a^b \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \Big[\frac{\varrho^3}{3}\Big]_a^b \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \Big[\sin\vartheta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2},$$

čiže

$$V(A) = \frac{\pi}{3}\,(2 - \sqrt{2})\,(b^3 - a^3).$$

V úlohách **644** až **662** nájdite objemy valcovitých telies ohraničených danými plochami.

644. Rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $x + y + z = 4$.

645. Rovinami $x - y + z = 6$, $x + y = 2$, $x = y$, $y = 0$, $z = 0$.

646. Rovinami $6x - 9y + 5z = 0$, $3x - 2y = 0$, $4x - y = 0$, $x + y = 5$, $z = 0$.

647. Rovinami $x/8 + y/4 + z/2 = 1$, $z = 0$ a hranolovou plochou rovnobežnou s osou o_z, ktorej určujúca krivka je štvoruholník s vrcholmi $A = (1, 0)$, $B = (3, 1)$, $C = (2, 3)$, $D = (0, 2)$.

648. Valcovou plochou $y = x^2$ a rovinami $z = 0$, $y + z = 2$.

649. Valcovými plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ a rovinami $z = 0$, $x + z = 6$.

650. Valcovými plochami $z = 4 - y^2$, $y = x^2/2$ a rovinou $z = 0$.

651. Dvoma rotačnými valcami s rovnakým polomerom R, ktorých osi sa kolmo pretínajú.

652. Valcovými plochami $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ a rovinami $z = 0$, $y + z = 1$.

653. Eliptickým valcom $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ a rovinami $z = 0$, $x + z = 0$.

654. Paraboloidom $z = x^2 + y^2$ a rovinami $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ a $y = 6 - x$.

655. Valcovými plochami $y = x + \sin x$, $y = x - \sin x$, $z = (x + y)^2/4$ a rovinou $z = 0$.

656. Paraboloidmi $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

657. Hyperbolickým paraboloidom $z = xy$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$ a rovinou $z = 0$.

658. Paraboloidom $2z = x^2 + y^2$ a kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

659. Kužeľovou plochou $x^2/4 + y^2/9 = z^2$ a elipsoidom $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$.

660. Paraboloidom $cz = x^2 + y^2$, valcom $x^2 + y^2 = ax$ a rovinou $z = 0$.

661. Valcovými plochami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ a rovinami $z = 2y + x$ a $z = 0$.

662. $z = \cos x \cos y$ a rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = \pi/2$.

V úlohách **663** až **670** nájdite objemy valcovitých telies ohraničených danými plochami pomocou transformácie do polárnych súradníc:

663. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

664. $z = e^{-x^2-y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

665. $az = x^2 + y^2$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$ $(a > 0)$.

666. $x^2 + y^2 = az$, $x^4 + y^4 = c^2(x^2 + y^2)$, $z = 0$.

667. $z^2 = 2xy$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

668. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

669. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ (*Vivianiho úloha*).

670. $z = k \operatorname{arctg}(y/x)$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$, $z = 0$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$.

V úlohách 671 až 676 vypočítajte objemy valcovitých telies ohraničených danými plochami transformáciou pomocou zovšeobecnených polárnych súradníc.

671. $z = \operatorname{arctg}(y/x)$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = \operatorname{arctg}(y/x)$. $(y \geqq 0)$.

672. $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

673. $2z = x^2/p + y^2/q$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $z = 0$.

674. $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 + z^2/c^2 = 1$.

675. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = x^2/a^2 - y^2/b^2$.

676. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z^2/c^2$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = x/h$, $z = 0$ $(z > 0)$.

V úlohách 677 až 678 vypočítajte objemy valcovitých telies ohraničených danými plochami. Použite podobné transformácie ako v úlohách 640 až 643:

677. $cz = xy$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = ay$, $x = by$, $z = 0$.

678. $z = y\,e^{-xy/a^2}$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = m$, $y = n$, $z = 0$.

V úlohách 679 až 688 vypočítajte pomocou trojného integrálu objemy telies ohraničených danými plochami.

679. Rovinami $2x + 2y + z - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

680. Rovinami $3x - 2y = 0$, $8x - y = 0$, $2x + 3y - 13 = 0$, $2x + 3y - 26 = 0$, $17x + 6y - 13z = 0$, $z = 0$.

681. Paraboloidmi $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$ a rovinami $y = x$, $y = 2x$ a $x = 1$.

682. Paraboloidmi $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$ a valcovými plochami $y = x$, $y = x^2$.

683. Paraboloidom $z = x^2 + y^2$ a kužeľovou plochou $z^2 = xy$.

684. Paraboloidom $z = 6 - x^2 - y^2$ a kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

685. Valcovými plochami $z = \ln(x + 2)$, $z = \ln(6 - x)$ a rovinami $x = 0$, $x + y = 2$ a $x - y = 2$.

686. Guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ a paraboloidom $x^2 + y^2 = 2 - z$.

687. Guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ a paraboloidom $4z = x^2 + y^2$.

688. Guľovými plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

689. Vypočítajte objem časti gule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4R^2$, ktorá leží vnútri valcovej plochy $x^2 + y^2 = R^2$.

690. Nájdite objem časti gule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$, ktorá je ohraničená rovinami $y = x \operatorname{tg} \beta$, $y = x \operatorname{tg} \alpha$, $0 < \alpha < \beta$, $(x \geqq 0)$.

V úlohách 691 až 697 nájdite transformáciou pomocou sférických alebo cylindrických súradníc objemy telies ohraničených danými plochami:

691. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = z^2$.

692. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

693. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$.

694. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

695. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

696. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2)$.

697. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z\, e^{-(x^2+y^2)/(x^2+y^2+z^2)}$.

V úlohách 698 až 703 transformáciou pomocou zovšeobecnených súradníc nájdite objemy telies ohraničených danými plochami:

698. $(x/a + y/b + z/c)^2 = z/d$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

699. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^4/c^4 = 1$.

700. $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x/h$.

701. $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2$.

702. $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = z^4/h^4$.

703. $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^3 = xyz/h^3$.

V úlohách 704 až 708 pomocou vhodnej transformácie nájdite objemy telies ohraničených plochami:

704. $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} + \sqrt{z/c} = 1$, $(a > 0, b > 0, c > 0)$.

705. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = az^2/(x^2 + y^2)$, $(a > 0)$.

706. $(x + y)/(x + y + z) = (2/\pi) \arcsin (x + y + z)$, $x + y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.

707. $x + y + z = a$, $x + y + z = 2a$, $x + y = z$, $x + y = 2z$, $y = x$, $y = 3x$.

708. $a_1x + b_1y + c_1z = h_1$, $a_1x + b_1y + c_1z = -h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = h_2$, $a_2x + b_2y + c_2z = -h_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = h_3$, $a_3x + b_3y + c_3z = -h_3$.

2,6. Obsah plochy

Nech je plocha S určená rovnicou $\mathbf{w} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$. Nech A je taká merateľná podmnožina B, že je časťou roviny ohraničenou po čiastkach hladkou jednoduchou uzavretou krivkou. Nech parciálne derivácie $\mathbf{r}_u'$, $\mathbf{r}_v'$ sú spojité na množine A, t. j. plocha S je na množine A hladká. Potom pre obsah $P(A)$ plochy $S(A)$ platí:

$$P(A) = \iint_A |\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'| \, du \, dv = \iint_A \sqrt{\mathbf{r}_u'^2 \mathbf{r}_v'^2 - (\mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v')^2} \, du \, dv, \qquad (1)$$

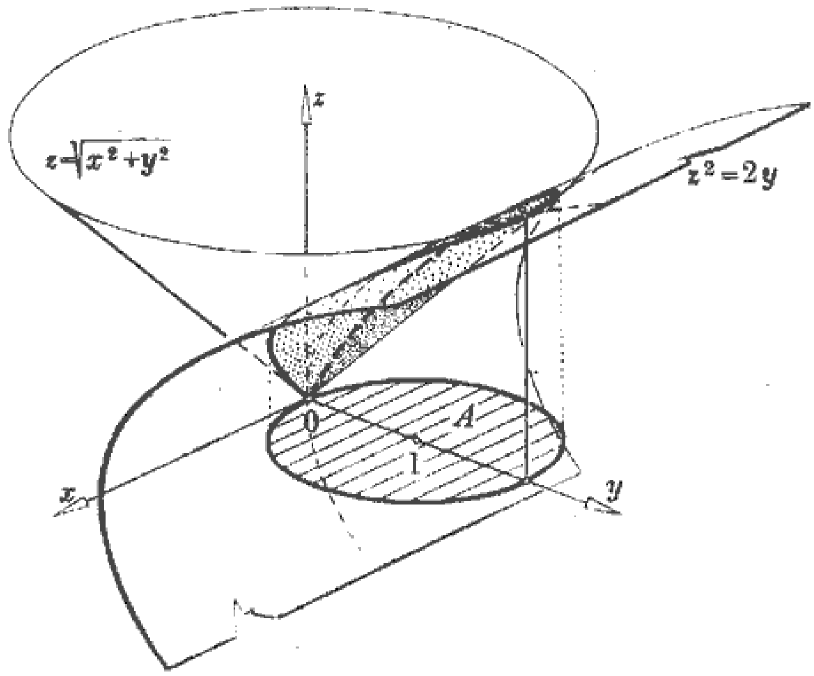
alebo

$$P(A) = \iint_A \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{2}$$

kde E, F, G sú koeficienty prvej kvadratickej formy plochy S (pozri čl. 3, 12/III).

Ak je plocha S určená rovnicou $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, pričom z_x', z_y' sú na množine A spojité funkcie, potom

$$P(A) = \iint_A \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$



Obr. 13

Ak je plocha S určená implicitne rovnicou $F(x, y, z) = 0$, $(x, y) \in A$ a funkcie F_x', F_y', F_z' sú spojité na množine S, pričom $F_z'(X) \neq 0$ pre každý bod $X \in S$, potom je:

$$P(A) = \iint_A \frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}{|F'_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Príklad 1. Nájdime obsah tej časti kužeľovej plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ktorú z nej vytína parabolický valec $z^2 = 2y$.

Riešenie. Plocha S je určená rovnicou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pričom hranicu množiny A nájdime ako priemet priesečnice oboch plôch $z = x^2 + y^2$, $z^2 = 2y$ do roviny R_{xy} (pozri *obr. 13*). Dostávame $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = 0$, čiže hranica množiny A je kružnica $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $z = 0$. Množina A je teda kruh $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Obsah $P(A)$ hľadanej plochy podľa (3) je:

$$P(A) = \iint_A \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\sin\varphi} \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \pi\sqrt{2}.$$

V úlohách 709 až 717 vypočítajte obsah časti danej plochy:

709. $x + y + z - 4 = 0$, ohraničenej rovinami $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$.

710. $x/a + y/b + z/c = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, ohraničenej súradnicovými rovinami.

711. $z^2 = 2xy$, ohraničenej rovinami $x = 1$, $y = 1$, $x = 2$, $y = 4$.

712. $z = (x^2 - y^2)/2$, ohraničenej rovinami $x - y = 1$, $x - y = -1$, $x + y = 1$, $x + y = -1$.

713. $z = xy$, vyťatej valcovou plochou $x^2 + y^2 = a^2$.

714. $2az = x^2 + y^2$ ležiacej vnútri valcovej plochy $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

715. $(x + y)^2 + z = 1$, pre $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

716. $z = (x + y)/(x^2 + y^2)$ vyťatej valcovými plochami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ a ležiacej v prvom oktante.

717. $ay = x^2 + z^2$, pre $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ a ohraničenej rovinou $y = 2a$.

718. Nájdite obsah jedného závitu skrutkovej plochy $z = \operatorname{arctg}(y/x)$ (*helikoidu*), ohraničeného valcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$.

V úlohách 719 až 730 vypočítajte obsah časti danej plochy:

719. $z^2 = 2xy$, ktorú z nej vytína hranolová plocha, pričom jej riadiacou krivkou je štvoruholník s vrcholmi $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 9)$, $D = (0, 9)$ a jej povrchové priamky sú rovnobežné s osou o_z.

720. $x^2 + y^2 = 2$, ohraničenej rovinami $x + z = 0$, $x - z = 0$, $(x > 0,\ y > 0)$.

721. $x^2 + z^2 = 1$, ohraničenej rovinami $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ a ležiacej v prvom a druhom oktante.

722. $y^2 + z^2 = x^2$, ohraničenej valcovou plochou $x^2 - y^2 = a^2$ a rovinami $y = b$, $y = -b$.

723. $x^2/a + y^2/b = 2z$ ležiacej vnútri valcovej plochy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

724. $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ ležiacej vnútri valcovej plochy $x^2/a^2 + y^2/c^2 = 1$, $a > b$.

725. $y^2 + z^2 = x^2$ ležiacej vnútri valcovej plochy $x^2 + y^2 = a^2$.

726. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ležiacej „zvonka" valcových plôch $x^2 + y^2 = ax$, a $x^2 + y^2 = -ax$ (*Vivianiho úloha*).

727. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ležiacej vnútri valcovej plochy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$.

728. $x^2 + y^2 = z^2$ ležiacej vnútri valcovej plochy $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ pre $z \geqq 0$.

729. $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$ ležiacej vnútri valcovej plochy $x^2 + y^2 = 1/4$.

730. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

731. Vypočítajte obsah časti guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ktorá sa nachádza medzi rovnobežkami 48° a 54° a poludníkmi 15° a 24°.

V úlohách 732 a 733 nájdite obsah časti plochy $\mathbf{w} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in A$, ak:

732. $\mathbf{w} = u(\cos v\ \mathbf{i} + \sin v\ \mathbf{j}) + hv\mathbf{k}$, kde $h > 0$, ak $A = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$ (*helikoid*).

733. $\mathbf{w} = (b + a\cos u)(\cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j}) + a\sin u\,\mathbf{k}$, $0 < a \leqq b$, ak $A = \langle\alpha, \beta\rangle \times \langle\gamma, \delta\rangle$ (*anuloid*). Aký je obsah celého anuloidu?

2,7. Fyzikálne aplikácie

A. Rovinné oblasti

Nech je rovinná oblasť A dvojrozmerná merateľná množina, ktorej pl ošná hustota v jej ľubovoľnom bode $X = (x, y)$ je $\sigma(x, y)$.

1. *Hmotnosť* tejto oblasti A je:

$$M = \iint_A \sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

2. *Statický moment* hmotnej oblasti A vzhľadom na os o_x, resp. o_y je:

$$S_x = \iint_A \sigma(x, y)\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad S_y = \iint_A \sigma(x, y)\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

3. *Súradnice ťažiska* $T = (\xi, \eta)$ (pozri aj 5,7/II) hmotnej oblasti A v pravouhlom súradnicovom systéme sú:

$$\xi = \frac{S_y}{M}, \qquad \eta = \frac{S_x}{M}. \tag{3}$$

4. *Moment zotrvačnosti* oblasti A vzhľadom na os o_x, resp. o_y, resp. o_z je:

$$I_x = \iint_A \sigma(x, y)\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad I_y = \iint_A \sigma(x, y)\,x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$I_z = I_x + I_y = \iint_A \sigma(x, y)\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Poznámka. Na výpočet dvojných integrálov vedú mnohé fyzikálne aplikácie z teórie rovinných fyzikálnych polí (gravitačných, elektrických, magnetických, tepelných a iných).

Príklad 1. Vypočítajme moment zotrvačnosti vzhľadom na os o_z hmotnej oblasti tvaru kruhu, ktorý je daný nerovnosťou $x^2 + y^2 \leqq 2ax$, ak plošná hustota $\sigma(x, y)$ v ľubovoľnom bode je priamo úmerná jeho vzdialenosti od začiatku súradnicového systému.

Riešenie. Podľa vzorca (4) hľadaný moment zotrvačnosti je:

$$I_z = \iint_A \sigma(x, y)\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $\sigma(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$. Tento integrál vypočítame transformáciou pomocou polárnych súradníc $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$. Oblasť A v polárnom súradnicovom systéme je popísaná nerovnosťami

$$-\pi/2 \leqq \varrho \leqq \pi/2,$$
$$0 \leqq \varrho \leqq 2a\cos\varphi.$$

Preto platí:

$$I_z = \iint_A k\sqrt{x^2 + y^2}\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy = k \iint_A (x^2 + y^2)^{3/2}\,dx\,dy =$$

$$= k \iint_B (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi =$$

$$= k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2a\cos\varphi} \varrho^4\,d\varrho \right) d\varphi = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\varrho^5}{5} \right]_0^{2a\cos\varphi} = \frac{32}{5} a^5 k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{32}{5} a^5 k \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^2\,dt = \frac{512}{75} a^5 k.$$

B. Priestorové oblasti

Nech teleso A je trojrozmerná merateľná množina, ktorého hustota v jeho ľubovoľnom bode $X = (x, y, z)$ je $\gamma(x, y, z)$.

1. *Hmotnosť* telesa A je:

$$M = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

2. *Statický moment* telesa A vzhľadom na rovinu R_{xy}, resp. R_{xz}, resp. R_{yz} je:

$$S_{xy} = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,z\,dx\,dy\,dz, \qquad S_{xz} = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,y\,dx\,dy\,dz,$$

$$S_{yz} = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

3. *Súradnice ťažiska* $T = (\xi, \eta, \zeta)$ telesa A v pravouhlom súradnicovom systéme sú:

$$\xi = \frac{S_{yz}}{M}, \quad \eta = \frac{S_{xz}}{M}, \quad \zeta = \frac{S_{xy}}{M}. \tag{7}$$

4. *Moment zotrvačnosti* telesa A vzhľadom na os o_x, resp. o_y, resp. o_z je:

$$I_x = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,(x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz, \tag{8}$$

$$I_z = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Príklad 2. Nájdime súradnice ťažiska ihlana A, ktorý je ohraničený rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, a $x/a + y/b + z/c = 1$, pričom hustota $\gamma(x, y, z) = k$ (k je kladná konštanta).

Riešenie. Statický moment telesa vzhľadom na rovinu R_{yz} podľa (6) je:

$$S_{yz} = \iiint_A \gamma(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz. \tag{9}$$

Ihlan A je elementárna oblasť daná nerovnosťami:

$$0 \leq x \leq a,$$

$$0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

$$0 \leq z \leq c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Z (9) dostaneme:

$$S_{yz} = k \int_0^a x \left[\int_0^{b(1-x/a)} \left(\int_0^{c(1-x/a-y/b)} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$

$$= k \int_0^a x \left[\int_0^{b(1-x/a)} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = kc \int_0^a x \left[b\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{kbc}{2} \int_0^a x \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{ka^2bc}{24}.$$

Podobne vypočítame S_{xz} a S_{xy} a dostaneme:

$$S_{xz} = \frac{kab^2c}{24}, \qquad S_{xy} = \frac{kabc^2}{24}.$$

Hmotnosť telesa A je:

$$M = k\,\frac{abc}{6}.$$

Preto podľa (7) súradnice ťažiska sú:

$$\xi = \frac{ka^2bc/24}{kabc/6} = \frac{a}{4}, \quad \eta = \frac{kab^2c/24}{kabc/6} = \frac{b}{4}, \quad \zeta = \frac{kabc^2/24}{kabc/6} = \frac{c}{4}.$$

Ťažisko je $T = (a/4, b/4, c/4)$.

Poznámka. Na výpočet trojných a viacrozmerných integrálov vedú mnohé fyzikálne aplikácie, z teórie fyzikálnych priestorových polí, ako napr. výpočet gravitačného potenciálu, elektrostatického potenciálu, vypočet tepla v telese, výpočet náboja nabitého telesa atď.

Príklad 8. Vypočítajme gravitačný potenciál na osi homogénnej polgule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, s hustotou γ, v bode $B = (0, 0, b)$, pričom $b > a$.

Riešenie. Z fyziky vieme, že hľadaný gravitačný potenciál v bode $X = (x_0, y_0, z_0)$ mimo telesa sa vypočíta podľa vzorca

$$V = -\varkappa \iiint_A \frac{\gamma(x, y, z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

kde $\varkappa$ je gravitačná konštanta a $\gamma(x, y, z)$ je hustota v ľubovoľnom bode $X = (x, y, z)$ telesa.
V našom prípade je:

$$V = -\varkappa\gamma \iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \tag{10}$$

kde A je polguľa $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$. Integrál (10) vypočítame transformáciou pomocou cylindrických súradníc: $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = u$.

Polguľa A je elementárna oblasť a je popísaná v cylindrickom súradnicovom systéme nerovnosťami:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq u \leq a,$$

$$0 \leq \varrho \leq \sqrt{a^2 - u^2}.$$

Z (10) dostaneme:

$$V = -\varkappa\gamma \iiint\limits_B \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + (u - b)^2}} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}\varrho = -\varkappa\gamma \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{a} \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2 - u^2}} \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + (u - b)^2}} \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\varkappa\gamma \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{a} \left[\sqrt{\varrho^2 + (u - b)^2} \,\right]_0^{\sqrt{a^2 - u^2}} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}\varphi = -\varkappa\gamma \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{u} \left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2bu} - |u - \right.\right.$$

$$\left.\left. - b| \right) \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}\varphi = -\varkappa\gamma \int\limits_0^{2\pi} \left(\left[\frac{1}{-3b} (a^2 + b^2 - 2bu)^{3/2} - bu + \frac{u^2}{2} \right]_0^a \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\varkappa\gamma \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{(a^2 + b^2 - 2ab)^{3/2}}{-3b} - \frac{(a^2 + b^2)^{3/2}}{-3b} - ba + \frac{a^2}{2} \right] \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2\gamma\varkappa\pi}{3b} \left[(b - a)^3 - (a^2 - b^2)^{3/2} + 3\,ab^2 - \frac{3a^2 b}{2} \right],$$

čo je hľadaný potenciál.

734. Nájdite hmotnosť štvorcovej dosky so stranou $2a$, ak hustota dosky je priamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od priesečníku uhlopriečok štvorca a vo vrcholoch štvorca sa rovná 1.

735. Nájdite hmotnosť obdĺžnikovej dosky $ABCD$ so stranami a, b, ak jej plošná hustota σ v ľubovoľnom jej bode P je priamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti bodu P od vrcholu A.

736. Na oblasti ohraničenej elipsou s polosami a, b je hustota priamo úmerná vzdialenosti od hlavnej osi, pričom v jednotkovej vzdialenosti od tejto osi rovná sa σ. Vypočítajte hmotnosť oblasti.

737. Vypočítajte statické momenty S_x a S_y homogénnej časti roviny ($\sigma = 1$), danej nerovnosťami $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

V úlohách **738** až **743** vypočítajte súradnice ťažiska homogénnej oblasti:

738. Časti roviny ohraničenej parabolou $y^2 = 2px$ a priamkou $x = a$, $a > 0$.

739. Homogénneho kruhového úseku s polomerom r, výškou h a so stredovým uhlom α.

740. Homogénneho kruhového výseku medzikružia s polomermi r, R, $(r < R)$ a stredovým uhlom α.

741. Časti roviny ohraničenej súradnicovými osami a časťou kružnice $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $a > 0$.

742. Časti roviny ohraničenej krivkou $(x/a + y/b)^3 = xy/c^2$.

743. Časti roviny ohraničenej krivkou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, súradnicovými osami $(x > 0,\ y > 0)$.

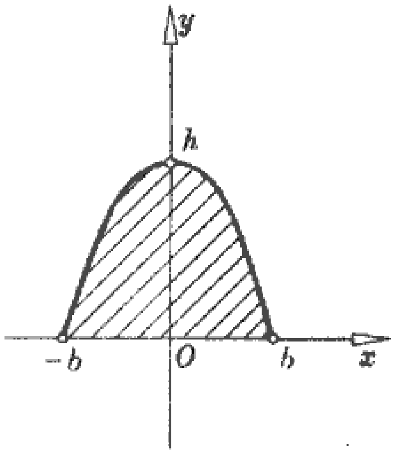
744. Nájdite ťažisko kruhovej dosky $x^2 + y^2 \leqq a^2$, ak jej plošná hustota σ v jej každom bode M je priamo úmerná vzdialenosti $\varrho(A, M)$, $A = (a, 0)$.

745. Nájdite moment zotrvačnosti homogénneho lichobežníka ($\sigma = 1$), ktorého základne sú a, b ($a > b$) a výška v, vzhľadom na priamku, ktorá prechádza stredmi oboch základní.

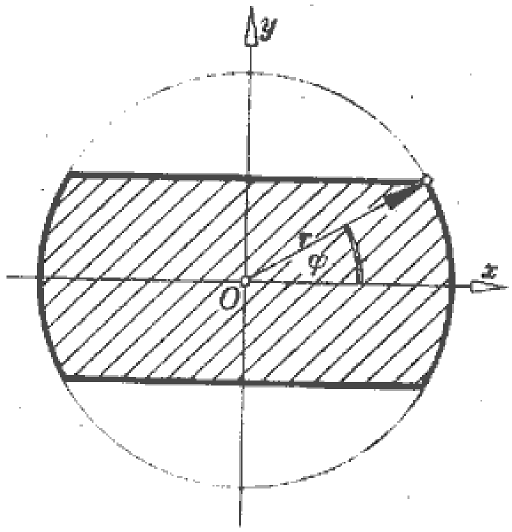
746. Vypočítajte moment zotrvačnosti vzhľadom na os o_x homogénneho parabolického segmentu znázorneného na *obr. 14*.

747. Vypočítajte moment zotrvačnosti vzhľadom na os o_x homogénnej časti roviny znázornenej na *obr. 15*.

748. Nájdite momenty zotrvačnosti homogénneho výseku kružnice s polomerom a, so stredovým uhlom 2α, vzhľadom na os symetrie a vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom útvaru a kolmú na os symetrie:



Obr. 14



Obr. 15

V úlohách **749** až **751** vypočítajte moment zotrvačnosti vzhľadom na os o_x a o_y daných homogénnych útvarov.

749. Časti roviny ohraničenej elipsami so spoločným stredom a spoločnými osami, ak dĺžka osí väčšej elipsy je a, b a menšej elipsy a_1, b_1.

750. Časti roviny ohraničenej krivkou $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

751. Časti roviny ohraničenej krivkami $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ ($x > 0$, $y > 0$).

752. Dokážte, že moment zotrvačnosti dosky A vzhľadom na os, ktorá prechádza jej ťažiskom $O = (0, 0)$ a zviera s osou o_x uhol α, je:

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

kde I_x, I_y sú momenty zotrvačnosti dosky vzhľadom na súradnicové osi a I_{xy} je deviačný moment $I_{xy} = \iint\limits_A \sigma(x, y)\, xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

753. Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej dosky tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou a vzhľadom na priamku, ktorá prechádza jeho ťažiskom a zviera uhol α s jeho výškou.

754. Teleso tvaru rotačného valca s polomerom a, výškou b a s hustotou γ je úplne ponorené do kvapaliny s hustotou δ tak, že jeho ťažisko je v hĺbke h pod hladinou a jeho os zviera uhol α so zvislým smerom. Nájdite tlakovú silu, ktorou pôsobí kvapalina na dolnú a hornú podstavu valca.

V úlohách 755 až 759 nájdite hmotnosť nehomogénnych telies.

755. Kocky $J = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, ak jej hustota v jej ľubovoľnom bode $P = (x, y, z)$ je $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

756. Gule s polomerom R, ak jej hustota je priamo úmerná tretej mocnine vzdialenosti od jej stredu a v jednotkovej vzdialenosti sa rovná γ.

757. Telesa ohraničeného plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$, ak $\gamma(x, y, z) = z$.

758. Rotačného valca s polomerom základne R a výškou H, ak jeho hustota sa rovná druhej mocnine vzdialenosti od stredu základne valca.

759. Kužeľa s výškou h a polomerom základne R, ak hustota v každom jeho bode P je priamo úmerná vzdialenosti bodu P od jeho vrcholu.

V úlohách 760 až 770 nájdite súradnice ťažiska homogénnych telies ohraničených danými plochami.

760. $x + y + z = 2a$, $x = a$, $y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

761. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

762. $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$.

763. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ $(z \geqq 0)$ a dvoma rovinami prechádzajúcimi poludníkmi, ktoré s rovinou $y = 0$ zvierajú uhly φ_1 a φ_2.

764. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z = 0$ $(z \geqq 0)$.

765. $2z = x^2 + y^2$, $x + y = z$.

766. $z = x^2 + y^2$, $z = (x^2 + y^2)/2$, $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$.

767. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$.

768. $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

769. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$.

770. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{abc}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

771. Nájdite súradnice ťažiska nehomogénnej kocky $J = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, ak jej hustota γ v každom jej bode $P = (x, y, z)$ je $\gamma(P) = x^2y^4z^6$.

V úlohách 772 až 779 nájdite momenty zotrvačnosti homogénnych telies $(\gamma = 1)$ ohraničených danými plochami vzhľadom na súradnicové osi.

772. Ihlana $x/a + y/b + z/c = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

773. Dutého valca, ktorého výška je h, polomer vnútornej základne a, vonkajšej b, vzhľadom na os o_z, ktorá je jeho osou.

774. Kužeľa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z^2/c^2$, $z = c$.

775. Elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

776. Anuloidu $x = (a + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi$, $y = (a + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi$, $z = \sin\vartheta$ vzhľadom na os o_z.

777. $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$ vzhľadom na os o_z.

778. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

779. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = x/a$.

780. Dokážte rovnosť

$$J_1 = Mh^2 + J,$$

kde J_1 je moment zotrvačnosti vzhľadom na danú os, M je hmotnosť telesa, J je moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a rovnobežnú s danou osou a h je vzdialenosť oboch osí.

781. Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej kocky s hranou a vzhľadom na jej hranu.

782. Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej gule vzhľadom na priamku, ktorá sa jej dotýka.

783. Nájdite moment zotrvačnosti nehomogénnej gule vzhľadom na jej priemer, ak jej hustota v každom jej bode P je priamo úmerná vzdialenosti $\varrho(P, S)$, kde S je stred gule.

784. Daná je homogénna guľa s polomerom R a s hustotou γ. Vypočítajte silu, ktorou priťahuje hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý je vo vzdialenosti a od stredu gule. Dokážte, že ak $a > R$, potom je táto sila taká, ako keby hmotnosť gule bola sústredená do jej stredu.

785. Nájdite silu, ktorou priťahuje homogénny kužeľ s polomerom R, výškou h a hustotou γ hmotný bod s jednotkovou hmotnosťou, ak tento leží v strede jeho základne.

786. Dané je homogénne duté teleso ohraničené dvoma sústrednými guľovými plochami. Dokážte, že sila, ktorou toto teleso priťahuje bod nachádzajúci sa v dutine tohto telesa, rovná sa nule.

787. Nájdite silu, ktorou priťahuje homogénny valec $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $0 \leqq z \leqq h$ s hustotou γ hmotný bod $A = (0, 0, \zeta)$ s jednotkovou hmotnosťou.

788. Daná je guľa $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$. Jej hustota v každom jej bode $P = (x, y, z)$ je $\gamma = \lambda z^2$. Vypočítajte silu, ktorou priťahuje hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý je na osi o_z vo vzdialenosti $2R$ od stredu tejto gule.

789. Bočná stena nádoby má tvar trojuholníka s výškou h a je v rovine odklonenej o uhol α od hladiny kvapaliny. V akej hĺbke je pôsobisko sily, ktorou pôsobí kvapalina na túto stenu, ak:

a) základňa trojuholníka je na hladine kvapaliny,

b) vrchol trojuholníka je na hladine a základňa je s ňou rovnobežná.

2,8. Nevlastné viacrozmerné integrály

A. Neohraničená funkcia

Nech X je bod z E_2 a $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ postupnosť podmnožín z E_2 s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. $X \in A_k$ pre $k = 1, 2, \ldots$.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0$, kde d_k je priemer množiny A_k pre $k = 1, 2, \ldots$.

Potom hovoríme, že postupnosť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je *„zužujúcou"* sa postupnosťou k bodu X.

Nech M je merateľná, ohraničená oblasť z E_2 a $X \in M$. Nech je funkcia $f(x, y)$ neohraničená na nejakom okolí bodu X, ale nech je ohraničená a integrovateľná na každej množine $M - A$, kde A je merateľná oblasť obsahujúca bod X (bod X nazývame *kritickým bodom*). Ak pre každú „zužujúcu" sa k bodu X postupnosť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ merateľných oblastí A_k existuje:

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{M-A_k} f(x, y)\,dx\,dy = I, \quad \text{potom} \quad I = \iint\limits_M f(x, y)\,dx\,dy$$

nazývame *nevlastným dvojným integrálom na oblasti M*.

Keď je táto limita vlastná, hovoríme, že tento integrál konverguje, v opačnom prípade hovoríme, že diverguje, alebo že nevlastný integrál neexistuje.

Poznámka 1. V prípade nezápornej funkcie f stačí vyšetriť existenciu limity pre jedinú „zužujúcu" sa postupnosť.

B. Neohraničená oblasť

Nech M je neohraničená množina z E_2 a $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ postupnosť podmnožín z M s touto vlastnosťou:

Keď si zvolíme ľubovoľné reálne číslo $r > 0$, potom všetky body kruhu so stredom v bode O s polomerom r, ktoré sú z M, patria do skoro všetkých množín postupnosti $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom hovoríme, že postupnosť $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ *„vyčerpáva"* množinu M.

Nech M je neohraničená oblasť v E_2 a každá ohraničená časť jej hranice nech má mieru nula. Nech $f(x, y)$ je integrovateľná na každej ohraničenej merateľnej podoblasti z M. Ak pre každú postupnosť $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ merateľných oblastí M_k, ktorá „vyčerpáva" M, existuje:

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{M_k} f(x, y)\,dx\,dy = I, \quad \text{potom} \quad I = \iint\limits_M f(x, y)\,dx\,dy$$

nazývame nevlastným dvojným integrálom na oblasti M.

Keď je táto limita vlastná, hovoríme, že tento integrál konverguje, v opačnom prípade, že diverguje, alebo že nevlastný integrál neexistuje.

Poznámka 2. V prípade nezápornej funkcie f stačí vyšetriť existenciu limity pre jedinú „vyčerpávajúcu" postupnosť.

Veta 1. (*Všeobecné kritérium konvergencie.*) Nech M je ohraničená merateľná oblasť. Nech funkcie $f(x, y)$ a $g(x, y)$ majú na M jediný kritický bod (x_0, y_0) a sú integrovateľné na každej množine $M - A$, kde A je merateľná oblasť obsahujúca bod (x_0, y_0). Nech na množine M platí $0 \leq |f(x, y)| \leq g(x, y)$. Potom

1. Ak $\iint\limits_M g(x, y)\,dx\,dy$ konverguje, tak konverguje aj $\iint\limits_M f(x, y)\,dx\,dy$.
2. Ak $\iint\limits_M f(x, y)\,dx\,dy$ diverguje, tak diverguje aj $\iint\limits_M g(x, y)\,dx\,dy$.

Veta 2. (*Špeciálne kritérium konvergencie.*) Nech M je ohraničená, merateľná oblasť. Nech funkcia $f(x, y)$ má na M jediný kritický bod (x_0, y_0), je integrovateľná na každej množine $M - A$, kde A je merateľná oblasť obsahujúca bod (x_0, y_0) a nech C je kladné číslo. Potom

1. Ak pre každý bod $(x, y) \in M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ platí:

$$|f(x, y)| < \frac{C}{[\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,]^\alpha} \quad \text{a} \quad \alpha < 2, \text{ tak} \iint_M f(x, y)\,dx\,dy$$

konverguje.

2. Ak pre každý bod $(x, y) \in M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ platí:

$$\frac{C}{[\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,]^\alpha} < f(x, y) \quad \text{a} \quad \alpha \geqq 2, \quad \text{tak} \iint_M f(x, y)\,dx\,dy$$

diverguje.

Poznámka 3. Podobné vety platia aj v prípade B pre nevlastné integrály na neohraničených oblastiach. Namiesto $\alpha < 2$ treba však vziať $\alpha > 2$ a namiesto $\alpha \geqq 2$ treba vziať $\alpha \leqq 2$.

Pri výpočte využívame možnosti vyjadrenia dvojného integrálu pomocou opakovaného integrovania a zámenu premenných. K podmienkam z vety čl. 2,1, pri ktorých možno vyjadriť dvojný integrál pomocou opakovaného, treba pridať podmienku, že nevlastný integrál z funkcie $|f(x, y)|$ je konvergentný.

Poznámka 4. Podobne sa definujú a počítajú nevlastné n-rozmerné integrály, kde $n > 2$.

Príklad 1. Vypočítajme $\iint_A xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, kde $A = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

Riešenie. Príklad budeme riešiť dvoma spôsobmi.

I. spôsob (podľa definície). Pretože $f(x, y) = xy\, e^{-x^2-y^2}$ je nezáporná funkcia, podľa poznámky 2 stačí vziať napr. postupnosť štvrťkruhov $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ so stredmi v začiatku, ktoré „vyčerpávajú" interval $\langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$ a nájsť $\lim\limits_{k\to\infty} \iint_{K_k} xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$. Nech K_k je štvrťkruh $0 \leqq y \leqq r_k$, $0 \leqq x \leqq \sqrt{r_k^2 - y^2}$, kde r_k je jeho polomer. Potom dostávame:

$$\iint_{K_k} xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{r_k} \left[\int_0^{\sqrt{r_k^2-y^2}} xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^{r_k} \left[-\frac{1}{2}\, y\, e^{-x^2-y^2} \right]_0^{\sqrt{r_k^2-y^2}} dy = -\frac{1}{2} \int_0^{r_k} [y\, e^{-r_k^2} - y\, e^{-y^2}]\,dy = -\frac{1}{4}\,(r_k^2 e^{-r_k^2} + e^{-r_k^2} - 1).$$

Počítajme teraz

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{K_k} xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{4}\,(r_k^2\, e^{-r_k^2} + e^{-r_k^2} - 1) \right] = \lim_{r_k\to\infty} \left[-\frac{1}{4}\,(r_k^2\, e^{-r_k^2} + \right.$$

$$\left. + e^{-r_k^2} - 1) \right] = \frac{1}{4}\,.$$

Je teda $\iint_A xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \dfrac{1}{4}$.

II. spôsob (pomocou opakovaného integrovania).

$$\iint_A xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \left[\lim_{b\to\infty} \int_0^b xy\, e^{-x^2-y^2}\,dx \right] dy =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \left\{ \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2}\, y\, e^{-x^2-y^2} \right]_0^b \right\} dy = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \lim_{b\to\infty} \left\{ -\frac{1}{2}\, y\, e^{-b^2-y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, y e^{-y^2} \right\} dy = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^a y\, e^{-y^2}\, dy = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{4}\, e^{-y^2} \right]_0^a = \frac{1}{4}.$$

Príklad 2. Vyšetrime, či $\iint\limits_M \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, kde M je kruh so stredom v začiatku s polomerom r, konverguje.

Riešenie. Zo spojitosti funkcie $e^{-x^2-y^2}$ vyplýva, že existuje taký kruh K so stredom v začiatku s polomerom $\varrho < r$, $K \subset M$, že v jeho bodoch je $\frac{1}{2} < e^{-x^2-y^2}$. V bodoch $(x, y) \neq (0, 0)$ tohto kruhu platí $0 < \frac{1/2}{x^2+y^2} < \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$. Z toho podľa vety 2, pretože $\alpha = 2$, vyplýva, že integrál $\iint\limits_K \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ a teda tiež $\iint\limits_M \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ diverguje.

V úlohách 790 až 795 vypočítajte:

790. $\iint\limits_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, ak množina A je daná nerovnosťou $x^2 + y^2 \leqq x$.

791. $\iint\limits_A \frac{dx\, dy}{\sqrt[3]{xy - x - y + 1}}$ ak A je štvorec so stredom v bode $S = (1, 1)$ a jedným vrcholom v začiatku $O = (0, 0)$.

792. $\iint\limits_A \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$, ak A je množina daná nerovnosťami $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq 1$.

793. $\iint\limits_A e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $y = \sqrt{x}$.

794. $\iint\limits_A \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx, dy$ ak A je kruh $x^2 + y^2 \leqq 1$.

795. $\iint\limits_A \ln \sin (x - y)\, dx\, dy$, ak A je trojuholník ohraničený priamkami $y = 0$, $y = x$, $y = \pi$.

V úlohách 796 až 799 zistite, či dané integrály konvergujú.

796. $\iint\limits_A \frac{\sin (x^2 + y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\, dx\, dy$, kde A je kruh $x^2 + y^2 \leqq r^2$.

797. $\iint_A \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, kde A je kruh $x^2 + y^2 \leqq r^2$.

798. $\iint_A \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha} \, dx \, dy$, ak A je kruh $x^2 + y^2 \leqq 1$.

799. $\iint_A \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^\alpha} \, dx \, dy$, kde A je štvorec, ktorého strany majú rovnice $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$.

V úlohách **800** až **807** vypočítajte:

800. $\iint_{E_2} \frac{dx \, dy}{1 + x^2 + y^2}$.

801. $\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \, dx \, dy$, $\alpha > 1$, ak množina A je daná nerovnosťou $x^2 + y^2 \geqq 1$.

802. $\iint_A \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$, kde $A = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

803. $\iint_A e^{-(x+y)} \, dx \, dy$, ak množina A je daná nerovnosťami $0 \leqq x \leqq y$, $0 < y < \infty$.

804. $\iint_{E_2} e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy$.

805. $\iint_{E_2} e^{-|x|-|y|} \, dx \, dy$.

806. $\iint_A e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{xy} \, dx \, dy$, kde k je const a $A = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

807. $\iint_A e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \cos ax \sin by \, dx \, dy$, kde a, b sú const a $A = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

V úlohách **808** až **810** zistite, či existujú nevlastné integrály.

808. $\iint_{E_2} \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy$.

809. $\iint_{E_2} e^{-xy} \sin x \, dx \, dy$.

810. $\iint\limits_A \frac{dx\,dy}{|x|^\alpha + |y|^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, ak množina A je daná nerovnosťou $|x| + |y| \geqq 1$.

811. Dokážte, že objem telesa, ohraničeného plochami $z = 0$ a $z = e^{-x^2-y^2}$, rovná sa π.

V úlohách 812 až 815 vypočítajte:

812. $\iiint\limits_A \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{5}}}\,dx\,dy\,dz$, ak $A = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

813. $\iiint\limits_A \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}\,dx\,dy\,dz$, ak A je guľa $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$.

814. $\iiint\limits_A \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}\,dx\,dy\,dz$, kde A je guľa $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqq r^2$.

815. $\iiint\limits_A \frac{xyz}{\sqrt{\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2}}\,dx\,dy\,dz$, $\alpha > \beta > \gamma > 0$, ak množina A je daná nerovnosťami $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$.

V úlohách 816 až 820 vypočítajte:

816. $\iiint\limits_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}\,dx\,dy\,dz$, ak množina A je daná nerovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 \geqq 1$.

817. $\iiint\limits_A \frac{dx\,dy\,dz}{(1 + x + y + z)^7}$, kde $A = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

818. $\iiint\limits_A \ln(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, kde A je guľa $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$.

819. $\iiint\limits_{E_3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

820. $\iiint\limits_A e^{xyz} x^2 y\,dx\,dy\,dz$, kde množina A je daná nerovnosťami $0 \leqq x \leqq \frac{1}{yz}$, $1 \leqq y < \infty$, $1 \leqq z < \infty$.

V úlohách 821 až 823 zistite, či dané nevlastné integrály konvergujú.

821. $\iiint\limits_A \frac{\ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, kde A je guľa $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$.

822. $\displaystyle\iiint_A \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$, kde A je guľa $x^2+y^2+z^2 \leqq r^2$.

823. $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ak:

a) A je guľa $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$,

b) množina A je daná nerovnosťou $x^2+y^2+z^2 \geqq 1$.

Vypočítajte:

824. $\displaystyle\iint_{E_n}\ldots\int e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$.

3. PARAMETRICKÉ INTEGRÁLY

3,1. Integrály závislé od parametra

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na intervale $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a pre každé $y_0 \in \langle c, d\rangle$ je funkcia $g(x) = f(x, y_0)$ integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom funkciu

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

nazývame *parametrickým integrálom* alebo integrálom závislým od parametra.

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na intervale $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, pričom $y_0 \in \langle c, d\rangle$. Hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ *rovnomerne konverguje* k funkcii $g(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, ak pre každú postupnosť $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k y_0, pričom $y_n \in \langle c, d\rangle$, postupnosť funkcií $\left\{f(x, y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne konverguje ku $g(x)$.

Veta 1. Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na intervale $J_1 = \langle a, b\rangle \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ a pre každé $x_0 \in \langle a, b\rangle$ existuje limita $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = g(x_0)$. Funkcia $f(x, y)$ rovnomerne konverguje k funkcii $g(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$ vtedy a len vtedy, ak pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje také okolie $O_\delta(y_0)$, že pre všetky čísla y z tohto okolia a pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platí:

$$|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon.$$

Veta 2. Ak pre každé $y_1 \in \langle c, d\rangle$ je funkcia $f(x, y_1)$ spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a funkcia $f(x, y)$ rovnomerne konverguje k funkcii $g(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $y_0 \in \langle c, d\rangle$, potom funkcia g je na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitá.

Pre parametrické integrály platia nasledujúce vety:

Veta 3. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na intervale $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, potom funkcia $F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ je spojitá na intervale $\langle c, d\rangle$.

Veta 4. Nech pre každé $y_1 \in \langle c, d\rangle$ je funkcia $f(x, y_1)$ integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$. Nech funkcia $f(x, y)$ definovaná na intervale $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ rovnomerne konverguje k funkcii $g(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $y_0 \in \langle c, d\rangle$. Potom platí:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y)\right] \mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 5. Nech parametrický integrál $F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ je definovaný v intervale $\langle c, d\rangle$.

Nech parciálna derivácia $f'_y(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ platí:

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x.$$

Veta 6. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom platí:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Veta 7. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a funkcie $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sú spojité na intervale $\langle c, d\rangle$, pričom ich obory hodnôt ležia v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom parametrický integrál $F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ je spojitá funkcia v intervale $\langle c, d\rangle$.

Veta 8. Nech sú splnené predpoklady vety 7 a existujú derivácie $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ v intervale $\langle c, d\rangle$, pričom parciálna derivácia $f'_y(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, potom platí:

$$F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \beta'(y) f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y].$$

Príklad 1. Vypočítajme určitý integrál

$$\int_0^1 \frac{x^3 - x}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie. Možno ukázať, že primitívna funkcia k funkcii $f(x) = (x^3 - x)/\ln x$ v intervale $(0, 1)$ sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Ľahko zistíme, že funkcia f sa dá vyjadriť takto

$$\frac{x^3 - x}{\ln x} = \left[\frac{x^t}{\ln x}\right]_1^3 = \int_1^3 x^t\,\mathrm{d}t,$$

t. j. pomocou parametrického integrálu

$$F(x) = \int_1^3 x^t\,\mathrm{d}t.$$

Keďže funkcia $g(x, t) = x^t$ je spojitá vzhľadom na interval $J = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 3\rangle$, podľa vety 6 platí:

$$\int_0^1 \frac{x^3 - x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_1^3 x^t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\int_0^1 x^t\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{x^{t+1}}{t + 1}\right]_0^1 \mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{1}{1 + t}\,\mathrm{d}t = \ln 2.$$

Príklad 2. Vypočítajme určitý integrál

$$\int_0^1 x^n e^{ax} dx,$$

kde n je prirodzené číslo a $a > 0$.

Riešenie. Uvažujme o integrále

$$\int_0^1 e^{ax} dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a}(e^a - 1).$$

Považujme číslo a za parameter, t. j. uvažujme o parametrickom integrále

$$F(y) = \int_0^1 e^{xy} dx = \frac{1}{y}(e^y - 1)$$

a použime vetu 5 o derivovaní parametrických integrálov.

Keďže predpoklady vety 5 sú splnené, derivovaním podľa parametra dostaneme:

$$F'(y) = \int_0^1 x e^{xy} dx = \left[\frac{1}{y}(e^y - 1)\right]'.$$

Matematickou indukciou dá sa dokázať, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí:

$$F^n(y) = \int_0^1 x^n e^{xy} dx = \left[\frac{1}{y}(e^y - 1)\right]^{(n)}.$$

Pomocou Leibnizovho vzorca pre n-tú deriváciu súčinu dostaneme:

$$\left[\frac{1}{y}(e^y - 1)\right]^n = (-1)^n \frac{n!}{y^{n+1}}(e^y - 1) + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{y^n} e^y + (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \cdot \frac{(n-2)!}{y^{n-1}} e^y + \ldots + \frac{1}{y} e^y.$$

Po dosadení za číslo y číslo a a po úprave dostaneme:

$$\int_0^1 x^n e^{ax} dx = (-1)^n \frac{e^a n!}{a^{n+1}}\left[1 - \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{a^n}{n!}\right] - \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}}.$$

825. Nájdite obor definície funkcie $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}$.

826. Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná takto: $f(x, y) = 2x\, e^{-x^2/y^2}/y^2$ pre $y \neq 0$ a $f(x, 0) = 0$. Dokážte, že funkcia $F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x, y)\, dx$ nie je spojitá pre $y = 0$.

827. Dokážte, že funkcia

$$F(y) = \int_0^\pi \frac{2\cos x + 2y}{1 + 2y\cos x + y^2} dx$$

nie je spojitá v bodoch $y = 1$, $y = -1$.

828. Dokážte, že parametrický integrál $F(y) = \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x$ nespojitej funkcie $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ je spojitá funkcia. Zostrojte graf funkcie F.

V úlohách 829 až 831 vypočítajte:

829. $\lim\limits_{y \to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$.

830. $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^2 x^2 \cos xy\,\mathrm{d}x$.

831. $\lim\limits_{y \to 0} \int_y^{1+y} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$.

832. Vypočítajte deriváciu funkcie $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}(x/y)\,\mathrm{d}x$.

833. Vypočítajte $F''(y)$, ak $F(y) = \int_0^y (x + y) f(x)\,\mathrm{d}x$, kde f je spojitá funkcia.

834. Nájdite $F^{(n)}(y)$, ak $F(y) = \int_0^y f(x)\,(y - x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$, kde f je spojitá funkcia.

835. Dokážte, že parametrický integrál $y(x) = (\omega)^{-1} \int_0^x f(t) \sin[\omega(x - t)]\,\mathrm{d}t$, kde $f(t)$ je spojitá funkcia a ω je konštanta rôzna od nuly, je riešením diferenciálnej rovnice

$$y'' + \omega^2 y = f(x).$$

836. Dokážte, že Besselove funkcie prvého druhu n-tého stupňa

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t)\,\mathrm{d}t,$$

vyhovujú Besselovej diferenciálnej rovnici $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0$.

837. Na základe predchádzajúcej úlohy dokážte vzťah

$$\int_0^x xJ_0(x)\,\mathrm{d}x = xJ_1(x).$$

838. Dokážte, že ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle 0, a\rangle$ a $(x - t)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ pre $0 \leq t \leq a$, potom funkcia

$$u(x, y, z) = \int_0^a \frac{f(t)}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}}\, dt$$

je riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

839. Vypočítajte $\int_1^2 x^n\, dx$ pri $n \neq -1$ a pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte $\int_1^2 x^n \ln x\, dx$.

840. Pomocou derivovania podľa parametra funkcie $F(y) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx$ vypočítajte $\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + a^2)^3}\, dx$, $a \neq 0$.

V úlohách 841 až 843 vypočítajte derivovaním podľa parametra:

841. $\int_0^{\pi/2} \ln (a^2 - \sin^2 x)\, dx$, $a > 1$.

842. $\int_0^{\pi} \ln (1 - 2a \cos x + a^2)\, dx$.

843. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$.

844. Vypočítajte $\int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

V úlohách 845 až 848 vypočítajte $F'(y)$, ak:

845. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y}\, dx$.

846. $F(y) = \int_{y^2}^{3y^2+1} \frac{e^{xy}}{x}\, dx$, $y \neq 0$.

847. $F(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x}\, dx$.

848. $F(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

3,2. Nevlastné parametrické integrály

A. Prípad nekonečného intervalu

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na intervale $\langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$ a pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ existuje integrál $\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$. Potom funkciu

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

nazývame *nevlastným parametrickým integrálom* alebo nevlastným integrálom závislým od parametra y.

Podobne sa definujú nevlastné parametrické integrály.

$$F_1(y) = \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, \mathrm{d}x, \qquad F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Definícia 1. Nevlastný parametrický integrál (1) rovnomerne konverguje (rovnomerne existuje) na intervale $\langle c, d\rangle$ vtedy a len vtedy, keď ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $B(\varepsilon)$, že platí:

$$|\, F(y) - \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \,| = |\int_b^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x \,| < \varepsilon, \tag{2}$$

pre všetky $b > B(\varepsilon)$ a pre všetky $y \in \langle c, d\rangle$.

Veta 1. Nevlastný parametrický integrál (1) rovnomerne konverguje (rovnomerne existuje) na intervale $\langle c, d\rangle$ vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľnú postupnosť $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ kde $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$, postupnosť funkcií

$$\left\{F_k(y) = \int_a^{b_k} f(x, y)\, \mathrm{d}x\right\}_{k=1}^\infty \tag{3}$$

rovnomerne konverguje k funkcii $F(y)$ na intervale $\langle c, d\rangle$.

Poznámka 1. Nech pre všetky body $(x, y) \in \langle a, \infty\rangle \times \langle c, d\rangle$ je $f(x, y) \geqq 0$ [$f(x, y) \leqq 0$], potom, aby nevlastný parametrický integrál (1) rovnomerne konvergoval na intervale $\langle c, d\rangle$, stačí, keď pri jednej vybranej postupnosti $\{b_k\}_{k=1}^\infty$, kde, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$, odpovedajúca postupnosť funkcií (3) rovnomerne konverguje k funkcii $F(y)$ na intervale $\langle c, d\rangle$.

Pre nevlastné parametrické integrály platia nasledujúce vety:

Veta 2. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $\langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$ a nevlastný parametrický integrál (1) rovnomerne konverguje na intervale $\langle c, d\rangle$, potom funkcia $F(y)$ je spojitá na intervale $\langle c, d\rangle$.

Veta 3. Nech funkcie $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ sú spojité vzhľadom na interval $\langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$ a nevlastný parametrický integrál $\int_a^\infty f'_y(x, y)\, \mathrm{d}x$ rovnomerne konverguje na intervale $\langle c, d\rangle$. Potom funkcia $F(y)$ má deriváciu podľa y na intervale $\langle c, d\rangle$ a platí:

$$\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_a^\infty f'_y(x, y)\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Veta 4. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $\langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$ a nevlastný parametrický integrál (1) rovnomerne konverguje na intervale $\langle c, d\rangle$. Potom platí:

$$\int_c^d F(y)\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Dôsledok 1. Ak funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $I = \langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$ a pre každý bod $(x, y) \in I$ je $f(x, y) \geqq 0$ [$f(x, y) \leqq 0$] a nevlastný parametrický integrál (1) je spojitá funkcia na intervale $\langle c, d\rangle$, potom tam platí rovnosť (5).

Veta 5. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $I = \langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$ a pre každý bod $(x, y) \in I$ je $f(x, y) \geqq 0$ $[f(x, y) \leqq 0]$. Nech nevlastný parametrický integrál (1) je spojitá funkcia na intervale $\langle c, \infty)$ a parametrický integrál

$$H(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

je spojitá funkcia na intervale $\langle a, \infty)$. Ak aspoň jeden z integrálov

$$\int_a^\infty \Big[\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x, \qquad \int_c^\infty \Big[\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y,$$

existuje, potom existuje aj druhý a platí:

$$\int_c^\infty \Big[\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y = \int_a^\infty \Big[\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Veta 6. Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval $\langle a, \infty) \times \langle c, d\rangle$. Nech integrál $\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y$ rovnomerne konverguje na každom konečnom intervale $\langle a, A\rangle$ a nevlastný parametrický integrál $\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x$ rovnomerne konverguje na každom konečnom intervale $\langle c, d\rangle$. Potom ak aspoň jeden z integrálov

$$\int_a^\infty \Big[\int_c^\infty |f(x, y)|\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x, \qquad \int_c^\infty \Big[\int_a^\infty |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y$$

existuje; potom existujú integrály

$$\int_a^\infty \Big[\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x, \qquad \int_c^\infty \Big[\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y$$

a platí:

$$\int_a^\infty \Big[\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \int_c^\infty \Big[\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

B. Prípad neohraničenej funkcie

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na intervale $\langle a, b) \times \langle c, d\rangle$ a nech je neohraničená v každom intervale $(b - \delta, b) \times \langle c, d\rangle$ a pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ existuje integrál

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Potom funkciu

$$G(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

nazývame *nevlastným parametrickým integrálom.*

Poznámka 2. Nevlastný parametrický integrál sa definuje podobne aj vtedy, keď funkcia $f(x, y)$ je neohraničená v konečnom počte intervalov $(x_k - \delta, x_k + \delta) \times \langle c, d\rangle$, $x_k \in \langle a, b\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, m$, pre každé $\delta > 0$.

Pre nevlastný parametrický integrál, ak funkcia $f(x, y)$ je neohraničená, zavádza sa podobne pojem rovnomernej konvergencie a platia preň podobné vety ako pre nevlastný parametrický integrál v ods. A.

C. Kritériá rovnomernej konvergencie nevlastných parametrických integrálov

Veta 7. (*Bolzano—Cauchyho kritérium.*) Nevlastný parametrický integrál (1) rovnomerne konverguje na intervale $\langle c, d\rangle$ vtedy a len vtedy, keď pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $B(\varepsilon)$, že pre všetky b' a $b'' > B(\varepsilon)$ platí:

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \tag{9}$$

pre všetky $y \in \langle c, d\rangle$.

Veta 8. (*Weierstrassovo kritérium.*) Nech pre každý bod $y_0 \in \langle c, d\rangle$ je funkcia $f(x, y)$ integrovateľná na intervale $\langle a, A\rangle$, kde A je ľubovoľné číslo. Nech pre každé $x \in \langle a, \infty)$ a každé $y \in \langle c, d\rangle$ platí $|f(x, y)| \leqq g(x)$ a nech $\int_a^\infty g(x)\, \mathrm{d}x$ existuje, potom integrály

$$\int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}x, \qquad \int_a^\infty |f(x, y)|\, \mathrm{d}x$$

rovnomerne konvergujú na intervale $\langle c, d\rangle$.

Veta 9. (*Bolzano—Cauchyho kritérium.*) Nevlastný parametrický integrál (8) konverguje rovnomerne na intervale $\langle c, d\rangle$ vtedy a len vtedy, keď pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta(\varepsilon)$, že pre všetky δ', δ'' z intervalu $(0, \delta(\varepsilon))$ platí:

$$\left| \int_{b-\delta'}^{b-\delta''} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{10}$$

pre všetky $y \in \langle c, d\rangle$.

Príklad 1. Dokážme, že nevlastný parametrický integrál

$$F(y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin (xy)\, \mathrm{d}x$$

rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$.

Riešenie. Rovnomernú konvergenciu daného nevlastného parametrického integrálu na intervale $(-\infty, \infty)$ dokážeme pomocou Weierstrassovho kritéria. Položme $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x} \sin (xy)$ a $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Pre každý bod $(x, y) \in \langle 0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ platí:

$$|\mathrm{e}^{-x} \sin (xy)| \leqq \mathrm{e}^{-x}.$$

Nevlastný integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ existuje, pretože $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty} \int_0^l \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = \lim\limits_{l\to\infty} (-\mathrm{e}^{-l} + 1) = 1.$

Pretože sú splnené všetky podmienky Weierstrassovho kritéria, daný integrál rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$.

Príklad 2. Vypočítajme $\int_0^\infty x\, \mathrm{e}^{-x} \cos (xy)\, \mathrm{d}x$.

Riešenie. Počítajme nevlastný parametrický integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin (xy)\, \mathrm{d}x$, máme:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin (xy)\, \mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty} \int_0^\xi \mathrm{e}^{-x} \sin (xy)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\xi\to\infty} \left[\mathrm{e}^{-x} \frac{-\sin (yx) - y \cos (yx)}{(-1)^2 + y^2} \right]_0^\xi = \frac{y}{1 + y^2}. \tag{11}$$

Daný integrál vypočítame derivovaním rovnosti (11) podľa parametra y pomocou vety 3. Zistime, či sú predpoklady tejto vety splnené.

Funkcia $f(x, y) = e^{-x} \sin (xy)$ je spojitá na intervale $\langle 0, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Parciálna derivácia $f'_y(x, y) = x e^{-x} \cos (xy)$ je spojitá na intervale $\langle 0, \infty) \times (-\infty, \infty)$.

Weierstrassovým kritériom zistíme, či integrál

$$\int_0^\infty f'_y(x, y)\, dx = \int_0^\infty x e^{-x} \cos (yx)\, dx$$

rovnomerne konverguje na intervale $(-\infty, \infty)$.

Pre všetky body $(x, y) \in \langle 0, \infty) \times (\infty, \infty)$ platí:

$$| x e^{-x} \cos (yx) | \leq x e^{-x}.$$

Keďže nevlastný integrál $\int_0^\infty x e^{-x}\, dx = 1$, podľa Weierstrassovho kritéria integrál $\int_0^\infty x e^{-x} \,.$ $. \cos (yx)\, dx$ rovnomerne konverguje podľa parametra y na intervale $(-\infty, \infty)$.

Pretože sú splnené všetky predpoklady vety 3, má integrál $\int_0^\infty e^{-x} \sin (yx)\, dx$ deriváciu podľa parametra y na intervale $(-\infty, \infty)$. Z rovnosti (11) máme:

$$\frac{d}{dy} \int_0^\infty e^{-x} \sin (yx)\, dx = \frac{d}{dy} \frac{y}{1 + y^2},$$

čiže

$$\int_0^\infty x e^{-x} \cos (yx)\, dx = \frac{1 - y}{(1 + y^2)^2},$$

pre každé $y \in (-\infty, \infty)$.

V úlohách **849** až **852** nájdite obor definície nevlastných parametrických integrálov.

849. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{1 + x^2}\, dx.$

850. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^y + \sin x}\, dx, \ y > 0.$

851. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{|\ln x|^y}\, dx.$

852. $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{x \cos x}{x^y + a^y}\, dx, \ a > 0.$

V úlohách **853** až **860**, zistite, či dané nevlastné parametrické integrály rovnomerne konvergujú na daných intervaloch.

853. $\displaystyle\int_0^1 y x^{y-1}\, dx, \ \langle \delta, 1 \rangle, \ \delta > 0.$

854. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^y}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \ \langle 0, \infty).$

855. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin (1/x)}{x^y}\, dx, \ (0, 2).$

856. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin (xy)}{\sqrt{|x - y|}}\, dx, \ \langle 0, 1 \rangle.$

857. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \, dx$, $\langle 0, 1 \rangle$.

858. $\int\limits_1^{\infty} x^y e^{-x} \, dx$, $\langle a, b \rangle$.

859. $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{y}\, e^{-yx^2} \, dx$, $\langle 0, \infty)$.

860. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1 + x^2} \, dx$, $(-\infty, \infty)$.

861. Dokážte, že nevlastný parametrický integrál $F(y) = \int\limits_0^{\infty} y\, e^{-xy} \, dx$ rovnomerne konverguje v každom intervale $\langle a, b \rangle$, $a > 0$ a nekonverguje rovnomerne v intervale $\langle 0, b \rangle$.

V úlohách 862 až 865 zistite spojitosť nevlastných parametrických integrálov.

862. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin[(1 - y^2)\, x]}{x} \, dx$, $(-\infty, \infty)$.

863. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{2 + x^y} \, dx$, $(2, \infty)$.

864. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y (\pi - x)^y} \, dx$, $(0, 2)$.

865. $\int\limits_0^{\infty} y\, e^{-xy^2} \, dx$, $(-\infty, \infty)$.

866. Pomocou rovnosti $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = 1/a$, $a > 0$ vypočítajte $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \, dx$, n je celé číslo.

867. Pomocou rovnosti $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{\pi}{2a}$ vypočítajte $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \, dx$, n je celé číslo.

868. Pomocou rovnosti $\int\limits_0^{\infty} e^{-xy} \, dx = \frac{1}{y}$, $y > 0$ vypočítajte $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, $a > 0$, $b > 0$.

V úlohách 869 až 874 pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte nevlastné integrály:

869. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

870. $\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx$, $a > 0$, $b > 0$.

871. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx, \; a > 0, \; b > 0.$

872. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin^2 bx}{x} \, dx, \; a > 0.$

873. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} \, dx, \; a > 0.$

874. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx, \; a > 0.$

V úlohách 875 až 882 vypočítajte integrály pomocou derivovania podľa parametra:

875. $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x \, e^{x^2}} \, dx, \; a > -1.$

876. $\int_0^1 \frac{\ln (1 - a^2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx, \; | a | < 1.$

877. $\int_0^\infty \frac{\ln (x^2 + a^2)}{x^2 + b^2} \, dx.$

878. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln (1 + a \cos x)}{\cos x} \, dx, \; -1 < a < 1.$

879. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x\sqrt{1 - x^2}} \, dx, \; a > 0.$

880. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + x^2)} \, dx,$ a je ľubovolné číslo.

881. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \, . \, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx, \; a > 0, \; b > 0.$

882. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} \, dx, \; a > 0, \; b > 0.$

883. Pomocou integrálu $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$ vypočítajte $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx$.

884. Vypočítajte Poissonov integrál $I = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ pomocou vzťahu $I^2 = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int\limits_0^{\infty} x\, e^{-x^2 y^2}\, dy$.

V úlohách 885 až 888 pomocou Poissonovho integrálu vypočítajte:

885. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx,\ a > 0,\ b > 0.$

886. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cosh bx\, dx,\ a > 0.$

887. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx,\ a > 0.$

888. $\int\limits_0^{\infty} x\, e^{-ax^2} \sin bx\, dx,\ a > 0.$

889. Vypočítajte $I(y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-yx^2}\, dx,\ y > 0.$

890. Pomocou úlohy 889 dokážte, že platí:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-yx^2} x^{2n}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{y^n \sqrt{y}}.$$

891. Použitím rovnosti $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ vypočítajte Fresnelove integrály

$$\int\limits_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx,$$

$$\int\limits_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}}.$$

892. Pomocou rovnosti $\int\limits_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $a > 0$ vypočítajte Dirichletov integrál $\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx}{x} \, dx$.

893. Pomocou rovnosti $\int\limits_0^\infty \frac{\sin (ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$ vypočítajte $\int\limits_0^\infty \frac{\cos (ax) - \cos (bx)}{x^2} \, dx$.

V úlohách **894** až **896** pomocou Dirichletovho integrálu vypočítajte daný integrál:

894. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin (ax)}{x}\right)^2 dx$. **895.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 (ax)}{x} \, dx$.

896. $\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos (ax)}{x} \, dx$.

897. Nájdite Laplaceovu transformáciu $L(f)$ funkcie f,

$$L(f) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) \, dt$$

kde pre komplexné číslo p platí $\operatorname{Re} p > \alpha$, ak:

a) $f(t) = t^n$, n je prirodzené číslo, $\alpha = 0$;

b) $f(t) = \cos t$, $\alpha = 0$;

c) $f(t) = e^{at}$, $\alpha = a$;

d) $f(t) = \sqrt{t}$, $\alpha = 0$.

898. Dokážte, že funkcia $y(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1 + z^2} \, dz$ vyhovuje diferenciálnej rovnici $y'' + y' = 1/x$.

899. Nech funkcia f definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ je absolútne integrovateľná. Dokážte, že nevlastný parametrický integrál

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \, e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2 t}} \, dy$$

spĺňa diferenciálnu rovnicu pre vedenie tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a začiatočnú podmienku $\lim\limits_{t \to 0^+} u(x, t) = f(x)$.

3,3. Eulerove integrály

Funkciu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \tag{1}$$

ktorá je definovaná pre každé $x > 0$ nazývame *gama funkciou* alebo *Eulerovou funkciou druhého druhu* (pozri *obr. 16*).

Veta 1. Funkcia $\Gamma(x)$ je pre $x > 0$ spojitá, má derivácie všetkých rádov a platí:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln^n t\, dt. \tag{2}$$

Veta 2. Pre $x > 0$ platí:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

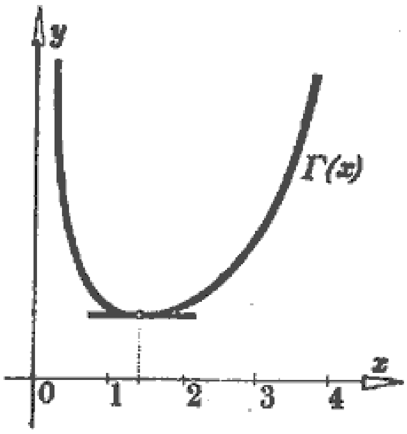
Veta 3. Pre prirodzené číslo n platí:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!,$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\,.$$

Veta 4. Pre $x \in (0,1)$ platí:

$$\Gamma(x) \,.\, \Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$



Obr. 16

Funkciu

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1}\, dt, \tag{3}$$

ktorá je definovaná pre $p > 0$, $q > 0$, nazývame *beta funkciou* alebo *Eulerovou funkciou prvého druhu*.

Veta 5. Pre $p > 0$, $q > 0$ platí:

$$B(p, q) = B(q, p),$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \,.\, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}\,.$$

Poznámka. Hodnoty funkcie Γ pre $x \in (0, 1\rangle$ resp. $x \in \langle 1, 2\rangle$ sú v matematických tabuľkách (pozri napr. *tab. 1*).

Tabuľka 1

Gama funkcia

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,0000	1,35	0,8911	1,70	0,9086
1,05	0,9735	1,40	0,8872	1,75	0,9190
1,10	0,9513	1,45	0,8856	1,80	0,9313
1,15	0,9330	1,50	0,8862	1,85	0,9456
1,20	0,9181	1,55	0,8888	1,90	0,9617
1,25	0,9064	1,60	0,8935	1,95	0,9798
1,30	0,8974	1,65	0,9001	2,00	1,0000

Príklad 1. Vypočítajme integrál

$$J = \int_0^1 x \sqrt[3]{1 - x^3}\, dx.$$

Riešenie. Použitím substitúcie $x = t^{1/3}$ dostaneme:

$$J = \int_0^1 x \sqrt[3]{1 - x^3}\, dx = \int_0^1 t^{1/3} (1-t)^{1/3} \cdot \frac{1}{3} t^{-2/3}\, dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-1/3}(1 - t)^{1/3}\, dt.$$

Z definície beta funkcie, z vety 5 a z vety 4 dostaneme:

$$J = \frac{1}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2/3) \cdot \Gamma(4/3)}{\Gamma(2/3 + 4/3)} = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \frac{\pi}{\sin (2\pi/3)} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Príklad 2. Vypočítajme integrál

$$J = \int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{2n-1} x\, dx, \ 0 < n < 1.$$

Riešenie. Použitím substitúcie $t = \sin^2 x$ dostaneme:

$$J = \int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{2n-1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 x)^{n-1}}{\cos^{2n} x} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-1}(1 - t)^{-n}\, dt.$$

Z definície beta funkcie a z vety 4 a 5 máme:

$$J = \frac{1}{2} B(n, 1 - n) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n)\, \Gamma(1 - n)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2 \sin \pi n}.$$

900. Dokážte, že platí:

a) $\Gamma(x) > 0$,
b) $\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t\, dt$,
c) $\Gamma(x)$ je spojitá funkcia,
d) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$,
e) $\Gamma(n + 1) = n!$, pre prirodzené číslo n,
f) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
g) $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$,
h) $\Gamma(x)$ je konvexná funkcia.

901. Vypočítajte:

a) $\Gamma(0,3)$,
b) $\Gamma(2,7)$,
c) $\Gamma(5/2)$,
d) $\Gamma(3/4)$.

V úlohách 902 až 904 dané integrály vypočítajte pomocou gama funkcie.

902. $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,\ a > 1.$

903. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2a-1}\, dx,\ a > \frac{1}{2}.$

904. $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^n}\, dx.$

V úlohách 905 až 912 pomocou Eulerových integrálov vypočítajte dané integrály:

905. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx.$

906. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$

907. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^5}}\, dx.$

908. $\int_0^1 \frac{1}{1 - t^n}\, dt.$

909. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1 - x^m}}\, dx,\ m > 0.$

910. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + x)^2 (1 - x)}}.$

911. $\int_{-1}^1 (1 + x)^\alpha (1 - x)^\beta\, dx.$

912. $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1 - x^2)}}\, dx.$

913. Pomocou substitúcie $t = x/(x + a)$ do funkcie $B(p, q)$ dokážte, že platí:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\, dx}{(x + a)^{p+q}} = a^{-q} B(p, q).$$

914. Pomocou substitúcie $y = (a + b)\, x/(a + bx)$ dokážte, že platí:

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}}{(a + bx)^{\alpha+\beta}}\, dx = \frac{1}{(a + b)^\alpha a^\beta} B(p, q).$$

Úlohy 915 až 931 vypočítajte pomocou Eulerových integrálov:

915. $\int_0^\infty \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx.$

916. $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3}.$

917. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2}\, dx.$

918. $\int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^3)^2}\, dx.$

919. $\int_0^\infty \frac{x^c}{(1 + x)^2}\, dx,\ |c| < 1.$

920. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1 + x)^n}\, dx.$

921. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1 + x^n}\, dx,\ n > 0.$

922. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$

923. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x, 0 < a < 2.$

924. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, |a| < 1.$

925. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a \ln^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, |a| < 1.$

926. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x, n > -1.$

927. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x.$

928. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

929. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x.$

930. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sinh mx}{\sinh nx}\,\mathrm{d}x, n > m > 0.$

931. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cosh mx}{\cosh nx}\,\mathrm{d}x, n > m > 0.$

932. Pomocou rovnosti $x^{-m} = \dfrac{1}{\Gamma(m)}\displaystyle\int_0^\infty t^{m-1}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$, $(x > 0)$ nájdite integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m}\,\mathrm{d}x,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,\mathrm{d}x, 0 < m < 1, a > 0.$

933. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkou $x^4 + y^4 = a^4$, $a > 0$.

934. Nájdite dĺžku lemniskáty $\varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a > 0$.

935. Vypočítajte $\displaystyle\iint_\Omega x^{\alpha-1} y^{\beta-1}(1 - x - y)^{\gamma-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde Ω je trojuholník daný priamkami $x = 0$, $y = 0$, $1 - x - y = 0$.

936. Zistite podmienky konvergencie a vypočítajte integrál $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť Ω je daná nerovnosťami $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^\alpha + y^\beta \leqq 1$, a p, q, α, β, m sú kladné čísla.

937. Vypočítajte $\displaystyle\iiint_\Omega f[(x/a)^\alpha + (y/b)^\beta + (z/c)^\gamma]\, x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde Ω je oblasť daná nerovnosťami $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $(x/a)^\alpha + (y/b)^\beta + (z/c)^\gamma \leqq 1$, pričom $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

3,4. Fourierov integrál

Nech reálna funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ a nech existuje integrál

$$\int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] \, d\omega \tag{1}$$

kde
$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \text{ a } B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Potom integrál (1) nazývame *Fourierovým integrálom z funkcie f*.

Veta 1. Nech funkcia f a jej derivácie f' sú po čiastkach spojité na každom konečnom intervale. Nech integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ existuje. Potom pre Fourierov integrál z funkcie f platí:

$$\int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] \, d\omega = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

a v bodoch spojitosti funkcie f platí

$$\int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] \, d\omega = f(x).$$

Poznámka 1. Keď funkcia f je párnou [nepárnou] funkciou, potom

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt \text{ a } B(\omega) = 0$$

$$\left[A(\omega) = 0, \; B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt\right].$$

Poznámka 2. Nech funkcia f je definovaná na $(0, \infty)$ a spĺňa predpoklady vety 1. Potom funkciu g, pre ktorú platí $g(x) = f(x)$, keď $x \in (0, \infty)$ a $g(x) = f(-x)$, keď $x \in (-\infty, 0)$, nazývame *párnym pokračovaním funkcie f*. Funkciu h, pre ktorú platí $h(x) = f(x)$, keď $x \in (0, \infty)$ a $h(x) = -f(-x)$, keď $x \in (-\infty, 0)$, nazývame *nepárnym pokračovaním funkcie f*. Funkciu f definovanú na intervale $(0, \infty)$ v bodoch spojitosti môžeme vyjadriť pomocou Fourierovho integrálu z funkcie g, ako aj pomocou Fourierovho integrálu z funkcie h.

Nech f je komplexná funkcia reálnej premennej, definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$. Fourierovým integrálom z funkcie f nazývame integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \, e^{i\omega t} \, d\omega,$$

kde komplexná funkcia S jednej reálnej premennej sa nazýva *spektrálnou hustotou* alebo aj *komplexným spektrom funkcie f* a platí:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{-i\omega t} \, dt.$$

Modul $|S(\omega)|$ sa nazýva *spektrom funkcie f*.

Príklad. Vyjadrime funkciu $f(x) = \sin x$, pre $|x| \leqq \pi$, $f(x) = 0$, pre $|x| > \pi$ pomocou Fourierovho integrálu.

Riešenie. Funkcia f je nepárna. Preto počítame podľa poznámky 1 iba

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin \omega t \, dt.$$

Pre $\omega \neq 1$ máme

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+\omega}\sin t(1+\omega) - \frac{1}{1-\omega}\sin t(1-\omega)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2}.$$

Pre $\omega = 1$ je $B(1) = 1$.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2}\sin \omega x \, d\omega.$$

V úlohách **938** až **948** nájdite Fourierov integrál danej funkcie:

938. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{pre } |x| = 1, \\ 0, & \text{pre } |x| > 1. \end{cases}$

939. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{keď } |x| \leqq 1, \\ 0, & \text{keď } |x| > 1. \end{cases}$

940. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{pre } -2 \leqq x < 0, \\ -x + 2, & \text{pre } 0 \leqq x < 2, \\ 0, & \text{pre } |x| \geqq 2. \end{cases}$

941. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{pre } |x| < 1, \\ 0, & \text{pre } |x| \geqq 1. \end{cases}$

942. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{pre } |x| \leqq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{pre } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

943. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{pre } 0 < x < n\pi, \\ 0, & \text{pre } x \leqq 0, \\ & x \geqq n\pi, \end{cases}$
n je celé číslo.

944. $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{pre } |x| < \pi, \\ 0, & \text{pre } |x| \geqq \pi. \end{cases}$

945. $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$, $a > 0$.

946. $f(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2}$, $a > 0$.

947. $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

948. $f(x) = e^{-x^2}$.

949. Vyjadrite Fourierovým integrálom funkciu

$$f(x) = \begin{cases} E(\cos ax), & \text{pre } 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2\omega} \\ 0, & \text{pre } x \geqq \dfrac{\pi}{2\omega}, \end{cases}$$

pomocou párneho pokračovania funkcie f.

950. Vyjadrite funkciu $f(x) = e^{-x}$, $x \in (0, \infty)$ pomocou Fourierovho integrálu pre a) párne pokračovanie funkcie f, b) nepárne pokračovanie funkcie f.

951. Vypočítajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \omega\tau \cos \omega x}{\omega}\, d\omega$.

V úlohách 952 až 954 nájdite Fourierovu transformáciu F funkcie f.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ipt}\, dt.$$

952. $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

953. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

954. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ax$.

V úlohách 955 až 957 nájdite spektrum daných funkcií:

955. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ pre } 0 < x < \tau, \\ 0, \text{ pre } \tau < x,\ x < 0. \end{cases}$

956.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{pre } x = 0, \\ 1, & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

957. $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{pre } x > 0, \\ 0, & \text{pre } x < 0. \end{cases}$

958. Nájdite spektrálnu hustotu daného impulzu $f(t)$, ak:

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{pre } 0 \leqq t < 1, \\ 2 - t, & \text{pre } 1 \leqq t < 2, \\ 0, & \text{pre } t \leqq 0 \text{ a } t \geqq 2. \end{cases}$$

4. KRIVKOVÉ INTEGRÁLY

4,1. Krivkové integrály I. a II. druhu

Nech C je jednoduchý oblúk, pre ktorý platí $P = O + \mathbf{r}(t)$, $t \in J$. Bod P_1 oblúka C je pred [za] bodom P_2 oblúka C, ak je $t_1 < t_2$ [$t_1 > t_2$] a píšeme $P_1 \prec P_2$ [$P_1 \succ P_2$].

Oblúk C je orientovaný súhlasne [nesúhlasne] s parametrickým vyjadrením $\mathbf{r}(t)$, $t \in J$, ak pre ľubovoľné body P_1, P_2 oblúka C, pre ktoré je $t_1 < t_2$ [$t_1 > t_2$], platí $P_1 \prec P_2$.

Oblúk C orientovaný súhlasne alebo nesúhlasne s parametrickým vyjadrením nazývame *orientovaným oblúkom* C.

Nech C je uzavretá krivka s parametrickým vyjadrením $\mathbf{r}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pričom $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$. Nech $P_1 = O + \mathbf{r}(t_1)$, $P_2 = O + \mathbf{r}(t_2)$, $P_3 = O + \mathbf{r}(t_3)$ sú ľubovoľné body tejto krivky. Krivka C je cyklicky orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s daným parametrickým vyjadrením, ak trojica bodov (P_1, P_2, P_3) je usporiadaná v zmysle orientácie, t. j. že nastane jedna z týchto troch možností $t_1 < t_2 < t_3$, $t_3 < t_1 < t_2$, $t_2 < t_3 < t_1$ [$t_3 < t_2 < t_1$, $t_2 < t_1 < t_3$, $t_1 < t_3 < t_2$].

Uzavreté krivky cyklicky orientované súhlasne alebo nesúhlasne s parametrickým vyjadrením nazývame *cyklicky orientované.*

Orientované oblúky a cyklicky orientované uzavreté krivky nazývame *orientovanými krivkami.*

Nech C je orientovaný oblúk [cyklicky orientovaná krivka]. Nech na krivke C sú dané body $P_0, P_1, \ldots, P_m$ tak, že $P_0 \prec P_1 \prec P_2 \prec \ldots \prec P_m$, pričom P_0 a P_m sú koncové body krivky C [$P_0 = P_m$ a (P_{i-2}, P_{i-1}, P_i) sú usporiadané trojice pre $i = 2, 3, \ldots, m$]. Potom hovoríme, že na krivke C je dané delenie krivky C, ktoré pozostáva z čiastočných kriviek $\widehat{P_{i-1}P_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Nech C je krivka. *Priemerom* $d(C)$ krivky C nazývame supremum množiny všetkých čísiel $\varrho(P_1, P_2)$, pre $P_1, P_2 \in C$.

Normou delenia D krivky C nazývame číslo

$$\| D \| = \max \{d(\widehat{P_{i-1}, P_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky C nazývame *normálnou*, ak $\lim\limits_{n \to \infty} \| D_n \| = 0$.

Orientovanú krivku C nazývame po *čiastkach hladkou*, ak existuje také jej delenie, že všetky čiastočné krivky $\widehat{P_{i-1}P_i}$ tohto delenia sú hladké oblúky. Ak $\mathbf{r}(t)$, $t \in J$ je parametrické vyjadrenie tejto krivky, potom derivácia $\mathbf{r}'(t)$ je spojitá a nenulová na intervale J s výnimkou konečného počtu bodov, v ktorých existuje derivácia sprava a zľava. *Dotyčnicovým vektorom* $\boldsymbol{\tau}$ orientovanej krivky C v bode P, v ktorom je $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{o}$ nazývame vektor $\mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ [$-\mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$], ak krivka je orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s daným parametrickým vyjadrením.

Nech C je po čiastkach hladká orientovaná krivka. Nech $f(P)$, [$\mathbf{f}(P)$] je ohraničená reálna [vektorová] funkcia, ktorá je definovaná v každom bode krivky C. Nech D je delenie krivky C dané deliacimi bodmi $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$. Nech $\Pi_i = O + \mathbf{r}(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú také body krivky C, v ktorých existuje nenulová derivácia $\mathbf{r}'(\xi_i)$ a $\Pi_i \in \widehat{P_{i-1}P_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Nech $\Delta \mathbf{s}_i = \boldsymbol{\tau}(\Pi_i) \Delta s_i$, kde Δs_i je dĺžka čiastočnej krivky $\widehat{P_{i-1}P_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{m} f(\Pi_i) \Delta s_i$$

$$\left[S_{\mathbf{f}}(D) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}(\Pi_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i\right]$$

nazývame *integrálnym súčtom funkcie* f [$\mathbf{f}$] pre delenie D krivky C a pre daný výber bodov $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ alebo tiež integrálny súčet I. druhu [II. druhu].

Číslo I nazývame *integrálom z funkcie* f [$\mathbf{f}$] po krivke C, ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky C a pre ľubovoľné výbery bodov Π_i v integrálnych súčtoch I. [II.] druhu je $I = \lim_{n\to\infty} S_f(D)$ [$I = \lim_{n\to\infty} S_{\mathbf{f}}(D)$]. Tento integrál nazývame *krivkovým integrálom I.* [II.] druhu a označujeme ho znakom

$$\int_C f(P)\,\mathrm{d}s \qquad \left[\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right].$$

Ak existuje integrál z funkcie f[$\mathbf{f}$] po krivke C hovoríme, že funkcia f[$\mathbf{f}$] je integrovateľná na krivke C.

Poznámka 1. Ak je v rovine zvolený pravouhlý súradnicový systém, v ktorom je $\mathbf{f}(P) = p(x, y)\,\mathbf{i} + q(x, y)\,\mathbf{j}$, potom krivkový integrál II. druhu označujeme tiež znakom

$$\int_C p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka 2. Ak je v priestore daný pravouhlý súradnicový systém, v ktorom je $\mathbf{f}(P) = p(x, y, z)\,\mathbf{i} + q(x, y, z)\,\mathbf{j} + r(x, y, z)\,\mathbf{k}$, potom krivkový integrál II. druhu označujeme tiež znakom

$$\int_C p(x, y, z)\,\mathrm{d}x + q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + r(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Veta 1. Nech C je po čiastkach hladká orientovaná krivka, ktorej parametrické vyjadrenie je $\mathbf{r}(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Nech f je reálna funkcia definovaná na krivke C. Potom platí:

$$\int_C f(P)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[O + \mathbf{r}(t)]\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

pričom krivkový integrál v rovnosti (1) existuje vtedy a len vtedy, keď existuje obyčajný (Riemannov) integrál vpravo.

Veta 2. Nech C je po čiastkach hladká orientovaná krivka, ktorej parametrické vyjadrenie je $\mathbf{r}(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Nech $\mathbf{f}$ je vektorová funkcia definovaná na krivke C. Potom platí:

$$\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \pm \int_\alpha^\beta \mathbf{f}[O + \mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

pričom krivkový integrál vľavo existuje vtedy a len vtedy, keď existuje obyčajný (Riemannov) integrál napravo. Ak krivka C je orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s daným parametrickým vyjadrením, platí znamienko $+$ [$-$].

Poznámka 3. Ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine je $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j}$, potom vzťahy (1) a (2) možno napísať v tvare

$$\int_C f(P)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

$$\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_C p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y = \pm\int_\alpha^\beta \{p[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore je $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}$, potom vzťahy (1) a (2) možno napísať v tvare

$$\int_C f(P)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5}$$

$$\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_C p(x, y, z)\,\mathrm{d}x + q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + r(x, y, z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \pm\int_\alpha^\beta \{p[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t) + q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\psi'(t) + r[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\chi'(t)\}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Veta 3. Krivkový integrál I. [II.] druhu po orientovanej a po čiastkach hladkej krivke C pre spojitú reálnu [vektorovú] funkciu $f[\mathbf{f}]$ existuje.

Veta 4. Nech C je orientovaná krivka a C^* je krivka, ktorá vznikne z nej zmenou orientácie. Nech existuje integrál z funkcie $f[\mathbf{f}]$ po krivke C. Potom existuje aj integrál z funkcie $f[\mathbf{f}]$ po krivke C^* a platí:

$$\int_{C^*} f(P)\,\mathrm{d}s = \int_C f(P)\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

$$\left[\int_{C^*} \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right]. \tag{8}$$

Veta 5. Nech existujú krivkové integrály z funkcií f a g po krivke C. Nech $f(P) \leqq g(P)$ pre každý bod krivky C. Potom

$$\int_C f(P)\,\mathrm{d}s \leqq \int_C g(P)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Veta 6. Nech existujú integrály z funkcie f a g [$\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$] po krivke C a nech c_1, c_2 sú čísla. Potom existuje aj integrál z funkcie $c_1f + c_2g$ [$c_1\mathbf{f} + c_2\mathbf{g}$] po krivke C a platí:

$$\int_C [c_1f(P) + c_2g(P)]\,\mathrm{d}s = c_1\int_C f(P)\,\mathrm{d}s + c_2\int_C g(P)\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

$$\left[\int_C [c_1\mathbf{f}(P) + c_2\mathbf{g}(P)] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = c_1\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + c_2\int_C \mathbf{g}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right]. \tag{11}$$

Veta 7. Nech orientované krivky C_1 a C_2 tvoria delenie krivky C. Ak existuje integrál funkcie $f[\mathbf{f}]$ po krivke C_1 a integrál z funkcie $f[\mathbf{f}]$ po krivke C_2, potom existuje aj integrál z funkcie $f[\mathbf{f}]$ po krivke C a platí:

$$\int_C f(p)\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f(P)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(P)\,\mathrm{d}s, \tag{12}$$

$$\left[\int_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right]. \tag{13}$$

Príklad 1. Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\,\mathrm{d}s,$$

kde krivka C je prvý závit kužeľovej skrutkovice $\mathbf{r} = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Riešenie. Krivka C je jednoduchý hladký oblúk, pre ktorý je $|\mathbf{r}'(t)| = [(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1]^{1/2} = \sqrt{2 + t^2}$, $t \in \langle 0, 2\rangle$. Keďže funkcia $f(x, y, z) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá na E_3, preto podľa vety 3, vety 1 a vzťahu (5) máme:

$$\int_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t})\sqrt{2 + t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[(2 + t^2)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1\right].$$

Príklad 2. Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$\int_C (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s}$$

po elipse cyklicky orientovanej súhlasne s parametrickým vyjadrením $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Riešenie. Krivka C je hladká jednoduchá uzavretá krivka, pre ktorú platí $\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\mathbf{i} + b\cos t\mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Funkcia $\mathbf{f}(P) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ je spojitá funkcia v E_2. Preto podľa vety 2, vety 3 a vzťahu (4) dostaneme:

$$\int_C (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s} = \int_C y\,dx - x\,dy = \int_0^{2\pi} [b\sin t(-a\sin t) - a\cos t \cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= -ab\int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

V úlohách 959 až 975 vypočítajte krivkové integrály:

959. $\displaystyle\int_C \frac{1}{x-y}\,ds$, kde C je úsečka AB, $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$.

960. $\displaystyle\int_C (x + y)\,ds$, kde C je obvod trojuholníka s vrcholmi $A = (1, -1)$, $B = (2, -1)$, $C = (1, 0)$.

961. $\displaystyle\int_C xy\,ds$, kde C je obvod rovnobežníka určeného priamkami $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$.

962. $\displaystyle\int_C x\,ds$, kde C je oblúk AB paraboly $y = x^2$, $A = (2, 4)$, $B = (1, 1)$.

963. $\displaystyle\int_C x^2\,ds$, kde C je oblúk AB krivky $y = \ln x$, $A = (2, \ln 2)$, $B = (1, 0)$.

964. $\displaystyle\int_C x^2y\,ds$, kde C je oblúk kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ s koncovými bodmi $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$.

965. $\displaystyle\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 - ax = 0$, $a > 0$.

966. $\displaystyle\int_C x^2y\,ds$, kde C je oblúk elipsy $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, ktorého prvý bod je $A = (a, 0)$, $a > b > 0$.

967. $\displaystyle\int_C (x^{4/3} + y^{4/3})\,ds$, kde C je asteroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

968. $\int_C |y| \, ds$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

969. $\int_C \sqrt{2y} \, ds$, kde C je časť cykloidy $\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\, \boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\, \boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

970. $\int_C (x^2 + y^2) \, ds$, kde C je krivka $\boldsymbol{r} = a[(\cos t + t \sin t)\, \boldsymbol{i} + (\sin t - t \cos t)\, \boldsymbol{j}]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

971. $\int_C x \, ds$, kde C je oblúk logaritmickej špirály $\varrho = ae^{b\varphi}$, $b > 0$, ktorý je vnútri kruhu $\varrho \leqq a$.

972. $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds$, kde C je oblúk skrutkovice $\boldsymbol{r} = a[\cos t \boldsymbol{i} + \sin t \boldsymbol{j} + t \boldsymbol{k}]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

973. $\int_C z \, ds$, kde C je krivka $\boldsymbol{r} = t \cos t \boldsymbol{i} + t \sin t \boldsymbol{j} + t \boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$.

974. $\int_C x^2 \, ds$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

975. $\int_C z \, ds$, kde C je oblúk krivky $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = x$ s koncovými bodmi $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, \sqrt{2})$.

976. Vypočítajte $\int_C [(x - y)\, \boldsymbol{i} + (x + y)\, \boldsymbol{j}] \cdot d\boldsymbol{s}$, kde:

a) C je úsečka AB, $A = (2, 3)$, $B = (3, 5)$, pričom A je jej prvý bod,

b) C je oblúk paraboly $y = x^2$, ktorého prvý bod je $A = (0, 0)$, a koncový bod $B = (2, 4)$,

c) C je oblúk paraboly $x = y^2$ od bodu $A = (0, 0)$ po bod $B = (4, 2)$.

V úlohách 977 až 993 vypočítajte krivkové integrály II. druhu:

977. $\int_C (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$, kde C je obvod trojuholníka ABC, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, pričom (A, B, C) je trojica usporiadaná v zmysle orientácie krivky C.

978. $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, kde C je obvod štvorca $ABCD$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$, $D = (0, -1)$, pričom (A, B, C) je usporiadaná trojica v zmysle orientácie krivky C.

979. $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, pričom C je krivka $y = 1 - |1 - x|$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, ktorej prvý bod je $A = (0, 0)$.

980. $\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, kde C oblúk paraboly $y = x^2$ od bodu $A = (-1, 1)$ po bod $B = (1, 1)$.

981. $\int_C y\,dx + x\,dy$, kde C je štvrťkružnica $\boldsymbol{r} = a(\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j})$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ a $A = (a, 0)$ je jej prvý bod.

982. $\int_C \frac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$, pričom trojica bodov $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (-a, 0)$ je usporiadaná v zmysle orientácie krivky C.

983. $\int_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$, kde C je elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ orientovaná tak, že body $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (-a, 0)$ tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

984. $\int_C [(2a - y)\,\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}] \,.\, d\boldsymbol{s}$, kde C je orientovaný oblúk cykloidy $\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\,\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pričom prvý bod krivky C je $A = (0, 0)$.

985. $\int_C \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, kde C je oblúk asteroidy $\boldsymbol{r} = a(\cos^3 t\boldsymbol{i} + \sin^3 t\boldsymbol{j})$ od bodu $A = (a, 0)$ po bod $B = (0, a)$.

986. $\int_C \left(-\boldsymbol{i} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,\boldsymbol{j}\right) . d\boldsymbol{s}$, kde krivka C sa skladá z oblúkov $\widehat{AB}$, $\widehat{BA}$, pričom $\widehat{AB}$ je oblúk paraboly $y = x^2$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $\widehat{BA}$ je úsečka a body A, B, D, $D = (1/2, 1/2)$ tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

987. $\int_C x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, kde C je úsečka AB, $A = (1, 1, 1)$ je jej prvý bod a $B = (2, 3, 4)$.

988. $\int\limits_C (x + y + z)\,dx$, kde C je obvod trojuholníka ABC, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ a trojica (A, B, C) je usporiadaná v zmysle orientácie krivky C.

989. $\int\limits_C [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\,\mathbf{k}] \,.\, d\mathbf{s}$, kde C je oblúk krivky $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$ od bodu $A = (0, 0, 0)$ po bod $B = (1, 2, 4)$.

990. $\int\limits_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, kde C je oblúk skrutkovice $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}/2\pi$ od bodu $A = (a, 0, 0)$ po bod $B = (a, 0, b)$.

991. $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde C je priesečnica plôch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ a trojica bodov $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ je usporiadaná v zmysle orientácie krivky C.

992. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, kde C je zložená z troch hlavných oblúkov $\widehat{AB}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{DA}$ na guľovej ploche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pričom $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$ a body A, B, D tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

993. $\int\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, kde C je časť Vivianiho krivky $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geqq 0$, $a > 0$ a body $A = (a, 0, 0)$, $B = (a/2, a/2, a/\sqrt{2})$, $D = (0, 0, a)$ tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

4,2. Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty

Nech G je otvorená množina a $\mathbf{f}$ vektorová funkcia definovaná na množine G. Krivkový integrál II. druhu — integrál z funkcie $\mathbf{f}$ po krivke C nezávisí v množine G od integračnej cesty, ak: 1. tento integrál existuje pre každú po čiastkach hladkú krivku C, ktorá leží v množine G; 2. pre ľubovoľné dve po čiastkach hladké krivky C_1 a C_2, ktoré celé ležia v množine G a majú spoločný prvý bod a spoločný posledný bod, platí:

$$\int\limits_{C_1} \mathbf{f}(P) \,.\, d\mathbf{s} = \int\limits_{C_2} \mathbf{f}(P) \,.\, d\mathbf{s}.$$

Ak integrál $\int\limits_C \mathbf{f}(P) \,.\, d\mathbf{s}$ nezávisí od integračnej cesty C v množine G, potom integrál $\int\limits_C \mathbf{f}(P) \,.\, d\mathbf{s}$ označujeme znakom $\int\limits_A^B \mathbf{f}(P) \,.\, d\mathbf{s}$, pričom A je prvý bod a B posledný bod krivky $C \subset G$.

Veta 1. Nech $\mathbf{f}$ je spojitá vektorová funkcia na oblasti G. Krivkový integrál $\int\limits_C \mathbf{f}(P) \,.\, d\mathbf{s}$ nezávisí od integračnej cesty na množine vtedy a len vtedy, keď existuje taká reálna funkcia $V(P)$, že platí:

$$f(P) = \text{grad}\, V(P) = \frac{\partial V}{\partial x}\, i + \frac{\partial V}{\partial y}\, j + \frac{\partial V}{\partial z}\, k$$

na oblasti G. Ak na oblasti G je $f(P) = \text{grad}\, V(P)$ a zároveň $f(P) = \text{grad}\, U(P)$, potom existuje taká konštanta C, že $V(P) = U(P) + C$ pre všetky $P \in G$.

Poznámka. Funkciu V z vety 1 nazývame *potenciálom funkcie* f.

Veta 2. Nech množina G je oblasť. Nech f je vektorová funkcia definovaná na množine G. Ak integrál $\int_C f(P) \, . \, ds$ nezávisí od integračnej cesty v množine G, tak pre ľubovoľnú uzavretú, po čiastkach hladkú krivku C_0 ležiacu v množine G platí:

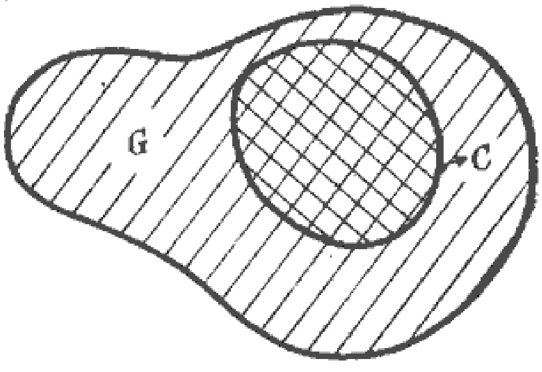
$$\int_{C_0} f(P) \, . \, ds = 0. \tag{1}$$

Ak pre ľubovoľnú jednoduchú uzavretú lomenú krivku L ležiacu v množine G platí (1) a funkcia f je spojitá na množine G, tak krivkový integrál $\int_C f(P) \, . \, ds$ nezávisí od integračnej cesty v množine G.

Množinu G nazývame *súvislou*, ak každé dva jej body možno spojiť lomenou krivkou ležiacou v množine G.

Veta Jordanova. Nech C je jednoduchá uzavretá krivka v rovine. Potom existujú dve oblasti G_1 a G_2 také, že každý bod P roviny padne práve do jednej z množín G_1, G_2, C. Množina C je hranicou aj množiny G_1 aj množiny G_2. Pritom jedna z množín G_1, G_2 je ohraničená a druhá neohraničená. Tá množina, ktorá je ohraničená, nazýva sa *vnútro krivky* C.

Otvorená množina G v E_2 sa nazýva jednoducho *súvislou*, ak množina G je súvislá a ak vnútro ľubovoľnej jednoduchej uzavretej krivky C obsiahnutej v množine G je celé obsiahnuté v množine G (*obr. 17*).



Obr. 17

Veta 3. Nech G je otvorená, jednoducho súvislá množina. Nech f je vektorová funkcia definovaná na množine G. Nech je $f(x, y) = p(x, y)\, i + q(x, y)\, j$. Nech parciálne derivácie $p'_y(x, y)$, $q'_x(x, y)$ sú spojité na množine G. Ak platí:

$$p'_y(x, y) = q'_x(x, y) \tag{2}$$

pre každý bod $(x, y) \in G$, potom funkcia f má potenciál V, pričom

$$V'_x(x, y) = p(x, y), \qquad V'_y(x, y) = q(x, y) \tag{3}$$

a integrál z f po krivke C v množine G nezávisí od integračnej cesty.

Po kúskoch hladká plocha (pozri 5,1) S je *mnohohrannou plochou*, ak existuje také jej delenie pozostávajúce z plôch $S_1, S_2, \ldots, S_m$, že všetky tieto plochy $S_1, S_2, \ldots, S_m$ sú trojuholníky.

Nech G je otvorená súvislá množina v priestore. Množinu G nazývame *plošne jednoducho súvislou*, ak každá jednoduchá uzavretá lomená krivka ležiaca v G je okrajom nejakej jednoduchej mnohohrannej plochy, ktorá celá leží v množine G.

Veta 4. Nech G je otvorená plošne jednoducho súvislá množina. Nech f je vektorová funkcia spojitá v množine G, ktorá má spojité prvé parciálne derivácie na množine G. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby existoval potenciál V funkcie f, $f = \text{grad}\, V$, je:

$$\text{rot}\, f(P) = o \tag{4}$$

na množine G.

Dôsledok 1. Ak je $\mathbf{f}(x, y, z) = p(x, y, z)\,\mathbf{i} + q(x, y, z)\,\mathbf{j} + r(x, y, z)\,\mathbf{k}$, potom vzťah (4) možno napísať v tvare troch podmienok:

$$\begin{aligned} p'_y(x, y, z) - q'_x(x, y, z) &= 0, \\ q'_z(x, y, z) - r'_y(x, y, z) &= 0, \\ r'_x(x, y, z) - p'_z(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

pre každý bod $(x, y, z) \in G$.

Dôsledok 2. Ak funkcia $\mathbf{f}$ má potenciál V na množine G, potom $p(x, y, z)\,\mathrm{d}x + q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + r(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ je totálnym diferenciálom funkcie V, t. j. platí:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = r(x, y, z). \tag{6}$$

Príklad 1. Zistime, či funkcia $\mathbf{f}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + (2 + xz)\,\mathbf{j} + (xy - 1)\,\mathbf{k}$ má potenciál na E_3 a nájdime ho.

Riešenie. Keďže parciálne derivácie $\mathbf{f}'_x(x, y, z) = z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, $\mathbf{f}'_y(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{k}$, $\mathbf{f}'_z(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ sú spojité funkcie v celom priestore E_3 a pre každý bod (x, y, z) z E_3 platí $p'_y(x, y, z) = z$, $q'_x(x, y, z) = z$, $q'_z(x, y, z) = x$, $r'_y(x, y, z) = x$, $r'_x(x, y, z) = y$, $p'_z(x, y, z) = y$, t. j. platia vzťahy (5), preto podľa vety 4 má funkcia $\mathbf{f}$ potenciál V. Z dôsledku *2* preň vyplýva:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2 + xz, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy - 1 \tag{7}$$

na E_3. Z toho vyplýva, že

$$V = \int yz\,\mathrm{d}x + U(y, z) = xyz = U(y, z),$$

kde U je diferencovateľná funkcia na E_3. Podľa druhej podmienky z (3) musí platiť:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = xz + \frac{\partial U}{\partial y} = 2 + xz,$$

čiže

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2.$$

Z toho vyplýva:

$$U(y, z) = 2y + W(z)$$

a

$$V = xyz + 2y + W(z),$$

kde W je diferencovateľná funkcia. Z tretej podmienky z (7) vyplýva, že zároveň musí platiť:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = xy + 0 + W'(z) = xy - 1,$$

čiže

$$W'(z) = -1$$

a

$$W(z) = -z + C$$

na E_3. Úhrnom máme pre potenciál V funkcie $\mathbf{f}$ na E_3:

$$V(x, y, z) = xyz + 2y - z + C,$$

kde C je ľubovoľné číslo.

994. Vypočítajte $\int_C (2y - 6xy^3)\,\mathrm{d}x + (2x - 9x^2y^2)\,\mathrm{d}y$, ak krivka C, ktorej prvý bod je $A = (0, 0)$ a posledný bod $B = (2, 2)$, je a) úsečka, b) parabola $y = x^2/2$, c) parabola $x = y^2/2$, d) kubická parabola $y = x^3/4$.

V úlohách 995 až 998 zistite, či dané krivkové integrály sú závislé od integračnej cesty v E_2, resp. v E_3.

995. $\int\limits_C (2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy.$

996. $\int\limits_C [(x^4 + 4xy^3)\,\mathbf{i} + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{s}.$

997. $\int\limits_C (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz.$

998. $\int\limits_C \left(3x^2 + \frac{y}{(x+z)^2}\right) dx + \frac{dy}{x+z} + \frac{y}{(x+z)^2}\,dz.$

999. Zistite, či krivkový integrál $\int\limits_C \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right) dx - \frac{2y}{x^3}\,dy$ po ľubovoľnej uzavretej po čiastkach hladkej krivke sa rovná nule.

1000. Vypočítajte krivkový integrál $\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ po ľubovoľnej jednoduchej uzavretej, po čiastkach hladkej krivke.

V úlohách **1001** a **1002** sa presvedčte o tom, že dané integrály po ľubovoľnej uzavretej po čiastkach hladkej krivke C sa rovnajú nule.

1001. $\int\limits_C f(xy)\,y\,dx + f(xy)\,x\,dy,$ kde funkcia f je spojitá.

1002. $\int\limits_C f(x^2 + y^2 + z^2)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$ kde funkcia f je spojitá.

V úlohách **1003** až **1012** vypočítajte krivkové integrály:

1003. $\int\limits_A^B 2xy\,dx + x^2\,dy,$ kde $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$.

1004. $\int\limits_A^B (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy,$ kde $A = (-2, -1)$, $B = (3, 0)$.

1005. $\int\limits_A^B \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right) dx + \left(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right) dy,$ kde $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$ a množina G je prvý kvadrant.

1006. $\int\limits_A^B \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde $A = (3, 4)$, $B = (5, 12)$ a množina $G = E_2 - O$, $O = (0, 0)$.

1007. $\int\limits_A^B \frac{x}{(x + y)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2x + y}{(x + y)^2}\,\mathrm{d}y$, kde $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$ a množina G je oblasť $y > -x$.

1008. $\int\limits_A^B \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)\mathrm{d}y$, kde $A = (3, 4)$, $B = (5, 12)$ a množina $G = E_2 - O$, $O = (0, 0)$.

1009. $\int\limits_A^B 2y \sin 2x\,\mathrm{d}x - \cos 2x\,\mathrm{d}y$, kde $A = (\pi/4, 2)$, $B = (\pi/6, 1)$.

1010. $\int\limits_A^B x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z$, kde $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, -4)$.

1011. $\int\limits_A^B yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$, kde $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$.

1012. $\int\limits_A^B \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, kde $A = (0, 0, a)$, $B = (0, b, 0)$ a množina $G = E_3 - O$, $O = (0, 0, 0)$.

V úlohách 1013 až 1016 nájdite potenciál V funkcie $\mathbf{f}$, ak:

1013. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 - 2xy - y^2)\,\mathbf{j}$.

1014. $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{y^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x - y)^2}\right)\mathbf{j}$ na oblasti G, pre ktorú platí $y > x$.

1015. $\mathbf{f}(x, y) = \mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x - y + z) + y]\,\mathbf{i} + \mathrm{e}^x[\mathrm{e}^y(x - y) + 1]\,\mathbf{j}$.

1016. $\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}[(x + y - z)\,\mathbf{i} + (x + y - z)\,\mathbf{j} + (x + y + z)\,\mathbf{k}]$.

V úlohách 1017 až 1020 nájdite funkciu u ak je daný jej úplný diferenciál $\mathrm{d}u$.

1017. $\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y$.

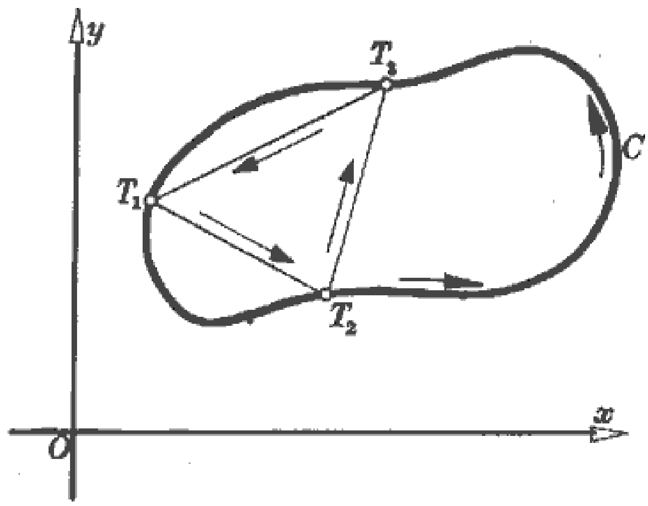
1018. $\mathrm{d}u = (2x \cos y - y^2 \sin x)\,\mathrm{d}x + (2y \cos x - x^2 \sin y)\,\mathrm{d}y$.

1019. $du = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

1020. $du = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$.

4,3. Greenova veta

Nech je v rovine zvolený pravouhlý súradnicový systém a C je jednoduchá uzavretá cyklicky orientovaná krivka. Nech T_1, T_2, T_3 sú také body krivky C, že trojica (T_1, T_2, T_3) je usporiadaná trojica pri danej orientácii krivky C a trojuholník, ktorého vrcholmi sú body T_1, T_2, T_3, leží vnútri krivky C. Hovoríme, že krivka C je orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s daným súradnicovým systémom, ak trojuholník s vrcholmi T_1, T_2, T_3 je kladne [záporne] orientovaný (o orientácii trojuholníka pozri čl. 4,7/I).



Obr. 18

Poznámka 1. Ak krivka C je orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s daným súradnicovým systémom, hovoríme, že je kladne [záporne] orientovaná.

Poznámka 2. Nech v rovine je zvolený pravouhlý súradnicový systém (ako v čl. 4,9/I). Krivka C je orientovaná súhlasne s daným súradnicovým systémom (kladne), ak pri obchádzaní po nej v zmysle orientácie máme jej vnútro po ľavej strane (*obr. 18*).

Veta 1. (*Greenova veta.*) Nech C je jednoduchá uzavretá, po čiastkach hladká krivka, cyklicky orientovaná súhlasne s daným súradnicovým systémom. Nech množina A pozostáva zo všetkých bodov krivky C a jej vnútra. Nech funkcie $p(x, y)$ a $q(x, y)$ sú spojité a majú spojité prvé parciálne derivácie vzhľadom na množinu A. Potom platí:

$$\iint_A \left[\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}\right] dx\,dy = \int_C p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy\,. \qquad (1)$$

Greenova veta platí aj pre zložitejšie množiny, ako je množina A vo vete 1, pre tzv. viacnásobné súvislé množiny.

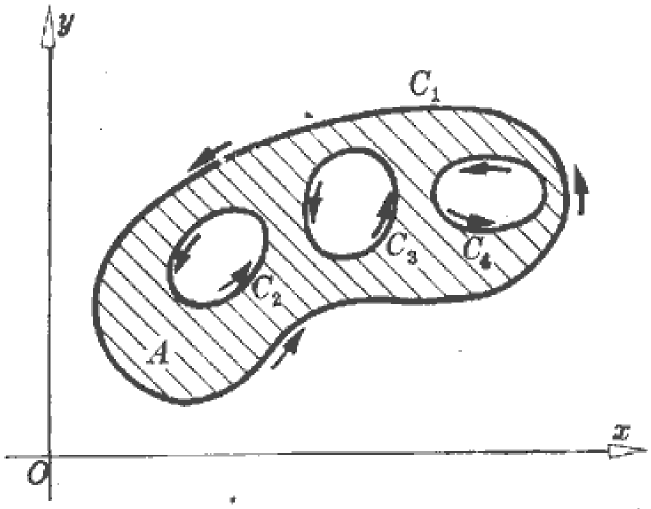
Veta 2. Nech C_1, C_2, …, C_n sú jednoduché uzavreté, po čiastkach hladké krivky, cyklicky orientované súhlasne s daným súradnicovým systémom s vlastnosťami:

1. žiadne dve krivky C_i, C_j sa nepretínajú;
2. všetky krivky C_2, …, C_n sú vnútri krivky C_1;
3. krivka C_i leží vo vonkajšku krivky C_j, pre každé $i \neq j$, $i, j = 2, 3, 4, \ldots, n$.

Nech množina A pozostáva z krivky C_1 a tej časti jej vnútra, ktorá nie je vnútrom kriviek $C_2, \ldots, C_n$ (pozri *obr. 19*, kde $n = 4$). Nech funkcie $p(x, y)$, $q(x, y)$ sú spojité a majú spojité prvé parciálne derivácie na nejakej otvorenej množine S, ktorá obsahuje množinu A. Potom platí:

$$\iint_A \left[\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{C_1} p(x, y)\, \mathrm{d}x + q(x, y)\, \mathrm{d}y -$$

$$- \sum_{k=2}^{n} \int_{C_k} p(x, y)\, \mathrm{d}x + q(x, y)\, \mathrm{d}y. \tag{2}$$



Obr. 19

Veta 3. (*Greenova formula.*) Nech C je jednoduchá uzavretá, po čiastkach hladká krivka. Nech A je množina pozostávajúca z bodov krivky C a jej vnútra. Nech $f(x, y)$ a $g(x, y)$ majú spojité všetky parciálne derivácie prvého a druhého rádu vzhľadom na množinu A. Potom platí:

$$\int_C \left(f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} - g \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\right) \mathrm{d}s = \iint_A (f\Delta g - g\Delta f)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{3}$$

pričom $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály krivky C v jej ľubovoľnom bode, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}$, $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}$ sú derivácie funkcie f, g v smere vektora $\boldsymbol{n}$, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ a $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Príklad 1. Vypočítajme:

$$\int_C (3 - xy - y^3)\, \mathrm{d}x - (2xy - x^2)\, \mathrm{d}y,$$

kde krivka C je obvod štvorca s vrcholmi $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 0)$, $A_3 = (1, 1)$, $A_4 = (0, 1)$ cyklicky orientovaný súhlasne so súradnicovým systémom.

Riešenie. Daný integrál vypočítame pomocou Greenovej vety. Množina A je štvorec s vrcholmi A_1, A_2, A_3, A_4. Funkcie $p(x, y) = 3 - xy - y^3$, $q(x, y) = x^2 - 2xy$, $\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = -x - 3y^2$ sú spojité vzhľadom na množinu A. Podľa vety 1 platí:

$$\int_C (3 - xy - y^3)\, \mathrm{d}x - (2xy - x^2)\, \mathrm{d}y = \iint_A [(2x - 2y) - (-x - 3y^2)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_A (3x - 2y + 3y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (3x - 2y + 3y^2)\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[3xy - y^2 + y^3 \right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 3x\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

1021. Použitím Greenovej vety vypočítajte $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, ak krivka C je:

a) obvod štvorca ohraničeného priamkami $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$ súhlasne orientovaný so súradnicovým systémom;

b) kružnica s polomerom 2 so stredom v bode $O = (0, 0)$ orientovaná súhlasne so súradnicovým systémom;

c) $\boldsymbol{r} = 2\cos^3 t\boldsymbol{i} + 2\sin^3 t\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a je cyklicky orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením.

1022. Vypočítajte $\int_C x\,e^{-y^2}\,dx + [-x^2 y\,e^{-y^2} + 1/(x^2 + y^2)]\,dy$, ak C je obvod štvorca daného nerovnosťami $|x| \leqq a$, $|y| \leqq a$, súhlasne orientovaný so súradnicovým systémom.

1023. Pomocou Greenovej vety vypočítajte: $\int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\,dy$, kde C je hranica oblasti $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$, $x \leqq y \leqq x\sqrt{3}$, súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom.

1024. Vypočítajte: $\int_C (e^x \sin y - 16y)\,dx + (e^x \cos y - 16)\,dy$, kde C je polkružnica $x^2 + y^2 = ax$, $y \geqq 0$, s prvým bodom $A = (a, 0)$ a posledným bodom $O = (0, 0)$ tak, že doplníte oblúk $\widehat{AO}$ úsečkou $\overline{OA}$ na uzavretú krivku a použijte Greenovu vetu.

V úlohách **1025** až **1027** použitím Greenovej vety vypočítajte dané integrály:

1025. $\int_C (1 + xy)\,e^{xy}\,dx + x^2(1 + e^{xy})dy$, ak C je obvod obdĺžnika s vrcholmi $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (2, 0)$, $A_3 = (2, 1)$, $A_4 = (0, 1)$ súhlasne orientovaný so súradnicovým systémom.

1026. $\int_C (3x^2 \cos y - y^3)\,dx + (x^3 - 3x^2 \sin y)\,dy$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 = 1$ súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom.

1027. $\int_C (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$, kde C je elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom.

1028. Dokážte, že

$$\int_C (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + x\,e^y - 2y)\,dy = 0,$$

ak C je jednoduchá uzavretá, po čiastkach hladká krivka, stredove súmerná podľa začiatku súradnicového systému.

1029. Dokážte, že $\int_C (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, kde C je jednoduchá uzavretá krivka po čiastkach hladká súhlasne orientovaná so súradnicovým systémom, rovná sa obsahu oblasti A ohraničenej krivkou C.

1030. Pomocou Greenovej vety odvoďte vzorec pre obsah jednoduchej súvislej oblasti ohraničenej krivkou C.

1031. Ak krivka C, množina A a funkcie f, g spĺňajú predpoklady Greenovej vety, dokážte, že platí:

$$\int_C fg\,dx + fg\,dy = \iint_A [g(f'_x - f'_y) + f(g'_x - g'_y)]\,dx\,dy.$$

1032. Dvakrát diferencovateľná funkcia u sa nazýva *harmonickou* v oblasti G, ak

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dokážte, že u je harmonická funkcia v oblasti G vtedy a len vtedy, keď

$$\int_C \frac{du}{d\mathbf{n}}\,ds = 0,$$

kde C je ľubovoľná, hladká uzavretá krivka v G, $\frac{du}{d\mathbf{n}}$ je derivácia v smere vonkajšej normály ku krivke C.

1033. Dokážte, že

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\iint_A u\Delta u\,dx\,dy + \int_C u\,\frac{du}{d\mathbf{n}}\,ds,$$

kde hladká, uzavretá krivka C je hranicou ohraničenej oblasti A a u je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A.

1034. Pomocou prvej Greenovej formule

$$\int_C f\,\frac{dg}{d\mathbf{n}}\,ds = \iint_A (f\Delta g + \operatorname{grad} f \,.\, \operatorname{grad} g)\,dx\,dy,$$

dokážte druhú Greenovu formulu

$$\int_C \left(f\,\frac{dg}{d\mathbf{n}} - g\,\frac{df}{d\mathbf{n}}\right) ds = \iint_A [f\Delta g - g\Delta f]\,dx\,dy,$$

kde f a g sú dvakrát diferencovateľné funkcie na ohraničenej oblasti A, ktorej hranica je hladká, uzavretá krivka C.

1035. Dokážte, že harmonická funkcia u v ohraničenej uzavretej oblasti $\bar{A}$, pričom $u \neq C$ pre $(x, y) \in \bar{A}$, nenadobúda $\max u$, resp. $\min u$ vo vnútorných bodoch oblasti $\bar{A}$ (princíp maxima).

1036. Dokážte vetu o strednej hodnote pre harmonické funkcie

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(P)\, ds,$$

kde C je kružnica so stredom v bode M.

4,4. Geometrické a fyzikálne aplikácie krivkového integrálu

Veta 1. Nech C je jednoduchá uzavretá po čiastkach hladká krivka cyklicky orientovaná súhlasne s daným súradnicovým systémom a A je vnútro krivky C. Potom obsah oblastí A je:

$$P = \frac{1}{2} \int_C x\, dy - y\, dx. \tag{1}$$

Veta 2. Nech C je po čiastkach hladká krivka, orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením, potom:

1. Dĺžka krivky C je:

$$L = \int_C ds. \tag{2}$$

2. Hmotnosť krivky C je:

$$M = \int_C \mu(P)\, ds, \tag{3}$$

kde $\mu = \mu(P)$ je lineárna hustota v ľubovoľnom bode P krivky C.

3. Súradnice ťažiska $T = (\xi, \eta, \zeta)$ krivky C sú:

$$\xi = \frac{1}{M} \int_C x\mu(P)\, ds, \qquad \eta = \frac{1}{M} \int_C y\mu(P)\, ds, \qquad \zeta = \frac{1}{M} \int_C z\mu(P)\, ds. \tag{4}$$

kde integrály v (4) sú príslušné statické momenty.

Veta 3. Nech silové pole je dané funkciou $\mathbf{f}(P)$. Potom práca L tohto poľa po krivke C je:

$$L = \int_C \mathbf{f}(P) \cdot d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Ak táto práca nezávisí od integračnej cesty, silové pole sa nazýva *konzervatívnym* a potenciál funkcie f sa nazýva *potenciálom silového poľa*. Ak táto práca závisí od integračnej cesty, silové pole sa nazýva *disipatívnym*.

Príklad 1. Nájdime súradnice homogénneho $[\mu(P) = 1]$ oblúka skrutkovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$, kde $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Riešenie. Vypočítajme najprv hmotnosť daného oblúka. Podľa vzťahu (3) máme:

$$M = \int_C \mu(P)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + k^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + k^2}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Vypočítajme ešte statické momenty:

$$\int_C x\mu(P)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + k^2}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{a^2 + k^2}\,[\sin t]_2^{\pi/0} = a\sqrt{a^2 + k^2}\,.$$

$$\int_C y\mu(P)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} a\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + k^2}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{a^2 + k^2}\,[-\cos t]_0^{\pi/2} = a\sqrt{a^2 + k^2}\,.$$

$$\int_C z\mu(P)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} kt\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + k^2}\,\mathrm{d}t = k\sqrt{a^2 + k^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = k\sqrt{a^2 + k^2}\,\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Súradnice ťažiska daného oblúka podľa vety 2 sú:

$$\xi = \frac{1}{M}\int_C x\mu(P)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}\,\pi/2}\,.\,a\sqrt{a^2 + k^2} = \frac{2a}{\pi}\,.$$

$$\eta = \frac{1}{M}\int_C y\mu(P)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}\,\pi/2}\,a\sqrt{a^2 + k^2} = \frac{2a}{\pi}\,.$$

$$\zeta = \frac{1}{M}\int_C z\mu(P)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}\,\pi/2}\,k\sqrt{a^2 + k^2}\,\frac{\pi^2}{8} = k\,\frac{\pi}{4}\,.$$

Ťažisko daného oblúka je $T = (2a/\pi,\ 2a/\pi,\ k\pi/4)$.

Príklad 2. Silové pole pôsobí v každom bode P priestoru E_3 silou, ktorá je nepriamo úmerná jeho vzdialenosti od osi o_z a smeruje kolmo na os o_z. Nájdime prácu poľa pri pohybe hmotného bodu M po kružnici $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$, a to od bodu $A = (1, 1, 0)$ po bod $B = (0, 1, 1)$ súhlasne s parametrickým vyjadrením.

Riešenie. Vypočítajme silu $\mathbf{f}$ v ľubovoľnom bode $P = (x, y, z)$. Nech priemet bodu P do osi o_z je $Z = (0, 0, z)$ a nech $Z - P = \mathbf{u}$. Potom pre silu $\mathbf{f}$ platí:

$$\mathbf{f} = \frac{k}{u}\,\mathbf{u}^0 = \frac{k}{u^2}\,\mathbf{u}\,,$$

kde k je konštanta úmernosti, $k > 0$ a $u = |\mathbf{u}|$. Keďže $\mathbf{u} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, dostaneme:

$$\mathbf{f}(P) = -\frac{k}{x^2 + y^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}).$$

Práca podľa vety 3 je:

$$L = \int_C \mathbf{f}(P)\,.\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_C -\frac{k}{x^2 + y^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\,.\,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

kde C je oblúk kružnice $\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ od bodu $A = (1, 1, 0)$ po bod $B = (0, 1, 1)$ orientovaný súhlasne s parametrickým vyjadrením. Podľa vety 2 článku 4,1 máme:

$$L = -k\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + 1}\,(\cos t\mathbf{i} + \mathbf{j})\,.\,(-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{k})\,\mathrm{d}t =$$

$$= k \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t}{\cos^2 t + 1} \, dt = k \int_0^1 \frac{u}{u^2 + 1} \, du = \left[\frac{k}{2} \ln (1 + u^2) \right]_0^1 = \frac{k}{2} \ln 2 \, .$$

Teda práca $L = \frac{k}{2} \ln 2$.

V úlohách **1037** až **1044** pomocou krivkového integrálu nájdite obsah vnútra jednoduchej uzavretej krivky, ak krivka je:

1037. Elipsa $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1038. Jeden oblúk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a príslušná časť osi o_x.

1039. Asteroida $\mathbf{r} = a(\cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j})$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1040. Slučka Descartovho listu $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

1041. $y^2 = x^2 - x^4$.

1042. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

1043. Epicykloida [hypocykloida] (pozri 3,1/III), pričom pomer oboch polomerov je celé číslo $n \geq 1$ [$n \geq 2$].

1044. $(x + y)^{m+n+1} = ax^n y^m$.

1045. Pomocou krivkového integrálu vypočítajte obsah segmentu ohraničeného osou o_x, oblúkom hyperboly $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ a úsečkou OM, kde $O = (0, 0)$ a $M = (x_0, y_0)$ je bod hyperboly.

1046. Nájdite hmotnosť časti paraboly $y = x^2$ od bodu $A = (0, 0)$ po bod $B = (2, 4)$, ak lineárna hustota $\mu(x, y) = kx^2$.

1047. Nájdite hmotnosť hmotného oblúka $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$, $a > 0$, $b > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, ak jeho lineárna hustota je $\mu(t) = b |\sin t|$.

1048. Nájdite hmotnosť hmotného oblúka $\mathbf{r} = a(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}/2 + t^3\mathbf{k}/3)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, ak jeho lineárna hustota je $\mu(x, y, z) = \sqrt{2y/a}$.

1049. Vypočítajte hmotnosť hmotného oblúka $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, ak jeho lineárna hustota je $\mu(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

1050. Nájdite hmotnosť oblúka krivky $\mathbf{r} = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$, $t \in \langle 0, a \rangle$, ak lineárna hustota krivky v ľubovoľnom bode je nepriamo úmerná r^2 a v bode $A = (1, 0, 1)$ sa rovná 1.

1051. Vypočítajte hmotnosť drôtu, ktorý má tvar kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$, ak jeho hustota je $\mu(x, y, z) = kx^2$.

1052. Nájdite ťažisko homogénneho oblúka kružnice $\varrho = a$, $0 \leq \varphi \leq 2\alpha$.

1053. Nájdite ťažisko homogénneho oblúka cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1054. Nájdite ťažisko obvodu sférického trojuholníka $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

1055. Nájdite ťažisko homogénneho oblúka $\mathbf{r} = e^t(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $t \in (-\infty, 0\rangle$.

1056. Drôt má tvar kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Nájdite jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na jeho priemer, ak jeho lineárna hustota je $\mu(x, y) = |x| + |y|$.

1057. Nájdite momenty zotrvačnosti vzhľadom na súradnicové osi jedného závitu skrutkovice $\boldsymbol{r} = a(\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}) + h\boldsymbol{k}/2$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1058. Nech K je jednoduchá uzavretá krivka v E_2 a I_z nech je moment zotrvačnosti vzhľadom na os o_z oblasti ohraničenej krivkou K. Ukážte, že existuje také celé číslo n, že

$$nI_z = \int_K x^3\,\mathrm{d}y - y^3\,\mathrm{d}x.$$

1059. Nájdite prácu silového poľa $\boldsymbol{f} = xy\boldsymbol{i} + (x + y)\,\boldsymbol{j}$, ak sa hmotný bod M premiestni z bodu $O = (0, 0)$ do bodu $A = (1, 1)$:

a) po priamke $y = x$,
b) po parabole $y = x^2$,
c) po lomenej čiare OBA, pričom $B = (1, 0)$,
d) po lomenej čiare OCA, pričom $C = (0, 1)$.

1060. Dokážte, že práca silového poľa $\boldsymbol{f} = k(x + y^2)\,\boldsymbol{i} + (2xy - 8)\,\boldsymbol{j}$ nezávisí od cesty, po ktorej sa premiestnenie koná, ale iba od začiatočného a koncového bodu cesty.

1061. Silové pole pôsobí v každom bode $X = (x, y)$ silou $\boldsymbol{f} = (x + y)\,\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j}$. Vypočítajte prácu poľa pri pohybe hmotného bodu po kružnici $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1062. Silové pole je dané rovnicou $\boldsymbol{f} = (x + y)\,\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Nájdite prácu poľa pri pohybe hmotného bodu po kružnici $x^2 + y^2 = a^2$. Zdôvodnite výsledok.

1063. Silové pole je dané funkciou $\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Vypočítajte prácu poľa pri pohybe hmotného bodu po lomenej krivke $OABCO$, ak $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$.

1064. V každom bode silového poľa v E_3 pôsobí sila $\boldsymbol{f} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$. Vypočítajte prácu tohto poľa pri pohybe hmotného bodu po krivke C, ktorá je daná rovnicou $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

1065. Nájdite prácu pružnej sily, ktorá smeruje stále do začiatku súradnicového systému a jej veľkosť je úmerná vzdialenosti hmotného bodu od začiatku, ak sa tento bod pohybuje po elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, a to z bodu $A = (a, 0)$ do bodu $B = (0, b)$.

1066. Sila, ktorej veľkosť je nepriamo úmerná vzdialenosti bodu od roviny R_{xy}, smeruje do začiatku O súradnicového systému. Vypočítajte prácu tejto sily, keď sa hmotný bod pohybuje po úsečke $\boldsymbol{r} = (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k})\,t$, $t \in \langle 1, 2 \rangle$.

1067. Nájdite silové pole, ktorého potenciál je $V(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}(x/y)$. Vypočítajte prácu tohto poľa pri pohybe hmotného bodu z bodu $A = (1, 1)$ do bodu $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

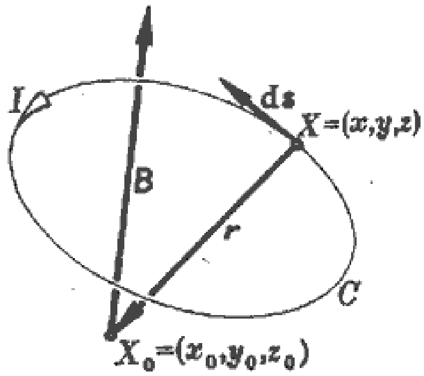
1068. Nájdite potenciál daného silového poľa a vypočítajte prácu poľa po danej dráhe:

a) $\mathbf{f} = -mg\mathbf{k}$ (tiažové pole), $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$,
b) $\mathbf{f} = -\mu\mathbf{r}/r^3$, $\mu = \text{const}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, (gravitačné pole) a dráha je polpriamka so začiatočným bodom $A = (a, b, c)$,
c) $\mathbf{f} = -k^2\mathbf{r}$, $k > 0$, (pružná sila), $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, 0, b)$, $a \leqq r \leqq b$.

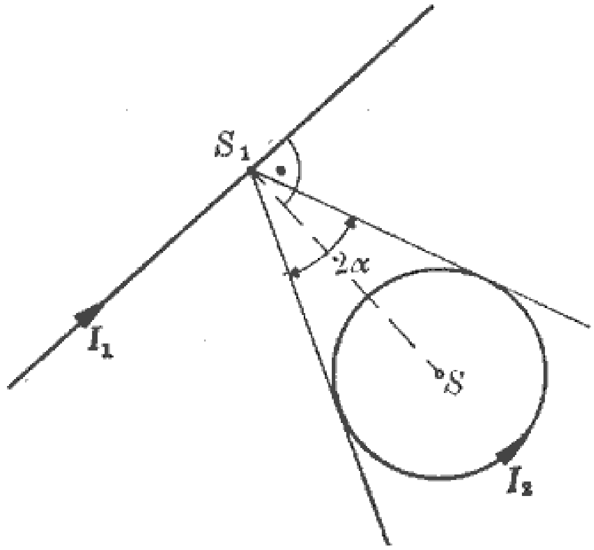
1069. Vypočítajte logaritmický potenciál jednoduchej vrstvy v bode $A = (x_0, y_0)$

$$V(x_0, y_0) = \int_C \varkappa \ln \frac{1}{r}\, ds,$$

kde $\varkappa$ je hustota, $\varkappa = \text{const}$, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ a krivka C je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$.



Obr. 20



Obr. 21

Podľa Biotovho—Savartovho zákona v okolí vodiča, ktorý má tvar uzavretej krivky C (obr. 20) a ktorým preteká ustálený elektrický prúd I, vzniká magnetické pole, ktorého magnetická indukcia $\mathbf{B}$ je:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

alebo

$$\mathbf{B}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \mathbf{i} \int_C \frac{I}{r^3} [(z_0 - z)\, dy - (y_0 - y)\, dz] + \right.$$

$$\left. + \mathbf{j} \int_C \frac{I}{r^3} [(x_0 - x)\, dz - (z_0 - z)\, dx] + \mathbf{k} \int_C \frac{I}{r^3} [(y_0 - y)\, dx - (x_0 - x)\, dy] \right\}.$$

1070. Vypočítajte magnetickú indukciu v bode $A = (0, 0, z)$ na osi kruhového závitu C daného rovnicou $x^2 + y^2 = a^2$, ktorým tečie prúd I v smere kladnej orientácie kružnice C.

1071. Dokážte, že absolútna hodnota magnetickej indukcie v strede závitu, ktorý má tvar pravidelného $2n$-uholníka, je:

$$\frac{\mu n I}{\pi a} \sin \frac{\pi}{2n},$$

kde a je vzdialenosť stredu mnohouholníka od jeho strany a I je prúd pretekajúci závitom.

1072. Vodič má tvar Archimedovej špirály, ktorá v polárnom súradnicovom systéme má rovnicu $\varrho = \frac{R}{2\pi n}\varphi$, kde n je počet závitov a R je sprievodič koncového bodu vodiča, pričom jeho začiatok je v $O = (0, 0)$ a tečie ním prúd I. Dokážte, že pre zložku magnetickej indukcie do osi o_z platí:

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu n I}{2R}\left[\ln\frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right].$$

1073. Nájdite zložku B_z magnetickej indukcie v bode $X = (0, 0, b)$ na osi solenoidu, ktorý má tvar skrutkovice $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + at\operatorname{tg}\alpha\,\boldsymbol{k}$, pričom solenoid má n závitov, jeho stred leží v začiatku $O = (0, 0, 0)$ a preteká ním prúd I.

1074. Vypočítajte silu, ktorá pôsobí na 1 cm dĺžky dvoch nekonečne dlhých rovnobežných vodičov, ktorými pretekajú prúdy I_1, I_2 a ich vzdialenosť je a.

1075. Prúd I_1 tečie kruhovým závitom s polomerom a a prúd I_2 nekonečným vodičom tvaru priamky, ktorý leží v rovine závitu. Ukážte, že vodiče pôsobia na seba silou, ktorej absolútna hodnota je:

$$I_1 I_2(\sec\alpha - 1),$$

kde 2α je uhol, pod ktorým vidno kružnicu z bodu, ktorý je kolmým priemetom stredu kružnice na priamku (pozri *obr. 21*).

1076. Prúdy I_1, I_2 tečú štvorcovými závitmi so stranou a. Štvorce ležia v rovnobežných rovinách tak, že ich strany sú navzájom rovnobežné a ich stredy ležia na priamke kolmej na obe roviny, pričom ich vzdialenosť je c. Dokážte, že štvorcové závity sa priťahujú silou rovnajúcou sa:

$$\frac{2\mu I_1 I_2}{\pi}\left[1 - \frac{a^2 + 2c^2}{c\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{c\sqrt{2a^2 + c^2}}{a^2 + c^2}\right].$$

5. PLOŠNÉ INTEGRÁLY

5,1. Plošné integrály I. a II. druhu

Jednoduchou hladkou plochou σ sa nazýva jednoduchá plocha, ktorej každý bod je regulárny (pozri 3,12/III).

Plocha σ sa nazýva *jednoduchou uzavretou* plochou, ak existuje jednojednoznačné spojité zobrazenie guľovej plochy na plochu σ.

Veta Jordanova. Nech σ je jednoduchá uzavretá plocha. Potom existujú také dve oblast G_1, G_2 bez spoločných bodov, že každý bod priestoru $P \in \sigma$ padne do jednej z množín G_1, G_2. Plocha σ je hranicou množiny G_1 a zároveň hranicou množiny G_2. Jedna z množín G_1, G_2 je ohraničená, druhá neohraničená.

Vnútrom plochy σ nazývame tú z množín G_1, G_2 z predchádzajúcej vety, ktorá je ohraničená.

Nech M je množina bodov z E_2, ktorá je zjednotením množiny bodov jednoduchej, uzavretej, po čiastkach hladkej krivky C a jej vnútra. Nech $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in M$ je parametrické vyjadrenie plochy σ, pričom u a v sú pravouhlé súradnice bodu $T = (u, v) \in M$.

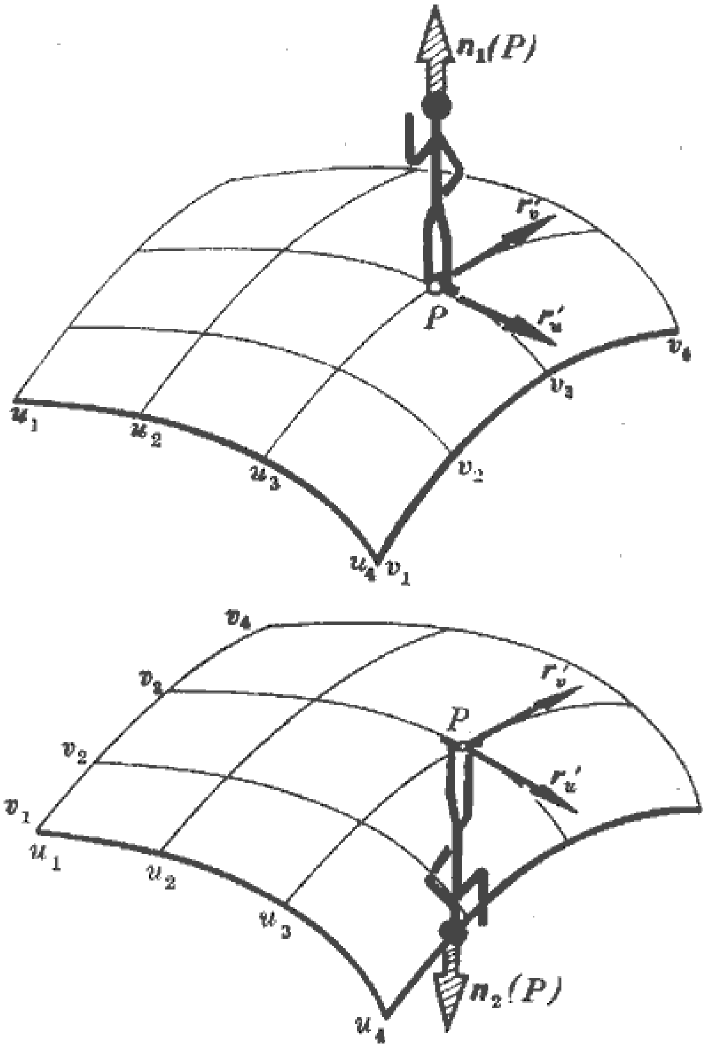
Normálnym vektorom plochy σ v bode P nazývame na rozdiel od diferenciálnej geometrie vektor $\boldsymbol{n}_1(P) = \dfrac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|}$ aj vektor $\boldsymbol{n}_2(P) = -\boldsymbol{n}_1(P)$.

Plochu σ možno dvoma spôsobmi orientovať, t. j. vybrať jednu z dvoch strán tejto plochy. Plochu σ orientujeme tak, že vyberieme jeden vektor $\boldsymbol{n}(P)$ z jednotkových normálových vektorov (smerujúci na túto stranu plochy), a to alebo v každom bode P vektor $\boldsymbol{n}_1(P)$, alebo v každom bode P vektor $\boldsymbol{n}_2(P)$ (pozri *obr. 22*).

V prvom prípade hovoríme o *súhlasnej*, v druhom prípade o *nesúhlasnej orientácii* s parametrickým vyjadrením plochy.

Jednoduchá uzavretá plocha σ je orientovaná normálou *von*, ak v každom regulárnom bode plochy σ je jednotkový normálny vektor $\boldsymbol{n}(P)$ zvolený tak, že úsečka PQ z polpriamky $X = P + t\boldsymbol{n}(P)$, $t \in \langle 0, \infty)$ nepadne dovnútra plochy σ.

Jednoduchá uzavretá plocha σ je



Obr. 22

orientovaná normálou *dnu*, ak plocha σ^*, ktorá z nej vznikne zmenou orientácie, je orientovaná normálou von.

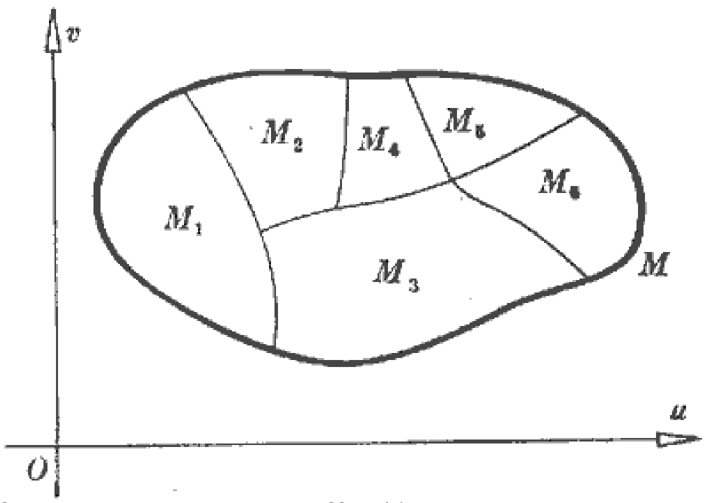
Nech $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\} = \Delta$ je systém podmnožín z M s týmito vlastnosťami:

a) Každá z množín systému Δ je ohraničená jednoduchou, uzavretou, po čiastkach hladkou krivkou.
b) Každé dve množiny systému Δ majú spoločný alebo iba oblúk, alebo jeden bod, alebo nemajú nijaký bod spoločný.
c) Zjednotením všetkých množín z Δ je M.

Potom Δ nazývame *delením množiny* M (pozri *obr. 23*).

Nech $F(u, v) = O + r(u, v)$ je jednojednoznačné zobrazenie množiny M na jednoduchú hladkú plochu σ. Systém množín $\{\sigma_1 = F(M_1), \sigma_2 = F(M_2), \ldots, \sigma_k = F(M_k)\} = D$ nazývame *delením plochy* $\sigma = F(M)$.

Priemerom plochy σ rozumieme číslo $d(\sigma) = \sup \varrho(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \tau$.
$\text{Max}\,\{d(\sigma_i), i = 1, 2, \ldots, k\} = \| D \|$ nazývame *normou delenia* D.



Obr. 23

Ak pre postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení plochy σ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \| D_n \| = 0$, hovoríme *o normálnej postupnosti delení*.

Nech $f(P)$ je ohraničená funkcia, definovaná na jednoduchej, hladkej ploche σ. Nech $D = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ je delenie plochy σ. Nech bod $\Pi_i \in \sigma$, a $p(\sigma_i)$ je plošný obsah plochy σ_i pre $i = 1, 2, \ldots, k$.

Číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{k} f(\Pi_i)\, p(\sigma_i)$$

nazývame *integrálnym súčtom* (*I. druhu*) *funkcie* $f(P)$ pre delenie D a daný výber bodov Π_i.

Ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení a ľubovoľný výber bodov $\Pi_i \in \sigma_i$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(D_n) = I$, potom I nazveme integrálom (I. druhu) z funkcie $f(P)$ po ploche σ a označujeme ho

$$\int_\sigma f(P)\, \mathrm{d}p.$$

Nech $\boldsymbol{f}(P)$ je ohraničená vektorová funkcia, definovaná na jednoduchej, hladkej, orientovanej ploche σ. Nech $D = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ je delenie plochy σ. Nech $p(\sigma_i)$ je plošný obsah plochy σ_i

a $\mathbf{n}(\Pi_i)$ je jednotkový normálový vektor v bode Π_i, $\Pi_i \in \sigma_i$, (vybraný podľa orientácie) pre $i = 1, 2, \ldots, k$.

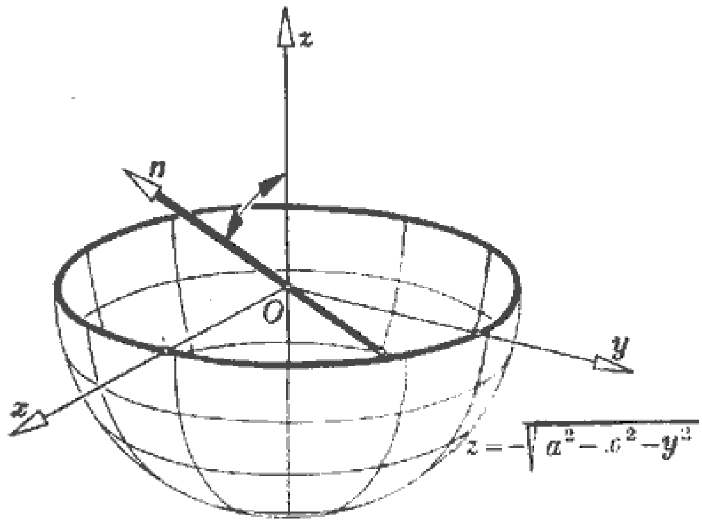
Číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{f}(\Pi_i) \cdot \mathbf{n}(\Pi_i)\, p(\sigma_i)$$

nazývame *integrálnym súčtom (II. druhu) funkcie* $\mathbf{f}(P)$ pre delenie D a pre daný výber bodov $\Pi_i \in \sigma_i$.

Ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení plochy σ a pre ľubovoľný výber $\Pi_i \in \sigma_i$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(D_n) = I$, potom I nazývame *integrálom* (II. druhu) *z funkcie* $\mathbf{f}(P)$ po ploche σ a označujeme ho

$$\int_\sigma \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{p}.$$



Obr. 24

Poznámka 1. Pre integrál $\int_\sigma \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{p}$, kde $\mathbf{f}(P) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ používame tiež znak $\iint_\sigma f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + f_3(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Veta 1. Nech σ je jednoduchou, hladkou plochou, ktorej parametrické vyjadrenie je $\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\,\mathbf{i} + \psi(u, v)\,\mathbf{j} + \chi(u, v)\,\mathbf{k}$, kde $(u, v) \in M$. Nech $f(P)$, $P = (x, y, z)$, je reálna funkcia definovaná na σ. Potom

$$\int_\sigma f(P)\,\mathrm{d}p = \iint_M f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)]\,|\,\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\,|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad (1)$$

pričom ak existuje jeden z týchto integrálov, tak existuje aj druhý.

Veta 2. Nech σ je jednoduchou, hladkou, orientovanou plochou, parametrizovanou funkciou $\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\,\mathbf{i} + \psi(u, v)\,\mathbf{j} + \chi(u, v)\,\mathbf{k}$, kde $(u, v) \in M$. Nech $\mathbf{f}(P)$, $P = (x, y, z)$ je vektorová funkcia definovaná na σ. Potom

$$\int_\sigma \mathbf{f}(P) \cdot \mathrm{d}\mathbf{p} = \pm \iint_M \mathbf{f}[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)] \cdot [\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad (2)$$

pričom ak existuje jeden z týchto integrálov, tak existuje aj druhý. Pri súhlasnej orientácii plochy σ s jej parametrickým vyjadrením platí znamienko $+$, pri nesúhlasnej orientácii platí znamienko $-$.

Poznámka 2. Keď $f(P)$ a $\mathbf{f}(P)$ sú spojité funkcie vzhľadom na plochu σ, tak uvedené plošné integrály (I. a II. druhu) existujú.

Poznámka 3. Keď $\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\,\mathbf{i} + \psi(u, v)\,\mathbf{j} + \chi(u, v)\,\mathbf{k}$ je parametrické vyjadrenie plochy σ, $f(P) = f(x, y, z)$ a $\mathbf{f}(P) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$, tak môžeme vzorce (1) a (2) napísať takto:

$$\int_\sigma f(P)\,\mathrm{d}p = \iint_M f[\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)]\,.\sqrt{\begin{vmatrix}\psi'_u, & \chi'_u\\ \psi'_v, & \chi'_v\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\chi'_u, & \varphi'_u\\ \chi'_v, & \varphi'_v\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\varphi'_u, & \psi'_u\\ \varphi'_v, & \psi'_v\end{vmatrix}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \iint_M f[\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)]\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{3}$$

kde $E = (\mathbf{r}'_u)^2 = (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2 + (\chi'_u)^2$, $F = \mathbf{r}'_u\,.\,\mathbf{r}'_v = \varphi'_u\varphi'_v + \psi'_u\psi'_v + \chi'_u\chi'_v$, $G = (\mathbf{r}'_v)^2 = (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2 + (\chi'_v)^2$,

$$\int_\sigma \mathbf{f}(P)\,.\,\mathrm{d}\mathbf{p} = \pm \iint_M \begin{vmatrix} f_1, & f_2, & f_3\\ \varphi'_u, & \psi'_u, & \chi'_u\\ \varphi'_v, & \psi'_v, & \chi'_v\end{vmatrix}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4}$$

Poznámka 4. Nech plocha σ je daná funkciou $z = z(x, y)$. Potom vzorce (3) a (4) nadobudnú tvar:

$$\int_\sigma f(P)\,\mathrm{d}p = \iint_M f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{5}$$

$$\int_{\sigma'} \mathbf{f}(P)\,.\,\mathrm{d}\mathbf{p} = \pm \iint_M [-f_1(x, y, z(x,y))\,z'_x - f_2(x, y, z(x, y))\,z'_y + f_3(x, y, z(x, y))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Veta 3. Nech σ je jednoduchá, hladká plocha, $\mathbf{f}(P)$ ohraničená vektorová funkcia, definovaná na σ a $\mathbf{n}(P)$ jednotkový normálny vektor orientovanej plochy σ. Potom platí:

$$\int_\sigma \mathbf{f}(P)\,.\,\mathrm{d}\mathbf{p} = \int_\sigma \mathbf{f}(P)\,.\,\mathbf{n}(P)\,\mathrm{d}p,$$

ak ktorýkoľvek z týchto integrálov existuje.

Poznámka 5. Podobne počítame plošné integrály po zjednotení konečného počtu jednoduchých hladkých plôch resp. po jednoduchých, uzavretých plochách.

Poznámka 6. Pre plošné integrály I. a II. druhu platia podobné vety ako pre krivkové integrály I. a II. druhu.

Príklad 1. Vypočítajme

$$\int_\sigma \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}p,$$

kde σ je časť roviny $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \left(4 - 2u - \dfrac{4v}{3}\right)\mathbf{k}$, kde $(u, v) \in M$, pričom M je elementárna oblasť daná nerovnosťami: $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 3 - 3u/2$.

Riešenie. Použijeme vetu 1. Počítajme $\mathbf{r}'_u(u, v) = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_v(u, v) = \mathbf{j} - \dfrac{4}{3}\,\mathbf{k}$,

$$\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = \begin{vmatrix}\mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k}\\ 1, & 0, & -2\\ 0, & 1, & -\dfrac{4}{3}\end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

z toho vyplýva, že

$$|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| = \sqrt{5 + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{3}.$$

Potom vypočítame

$$f[\mathbf{r}(u, v)] = \left(4 - 2u - \frac{4}{3} v\right) + 2u + \frac{4}{3} v = 4.$$

Preto platí

$$\int_\sigma \left(z + 2x + \frac{4}{3} y\right) \mathrm{d}p = \iint_M 4 \frac{\sqrt{61}}{3} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{4}{3} \sqrt{61} \int_0^2 \left[\int_0^{3-3u/2} \mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{61} \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2} u\right) \mathrm{d}u = \frac{4}{3} \sqrt{61} \left[3u - \frac{3u^2}{4}\right]_0^2 = 4 \sqrt{61}.$$

Príklad 2. Vypočítajme integrál $\iint_\sigma x^2y^2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde σ je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \leqq 0$ orientovanej tak, aby jednotkový normálový vektor zvieral s vektorom $\boldsymbol{k}$ ostrý uhol.

Riešenie. Podľa vzorca (6)

$$\iint_\sigma x^2y^2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_M x^2y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

pričom množina M je kruh $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $z = 0$. Pri určovaní znamienka sme brali do úvahy, že rovnica uvažovanej plochy σ je $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ a normálový vektor $\boldsymbol{n}$ má mať podľa orientácie z-ovú súradnicu kladnú (pozri *obr. 24*).

Pri ďalšom výpočte použijeme transformáciu pomocou polárnych súradníc a dostaneme:

$$\iint_M x^2y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \varrho^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sqrt{a^2 - \varrho^2} \, \mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \,.\, \int_0^a \varrho^5 \sqrt{a^2 - \varrho^2} \, \mathrm{d}\varrho.$$

Ľahko zistíme, že pre prvý integrál platí

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Na druhý integrál použijeme substitúciu $a^2 - \varrho^2 = t^2$ a dostaneme

$$\int_0^a \varrho^5 \sqrt{a^2 - \varrho^2} \, \mathrm{d}\varrho = \frac{8}{105} a^7.$$

Z toho nakoniec máme:

$$\iint_\sigma x^2y^2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\frac{2\pi a^7}{105}.$$

V úlohách 1077 až 1086 vypočítajte daný plošný integrál I. druhu:

1077. $\int\limits_\sigma z\,\mathrm{d}p$, kde σ je časť helikoidu $\boldsymbol{r} = u \cos v\boldsymbol{i} + u \sin v\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$, $(u, v) \in \langle 0, a\rangle \times \times \langle 0, 2\pi\rangle$.

1078. $\int\limits_\sigma z^2\,\mathrm{d}p$, kde σ je časť kužeľovej plochy $\boldsymbol{r} = u \cos v \sin \alpha\boldsymbol{i} + u \sin v \sin \alpha\boldsymbol{j} + u \cos \alpha\boldsymbol{k}$, $(u, v) \in \langle 0, a\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$ a číslo $\alpha \in (0, \pi/2)$.

1079. $\int\limits_\sigma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}p$, kde $\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor časti guľovej plochy σ, $\boldsymbol{r}(u, v) = \sin u \cos v\boldsymbol{i} + \sin u \sin v\boldsymbol{j} + \cos u\boldsymbol{k}$, $(u, v) \in M = \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, orientovanej normálou von.

1080. $\int\limits_\sigma z\,\mathrm{d}p$, kde σ je časť kužeľovej plochy, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqq z \leqq 2$.

1081. $\int\limits_\sigma x^2y^2\,\mathrm{d}p$, kde σ je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geqq 0$.

1082. $\int\limits_\sigma (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}p$, kde σ je povrch kužeľa $\sqrt{x^2 + y^2} \leqq z \leqq 1$.

1083. $\int\limits_\sigma \frac{1}{(1 + x + y)^2}\mathrm{d}p$, kde σ je povrch štvorstena $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $x + y + z \leqq 1$.

1084. $\int\limits_\sigma \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, kde σ je časť hyperbolického paraboloidu $z = xy$ odrezaná valcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2$ ($|z| \leqq R$).

1085. $\int\limits_\sigma |xyz|\,\mathrm{d}p$, kde σ je časť rotačného paraboloidu $z = x^2 + y^2$ vyťatá rovinou $z = 1$ ($z \leqq 1$).

1086. $\int\limits_\sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}p$, kde $\boldsymbol{f} = (x^2 + xy - z^2)\,\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový normálový vektor časti guľovej plochy σ, $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$ orientovanej normálou von.

V úlohách 1087 až 1096 vypočítajte daný plošný integrál II. druhu.

1087. $\int\limits_\sigma (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}$, ak σ je:

a) časť plochy $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (uv + 1)\,\boldsymbol{k}$, $(u, v) \in M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ orientovanej tak, že normálový vektor zviera s vektorom $\boldsymbol{k}$ ostrý uhol;

b) časť paraboloidu $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u^2 + v^2)\,\boldsymbol{k}$, pričom $u^2 + v^2 \leqq 1$ orientovaná tak, že normálový vektor zviera s vektorom $\boldsymbol{k}$ tupý uhol;

c) povrch kocky $J = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ orientovaný normálou von;

d) guľová plocha $x^2 + y^2 + z = a^2$ orientovaná normálou von.

1088. $\displaystyle\iint_\sigma (x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$, kde σ je časť guľovej plochy $\boldsymbol{r} = \cos u \cos v\boldsymbol{i} + \sin u \cos v\boldsymbol{j} + \sin v\boldsymbol{k}$ orientovanej normálou von, pričom $(u, v) \in M = \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$.

1089. $\displaystyle\iint_\sigma (z - R)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde σ je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $R \leq z \leq 2R$ orientovanej normálou von.

1090. $\displaystyle\iint_\sigma x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak σ je časť kužeľovej plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$ orientovanej tak, že normálový vektor $\boldsymbol{n}$ zviera tupý uhol s vektorom $\boldsymbol{k}$.

1091. $\displaystyle\iint_\sigma z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde σ je časť plochy $x - y + z - 1 = 0$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$ orientovanej tak, že normálový vektor zviera s vektorom $\boldsymbol{k}$ ostrý uhol.

1092. $\displaystyle\iint_\sigma yz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + xz \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, kde σ je jednoduchá, uzavretá plocha, orientovaná normálou von, ktorá sa nachádza v prvom oktante a tvoria ju časti plôch $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $z = a$ $(a > 0)$.

1093. $\displaystyle\iint_\sigma xz \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde σ je guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientovaná normálou von.

1094. $\displaystyle\iint_\sigma x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak σ je:

a) povrch kocky $J = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$ orientovaný normálou von;

b) časť paraboloidu $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ orientovaná tak, že pre normálový vektor $\boldsymbol{n}$ platí $\boldsymbol{n} \,.\, \boldsymbol{k} > 0$;

c) guľová plocha $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ orientovaná normálou von.

1095. $\displaystyle\iint_\sigma xz \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, kde σ je povrch ihlana ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$, orientovaný normálou von.

1096. $\displaystyle\iint\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, kde σ je elipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ orientovaný normálou von.

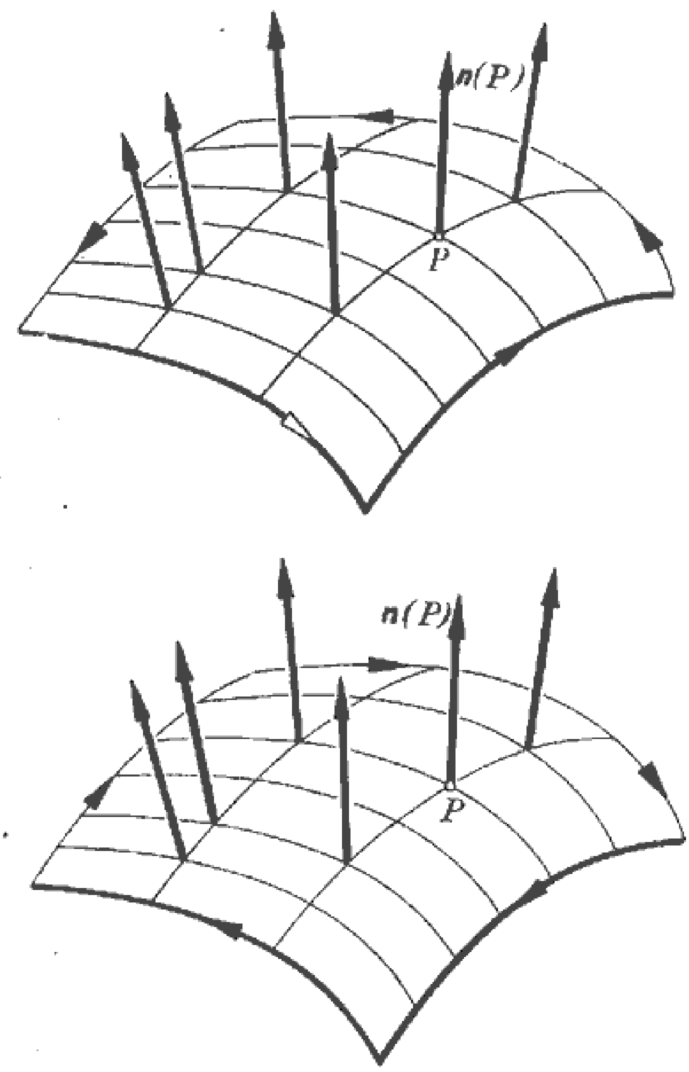
5,2. Stokesova veta, veta Gaussova — Ostrogradského

Nech σ je orientovaná plocha a C jednoduchá, uzavretá, cyklicky orientovaná krivka ležiaca na ploche σ. Ak zo smeru jednotkového normálového vektora, určujúceho orientáciu plochy σ, obiehanie po krivke sa javí proti smeru [v smere] pohybu ručičiek na hodinkách, potom hovoríme, že krivka C je orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s plochou σ (*obr. 25*).

Jednoduchú, hladkú plochu σ, ktorej parametrické vyjadrenie je $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in M$, nazývame plochou *hladkou druhého rádu*, ak funkcia $\boldsymbol{r}(u, v)$ má spojité parciálne derivácie druhého rádu na oblasti M.

Veta 1. (*Stokesova veta.*) Nech σ je jednoduchá, orientovaná plocha, po kúskoch hladká druhého rádu a C jej okraj orientovaný súhlasne s ňou. Nech je funkcia $\boldsymbol{f}$ a rot $\boldsymbol{f}$ spojitá na ploche σ. Potom platí:

$$\int\limits_{C} \boldsymbol{f}(P) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(P) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{1}$$



Obr. 25

Veta 2. (*Gaussova—Ostrogradského veta.*) Nech σ je jednoduchá, uzavretá, po kúskoch hladká plocha, orientovaná normálou von. Nech A je množina pozostávajúca z bodov plochy σ a jej vnútra. Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ a div $\boldsymbol{f}$ je spojitá vzhľadom na množinu A. Potom platí:

$$\iiint\limits_{A} \operatorname{div} \boldsymbol{f}(P) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\sigma} \boldsymbol{f}(P) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{2}$$

Veta 3. (*Greenova formula.*) Nech A je uzavretá množina, ktorej hranicu tvorí jednoduchá uzavretá po kúskoch hladká plocha σ orientovaná normálou von. Nech funkcie f a g sú spojité vzhľadom na množinu A aj so svojimi prvými a druhými parciálnymi deriváciami. Potom platí:

$$\int\limits_{\sigma} \left(f \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} - g \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}p = \iiint\limits_{A} (f\Delta g - g\Delta f) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{3}$$

pričom $\Delta f = f_{xx}'' + f_{yy}'' + f_{zz}''$ a $\Delta g = g_{xx}'' + g_{yy}'' + g_{zz}''$.

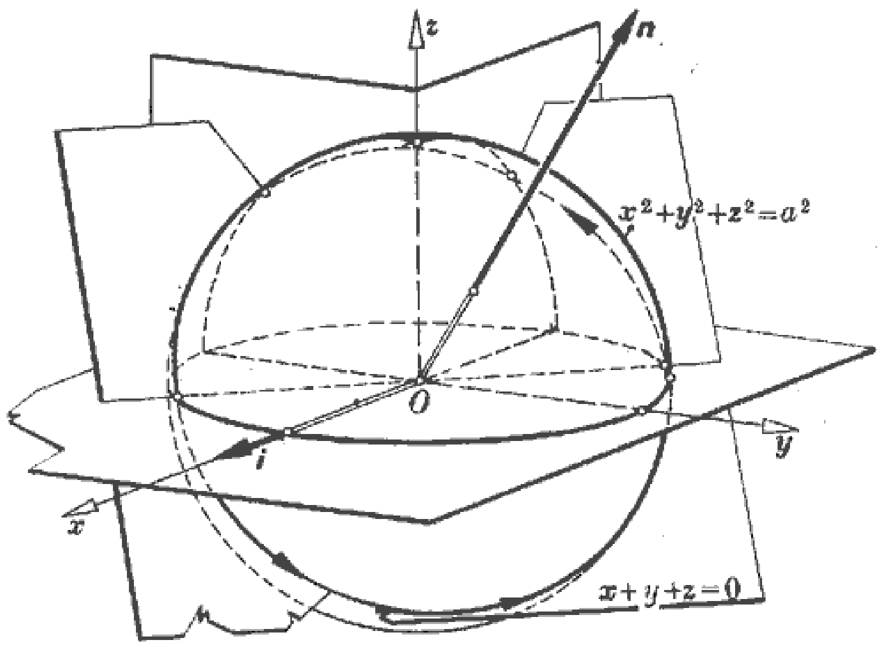
Príklad 1. Pomocou Stokesovej vety vypočítajme krivkový integrál

$$\int_C (y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s},$$

kde C je kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ orientovaná tak, že zo smeru vektora $\mathbf{i}$ sa obiehanie po krivke javí proti smeru pohybu ručičiek (*obr. 26*).

Riešenie. Počítajme rot $\mathbf{f}$, kde $\mathbf{f} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $(x, y, z) \in E_3$, máme:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k},$$



Obr. 26

$(x, y, z) \in E_3$. Z toho vyplýva, že funkcie rot $\mathbf{f}$ a $\mathbf{f}$ sú spojité funkcie na E_3 a teda aj vzhľadom na kruh σ s polomerom a, $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$, $x + y + z = 0$. Orientujme kruh σ tak, aby $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$. Potom krivka C je orientovaná súhlasne s plochou σ. Plocha σ je časť roviny, preto je hladkou plochou druhého rádu. Parametrické vyjadrenie plochy σ je totiž $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} - (u + v)\,\mathbf{k}$, $(u, v) \in M$, kde M je priemet kruhu σ do roviny R_{xy}. Z toho vyplýva, že všetky druhé parciálne derivácie funkcie $\mathbf{r}(u, v)$ sa rovnajú nule. Podľa Stokesovej vety a vety 3 z článku 5,1 dostávame:

$$\int_C (y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_\sigma (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{p} =$$

$$= -\int_\sigma (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}\, \mathrm{d}p = -\sqrt{3} \int_\sigma \mathrm{d}p = -\sqrt{3}P = -\pi a^2 \sqrt{3},$$

kde P je obsah kruhu σ.

Príklad 2. Pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety vypočítajme plošný integrál

$$\int_\sigma (x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

kde σ je povrch kocky $A = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$ orientovaný normálou von.

Riešenie. Počítajme $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$, kde $\boldsymbol{f} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $(x, y, z) \in E_3$, dostávame:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z),\ (x, y, z) \in E_3.$$

Z toho vyplýva, že funkcie $\boldsymbol{f}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ sú spojité vzhľadom na množinu A. Podľa Gaussovej—Ostrogradského vety máme:

$$\int_\sigma (x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \iiint_A 2(x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= 2\int_0^a \left\{\int_0^a \left[\int_0^a (x + y + z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = 2\int_0^a \left\{\int_0^a \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^a \mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x =$$

$$= 2a\int_0^a \left\{\int_0^a \left(x + y + \frac{a}{2}\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = 2a\int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{ay}{2}\right]_0^a \mathrm{d}x =$$

$$= 2a^2\int_0^a (x + a)\,\mathrm{d}x = 2a^2\left[\frac{x^2}{2} + ax\right]_0^a = 3a^4.$$

1097. Zistite, či platí Stokesova veta pre krivkový integrál

$$\int_C x(z - y)\,\mathrm{d}x + y(x - z)\,\mathrm{d}y + z(y - x)\,\mathrm{d}z,$$

pričom krivka C je obvod trojuholníka s vrcholmi $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$ a plocha σ je tento trojuholník.

V úlohách **1098** až **1102** vypočítajte pomocou Stokesovej vety dané krivkové integrály:

1098. $\displaystyle\int_C (y + z)\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}z$, kde krivka C je elipsa $\boldsymbol{r} = a(\sin^2 t\boldsymbol{i} + 2\sin t \cdot \cos t\boldsymbol{j} + \cos^2 t\boldsymbol{k})$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ cyklicky orientovaná súhlasne s daným parametrickým vyjadrením.

1099. $\displaystyle\int_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + x^2z^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z$, kde C je uzavretá krivka $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\cos 2t\boldsymbol{j} + a\cos 3t\boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ cyklicky orientovaná súhlasne s daným parametrickým vyjadrením.

1100. $\displaystyle\int_C (z + y)\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}z$, kde krivka C je priesečnica valcovej plochy $x^2 + y^2 = 2y$ a roviny $y = z$.

1101. $\int\limits_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, kde krivka C je priesečnica plôch $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $z > 0$, $0 < a < b$ orientovaná súhlasne s menšou časťou guľovej plochy σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$, ktorej je okrajom, pričom plocha σ je orientovaná normálou von.

1102. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, kde krivka C je rez povrchu kocky $J = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$ s rovinou $x + y + z = 3a/2$ orientovanou tak, že body $A = (a/2, 0, a)$, $B = (a, 0, a/2)$, $C = (a, a/2, 0)$ tvoria usporiadanú trojicu v zmysle orientácie krivky C.

1103. Pomocou Stokesovej vety dokážte, že platí:

$$\int\limits_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$$

pre ľubovoľnú uzavretú po častkach hladkú krivku C.

1104. Vypočítajte krivkový integrál $\int\limits_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$, kde C je oblúk $\widehat{AB}$ skrutkovice $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ht\boldsymbol{k}/2\pi$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (a, 0, h)$ tak, že doplníte krivku C úsečkou BA na uzavretú krivku a použijete Stokesovu vetu.

1105. Nech $\boldsymbol{f} = -y\boldsymbol{i}/(x^2 + y^2) + x\boldsymbol{j}/(x^2 + y^2) + z\boldsymbol{k}$. Nech D je anuloid, ktorý vznikne rotáciou kružnice $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ okolo osi o_z. Dokážte, že platí rot $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$ vnútri D, ale integrál $\int\limits_C \boldsymbol{f}\,.\,d\boldsymbol{p}$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, je rôzny od nuly.

V úlohách **1106** až **1109** pre dané $\boldsymbol{f}$ a σ vyjadrite plošný integrál $\int\limits_\sigma (\text{rot}\,\boldsymbol{f})\,.\,d\boldsymbol{p}$ pomocou krivkového integrálu po okraji plochy σ pomocou Stokesovej vety a vypočítajte ho:

1106. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, σ je časť paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geqq 0$ a jednotkový normálový vektor $\boldsymbol{n}$ má nezápornú súradnicu z.

1107. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, σ je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$ a jednotkový normálový vektor $\boldsymbol{n}$ má nezápornú súradnicu z.

1108. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = xz\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$, σ pozostáva z troch stien štvorstena ohraničeného rovinou $3x + y + 3z = 6$ a súradnicovými rovinami, orientovaného normálou dnu, bez steny v rovine R_{xy}.

1109. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y - z)\,\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$, σ je päť stien kocky $A = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle$ orientovanej normálou von, bez steny v rovine R_{xy}.

V úlohách **1110** až **1116** pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety vypočítajte:

1110. $\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, kde σ je guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientovaná normálou von.

1111. $\iint\limits_{\sigma} xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz$, kde σ je povrch ihlana ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientovaného normálou von.

1112. $\iint\limits_{\sigma} (x - y + z)\,dy\,dz + (y - z + x)\,dx\,dz + (z - x + y)\,dx\,dy$, kde plocha σ: $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ je orientovaná normálou von.

1113. $\iint\limits_{\sigma} xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz + yz\,dx\,dy$, kde σ je povrch telesa ohraničeného plochami $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 8$, orientovaného normálou von.

1114. $\int\limits_{\sigma} (x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k})\,.\,d\boldsymbol{p}$, kde σ je povrch kocky $A = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ orientovanej normálou von.

1115. $\iint\limits_{\sigma} xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz + y^2z\,dx\,dy$, kde σ je povrch telesa orientovaného normálou von, ktoré leží v prvom oktante a je ohraničené rotačným paraboloidom $z = x^2 + y^2$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$ a súradnicovými rovinami.

1116. $\iint\limits_{\sigma} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$, kde σ je guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientovaná normálou von.

V úlohách **1117** až **1119** dokážte, že pre dvakrát diferencovateľné funkcie f a g na oblasti A, ktorá je ohraničená jednoduchou uzavretou hladkou plochou σ orientovanou normálou $\boldsymbol{n}$ von, platí:

1117. $\int\limits_{\sigma} \frac{df}{d\boldsymbol{n}}\,dp = \iiint\limits_{A} \Delta f\,dx\,dy\,dz.$

1118. $\int\limits_{\sigma} f\frac{dg}{d\boldsymbol{n}}\,dp = \iiint\limits_{A} f\Delta g\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{A} \operatorname{grad} f\,.\,\operatorname{grad} g\,dx\,dy\,dz.$

1119. $\int\limits_{\sigma} f\frac{dg}{d\boldsymbol{n}}\,dp = \int\limits_{\sigma} g\,\frac{df}{d\boldsymbol{n}}\,dp$, ak $\Delta f = \Delta g = 0.$

1120. Dvakrát diferencovateľná funkcia $u = f(x, y, z)$ v oblasti A sa nazýva *harmonickou* v oblasti A, ak $\Delta u = 0$, t. j. $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$ v oblasti A.

Dokážte, že ak u je harmonická funkcia a oblasť A je ohraničená jednoduchou uzavretou hladkou plochou σ, potom platí:

$$\text{a)} \int_\sigma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}p = 0, \qquad \text{b)} \int_\sigma u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}p = \iiint_A \operatorname{grad}^2 u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je vonkajšia normála k ploche, ktorá je orientovaná normálou von.

1121. Dokážte, že funkcia $u = f(x, y, z)$ spojitá v ohraničenej a uzavretej oblasti A a rôzna od konštanty v oblasti A, pričom vnútri oblasti A je harmonická, nemôže nadobúdať najväčšiu a najmenšiu hodnotu vo vnútornom bode oblasti A (princíp maxima).

1122. Teleso A je úplne ponorené do kvapaliny. Dokážte, vychádzajúc z Pascalovho zákona, že teleso je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži vytlačenej kvapaliny a pôsobí zvisle nahor (Archimedov zákon).

5,3. Geometrický a fyzikálny význam plošného integrálu

1. Obsah plochy. Nech σ je hladká plocha a nech jej parametrické vyjadrenie je $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$. Potom obsah $p(\sigma)$ plochy σ definujeme rovnosťou

$$p(\sigma) = \int_\sigma \mathrm{d}p. \tag{1}$$

2. Objem telesa. Nech teleso A je v priestore ohraničené jednoduchou, uzavretou, po čiastkach hladkou plochou σ, orientovanou normálou von. Potom pre objem $V(A)$ telesa A platí:

$$V(A) = \frac{1}{3} \iint_\sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

3. Hmotnosť plochy. Nech σ je hmotná, po kúskoch hladká plocha, ktorej parametrické vyjadrenie je $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$ a jej plošná hustota je daná funkciou $\gamma(P)$. Potom pre hmotnosť $M(\sigma)$ plochy σ platí:

$$M(\sigma) = \int_\sigma \gamma(P)\,\mathrm{d}p. \tag{3}$$

4. Statické momenty, súradnice ťažiska a moment zotrvačnosti hmotnej plochy. Nech σ je hmotná, po kúskoch hladká plocha, ktorej parametrické vyjadrenie je $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$ a jej plošná hustota je $\gamma(P)$. Potom statické momenty $M_{xy}(\sigma)$, $M_{xz}(\sigma)$, $M_{yz}(\sigma)$ hmotnej plochy definujeme takto:

$$\begin{aligned} M_{xy}(\sigma) &= \int_\sigma z\gamma(P)\,\mathrm{d}p, \\ M_{xz}(\sigma) &= \int_\sigma y\gamma(P)\,\mathrm{d}p, \\ M_{yz}(\sigma) &= \int_\sigma x\gamma(P)\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{4}$$

Pre súradnice ťažiska $T = (\xi, \eta, \zeta)$ hmotnej plochy σ platí:

$$\xi = \frac{M_{yz}(\sigma)}{M(\sigma)}, \qquad \eta = \frac{M_{xz}(\sigma)}{M(\sigma)}, \qquad \zeta = \frac{M_{xy}(\sigma)}{M(\sigma)}, \tag{5}$$

pričom $M_{xy}(\sigma)$, $M_{yz}(\sigma)$, $M_{xz}(\sigma)$ sú jej statické momenty a $M(\sigma)$ je jej hmotnosť.

Moment zotrvačnosti hmotnej plochy σ vzhľadom na os p definujeme takto

$$I_p(\sigma) = \int_\sigma \varrho^2(P, p)\, \gamma(P)\, \mathrm{d}p, \tag{6}$$

kde $\varrho^2(P, p)$ je vzdialenosť ľubovoľného bodu $P \in \sigma$ od osi p.

Pre momenty zotrvačnosti hmotnej plochy σ vzhľadom na súradnicové osi pravouhlého súradnicového systému platí:

$$I_x(\sigma) = \int_\sigma (y^2 + z^2)\, \gamma(P)\, \mathrm{d}p,$$

$$I_y(\sigma) = \int_\sigma (x^2 + z^2)\, \gamma(P)\, \mathrm{d}p, \tag{7}$$

$$I_z(\sigma) = \int_\sigma (x^2 + y^2)\, \gamma(P)\, \mathrm{d}p.$$

Poznámka. Mnohé ďalšie fyzikálne veličiny možno počítať pomocou plošných integrálov, napr. gravitačný potenciál plochy σ, prietok kvapaliny danou plochou σ, atď.

Príklad 1. Vypočítajme obsah plochy σ, ktorej parametrické vyjadrenie je:

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u^2 + v^2)\,\boldsymbol{k},\ (u, v) \in B,$$

pričom množina B je daná nerovnosťou $u^2 + v^2 \leqq a^2$, $a > 0$.

Riešenie. Funkcia $\boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u^2 + v^2)\,\boldsymbol{k}$ má na množine B spojité parciálne derivácie

$$\boldsymbol{r}'_u = \boldsymbol{i} + 2u\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{r}'_v = \boldsymbol{j} + 2v\boldsymbol{k}$$

vzhľadom na množinu B. Množina B je ohraničená kružnicou $u^2 + v^2 = a^2$. Pre obsah plochy σ podľa vzorca (1) platí:

$$p(\sigma) = \int_\sigma \mathrm{d}p = \iint_B |\boldsymbol{r}_u' \times \boldsymbol{r}_v'|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \iint_B |-2u\boldsymbol{i} - 2v\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v =$$

$$= \iint_B \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Ak použijeme transformáciu pomocou polárnych súradníc $u = \varrho \cos \varphi$, $v = \varrho \sin \varphi$, máme:

$$p(\sigma) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \sqrt{4\varrho^2 + 1}\, \varrho\, \mathrm{d}\varrho \right] \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[(4\varrho^2 + 1)^{3/2} \right]_0^a \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[(4a^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6} [(4a^2 + 1)^{3/2} - 1].$$

Príklad 2. Vypočítajme množstvo kvapaliny V, ktoré pretečie za jednotku času plochou σ: $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $a > 0$ orientovanou tak, že jej normálový vektor zviera s osou o_z ostrý uhol, ak vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ prúdenia kvapaliny v oblasti obsahujúcej plochu σ je $\boldsymbol{v} = c(x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k})$, kde c je konštanta úmernosti.

Riešenie. Z fyziky vieme, že množstvo kvapaliny V, ktoré pretečie cez plochu σ za jednotku času, je dané vzorcom

$$V = \int_{\sigma} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

kde $\boldsymbol{v}$ je vektor rýchlosti kvapaliny.

Parametrické vyjadrenie plochy σ je:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (a/2 - u^2/2a - v^2/2a)\,\boldsymbol{k},$$

$(u, v) \in A$, pričom množina A je daná nerovnosťami

$$u^2 + v^2 \leqq a^2,\ u \geqq 0,\ v \geqq 0.$$

Potom je $\boldsymbol{r}_u'(u, v) = \boldsymbol{i} - u\boldsymbol{k}/a$, $\boldsymbol{r}_v'(u, v) = \boldsymbol{j} - v\boldsymbol{k}/a$ a $\boldsymbol{r}_u'(u, v) \times \boldsymbol{r}_v'(u, v) = u\boldsymbol{i}/a + v\boldsymbol{j}/a + \boldsymbol{k}$. Podľa vety 2 z článku 5,1 máme:

$$V = \int_{\sigma} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \iint_{A} \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \iint_{A} c[u^2\boldsymbol{i} + v^2\boldsymbol{j} + (a/2 - u^2/2a - v^2/2a)^2\,\boldsymbol{k}] \cdot (u\boldsymbol{i}/a + v\boldsymbol{j}/a + \boldsymbol{k})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= c \iint_{A} [u^3/a + v^3/a + (a/2 - u^2/2a - v^2/2a)^2]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Použijeme transformáciu pomocou polárnych súradníc $u = \varrho\cos\varphi$, $v = \varrho\sin\varphi$, dostaneme

$$V = c \iint_{\bar{A}} \left[\frac{\varrho^3\cos^3\varphi}{a} + \frac{\varrho^3\sin^3\varphi}{a} + \left(\frac{a}{2} - \frac{\varrho^2}{2a}\right)^2\right] \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi,$$

kde množina $\bar{A}$ je určená nerovnosťami $0 \leqq \varrho \leqq a$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Odtiaľ vyplýva:

$$V = c \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^a \left(\frac{\varrho^4\cos^3\varphi}{a} + \frac{\varrho^4\sin^3\varphi}{a} + \frac{\varrho a^2}{4} - \frac{\varrho^3}{2} + \frac{\varrho^5}{4a^2}\right)\mathrm{d}\varrho\right]\mathrm{d}\varphi =$$

$$= c \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\varrho^5\cos^3\varphi}{5a} + \frac{\varrho^5\sin^3\varphi}{5a} + \frac{\varrho^2a^2}{8} - \frac{\varrho^4}{8} + \frac{\varrho^6}{24a^2}\right]_0^a \mathrm{d}\varphi =$$

$$= c \int_0^{\pi/2} \left[\frac{a^4}{5}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) + \frac{a^4}{24}\right]\mathrm{d}\varphi =$$

$$= c\left[\frac{a^4}{5}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} - \cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) + \frac{a^4}{24}\varphi\right]_0^{\pi/2} = c\left[\frac{a^4}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16}\right)\right].$$

Hľadané množstvo kvapaliny, ktoré pretečie plochou za jednotku času, je:

$$V = c\left[\frac{a^4}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16}\right)\right].$$

V úlohách **1123** až **1125** nájdite obsah plochy σ, ak je dané jej parametrické vyjadrenie $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$:

1123. $\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$, $B = \langle 0, 4\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

1124. $\boldsymbol{r} = \operatorname{tg} u \cos v\boldsymbol{i} + \operatorname{tg} u \sin v\boldsymbol{j} + \left[\dfrac{\sin u}{2\cos^2 u} + \ln \sqrt{\dfrac{1 + \sin u}{\cos u}} + v\right]\boldsymbol{k}$, $B = \langle 0, \pi/4\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$.

1125. $\boldsymbol{r} = a \sin^2 u \cos v \sqrt{\sin 2v}\boldsymbol{i} + a \sin^2 u \sin v \,.\, \sqrt{\sin 2v}\boldsymbol{j} + a \sin u \cos u \sqrt{\sin 2v}\boldsymbol{k}$, $B = \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$.

1126. Pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety dokážte, že pre objem V telesa A ohraničeného plochou σ platí vzorec

$$V = \frac{1}{3}\int_\sigma \boldsymbol{r} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}\iint_\sigma x \,\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}z + z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

1127. Pomocou plošného integrálu vypočítajte objem elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1$.

V úlohách **1128** a **1129** vypočítajte pomocou plošného integrálu objem telesa ohraničeného danou plochou.

1128. $\boldsymbol{r} = a \cos u\, (\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + b \sin u\, (\sin v\boldsymbol{i} - \cos v\boldsymbol{j}) + c \sin u\boldsymbol{k}$ a rovinami $z = c$, $z = -c$.

1129. $\boldsymbol{r} = u(\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + (u \cos v - u)\, \boldsymbol{k}$, $u \geqq 0$, $a > 0$ a rovinami $x = 0$, $z = 0$.

1130. Nech plocha, ktorá ohraničuje teleso A, má v sférickom súradnicovom systéme rovnicu $r = f(\varphi, \vartheta)$, $(\varphi, \vartheta) \in B$. Dokážte, že pre objem telesa A ohraničeného plochou, platí:

$$V(A) = \frac{1}{3}\iint_B r^3 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta.$$

1131. Na základe úlohy **1130** pomocou sférických súradníc vypočítajte objem telesa ohraničeného plochou $r = a \cos\vartheta \,.\, \sqrt{\sin 2\varphi}$.

1132. Nájdite hmotnosť parabolickej škrupiny $z = (x^2 + y^2)/2$, $z \in \langle 0, 1\rangle$, ktorej plošná hustota je $\gamma(x, y, z) = kz$.

1133. Vypočítajte hmotnosť guľovej škrupiny $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqq 0$, ak plošná hustota $\gamma(P)$ sa rovná:

a) vzdialenosti bodu P od osi o_z;
b) štvorcu vzdialenosti bodu P od osi o_z.

1134. Vypočítajte statické momenty škrupiny z úlohy **1132**. Nájdite jej ťažisko.

1135. Nájdite súradnice ťažiska homogénnej časti gule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

1136. Nájdite ťažisko homogénnej škrupiny, určenej časťou plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ktorá sa nachádza vo valcovej ploche $x^2 + y^2 = ax$.

1137. Nájdite súradnice ťažiska homogénnej plochy $3z = 2(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})$, ohraničenej plochami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

1138. Nájdite ťažisko homogénnej škrupiny, určenej časťou guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $x + y \leqq a$.

1139. Nájdite hmotnosť a súradnice ťažiska kužeľovej plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqq z \leqq$ $\leqq 1$, ak jej hustota v každom jej bode je úmerná vzdialenosti tohto bodu od osi o_z.

1140. Nájdite súradnice ťažiska helikoidu $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv$, pre $0 < u < a$, $0 < v < \pi$.

V úlohách **1141** až **1144** nájdite momenty zotrvačnosti vzhľadom na os o_z homogénnych plôch s plošnou hustotou γ:

1141. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1142. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $0 < H \leqq z \leqq r$.

1143. $x^2 + y^2 = 2cz$, $0 \leqq z \leqq c$.

1144. $h^2(x^2 + y^2) = a^2z^2$, $0 < z < h$.

1145. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej kuželovej škrupiny $x^2/a^2 +$ $+ y^2/a^2 - z^2/b^2 = 0$, $0 \leqq z \leqq b$ vzhľadom na priamku $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{k}$, ak jej plošná hustota je γ.

1146. Nech σ je jednoduchá, uzavretá, po kúskoch hladká plocha, orientovaná normálou von. Nech A je teleso ohraničené plochou σ. Vyjadrite dané integrály pomocou objemu $V(A)$, súradníc ťažiska $T = (\xi, \eta, \zeta)$, momentu zotrvačnosti I_z telesa A.

a) $\displaystyle\int_\sigma \boldsymbol{r} \, . \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$; b) $\displaystyle\int_\sigma (xz\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 3z^2\boldsymbol{k}) \, . \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$;

c) $\displaystyle\int_\sigma (y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}) \, . \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$; d) $\displaystyle\int_\sigma (x^2 + y^2)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \, . \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$.

1147. Nájdite gravitačný potenciál $V(P_0)$ homogénnej guľovej plochy $\sigma : x^2 + y^2 +$ $+ z^2 = a^2$, ktorej plošná hustota v bode $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je γ, t. j. vypočítajte:

$$V(P_0) = \int_\sigma \frac{\gamma}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \, \mathrm{d}p.$$

Nech σ je orientovaná plocha, na ktorú pôsobí tlak kvapaliny $p = -\gamma z$, kde γ je jej hustota a hladina kvapaliny je v rovine R_{xy}, pravouhlého súradnicového systému, pričom normálový vektor $\boldsymbol{n}$ má opačný smer ako pôsobiaci tlak. Sila $\boldsymbol{F}$, pôsobiaca na plochu σ, je:

$$\boldsymbol{F} = -\int_\sigma p\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma,$$

čiže

$$\boldsymbol{F} = \gamma \left[\boldsymbol{i} \int_\sigma z \cos \alpha \, \mathrm{d}\sigma + \boldsymbol{j} \int_\sigma z \cos \beta \, \mathrm{d}\sigma + \boldsymbol{k} \int_\sigma z \cos \gamma \, \mathrm{d}\sigma\right],$$

kde $\boldsymbol{n} = \cos \alpha \boldsymbol{i} + \cos \beta \boldsymbol{j} + \cos \gamma \boldsymbol{k}$.

Pôsobisko $C = (\xi, \eta, \zeta)$ sily $\mathbf{F}$ na plochu σ sa nazýva *stredom hydrostatického tlaku*, pre ktorý platí:

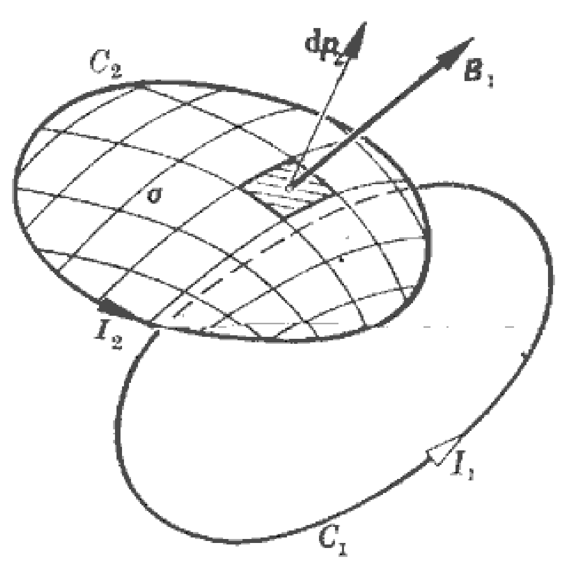
$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{F} = -\int_\sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{n})\, p \, d\sigma,$$

alebo

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{F} = -\gamma \int_\sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{n})\, z \, d\sigma.$$

1148. Nájdite silu, ktorou pôsobí kvapalina s hustotou γ na zvislú stenu nádoby tvaru parabolického úseku $\frac{h}{a^2}(y^2 - a^2) \leqq z \leqq 0$, $x = 0$. Nájdite stred tlaku.

1149. Nájdite silu, ktorú pôsobí kvapalina s hustotou γ na dno nádoby tvaru eliptického paraboloidu $z = h(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1)$, $-h \leqq z \leqq 0$; nájdite stred tlaku.



Obr. 27

Pre koeficient vzájomnej indukcie $L_{1,2}$ (vzájomná indukčnosť) dvoch uzavretých vodičov C_1, C_2, cez ktoré tečú prúdy I_1, I_2, platí:

$$L_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{p}_2,$$

kde $\Phi_{1,2}$ je magnetický indukčný tok cez plochu σ_2 (ohraničenú druhým vodičom C_2) vektora magnetickej indukcie $\mathbf{B}_1$ magnetického poľa vytvoreného prúdom v prvom vodiči C_1 (pozri *obr. 27*).

1150. Nájdite vzájomnú indukčnosť medzi vodičmi tvaru priamky a rovnostranného trojuholníka, ak obidva vodiče ležia v jednej rovine a jedna strana trojuholníka, bližšia k priamke, je s ňou rovnobežná, pričom jej vzdialenosť od priamky je b. Výška rovnostranného trojuholníka je a.

1151. Nájdite vzájomnú indukčnosť medzi vodičom tvaru priamky a medzi vodičom tvaru kružnice s polomerom a, ak sa nachádzajú v jednej rovine. Vzdialenosť stredu kružnice od priamky je b.

5,4. Základy teórie poľa

Nech M je oblasť v priestore E_3. Hovoríme, že v oblasti M je definované skalárne [vektorové] pole, ak v každom bode X oblasti M je definovaná reálna [vektorová] funkcia $f(X)$ [$\mathbf{f}(X)$].

Množinu všetkých bodov z oblasti M, pre ktorú platí $f(X) = \text{const}$, nazývame *hladinou skalárneho poľa* $f(X)$.

Krivka C sa nazýva *vektorovou krivkou* (siločiarou) vektorového poľa $\mathbf{f}(X)$, ak v jej každom bode X je dotykový vektor $\boldsymbol{\tau}(X)$ rovnobežný s vektorom $\mathbf{f}(X)$.

Pre vektorovú krivku $X = O + \mathbf{r}(t)$, $t \in J$ poľa $\mathbf{f}(X)$, ktorá prechádza bodom $P = O + \mathbf{r}(t_0)$, $P \in M$, platí:

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda \mathbf{f}[O + \mathbf{r}(t)], \tag{1}$$

$$\mathbf{r}(t_0) = P - O. \tag{2}$$

Ak funkcia $\mathbf{f}(X)$ má spojitú deriváciu na oblasti M, pričom $\mathbf{f}(X) \neq \mathbf{o}$, $X \in M$, potom systém diferenciálnych rovníc (1) so začiatočnými podmienkami (2) má jediné riešenie, t. j. každým bodom oblasti M prechádza iba jediná vektorová krivka.

Ak skalárne [vektorové] pole $f[\mathbf{f}]$ má v nejakom pravouhlom súradnicovom systéme tvar $f(x, y, z) = g(x, y)$ [$\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{g}(x, y)$], nazývame ho *dvojrozmerným poľom*. Ak platí $f(x, y, z) = g(x)$ [$\mathbf{f}(x, y, z) = g(x)\,\mathbf{i}$], nazývame ho *jednorozmerným poľom*.

Ak skalárne [vektorové] pole $f[\mathbf{f}]$ má v nejakom cylindrickom súradnicovom systéme tvar $f(\varrho, \varphi, u) = g(\varrho, u)$ [$\mathbf{f}(\varrho, \varphi, u) = \mathbf{g}(\varrho, u)$], nazývame ho *osove (rotačne) symetrickým poľom*. Ak platí $f(\varrho, \varphi, u) = g(\varrho)$, [$\mathbf{f}(\varrho, \varphi, u) = \mathbf{g}(\varrho)$], nazývame ho *cylindrickým (valcovým) poľom*.

Ak skalárne [vektorové] pole $f[\mathbf{f}]$ má v nejakom sférickom súradnicovom systéme tvar $f(r, \varphi, \vartheta) = g(r)$[$\mathbf{f}(r, \varphi, \vartheta) = \mathbf{g}(r)$], nazývame ho *sférickým poľom*.

Nech je dané skalárne pole diferencovateľnou funkciou $f(X)$ na oblasti M. *Gradientom skalárneho poľa* nazývame vektorovú funkciu

$$\operatorname{grad} f(X) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} \tag{3}$$

definovanú na množine M (pozri čl. 2,2/III).

Vektorové pole $\mathbf{f}(X)$ nazývame *potenciálnym*, ak ho možno vyjadriť ako gradient skalárneho poľa $\varphi(X)$, $\mathbf{f}(X) = \operatorname{grad} \varphi(X)$, pričom funkciu $\varphi(X)$ nazývame *potenciálom vektorového poľa*.

Veta 1. Nech M je otvorená, plošne jednoducho súvislá množina. Nech vektorové pole $\mathbf{f}(X)$ je definované na M, pričom $\mathbf{f}$ má spojité parciálne derivácie na M. Nevyhnutná a postačujúca podmienka, aby pole $\mathbf{f}$ bolo potenciálne, je $\operatorname{rot} \mathbf{f}(X) = \mathbf{o}$ pre každé $X \in M$ (pozri aj čl. 4,2).

Tokom vektorového poľa $\mathbf{f}(X)$ cez orientovanú plochu nazývame plošný integrál

$$T(\sigma) = \int_\sigma \mathbf{f}(X) \,.\, \mathrm{d}\mathbf{p}. \tag{4}$$

Poznámka 1. Ak $\mathbf{f} = \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}(X)$ je rýchlosť prúdenia kvapaliny v bode X, potom tok T sa rovná množstvu kvapaliny, ktoré pretečie cez plochu σ za jednotku času.

Nech vektorové pole je dané funkciou $\mathbf{f}(X)$, $X \in M$, ktorá je na oblasti M spojitá. Nech A, $A \subset M$, je oblasť, ohraničená guľovou plochou σ orientovanou normálou von, pričom X je jej stred a a polomer. Nech $T(A)$ je tok vektorového poľa cez plochu σ a $V(A)$ objem oblasti A.

Divergenciou vektorového poľa $\mathbf{f}$ v bode X nazývame limitu z podielu $T(A)/V(A)$ pre $a \to 0^+$

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(X) = \lim_{a \to 0+} \frac{T(A)}{V(A)}\,. \tag{5}$$

Poznámka 2. Ak vektorové pole je pole rýchlosti $\mathbf{v}(X)$ prúdenia kvapaliny, potom $\operatorname{div} \mathbf{v}(X)$ udáva hustotu žriedieľ (norov) kvapaliny v bode X.

Nech C je po čiastkach hladká krivka. *Cirkuláciou vektorového poľa* $\mathbf{f}(X)$ po krivke C*) nazývame krivkový integrál

$$c = \int_C \mathbf{f}(X) \,.\, \mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{6}$$

Poznámka 3. Ak vektorové pole je silové pole, potom cirkulácia poľa $\mathbf{f}$ po krivke C je práca poľa pozdĺž krivky C.

Nech je dané vektorové pole $\mathbf{f}(X)$, pričom $\mathbf{f}$ je spojitá funkcia na oblasti M. Nech σ je kruh ohraničený kružnicou C orientovanou súhlasne s plochou σ, pričom jej stred je X a polomer a. Nech $c(\sigma)$ je cirkulácia vektorového poľa $\mathbf{f}$ po krivke C a $P(\sigma)$ obsah plochy σ ohraničenej krivkou C. Nech normálový vektor k ploche σ v bode X je $\mathbf{n}$. Potom rotáciou vektorového poľa $\mathbf{f}$ v bode X nazývame vektor $\operatorname{rot} \mathbf{f}(X)$, pre ktorý platí:

$$\mathbf{n} \,.\, \operatorname{rot} \mathbf{f}(X) = \lim_{a \to 0+} \frac{c(\sigma)}{P(\sigma)}\,. \tag{7}$$

Poznámka 4. Vzťahom (7) je vektor $\operatorname{rot} \mathbf{f}(X)$ určený, keďže napr. môžme zvoliť za vektor $\mathbf{n}$ postupne vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ a určiť zložky vektora $\operatorname{rot} \mathbf{f}(X)$ v nejakom pravouhlom súradnicovom systéme.

---

*) Niekedy cirkuláciou nazýva sa krivkový integrál (6), iba ak krivka C je uzavretá.

Veta 2. Nech vektorové pole $\boldsymbol{f}(X)$ na oblasti M je také, že funkcia $\boldsymbol{f}$ má spojité prvé parciálne derivácie na M. Potom existuje div $\boldsymbol{f}(X)$ a rot $\boldsymbol{f}(X)$ v každom bode X, $X \in M$ a v ľubovoľnom pravouhlom súradnicovom systéme, v ktorom je $\boldsymbol{f}(X) = f_1(X)\,\boldsymbol{i} + f_2(X)\,\boldsymbol{j} + f_3(X)\,\boldsymbol{k}$, platí:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(X) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(X) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Poznámka 5. V článku 2,2/III sú uvedené definície div $\boldsymbol{f}$ a rot $\boldsymbol{f}$ pomocou vzťahov (8) a (9). Z definície pomocou vzťahov (5) a (7) vyplýva, že div $\boldsymbol{f}$ a rot $\boldsymbol{f}$ vektorového poľa $\boldsymbol{f}$ v bode X nezávisia od voľby súradnicového systému. Preto tieto vzťahy sú všeobecnejšie ako (8) a (9).

Veta 3. (Gaussova—Ostrogradského veta.) Nech σ je jednoduchá uzavretá po kúskoch hladká plocha orientovaná normálou von. Nech A je množina pozostávajúca z bodov plochy σ a jej vnútra. Nech vektorová funkcia $\boldsymbol{f}(X)$ je na množine A spojitá aj so svojimi prvými parciálnymi deriváciami. Potom pre tok $T(A)$ vektorového poľa $\boldsymbol{f}$ cez plochu σ platí:

$$T(A) = \iiint_A \operatorname{div} \boldsymbol{f}(X)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{10}$$

Veta 4. (Stokesova veta.) Nech C je okraj jednoduchej orientovanej plochy σ, po kúskoch hladkej druhého rádu, pričom krivka C je súhlasne orientovaná s plochou σ. Nech vektorová funkcia $\boldsymbol{f}(X)$ je na množine σ spojité i so svojimi prvými parciálnymi deriváciami. Potom pre cirkuláciu c vektorového poľa $\boldsymbol{f}$ po krivke C platí:

$$c(C) = \int_\sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(X)\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{11}$$

Vektorové pole $\boldsymbol{f}(X)$, $X \in M$, pre každý bod ktorého platí div $\boldsymbol{f}(X) = 0$, nazývame *solenoidálnym poľom.*

Veta 5. Nech solenoidálne vektorové pole je dané spojitou funkciou $\boldsymbol{f}$ na oblasti M. Potom existuje také vektorové pole $\boldsymbol{g}(X)$:

$$\boldsymbol{g}(X) = \int_0^1 \boldsymbol{f}[X_0 + (X - X_0)\,t] \times (X - X_0)\,t\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

pričom $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je začiatočný, $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod z M, taký že platí $\boldsymbol{f}(X) = \operatorname{rot} \boldsymbol{g}(X)$ na oblasti M.

Vektorové pole $\boldsymbol{g}(X)$ z vety 5 nazývame *vektorovým potenciálom poľa* $\boldsymbol{f}(X)$.

Poznámka 6. Vektorový potenciál nie je určený vzťahom $\boldsymbol{f}(X) = \operatorname{rot} \boldsymbol{g}(X)$ jednoznačne. Ak je vektorový potenciál $\boldsymbol{g}(X)$ určený vzťahom (12), potom každé vektorové pole $\boldsymbol{h}(X) = \boldsymbol{g}(X) + \operatorname{grad} \varphi(X)$, kde φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, je vektorovým potenciálom poľa $\boldsymbol{f}(X)$.

Veta 6. Každé vektorové pole $\boldsymbol{f}$, pre ktoré má funkcia $\boldsymbol{f}$ na oblasti M spojité prvé parciálne derivácie, možno vyjadriť ako súčet potenciálneho a solenoidálneho vektorového poľa.

Príklad 1. Nájdime tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = m\boldsymbol{r}/r^3$, kde m je konštanta a $\boldsymbol{r}$ polohový vektor bodu $X = (x, y, z)$ cez ľubovoľnú jednoduchú uzavretú a hladkú plochu σ, vnútri ktorej leží začiatok $O = (0, 0, 0)$ pravouhlého súradnicového systému, orientovanú normálou von.

Riešenie. Podľa (4) máme:

$$T(\sigma) = \int_\sigma \boldsymbol{f}(X)\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_\sigma m\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

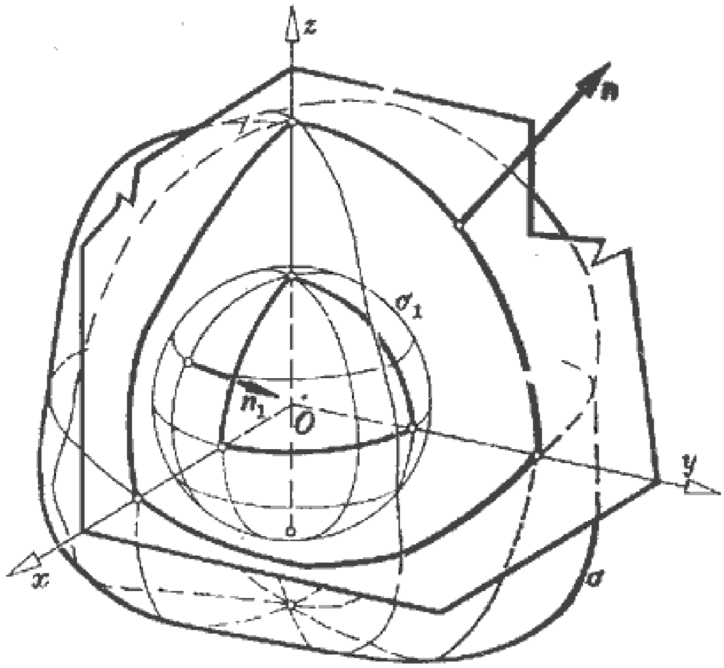
Tento plošný integrál nemôžeme počítať pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety, pretože $f(X)$ nie je definovaná a teda ani spojitá v začiatku O. Zvoľme teda priestorovú oblasť ohraničenú plochou σ a guľovou plochou σ_1, ktorá má stred v začiatku O a celá leží vnútri plochy σ (*obr. 28*). Počítajme tok daného vektorového poľa cez plochu $\Sigma = \sigma_1 \cup \sigma$. Podľa vety 3 máme:

$$T(\Sigma) = T(\sigma) + T(\sigma_1) = m \iiint_A \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \tag{13}$$

pričom σ_1 je orientovaná normálou dnu.

Počítajme $T(\sigma_1)$, máme:

$$T(\sigma_1) = \int_{\sigma_1} m \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}p = \int_{\sigma_1} m \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \mathrm{d}p = -\int_{\sigma_1} \frac{m}{r^2} \, \mathrm{d}p.$$



Obr. 28

Ale $X \in \sigma_1$, preto $r = \varrho(O, X) = a$, kde a je polomer guľovej plochy σ_1. Odtiaľ je:

$$T(\sigma_1) = -\frac{m}{a^2} \int_{\sigma_1} \mathrm{d}p = -\frac{m}{a^2} 4\pi a^2 = -4\pi m.$$

Pre div $(\boldsymbol{r}/r^3)$, kde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, dostaneme:

$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} + \frac{r^3 - 3ry^2}{r^6} + \frac{r^3 - 3rz^2}{r^6} = \frac{1}{r^5}\left[3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\right] = 0,$$

pre každý bod $X \neq O = (0, 0, 0)$.

Po dosadení do (13) máme:

$$T(\sigma) - 4\pi m = m \iiint_A 0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

čiže

$$T(\sigma) = 4\pi m.$$

Príklad 2. Dokážte, že vektorové pole $\boldsymbol{f}(X) = (y - z)\,\boldsymbol{i} + (z - x)\,\boldsymbol{j} + (x - y)\,\boldsymbol{k}$ je solenoidálne a nájdite jeho vektorový potenciál.

Riešenie. Počítajme div $\boldsymbol{f}(X)$, $X \in E_3$, dostaneme:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(X) = \frac{\partial}{\partial x}(y - z) + \frac{\partial}{\partial y}(z - x) + \frac{\partial}{\partial z}(x - y) = 0,$$

pre každý bod $X = (x, y, z)$ z E_3. Preto je vektorové pole solenoidálne. Zvoľme za začiatočný bod $X_0 = O$, potom pre jeho vektorový potenciál $\boldsymbol{g}(X)$ podľa (12) máme:

$$\boldsymbol{g}(X) = \int_0^1 \boldsymbol{f}(O + Xt) \times (X - O)\, t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \boldsymbol{f}(xt, yt, zt) \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\, t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 t^2[(y - z)\,\boldsymbol{i} + (z - x)\,\boldsymbol{j} + (x - y)\,\boldsymbol{k}] \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t =$$

$$= [(y - z)\,\boldsymbol{i} + (z - x)\,\boldsymbol{j} + (x - y)\,\boldsymbol{k}] \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{3}(z^2 - xz - xy + y^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 - xy - yz + z^2)\,\boldsymbol{j} + (y^2 - yz - xz + x^2)\,\boldsymbol{k}.$$

1152. Nájdite zložky vektorového poľa $\boldsymbol{f}$, ak $\boldsymbol{f}(X) = \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} g(X)$, pričom $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ a $g(X) = \operatorname{arctg}(z/\sqrt{x^2 + y^2})$.

V úlohách **1153 až 1158** nájdite divergenciu a rotáciu daných vektorových polí.

1153. $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

1154. $\boldsymbol{f}(X) = (x^2 + yz)\,\boldsymbol{i} + (y^2 + xz)\,\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\,\boldsymbol{k}$.

1155. $\boldsymbol{f}(X) = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$.

1156. $\boldsymbol{f}(X) = (z + \sin y)\,\boldsymbol{i} - (z - x\cos y)\,\boldsymbol{j}$.

1157. $\boldsymbol{f}(X) = \mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i} + \cos(xy)\,\boldsymbol{j} + \cos(xz^2)\,\boldsymbol{k}$.

1158. $\boldsymbol{f}(X) = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

1159. Nájdite $\operatorname{rot}[f(r)\,\boldsymbol{r}]$, kde f je diferencovateľná funkcia, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $r = |\boldsymbol{r}|$.

1160. Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je $\operatorname{div}(r^n\boldsymbol{r}) = 0$, ak $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $r = |\boldsymbol{r}|$.

1161. Dokážte, že pre vektorové pole $\boldsymbol{f}(x, y) = (-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})/(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$ platí $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(X) = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(X) = \boldsymbol{o}$.

V úlohách **1162 až 1166** nájdite vektorové krivky daného vektorového poľa.

1162. $\boldsymbol{f}(X) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, kde a, b, c sú konštanty.

1163. $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$.

1164. $\boldsymbol{f}(X) = (z - y)\,\boldsymbol{i} + (x - z)\,\boldsymbol{j} + (y - x)\,\boldsymbol{k}$.

1165. $\boldsymbol{f}(X) = -ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$, kde a a h sú konštanty.

1166. $\boldsymbol{f}(X) = x(y^2 - z^2)\,\boldsymbol{i} - y(z^2 + x^2)\,\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$.

1167. Teleso sa otáča okolo osi o_z s konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$. Nájdite divergenciu vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a vektora zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ v bode $X = (x, y, z)$ priestoru v danom čase t.

1168. Nájdite divergenciu gravitačného poľa, ktoré vytvára konečný systém hmotných bodov.

1169. Vyjadrite divergenciu vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X)$, $X = (x, y, z)$ v ortogonálnych krivočiarych súradniciach u, v, w, ak $x = q_1(u, v, w)$, $y = q_2(u, v, w)$, $z = q_3(u, v, w)$. Ako zvláštny prípad nájdite vyjadrenie $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(X)$ v cylindrických a sférických súradniciach.

1170. Dokážte, že $\operatorname{rot}(g\boldsymbol{f}) = g \operatorname{rot} \boldsymbol{f} + [(\operatorname{grad} g) \times \boldsymbol{f}]$, kde $\boldsymbol{f}(X)$ je vektorové pole a $g(X)$ je skalárne pole a na oblasti M sú funkcie $\boldsymbol{f}$, g diferencovateľné.

1171. Nech funkcia $\boldsymbol{f}(X)$ je spojite dvakrát diferencovateľná. Dokážte, že pre vektorové pole $\boldsymbol{f}(X)$ platí $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) - \Delta \boldsymbol{f}$.

1172. Teleso sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}^\circ$ okolo osi určenej vektorom $\boldsymbol{n}^\circ = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$. Nájdite rotáciu vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ v bode $X = (x, y, z)$ priestoru v čase t.

1173. Nech σ je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$ orientovanej normálou von. Vypočítajte:

$$\int_\sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(X) \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

ak $\boldsymbol{f}(X) = (x^2 + xy - z^2)\,\boldsymbol{k}$.

1174. Nájdite tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ cez časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

1175. Nájdite tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ cez: a) plášť valca $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $0 \leqq z \leqq h$, b) povrch tohto valca.

1176. Nájdite tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ cez:

a) plášť kužeľa $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqq z \leqq 1$,
b) základňu tohto kužeľa,
c) plochu $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqq z \leqq 1$.

1177. Nájdite tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ cez povrch štvorstena ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $a > 0$, orientovaného normálou von. Overte správnosť výsledku pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety.

1178. Nájdite tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ cez plášť rotačného valca s polomerom základne R a výškou h, keď os valca prechádza začiatkom $O = (0, 0, 0)$.

1179. Dokážte, že tok vektorového poľa $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ cez jednoduchú uzavretú po kúskoch hladkú plochu orientovanú normálou von sa rovná trojnásobku objemu telesa ohraničeného touto plochou.

1180. Nájdite tok vektorového poľa

$$\boldsymbol{f}(X) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

kde e_i sú konštanty a $r_i = \varrho(X_i, X)$ sú vzdialenosti „žriediel" $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ od bodu $X = (x, y, z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ cez jednoduchú uzavretú po kúskoch hladkú plochu orientovanú normálou von, pričom všetky body X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ležia vnútri tejto plochy.

V úlohách **1181** až **1184** nájdite cirkuláciu vektorového poľa $\boldsymbol{f}$ po krivke C:

1181. $\boldsymbol{f}(X) = (x^3 - y)\,\boldsymbol{i} + (y^3 + x)\,\boldsymbol{j}$ a krivka C je kružnica $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením.

1182. $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ po ľubovoľnej uzavretej, jednoduchej, po čiastkach hladkej orientovanej krivke C.

1183. $\boldsymbol{f}(X) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ po jednom závite skrutkovice $\boldsymbol{r} = a(\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}) + bt\boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ orientovanej súhlasne s parametrickým vyjadrením.

1184. $\boldsymbol{f}(X) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ po jednoduchej uzavretej po čiastkach hladkej orientovanej krivke C, ak: a) obchádza okolo osi o_z, b) neobchádza okolo osi o_z.

1185. Dokážte, že vektorové pole $\boldsymbol{f}(X) = (4xy^3z^4 - 3y^2 - 16x^3z)\,\boldsymbol{i} + (6x^2y^2z^4 - 6xy + 2z^3)\,\boldsymbol{j} + (8x^2y^3z^3 + 6yz^2 - 4x^2)\,\boldsymbol{k}$ je potenciálne.

1186. Dokážte, že vektorové pole $\boldsymbol{f}(X) = (25x^4y - 3y^2)\,\boldsymbol{i} + (5x^5 - 6xy - 5)\,\boldsymbol{j}$ je potenciálne a nájdite jeho potenciál $g(X)$, ak $g(0, 0, 0) = 1$.

1187. Dokážte, že vektorové pole $\boldsymbol{f}(X) = yz(2x + y + z)\,\boldsymbol{i} + xz(x + 2y + z)\,\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\,\boldsymbol{k}$ je potenciálne a nájdite jeho potenciál.

1188. Nájdite potenciál gravitačného poľa hmotného bodu s hmotnosťou m, ak intenzita tohto poľa je $\boldsymbol{E} = -m\boldsymbol{r}/r^3$, pričom hmotný bod je v začiatku O a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu X.

1189. Dané je vektorové pole $\boldsymbol{f}(X) = y^2z^2\boldsymbol{i} + z^2x^2\boldsymbol{j} + x^2y^2\boldsymbol{k}$. Dokážte, že rot $\boldsymbol{f}(X)$ sa nerovná $\boldsymbol{o}$ pre každý bod X, ale $\boldsymbol{f}(X)\,.\,\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(X) = 0$. Nájdite skalárne pole $g(X)$ tak, že $g(X)\,\boldsymbol{f}(X)$ je potenciálne pole.

1190. Dané je vektorové pole $\boldsymbol{f}(X) = x^2y\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + xz^2\boldsymbol{k}$. Vyjadrite toto vektorové pole ako súčet potenciálneho a solenoidálneho vektorového poľa.

1191. Nájdite vektorové pole $\boldsymbol{f}(X)$, pre ktoré platí rot $\boldsymbol{f}(X) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ v každom bode $X \in E_3$.

1192. Nech pre dve vektorové polia $\boldsymbol{f}(X)$, $\boldsymbol{g}(X)$ platí rot $\boldsymbol{f}(X) = c\boldsymbol{g}(X)$ a rot $\boldsymbol{g}(X) = c\boldsymbol{f}(X)$. Dokážte, že div $\boldsymbol{f}(X) =$ div $\boldsymbol{g}(X) = 0$ a pre $\boldsymbol{f}(X)$ a $\boldsymbol{g}(X)$ platí $\Delta\boldsymbol{f}(X) + c^2\boldsymbol{f}(X) = \boldsymbol{o}$, $\Delta\boldsymbol{g}(X) + c^2\boldsymbol{g}(X) = \boldsymbol{o}$.

1193. Dokážte, že ak jednoduchá uzavretá hladká plocha σ, orientovaná normálou $\boldsymbol{n}$ von, ohraničuje teleso A a funkcia $u(X)$ je dvakrát diferencovateľná na množine M, $A \subset M$, potom platí:

a) $$\int_\sigma u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}p = \iiint_A \mathrm{grad}^2\, u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + \iiint_A u\Delta u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

b) $$\int_\sigma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} \Delta u \,\mathrm{d}p = \iiint_A (\Delta u)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + \iiint_A \mathrm{grad}\, u \,.\, \mathrm{grad}\, \Delta u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$.

1194. Dokážte, že pre harmonické funkcie $u(x, y)$ platí:

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\ln \varrho \,.\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} - u \frac{\mathrm{d}\,(\ln \varrho)}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\right) \mathrm{d}s,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normálny vektor jednoduchej uzavretej po čiastkach hladkej krivky C, orientovaný do jej vnútra M a bod $X = (x, y) \in M$.

1195. Dokážte, že pre harmonické funkcie $u(X)$ platí:

$$u(X) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_\sigma u(Z) \,\mathrm{d}p,$$

kde σ je guľová plocha $\varrho\,(X, Z) = r$ so stredom $X = (x, y, z)$ a polomerom r.

1196. Dokážte, že pre harmonické funkcie $u(X)$ platí:

$$u(X) = \frac{1}{V(A)} \iiint_A u\,(\xi, \eta, \zeta) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\zeta,$$

kde bod $X = (x, y, z)$ je stred gule A, $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leqq a^2$, ktorej objem je $V(A)$.

1197. Kvapalina prúdi rýchlosťou $\boldsymbol{v}(X)$ cez oblasť A, ktorej objem je $V(A)$. Odvoďte rovnicu spojitosti

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho \boldsymbol{v}) = 0$$

za predpokladu, že v oblasti A nie sú nijaké žriedla ani nory. Pritom $\varrho(X)$ je hustota kvapaliny v bode X a t čas.

1198. Množstvo tepla, ktoré prejde v skalárnom poli s teplotou $T = f(X)$, $X = (x, y, z)$, za jednotku času cez plôšku $\Delta\sigma$ s obsahom $\mathrm{d}p$ je $\mathrm{d}Q = -\lambda \boldsymbol{n} \,.\, \mathrm{grad}\, T(X) \,\mathrm{d}p$, kde λ je koeficient tepelnej vodivosti prostredia a $\boldsymbol{n}$ normálny vektor plôšky $\Delta\sigma$. Vypočítajte množstvo tepla, ktoré prejde do vnútra jednoduchej uzavretej po kúskoch hladkej plochy σ. Pomocou rýchlosti zvyšovania sa teploty $T(X)$ vnútri plochy σ odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorej vyhovuje teplotné pole $T(X)$ (rovnica pre vedenie tepla).

6. ZÁKLADY TEÓRIE FUNKCIE KOMPLEXNEJ PREMENNEJ

6,1. Funkcie komplexnej premennej, elementárne transcendentné funkcie

Na množine M komplexných čísiel je definovaná komplexná funkcia f komplexnej premennej, ak ku každému komplexnému číslu $z \in M$ je priradené jedno komplexné číslo $w = f(z)$. Množinu M nazývame *oborom definície funkcie* f a množinu N všetkých čísiel $f(z)$, $z \in M$ nazývame *oborom hodnôt funkcie* f.

Pojem ohraničenej funkcie, parciálnej funkcie, absolútnej hodnoty funkcie, súčtu, rozdielu, súčinu, podielu funkcií, jednojednoznačnej funkcie a inverznej funkcie sa zavádza tak ako pri reálnych funkciách reálnej premennej.

Komplexnú funkciu f komplexnej premennej s oborom definície M môžeme zapísať aj v tvare $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde $z = x + iy$ a $u(x, y)$, $v(x, y)$ sú reálne funkcie dvoch reálnych premenných x a y, pričom bod (x, y) je z definičného oboru funkcií $u(x, y)$ a $v(x, y)$ vtedy a len vtedy, keď $z \in M$. Funkciu $u(x, y)$ nazývame *reálnou časťou* funkcie f a označujeme ju $\operatorname{Re} f(z)$ a funkciu $v(x, y)$ nazývame *imaginárnou* časťou funkcie f a označujeme ju $\operatorname{Im} f(z)$.

Komplexnú funkciu komplexnej premennej môžeme znázorniť tak, že číslo $z \in M$ znázorníme v jednej rovine komplexných čísiel a $w = f(z)$ v druhej rovine komplexných čísiel.

Poznámka 1. Každému komplexnému číslu $z = x + iy$ (x je reálna a y imaginárna časť čísla z) sa priraďuje bod v rovine komplexných čísiel. Zvoľme v rovine pravouhlý súradnicový systém s osami o_x a o_y a každému komplexnému číslu $z = x + iy$ priraďme v rovine bod $B = (x, y)$. Takto môžeme zobrazovať množiny komplexných čísiel do E_2 a vyšetrovať geometrické vlastnosti týchto množín napr. pomocou metód rovinnej analytickej geometrie. Geometrické názvy obrazov množín M komplexných čísiel v E_2 prenášame potom na samotné množiny M. V tomto zmysle hovoríme, že množina M komplexných čísiel je napr. úsečka, polpriamka, priamka, krivka, kružnica, kruh atď. Tak napr. množina M všetkých komplexných čísiel $z = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ sú spojité reálne funkcie reálnej premennej t a $\langle\alpha, \beta\rangle$ je interval z E_1, je krivkou.

Niektoré elementárne transcendentné funkcie

1. $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, pre každé $z = x + iy \in K$*).

2. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, pre $z \in K$.

3. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, pre $z \in K$.

4. $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, pre $z \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

5. $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, pre $z \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

6. $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, pre $z \in K$.

*) Množinu všetkých komplexných čísiel budeme označovať K.

7. $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, pre $z \in K$.

8. $\operatorname{tgh} z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$, pre $z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

9. $\operatorname{cotgh} z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$, pre $z \neq k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Všetky tieto funkcie sú periodické. Funkcie e^z, $\cosh z$ a $\sinh z$ majú periódu $2\pi i$, $\cos z$ a $\sin z$ majú periódu 2π, $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ majú periódu π a funkcie $\operatorname{tgh} z$ a $\operatorname{cotgh} z$ majú periódu π i.

10. (*Logaritmická funkcia komplexnej premennej.*)

Rovnica $e^w = z$, kde $z \neq 0$ má v každom „páse" J_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ komplexných čísiel w, pre ktoré platí $(2n - 1)\pi < \operatorname{Im} w \leqq (2n + 1)\pi$ jediné riešenie w_n. Pre toto riešenie platí:

$$w_n = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \tag{1}$$

(o Arg z pozri čl. 2,1/II).

Množinu všetkých riešení rovnice $e^w = z$, pri danom $z \neq 0$ označujeme $\operatorname{Ln} z$.

Na každom z „pásov" J_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ je parciálna funkcia funkcie $e^w = z$ jednojednoznačná a existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nazývame *vetvou logaritmickej funkcie.* Vetvu logaritmickej funkcie, definovanú na „páse" J_0, nazývame *hlavnou vetvou* logaritmickej funkcie a označujeme ju $\ln z$. Podľa (1) pre ňu platí:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

11. (*Mocninová funkcia komplexnej premennej.*)

$(z^\alpha)_0 = e^{\alpha \ln z}$, pre každé $z \neq 0$ a pre každé komplexné číslo α.

Nech z je dané číslo rôzne od 0 a α dané komplexné číslo. Množinu všetkých čísiel tvaru $e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ budeme označovať z^α.

Poznámka 2. Keď n je prirodzené číslo, používame aj takéto označenia: $\sqrt[n]{z}$ namiesto $z^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt{z}$ namiesto $z^{\frac{1}{2}}$, $\left(\sqrt[n]{z}\right)_0$ namiesto $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_0$ a $(\sqrt{z})_0$ namiesto $\left(z^{\frac{1}{2}}\right)_0$ (pozri aj čl. 2,1/II).

Množinu všetkých riešení rovnice $\sin w = z$ pri danom z označujeme $\arcsin z$. Podobný význam majú znaky $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arccotg} z$, $\operatorname{argsinh} z$, $\operatorname{argcosh} z$, $\operatorname{argtgh} z$ a $\operatorname{argcotgh} z$.

12. Podobne ako v 10. pre funkciu e^z dajú sa aj pre funkcie $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, $\sinh z$, $\cosh z$, $\operatorname{tgh} z$ a $\operatorname{cotgh} z$ nájsť množiny, na ktorých sú tieto funkcie jednojednoznačné a možno definovať inverzné funkcie k parciálnym funkciám definovaným na týchto množinách. Pre funkciu $\sin z$ je takouto množinou jednojednoznačnosti napr. „pás„ komplexných čísiel z, pre ktoré $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$. Tieto inverzné funkcie nazývame *vetvami* funkcií arkussinus, arkuskosínus atď. a označujeme ich $\arcsin z$, $\arccos z$, atď.

Príklad 1. Nájdime pri zobrazení danom funkciou $w = z^2 + z$:

a) obraz krivky $x = C$,
b) vzor priamky $v = 0$.

Riešenie. Funkciu $w = z^2 + z$ môžeme napísať v tvare $w = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)$, pričom $u = x^2 - y^2 + x$ je jej reálna a $v = 2xy + y$ imaginárna časť.

a) Pre $x = C$ dostávame:
$u = -y^2 + C^2 + C$,
$v = y(2C + 1)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

To sú parametrické rovnice obrazu priamky $x = C$. Pri $2C + 1 = 0$, t. j. pri $C = -1/2$ sa $v = 0$, $u = -y^2 - 1/4$, $y \in (-\infty, \infty)$ a to je polpriamka $v = 0$, $u \in (-\infty, -1/4)$. Pri $C \neq -1/2$ po vylúčení parametra dostaneme $u = -v^2/(2C + 1)^2 + C^2 + C$, čo je parabola.

b) Hľadajme teraz vzor priamky $v = 0$. Po dosadení za v máme $2xy + y = 0$. To je rovnica krivky, ktorá je vzorom priamky $v = 0$. Po úprave na tvar $y(2x + 1) = 0$ vidíme, že sú to dve priamky $y = 0$ a $x = -1/2$.

Príklad 2. Vypočítajme argtgh $(1 - \mathrm{i})$.

Riešenie. Máme nájsť všetky riešenia rovnice tgh $w = 1 - \mathrm{i}$, alebo

$$\frac{\mathrm{e}^{w} - \mathrm{e}^{-w}}{\mathrm{e}^{w} + \mathrm{e}^{-w}} = 1 - \mathrm{i}.$$

Po úprave z toho dostávame:

$$\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2w} - (2 - \mathrm{i}) = 0,$$

čiže

$$\mathrm{e}^{2w} = -1 - 2\,\mathrm{i}.$$

Všetky riešenia poslednej a tiež pôvodnej rovnice sú:

$$w = \frac{1}{2}\ln(-1 - 2\,\mathrm{i}) = \frac{1}{2}[\ln|-1 - 2\,\mathrm{i}| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-1 - 2\,\mathrm{i})] =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln\sqrt{5} + \mathrm{i}(\operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi n)] = \frac{1}{4}\ln 5 + \mathrm{i}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right],$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

V úlohách **1199** až **1203** zistite, aké krivky sú dané nasledujúcimi komplexnými funkciami reálnej premennej $t \in (-\infty, \infty)$, pričom koeficienty a, b, ω sú reálne čísla:

1199. $z = a(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{-2}$.

1200. $z = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}/a$.

1201. $z = at + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

1202. $z = a(1 + \mathrm{i}t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$.

1203. $z = \mathrm{e}^{(a+b\mathrm{i})t}$.

V úlohách **1204** až **1209** zistite, aké množiny v rovine K sú dané nasledujúcimi vzťahmi:

1204. $|z - 2| < |z|$.

1205. $|z - 1| \geq 2|z - \mathrm{i}|$.

1206. $|z^2 - 1| < 1$.

1207. $\operatorname{Im}(1/z) = 2$.

1208. $0 < \arg\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} < \dfrac{\pi}{4}$.

1209. $|2z| < |1 + z^2|$.

1210. Vypočítajte $f(8 - 6\,\mathrm{i})$, ak je daná funkcia $w = f(z)$.

a) $w = z^2 - 3z + 80\,\mathrm{i}$,

b) $w = \dfrac{z^2 - |z|}{z - 8}$,

c) $w = z + (\bar{z})^2 + \operatorname{Im}(z\bar{z})$.

1211. Ak $f(z) = xy + \mathrm{i}(x^2 + y^2)$, vypočítajte $f(-1 + 2\,\mathrm{i})$, $f(1)$ a $f(\mathrm{i})$.

V úlohách **1212** až **1216** nájdite obor definície danej funkcie $w = f(z)$:

1212. $w = \sqrt{z - 1}$.

1213. $w = \ln(-2z - \mathrm{i})$.

1214. $w = \dfrac{1}{z^2 + 1}$.

1215. $w = \dfrac{z - |z|}{|z| - 1}$.

1216. $w = \dfrac{1}{\cosh z}$.

1217. Vypočítajte:

a) $e^{\pi i/2}$ b) $e^{2+\pi i/4}$

c) e^{3+i}, d) e^{-3-4i}.

Nájdite aj hlavnú hodnotu argumentu týchto čísiel.

1218. Nájdite všetky hodnoty nasledujúcich komplexných mocnín s komplexným exponentom:

a) $1^{\sqrt{2}}$, b) $(-2)^{\sqrt{2}}$,

c) 1^{-i}, d) 2^{i+i},

e) i^i, f) $i^{\frac{3}{4}}$,

g) $(3 - 4\,i)^{1+i}$, h) $(1 + i)^{\frac{1}{2}}$,

1219. Vypočítajte.

a) $\mathrm{Ln}\,4$, b) $\mathrm{Ln}\,(-1)$,

c) $\mathrm{Ln}\,i$, d) $\mathrm{Ln}\,(e^{i\pi/4})$,

e) $\mathrm{Ln}\,(1 + i)$, f) $\mathrm{Ln}\,(-8 + 15\,i)$.

1220. Vypočítajte:

a) $\sin i$, b) $\cos(2 + i)$,

c) $\mathrm{tg}\,(2 - i)$, d) $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$.

1221. Vypočítajte:

a) $\mathrm{Arcsin}\,3$, b) $\mathrm{Arcsin}\,i$,

c) $\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2}$, d) $\mathrm{Arctg}\,\frac{i}{3}$,

e) $\mathrm{Arctg}\,2\,i$, f) $\mathrm{Arctg}\,(1 + 2\,i)$.

1222. Vypočítajte:

a) $\sinh(2 - i)$, b) $\cosh i$,

c) $\mathrm{tgh}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$, d) $\mathrm{cotgh}\,(2 + i)$.

1223. Vypočítajte:

a) $\mathrm{Argsinh}\,i$, b) $\mathrm{Argcosh}\,(-1)$,

c) $\mathrm{Argcosh}\,2\,i$, d) $\mathrm{Argtgh}\,i$.

V úlohách 1224 až 1230 nájdite reálnu a imaginárnu časť danej funkcie $w = f(z)$:

1224. $w = z^2$. **1225.** $w = \frac{1}{z}$.

1226. $w = \sin z$. **1227.** $w = \cos z$.

1228. $w = \operatorname{tg} z$. **1229.** $w = (z^1)_0$.

1230. $w = (z^\pi)_0$.

V úlohách **1231** a **1232** vyjadrite danú funkciu ako funkciu premennej z:

1231. $w = (2xy + 2x - 1) - i(x^2 - y^2 - 2y)$.

1232. $w = x^2 + iy^2$.

1233. Nájdite obrazy daných kriviek pri zobrazení $w = 1/z$:

a) $x = 1$, b) $y = 0$,

c) $y = x$, d) $x^2 + y^2 = 9$,

e) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

1234. Pri zobrazení $w = e^z$ nájdite:

a) obrazy priamok $x = C$, $y = C$, $x = y$,

b) vzor krivky $\varrho = \varphi (0 \leqq \varphi < \infty)$.

V úlohách **1235** až **1237** nájdite obrazy daných kriviek pri danom zobrazení $w = f(z)$:

1235. Priamky $\arg z = a$, ak $w = \dfrac{1 + z}{1 - z}$.

1236. Kružníc $|z| = R$, ak $w = z + \dfrac{1}{z}$.

1237. Kružnice $|z| = 1$, ak $w = \sqrt{z + 1}$.

V úlohách **1238** až **1244** nájdite oblasť B, ktorá je obrazom oblasti A, $B = f(A)$, ak $w = f(z)$ je daná funkcia komplexnej premennej.

1238. $w = z - z^2/4$, pričom A je oblasť $|z| |z - 4| < 4$.

1239. $w = \sqrt{z}$, pričom A je oblasť $|z| < 2(1 - \cos \varphi)$ a pre $z = x > 0$ je $w > 0$.

1240. $w = z + e^z$, pričom A je oblasť $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

1241. $w = \sin z$, pričom A je obdĺžnik $0 < \operatorname{Re} < \pi/2$, $0 < \operatorname{Im} z < a$.

1242. $w = \operatorname{tg} z$, pričom A je oblasť $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$.

1243. $w = \operatorname{Arctg} z$, pričom A je kruh $|z| < 1$.

1244. $w = \operatorname{Argtgh} z$, pričom A je kruh $|z| < 1$.

1245. Nájdite obraz roviny z bez bodu $z = 0$ pri zobrazení $w = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$.

1246. Nájdite obsah obrazu štvorca $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$, $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$ pri zobrazení $w = z^2$ a vypočítajte dĺžku jeho obvodu.

1247. Dokážte, že platí:

a) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, b) $e^{z+2\pi i} = e^z$,

c) $\overline{(e^{iz})} = e^{-i\bar{z}}$.

1248. Dokážte, že platí:

a) $\sin z = -i \sinh iz$, b) $\cos z = \cosh iz$,

c) $\sin iz = i \sinh z$, d) $\cos iz = \cosh z$,

e) $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{tgh} iz$, f) $\operatorname{cotg} z = i \operatorname{cotgh} z$.

1249. Dokážte, že platí:

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, b) $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$,

c) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,

d) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, e) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$,

f) $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$, g) $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$.

1250. Dokážte, že platí:

a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, b) $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$,

c) $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$.

1251. Dokážte, že funkcie $\sin z$, $\cos z$, e^z, $\sinh z$, $\cosh z$, $\operatorname{tgh} z$, $\operatorname{cotgh} z$ sú periodické.

1252. Dokážte, že platí:

a) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$,

b) $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1})$,

c) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{i + z}{i - z} = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$,

d) $\operatorname{Arccotg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z - i}{z + i}$,

e) $\operatorname{Argsinh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$,

f) $\operatorname{Argcosh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$,

g) $\operatorname{Argtgh} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + z}{1 - z}$,

h) $\operatorname{Argcotg} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + 1}{z - 1}$.

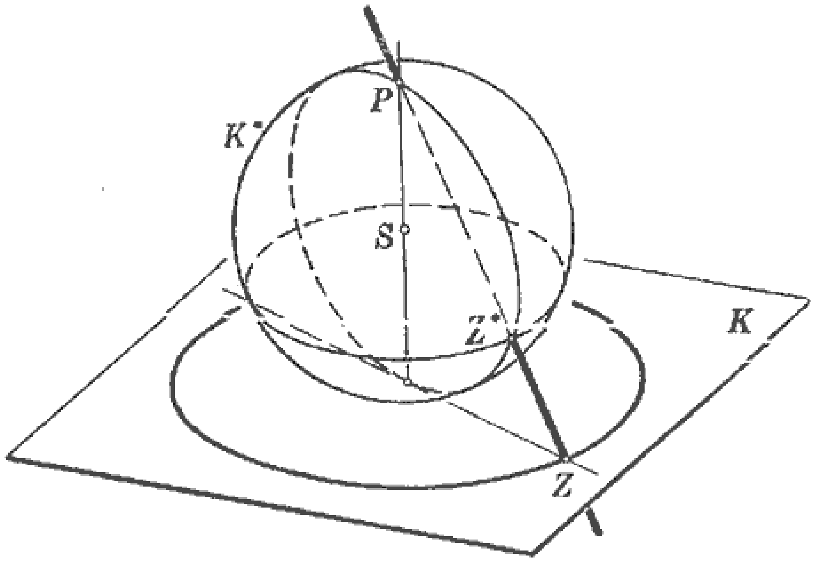
V úlohách 1253 až 1255 zostrojte v priestore graf funkcie w, kde $w = f(z)$, $z \in M$, t. j. množinu všetkých bodov $(x, y, |f(x + iy)|)$, pričom $x + iy \in M$. (Niekedy nazývame tento graf *reliéfom funkcie f*.) Načrtnite aj spádové krivky týchto grafov.

1253. $w = 1/z$. **1254.** $w = z^2$. **1255.** $w = \sin z$.

6,2. Limita a spojitosť funkcie komplexnej premennej

A. Nevlastné komplexné číslo $z = \infty$

Rovinu komplexných čísiel K možno zobraziť na Riemanovu guľovú plochu K^*, ktorá sa dotýka v začiatku súradnicového systému roviny komplexných čísiel. Pritom bod P, ktorý je súmerný podľa stredu guľovej plochy s dotykovým bodom, nazveme *pólom*. Ak spojíme ľubovoľný bod Z, ktorý je obrazom čísla z v komplexnej rovine, s pólom P, dostaneme bod Z^* ako priesečník úsečky $\overline{PZ}$ s guľovou plochou. Toto priradenie bodov Z, Z^* sa nazýva *stereografická projekcia* (pozri *obr. 29*) a celú komplexnú rovinu jednojednoznačne zobrazí na guľovú plochu bez pólu P. Množinu komplexných čísiel možno rozšíriť o ďalšie číslo $z = \infty$, ktorému bude na guľovej ploche priradený pól P.



Obr. 29

Pre nevlastné komplexné číslo $z = \infty$ nezavádza sa reálna a imaginárna časť a argument Pre absolútnu hodnotu nevlastného komplexného čísla platí $|\infty| = +\infty$.

Pre $z = \infty$ definujeme:

$$\infty \pm a = a \pm \infty = \infty, \qquad \infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty,$$

$$\frac{a}{\infty} = 0, \qquad \frac{\infty}{a} = \infty, \qquad \frac{\alpha}{0} = \infty,$$

kde a, α, $a \neq \infty$ $\alpha \neq 0$, sú komplexné čísla.

Operácie $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ sa nedefinujú.

Okolím nevlastného komplexného čísla $z = \infty$ nazývame množinu všetkých komplexných čísiel z, pre ktoré platí:

$$|z| > R,$$

kde R je ľubovoľné kladné číslo.

Komplexné číslo $z = \infty$ nazývame *limitou postupnosti komplexných čísiel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak v ľubovoľnom okolí čísla $z = \infty$ ležia skoro všetky členy tejto postupnosti.

B. Limita funkcie komplexnej premennej

Nech funkcia $f(z)$ je definovaná na okolí čísla a, pričom v čísle a prípadne nemusí byť definovaná. Komplexné číslo b nazývame *limitou funkcie komplexnej premennej* f v čísle a, ak postupnosť

$\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu b pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k číslu a, pričom každý člen postupnosti a_n je z oboru definície funkcie f a nerovná sa číslu a. Limitu b funkcie f v bode a označujeme:

$$b = \lim_{z \to a} f(z).$$

V tejto definícii čísla a a b môžu byť aj nevlastné komplexné čísla.

Veta 1. Nech funkcia $f(z)$ je definovaná v okolí komplexného čísla a (samotné číslo a nemusí prípadne patriť do oboru definície). Funkcia $f(z)$ má v bode a limitu komplexné číslo b vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné okolie čísla a existuje také okolie čísla b, že $f(z)$ je z tohto okolia.

Veta 2. Nech $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, pričom $z = x + iy$, $u(x, y)$ je reálna a $v(x, y)$ imaginárna časť funkcie f. Funkcia f komplexnej premennej má v komplexnom čísle $a = \alpha + i\beta$, α, β sú reálne čísla, limitu vtedy a len vtedy, keď reálna a imaginárna časť funkcie f má v bode (α, β) limitu a platí:

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{(x,y) \to (\alpha,\beta)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \to (\alpha,\beta)} v(x, y).$$

Pre limitu funkcie komplexnej premennej platia analogické vety ako pre limitu funkcie reálnej premennej (pozri vety 1, 6, 8 z článku 1,5/II).

C. Spojitosť funkcie komplexnej premennej

Funkciu f komplexnej premennej nazývame *spojitou v komplexnom čísle a*, ak existuje konečná limita funkcie f v čísle a a platí:

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Ak je f spojitá v každom čísle množiny M, nazývame funkciu f *spojitou na množine M*.

Veta 3. Funkcia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde $u(x, y)$ je reálna a $v(x, y)$ imaginárna časť funkcie f je spojitá v čísle $a = \alpha + i\beta$ vtedy a len vtedy, keď funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sú spojité v bode (α, β).

Veta 4. Funkcia f komplexnej premennej, spojitá na uzavretej oblasti D, je na tejto oblasti ohraničená, t. j. platí pre všetky $z \in D$:

$$|f(z)| \leq M,$$

kde M je kladné číslo.

Veta 5. Ak funkcia f komplexnej premennej je spojitá na uzavretej oblasti D, tak funkcia f má na D maximum a minimum.

Pre spojitú funkciu komplexnej premennej platia analogické vety ako pre spojitú funkciu reálnej premennej (pozri vety 1, 3, 4 z článku 1,4/II).

Príklad 1. Vypočítajme limitu

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 1}{z^3 + iz^2 - z - i}.$$

Riešenie. Keďže limita čitateľa aj menovateľa pre $z \to -i$ sa rovná nule, nemôžeme použiť vetu o limite podielu funkcií. Preto upravme daný zlomok pre $z \neq -i$ takto

$$\frac{z^2 + 1}{z^3 + iz^2 - z - i} = \frac{(z + i)(z - i)}{(z + i)(z^2 - 1)} = \frac{z - i}{z^2 - 1}.$$

Posledná rovnosť funkcií platí pre všetky $z \neq -i$. Ak limity týchto funkcií v čísle $z = -i$ existujú, musia sa navzájom rovnať. Teda máme:

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 1}{z^3 + iz^2 - z - i} = \lim_{z \to -i} \frac{z - i}{z^2 - 1} = \frac{\lim\limits_{z \to -i} (z - i)}{\lim\limits_{z \to -i} (z^2 - 1)} = \frac{-2i}{-2} = i.$$

Príklad 2. Dokážme, že funkcia

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 1}{z^3 + iz^2 - z - i} & \text{pre } z \neq -i, \\ 2i & \text{pre } z = -i, \end{cases}$$

je v bode $z = -i$ nespojitá.

Riešenie. Keďže $f(-i) = 2i$ a $\lim\limits_{z \to -i} f(z) = i$ (pozri príklad 1), daná funkcia je podľa definície bode $z = -i$ nespojitá.

1256. Nájdite transformačné rovnice stereografickej projekcie v danom pravouhlom súradnicovom systéme. Zistite, ak je dané číslo z, aký je obraz a) čísla $-z$, b) čísla $\bar{z}$.

1257. Nájdite obrazy bodov $e^{i\alpha}$, $-1 + i$, $3 - 4i$ na guľovej ploche K^*.

1258. Dokážte, že obrazom priamky v rovine komplexných čísiel je kružnica prechádzajúca pólom P na guľovej ploche K^*.

1259. Dokážte, že obrazy bodov z, $1/\bar{z}$ na guľovej ploche K^* sú súmerné vzhľadom na rovinu rovníka.

1260. Dokážte, že kružnica $A|z|^2 + Bz + \overline{Bz} + C = 0$ (A, C sú reálne čísla) je stereografickou projekciou hlavnej kružnice guľovej plochy vtedy a len vtedy, keď $A + C = 0$.

1261. Nájdite stereografickú projekciu loxodrómy.*)

1262. Nech C je regulárna krivka na guľovej ploche K^* a γ je jej stereografická projekcia. Dokážte, že dĺžka krivky C je:

$$\int_\gamma \frac{2}{1 + |z|^2} \, ds.$$

V úlohách **1263** až **1266** zistite, či dané postupnosti komplexných čísiel majú nevlastnú limitu:

1263. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

1264. $\{i^{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$.

1265. $\{n\, e^{in}\}_{n=1}^{\infty}$.

1266. $\left\{\dfrac{1 + i^{2n}}{n} + (i + i^{2n-1})\, n^2 e^{in}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

1267. Zistite, či množiny dané nasledujúcimi nerovnosťami sú uzavreté oblasti. Znázornite tieto množiny v rovine komplexných čísiel.

a) $|z^2 - 1| \leqq 1$,

b) $|z - i| \leqq 1$, $|z + i| \leqq 1$,

c) $|z - 1| \geqq 1$, $|z - 2| \leqq 2$.

---

*) Loxodróma je krivka na guľovej ploche, ktorá pretína všetky poludníky pod rovnakým uhlom.

V úlohách **1268** až **1273** nájdite limity:

1268. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^2}{|z|^2}$. **1269.** $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^3}{|z|^2}$.

1270. $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 + (2 - i) z - 2i}{z^2 + 1}$. **1271.** $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z}{z^2 + 1}$.

1272. $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$, kde $f(z) = \begin{cases} i \text{ pre } |z - i| > 1, |z - 2i| < 2, \\ 0 \text{ pre } |z - i| \leqq 1, |z - 2i| \geqq 2. \end{cases}$

1273. $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{iz^2 + 3z}{5z^2 - 9i}$.

1274. Zistite, či daná funkcia f je spojitá v danom čísle z_0.

a) $f(z) = 1/z$, pre $z \neq \infty$, $f(\infty) = 0$, $z_0 = \infty$,

b) $f(z) = 1/z$, pre $z \neq 0$, $f(0) = \infty$, $z_0 = 0$,

c) $f(z) = z$, $z_0 = \infty$.

1275. Zistite, či funkcia a) $\dfrac{1}{1 - z}$, b) $\dfrac{1}{1 + z^2}$ je spojitá vnútri kruhu $|z| < 1$.

1276. Dokážte, že funkcia

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

kde n je prirodzené číslo a $a_0, a_1, \ldots a_n$ sú komplexné čísla, je spojitá na množine K.

1277. Vyšetrite spojitosť funkcie f, pre ktorú platí $f(0) = 0$ a pre $z \neq 0$, $f(z)$ rovná sa:

a) $\dfrac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|}$, c) $\dfrac{\operatorname{Re} z^2}{z^2}$;

b) $\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, d) $\dfrac{(\operatorname{Re} z^2)^2}{z^2}$.

1278. Nájdite body nespojitosti funkcie $w = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} z)$.

1279. Nájdite body nespojitosti funkcie $w = E\left(\dfrac{6}{\pi} \arg z\right)$.

1280. Nájdite maximum a minimum modulu funkcie $w = z^2$ na uzavretej oblasti $|z - 1| \leqq 1$. Dokážte, že na otvorenej oblasti $|z - 1| < 1$ modul funkcie nemá maximum ani minimum.

6.3. Derivácia funkcie komplexnej premennej a analytická funkcia

Nech funkcia komplexnej premennej f je definovaná na okolí komplexného čísla $a \neq \infty$. Deriváciou funkcie komplexnej premennej f v čísle a nazývame vlastnú limitu

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

a označujeme ju $f'(a)$. Platí teda

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Deriváciu funkcie komplexnej premennej f v čísle a označujeme aj $[f(z)]'_{z=a}$, $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_{z=a}$.

Nech funkcia f komplexnej premennej má v každom čísle množiny M deriváciu. Funkciu komplexnej premennej, ktorej oborom definície je množina M, a ktorej hodnota v každom čísle $a \in M$ je $f'(a)$, nazývame *deriváciou funkcie komplexnej premennej f* na množine M. Označujeme ju f', $f'(z)$, $\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$.

Geometrický význam derivácie funkcie komplexnej premennej pozri článok 6,4.

Výraz

$$\mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z$$

nazývame *diferenciálom komplexnej funkcie f* v bode z.

Ak $f'(z) \neq 0$ v bode z, potom diferenciál $\mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z$ definuje hlavnú (lineárnu) časť zobrazenia $w = f(z)$ (pozri článok 6,4).

Pre počítanie derivácie funkcie komplexnej premennej platia podobné vety ako pre počítanie derivácie funkcie reálnej premennej (pozri vetu 2, 3, 4, 5, 6 z článku 3,1/II).

Pre derivovanie elementárnych funkcií komplexnej premennej platia podobné vzorce ako pre počítanie derivácií elementárnych funkcií reálnej premennej (pozri čl. 3,1/II).

Funkciu f komplexnej premennej nazývame analytickou (regulárnou, monogénnou, alebo holomorfnou) v čísle a, $a \neq \infty$, ak existuje také okolie čísla a, že v každom jeho bode má funkcia f deriváciu.

Funkciu f komplexnej premennej definovanú v okolí čísla $a = \infty$ nazývame analytickou (regulárnou, monogénnou alebo holomorfnou) v čísle ∞, ak funkcia $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ je analytická v čísle $a = 0$.

Funkciu f komplexnej premennej nazývame analytickou na oblasti D, ak je analytická v každom bode oblasti D. Body komplexnej roviny, v ktorých jednoznačná funkcia f komplexnej premennej je analytická, nazývame *regulárnymi bodmi komplexnej funkcie f*. Body, v ktorých nie je analytickou, nazývame *singulárnymi bodmi komplexnej funkcie f*.

Veta 1. (*Nevyhnutná podmienka.*) Nech funkcia komplexnej premennej $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$ má deriváciu $f'(z)$ na oblasti D. Potom funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ majú parciálne derivácie prvého rádu, pre ktoré v každom bode $(x, y) \in D$ platia Cauchy-Riemanove rovnice:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

a platí:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Veta 2. (*Postačujúca podmienka.*) Ak funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ majú spojité parciálne derivácie prvého rádu na oblasti D, pre ktoré platia rovnice (1), potom komplexná funkcia $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ má na oblasti D deriváciu $f'(z)$.

Veta 3. Funkcia f komplexnej premennej je analytická na oblasti D vtedy a len vtedy, keď má na oblasti D spojitú deriváciu.

Nech funkcia $u(x, y)$ je na oblasti D spojitá a má tam spojité parciálne derivácie druhého rádu. Ak funkcia $u(x, y)$ je riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

pre každý bod $(x, y) \in D$, nazývame ju *harmonickou funkciou na oblasti D*.

Ak harmonické funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ na oblasti D spĺňajú Cauchy-Riemanove rovnice (1), nazývame ich *harmonicky združenými funkciami na oblasti D*.

Veta 4. Nech funkcia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ je definovaná a analytická na oblasti D, pričom funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ majú na oblasti D spojité parciálne derivácie druhého rádu. Potom funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ sú na oblasti D harmonickými funkciami.

Veta 5. Každá harmonická funkcia v jednoducho súvislej oblasti D tvorí reálnu alebo imaginárnu časť istej analytickej funkcie v tejto oblasti.

Derivácie vyšších rádov funkcie komplexnej premennej definujeme podobne ako vyššie derivácie reálnej funkcie. Derivácia n-tého rádu funkcie komplexnej premennej f je prvá derivácia derivácie $(n - 1)$-vého rádu funkcie f. Teda

$$f^{(n)}(z) = [f^{(n-1)}(z)]', \; n > 1.$$

Podobne sa definujú aj diferenciály vyšších rádov komplexnej funkcie f.

Príklad 1. Nájdime deriváciu funkcie $w = z^3 + i$ v každom čísle $z \in K$ pomocou definície derivácie funkcie.

Riešenie. Nech a je ľubovoľné komplexné číslo. Počítajme:

$$\lim_{z \to a} \frac{(z^3 + i) - (a^3 + i)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z^2 + za + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

Podľa definície derivácie funkcie v každom čísle $z \in K$ platí:

$$(z^3 + i)' = 3z^2.$$

Daná funkcia je teda analytická v komplexnej rovine K.

Príklad 2. Dokážme, že funkcia $w = \bar{z}$ nie je analytickou funkciou na K.

Riešenie. Nájdime reálnu a imaginárnu časť funkcie $w = \bar{z}$, $z = x + iy$. Máme:

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y.$$

Parciálne derivácie týchto funkcií sú:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Pre všetky body $(x, y) \in E_2$ platí:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pretože Cauchy-Riemanove rovnice nie sú splnené v žiadnom bode z E_2, daná funkcia nie je analytickou v žiadnom bode $z \in K$.

Príklad 3. Nájdime analytickú funkciu f na množine K, ak jej reálna časť je $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3$ a $f(i) = i$.

Riešenie. Keďže funkcia f má byť analytická na množine K, pre každý bod $(x, y) \in E_2$ musia platiť Cauchy-Riemanove rovnice (1). Pretože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 6y + 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 6x - 1,$$

podľa (1) musí platiť:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x - 6y + 1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4y + 6x + 1. \tag{4}$$

Z rovnice (3) dostávame:

$$v(x, y) = \int (4x - 6y + 1)\,dy + \varphi(x) = 4xy - 3y^2 + y + \varphi(x),$$

kde φ je diferencovateľná funkcia. Odtiaľ dostávame:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4y + \varphi'(x). \tag{5}$$

Porovnaním rovníc (4) a (5) dostaneme:

$$4y + \varphi'(x) = 4y + 6x + 1,$$

čiže

$$\varphi'(x) = 6x + 1,$$

z čoho

$$\varphi(x) = 3x^2 + x + C,$$

kde C je konštanta.

Imaginárna časť hľadanej funkcie f je:

$$v(x, y) = 4xy - 3y^2 + y + 3x^2 + x + C.$$

Konštantu C určíme z podmienky $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, t. j. $v(0, 1) = 1$. Máme:

$$1 = 0 - 3 + 1 + C.$$

Odtiaľ

$$C = 3.$$

Hľadaná funkcia je:

$$f(z) = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3 + \mathrm{i}(4xy - 3y^2 + y + 3x^2 + x + 3).$$

Po dosadení za $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2\,\mathrm{i}$ a úprave dostaneme:

$$f(z) = (2 + 3\,\mathrm{i})\,z^2 + (1 + \mathrm{i})\,z + 3 + 3\,\mathrm{i}.$$

1281. Zistite, či funkcie z^n, e^z, $\cos z$, $\arcsin z$, $\ln z$, spĺňajú Cauchy-Riemanove rovnice a dokážte, že platí:

a) $(z^n)' = nz^{n-1}$, n je prirodzené číslo,

b) $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$,

c) $(\cos z)' = -\sin z$,

d) $(\ln z)' = 1/z$,

e) $(\arcsin z)' = 1/\sqrt{(1 - z^2)}$.

1282. Napíšte Cauchy-Riemanove rovnice v polárnych súradniciach.

V úlohách **1283** až **1289** vypočítajte deriváciu danej funkcie:

1283. $w = z^3 - 5z + 1/(z - 4)$.

1284. $w = (z - 3\,\mathrm{i})/(2\,\mathrm{i}z + 4)$.

1285. $w = 2z^4/(\sqrt{z^2 - 1})_0$.

1286. $w = (1 + \mathrm{i})\, z\, \mathrm{e}^z$.

1287. $w = \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \cos 2xy - \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-x^2+y^2} \sin 2xy$.

1288. $w = r^{-3}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\varphi}$.

1289. $w = \left(r + \dfrac{1}{r}\right) \cos \varphi + \mathrm{i}\left(r - \dfrac{1}{r}\right) \sin \varphi$.

1290. Dokážte, že funkcia $w = z \operatorname{Re} z$ má deriváciu iba v bode $z = 0$. Nájdite $w'(0)$.

1291. Dokážte, že funkcia

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$$

je analytická funkcia na množine K.

1292. Dokážte, že funkcia $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ je analytická na množine $K - \{0\}$.

1293. Nájdite množiny, na ktorých sú dané funkcie analytické:

a) $w = z^4$,
b) $w = 1/z^2$,
c) $w = (\sqrt[3]{z})_0$,
d) $w = z \operatorname{Re} z$.

1294. Nech $f'(z) = 0$ pre všetky $z \in K$. Dokážte, že $f(z) = \text{const}$ pre všetky $z \in K$.

1295. Dokážte, ak $w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ a $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ existuje, potom existuje u'_x, v'_y a platí $u'_x = v'_y$.

1296. Dokážte, ak $f(z)$ je regulárna v oblasti D a nenadobúda v oblasti D reálne nekladné hodnoty a ak $|f(z)| = \varphi(x)\,\psi(y)$, $x + \mathrm{i}y = z \in D$, potom $f(z) = \mathrm{e}^{az^2+bz+c}$, kde a je reálne číslo b, c sú komplexné čísla.

V úlohách 1297 až 1306 nájdite analytickú funkciu $w(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$, ak je daná jedna z funkcií u, v:

1297. $u = x^2 - y^2 + xy$, $w(0) = 0$.

1298. $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $w(0) = 0$.

1299. $v = 2xy + 3x$.

1300. $u = x/(x^2 + y^2) - 2y$.

1301. $v = y/(x^2 + y^2)$, $w(2) = 0$.

1302. $v = 3 + x^2 - y^2 - y/[2(x^2 + y^2)]$.

1303. $v = \mathrm{e}^x(y \cos y + x \sin y) + x + y$, $w(0) = 0$.

1304. $u = \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$.

1305. $u = \dfrac{2 \sin 2x}{\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{-2y} - 2 \cos 2x}$.

1306. $v = \ln (x^2 + y^2) + x - 2y$.

V úlohách 1307 až 1309 nájdite analytickú funkciu $f(z)$, ak pre $f(z)$ platí:

1307. $\operatorname{Re} f(z) = c$ sú kružnice $x^2 + y^2 = a^2$.

1308. $|f(z)| = c$ sú lemniskáty $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

1309. $\arg f(z) = c$ sú kružnice $x^2 + y^2 = a^2$.

1310. Nech $f(z)$ je analytická funkcia na oblasti D. Zistite, či funkcie $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\ln |f(z)|$ sú harmonické funkcie na oblasti D.

1311. Ak u je harmonická funkcia na oblasti D, aká musí byť funkcia f, aby $f(u)$ bola harmonická funkcia na oblasti D.

1312. Dokážte, že ak $u(x, y)$ je harmonická funkcia, potom aj zložená funkcia $u[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, kde φ a ψ sú združené harmonické funkcie, je harmonická funkcia.

1313. Nech $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Dokážte, že ak $f(z)$ je analytická funkcia a rôzna od nuly na oblasti D, potom $\Delta |f(z)| = |f(z)|^{-1} |f'(z)|^2$.

1314. Dokážte, že ak $f(z)$ je analytická funkcia, potom platí $\Delta[|f(z)|^2] = 4|f'(z)|^2$.

1315. Vyjadrite Laplaceov operátor $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$ v polárnom súradnicovom systéme (ϱ, φ) a nájdite riešenie Laplaceovej diferenciálnej rovnice $\Delta u = 0$, ktoré závisí iba od ϱ. Dokážte, že funkcie $u = \varrho^n \cos n\varphi$, $v = \varrho^n \sin n\varphi$, n prirodzené číslo, sú harmonické.

1316. Zistite, či existujú harmonické funkcie (rôzne od konštanty) daného tvaru a ak existujú, nájdite ich.

a) $u = \varphi(x/y)$; b) $u = \varphi(x^2 + y^2)$; c) $u = \varphi(x^2 + y)$, kde φ je dvakrát diferencovateľná funkcia.

V úlohách **1317** až **1320** nájdite harmonicky združenú funkciu s danou funkciou u.

1317. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.

1318. $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^2$.

1319. $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$.

1320. $u(x, y) = (x^2 - y^2)/[(x^2 + y^2)]^2$.

1321. Nájdite funkciu harmonicky združenú k funkcii $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

1322. Nájdite hlavnú lineárnu časť zobrazenia $w = z^2$ v bode $z = i$. Odhadnite chybu pre hlavnú lineárnu časť tohto zobrazenia v kruhu $|z - i| < 0{,}1$.

6,4. Konformné zobrazenie

Nech f je zobrazenie, ktoré zobrazuje spojitú oblasť D jednej (orientovanej) roviny do druhej (orientovanej) roviny. Nech f má tú vlastnosť, že zachováva v bode B veľkosť uhlov kriviek, prechádzajúcich bodom B a alebo zachováva aj orientáciu všetkých týchto uhlov, alebo mení orientáciu všetkých týchto uhlov na opačnú. Potom hovoríme, že zobrazenie f je konformným zobrazením v bode B.

Keď f zachováva veľkosť uhlov kriviek aj ich orientáciu v každom bode z D, hovoríme, že f je konformným zobrazením prvého druhu na D.

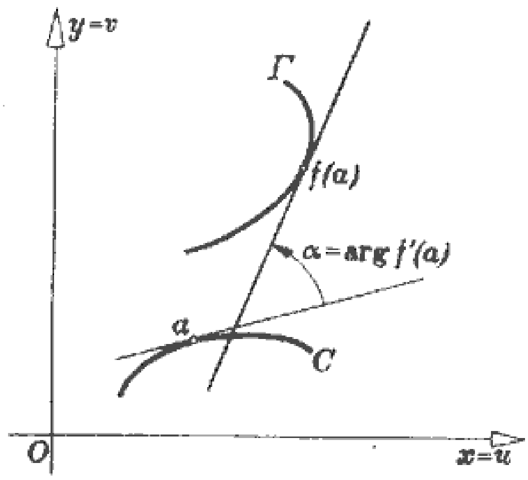
Keď f zachováva veľkosť uhlov kriviek a mení ich orientáciu v každom bode z D, hovoríme, že f je konformné zobrazenie druhého druhu.

Geometrický význam argumentu a modulu derivácie

Nech funkcia f má v čísle a deriváciu $f'(a) \neq 0$. Nech C je krivka prechádzajúca bodom a, ktorá má v bode a dotyčnicu, a Γ nech je obraz tejto krivky pri zobrazení f roviny K do seba [Γ prechádza bodom $f(a)$ a má dotyčnicu v bode $f(a)$]. Potom $\arg f'(a)$ je uhol, o ktorý je pootočená pokiaľ ide o orientáciu dotyčnica v bode $f(a)$ každej krivky Γ oproti dotyčnici v bode a tej krivky C, ktorej je Γ obrazom (*obr. 30*).

Modul $|f'(a)| = \lim\limits_{z \to a} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right|$ derivácie v bode a je limitnou hodnotou predĺženia (čo nastane pri $|f'(a)| > 1$) resp. skrátenia (čo nastane pri $|f'(a)| < 1$) úsečiek s jedným koncovým bodom v bode a pri zobrazení f.

Číslo $|f'(a)|$ sa nazýva aj *lokálnou deformáciou v bode a* pri zobrazení f. Ak $|f'(a)| > 1$ hovoríme o dilatácii, ak $|f'(a)| < 1$ o kontrakcii.



Obr. 30

Veta 1. Zobrazenie dané analytickou funkciou na oblasti D, ktorej derivácia je rôzna od nuly, je na oblasti D konformným zobrazením prvého druhu.

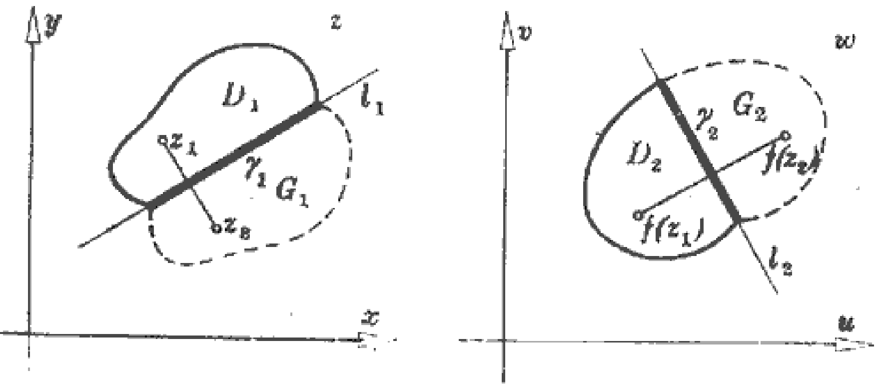
Všeobecné princípy konformného zobrazenia

Pojem oblasti a jednoducho súvislej oblasti sa zavádza podobne ako v E_2.

Veta 2. (*Riemanova veta o existencii konformného zobrazenia jednej oblasti na druhú.*) Nech D_1 a D_2 sú dve jednoducho súvislé oblasti v rozšírenej rovine komplexných čísiel K^*, pričom obidve z nich sú rôzne od množiny K^* a od množiny K^* bez jedného bodu. Potom existuje analytická funkcia f, ktorá zobrazuje jednojednoznačne a konformne D_1 na D_2.

Veta 3. (*O jednojednoznačnom zobrazení hraníc.*) Nech oblasť D_1 je ohraničená jednoduchou hladkou alebo po čiastkach hladkou krivkou C. Nech $w = f(z)$ je analytickou funkciou na D_1 aj na C a nech zobrazuje krivku C jednojednoznačne na krivku Γ, ktorá ohraničuje oblasť D_2. Nech pri prebiehaní bodu z po krivke C tak, že oblasť D_1 zostáva na ľavej strane, prebieha aj bod $f(z)$ krivku Γ tak, že oblasť D_2 zostáva na ľavej strane. Potom funkcia f zobrazuje jednojednoznačne a konformne D_1 na D_2.

Veta 4. (*Princíp symetrie.*) Nech D_1 je oblasť a γ_1 nech je úsečka, polpriamka alebo priamka, ktorá je časťou hranice oblasti D_1. Nech funkcia $w = f(z)$ zobrazuje oblasť D_1 tak, že $f(\gamma_1) = \gamma_2$ je zase úsečka, polpriamka alebo priamka, ktorá je časťou hranice oblasti $f(D_1) = D_2$. Nech l_1 je priamka, na ktorej leží γ_1, a l_2 priamka, na ktorej leží γ_2. Nech f je analytickou funkciou na oblasti D_1 a vo vnútorných bodoch γ_1. Potom f je analytickou funkciou aj na oblasti G_1, symetrickej ku D_1 vzhľadom na l_1, ak zobrazuje symetrické body z_1 a z_2 vzhľadom na l_1 na symetrické body $w_1 = f(z_1)$ a $w_2 = f(z_2)$ vzhľadom na priamku l_2 (*obr. 31*).

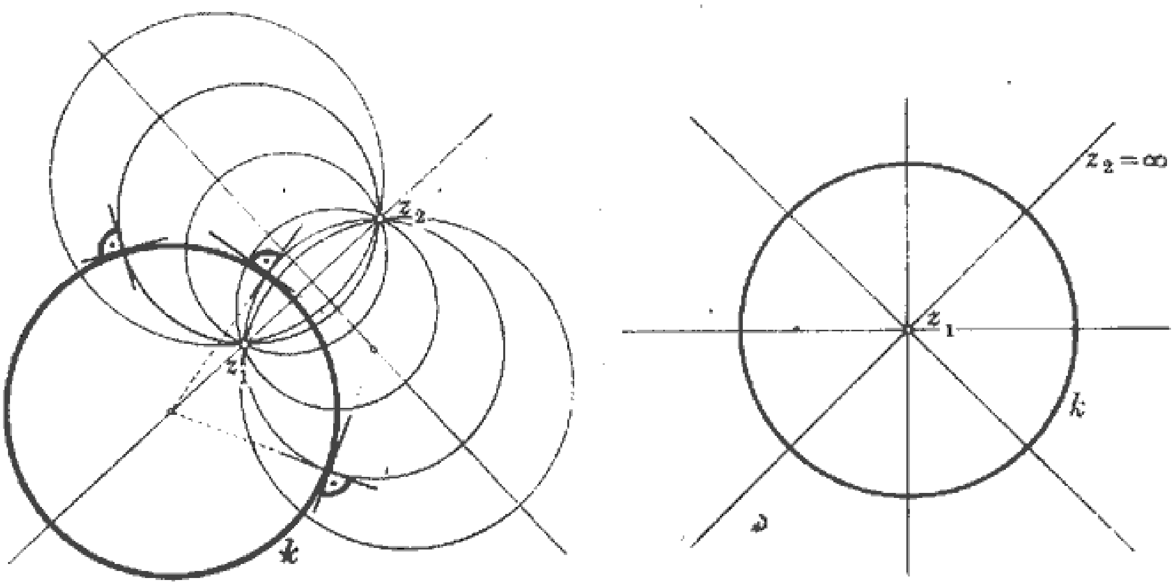


Obr. 31

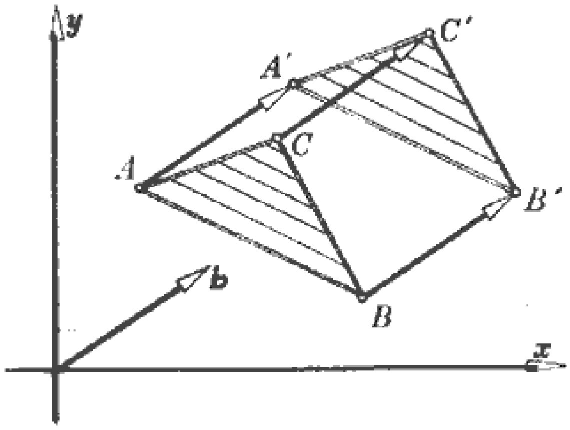
Okrem symetrie vzhľadom na priamku zavádza sa aj symetria vzhľadom na kružnicu.

Budeme hovoriť, že dva rôzne body z_1 a z_2 rozšírenej komplexnej roviny K^* sú symetrické vzhľadom na kružnicu k, ak všetky priamky a všetky kružnice prechádzajúce bodmi z_1, z_2 sú kolmé na kružnicu k (*obr. 32a, b*).

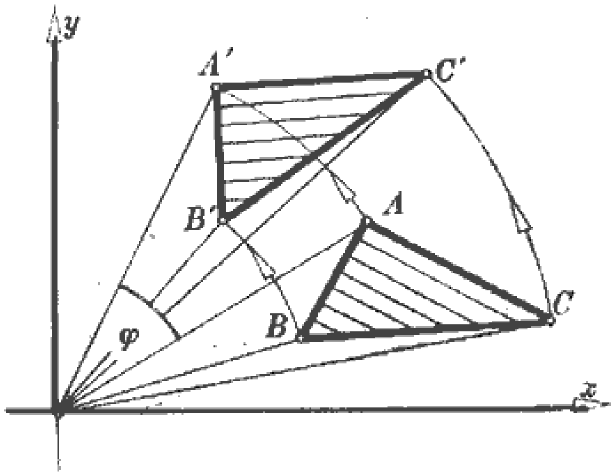
Veta 4 platí aj vtedy, keď niektorú alebo obidve symetrie vzhľadom na priamku nahradíme symetriou vzhľadom na kružnicu.



Obr. 32



Obr. 33



Obr. 34

Konformné zobrazenia dané niektorými elementárnymi funkciami

1. Konformné zobrazenie $w = z + b$ je posunutie roviny komplexných čísiel, dané vektorom posunutia so začiatočným bodom v bode O a koncovým bodom v bode b (*obr. 33*).

2. Konformné zobrazenie $w = ze^{i\varphi}$ je otočenie roviny komplexných čísiel o uhol φ okolo bodu O (*obr. 34*).

3. Konformné zobrazenie $w = az$, kde a je reálne číslo, $a \neq 0$ je stredovou podobnosťou so stredom v bode O a koeficientom podobnosti a (*obr. 35*).

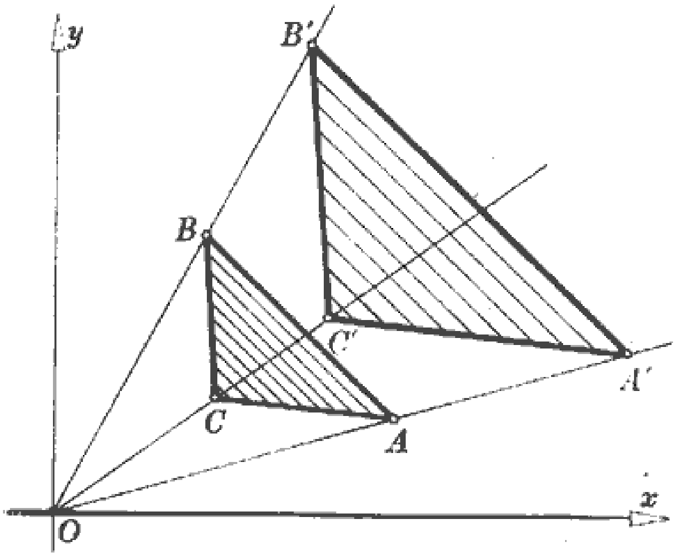
4. Konformné zobrazenie $w = 1/z$ sa nazýva *inverzným zobrazením* (*obr. 36*).

5. Lineárne lomené zobrazenie.

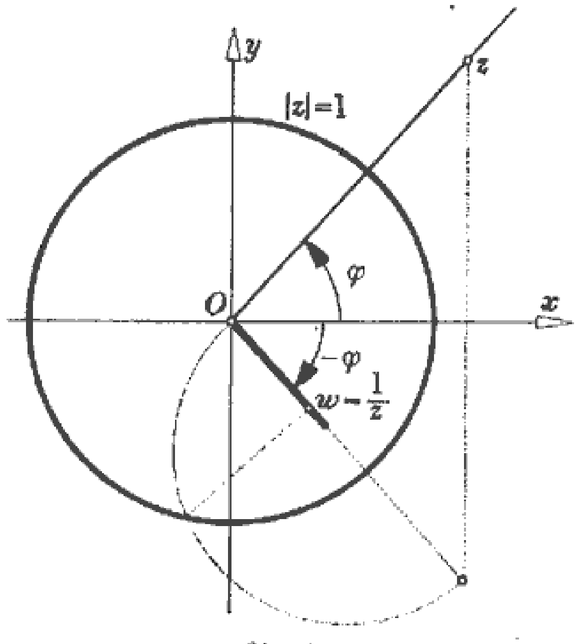
Funkciu $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$ nazývame *lineárnou lomenou funkciou*. Pri $c = 0$ dostávame lineárnu celistvú funkciu. Funkcie určujúce zobrazenia 1)—3) sú lineárnymi funkciami.

Lineárne lomené zobrazenie je konformné v celej rozšírenej komplexnej rovine.

Veta 5. Lineárne lomené zobrazenie zobrazuje priamky do priamok alebo kružníc a kružnice zobrazuje do priamok alebo kružníc.



Obr. 35



Obr. 36

Veta 6. Nech C je kružnica alebo priamka a Γ nech je jej obraz pri lineárnom lomenom zobrazení. Potom dvojica symetrických bodov vzhľadom na C sa zobrazí do dvojice symetrických bodov vzhľadom na Γ.

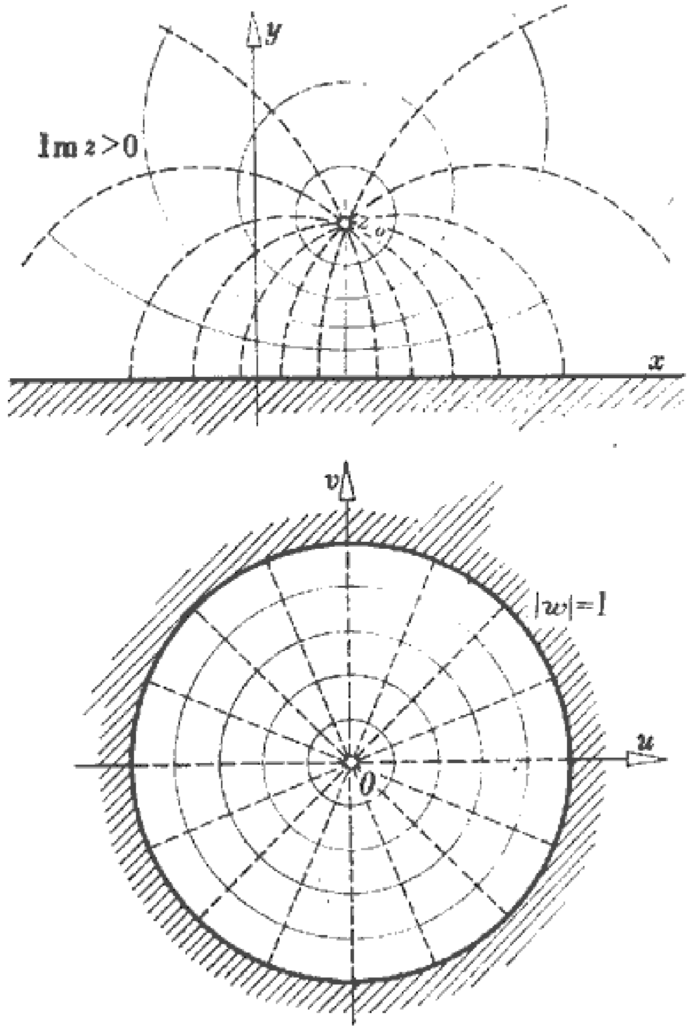
Veta 7. Existuje jediné lineárne lomené zobrazenie, ktoré zobrazuje ľubovoľné tri rôzne body z_1, z_2 a z_3 do ľubovoľných troch rôznych bodov w_1, w_2 a w_3 tak, že zobrazí z_1 na w_1, z_2 na w_2 a z_3 na w_3. Toto zobrazenie má tvar

$$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w)}{(w_1 - w)(w_3 - w_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}.$$

Veta 8. Každé lineárne lomené zobrazenie hornej polroviny na jednotkový kruh so stredom v bode O, ktoré zobrazuje bod z_0 hornej polroviny na bod O, má tvar

$$w = e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

$\vartheta \in (-\pi, \pi\rangle$ (*obr. 37*).



Obr. 37

Veta 9. Každé lineárne lomené zobrazenie, ktoré zobrazuje kruh $|z| \leq 1$ na kruh $|w| \leq 1$, pričom vnútorný bod z_0 kruhu $|z| \leq 1$ zobrazuje na stred $w = 0$ druhého kruhu, má tvar

$$w = e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

$\vartheta \in (-\pi, \pi\rangle$ (*obr. 38*).

Veta 10. Každé lineárne lomené zobrazenie hornej polroviny na seba má tvar

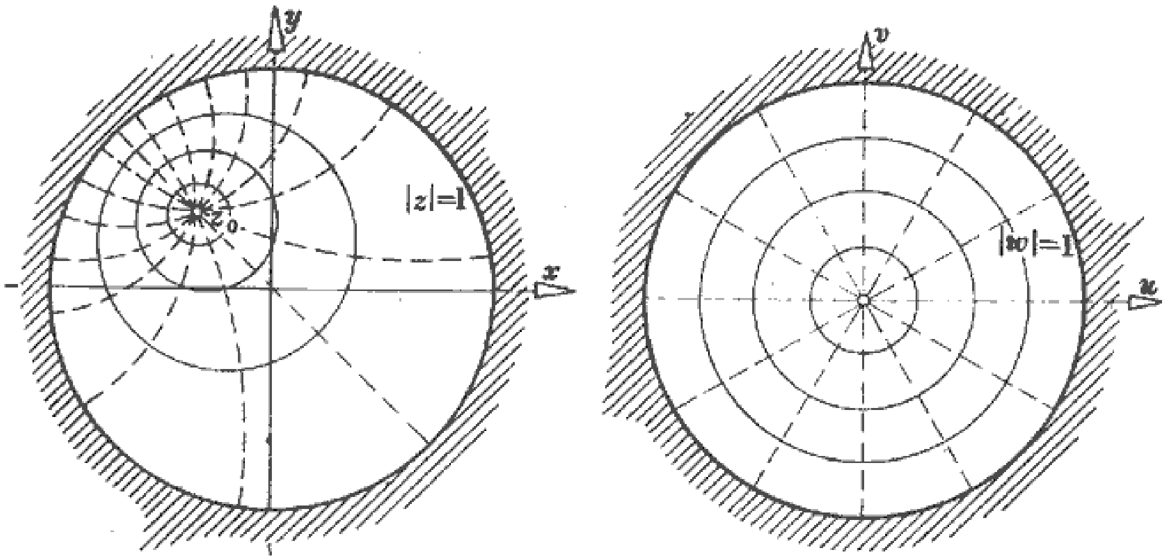
$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

a, b, c, d reálne čísla, $ad - bc > 0$.

6. $w = z^n$, kde n je prirodzené číslo, $n > 1$, zobrazuje jednojednoznačne uhol $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ na komplexnú rovinu bez polpriamky $\operatorname{Re} w \geqq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$ (pre $n = 2$ pozri *obr. 39*).

Poznámka 1. K zobrazeniu $w = z^n$ existuje inverzné zobrazenie, ktoré zobrazuje jednojednoznačne K^* bez polpriamky $\operatorname{Re} z \geqq 0$, $\operatorname{Im} z = 0$ na uhol $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{2\pi}{n}$. Toto inverzné zobrazenie budeme v tomto paragrafe označovať $\sqrt[n]{z}$. Je to jedna z vetví n-tej odmocniny. Dá sa vyjadriť takto:

$$\sqrt[n]{z} = e^{i\frac{\pi}{n}} (\sqrt[n]{-z})_0, \quad \text{alebo} \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{i}{n}[\arg(-z) + \pi]}.$$



Obr. 38

7. Konformné zobrazenie $w = z + \frac{1}{z}$ (*Žukovského funkcia*) zobrazí jednojednoznačne vnútro jednotkovej kružnice $|z| = 1$ na celú komplexnú rovinu bez úsečky $-1 \leqq \operatorname{Re} w \leqq 1$, $\operatorname{Im} w = 0$. Na tú istú množinu zobrazuje toto zobrazenie jednojednoznačne a konformne aj vonkajšok jednotkovej kružnice $|z| = 1$ (*obr. 40a, b*).

8. Konformné zobrazenie $w = e^z$ zobrazuje jednojednoznačne pás $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ na celú komplexnú rovinu bez polpriamky $\operatorname{Re} w \geqq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$ (*obr. 41*).

9. Konformné zobrazenie $w = \sin z$ zobrazuje jednojednoznačne pás $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ na celú komplexnú rovinu bez polpriamok $\operatorname{Re} w \geqq 1$, $\operatorname{Im} w = 0$ a $\operatorname{Re} w \leqq -1$, $\operatorname{Im} w = 0$ (*obr. 42*).

10. Konformné zobrazenie $w = \cos z$ zobrazuje jednojednoznačne polpás $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$, $0 < \operatorname{Im} z < \infty$ na množinu všetkých komplexných čísiel bez polpriamky $\operatorname{Re} w \geqq -1$, $\operatorname{Im} w = 0$ (*obr. 43*).

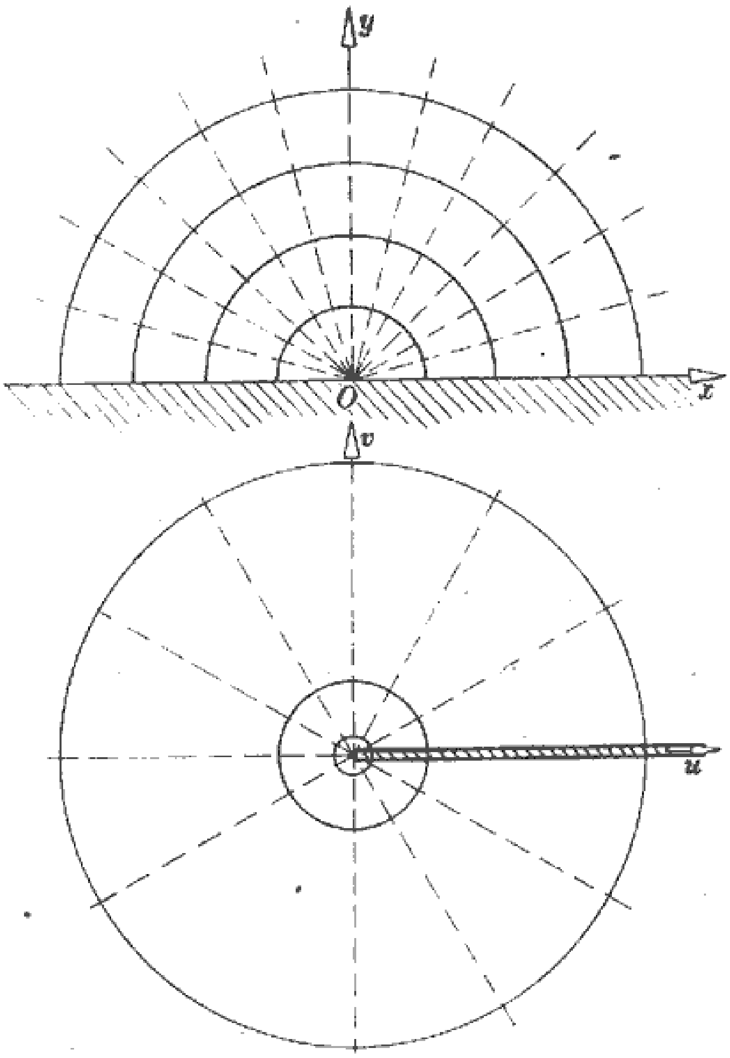
Poznámka 2. Pomocou týchto zobrazení môžeme utvoriť ďalšie konformné zobrazenia.

Príklad 1. Nájdime celistvé lineárne zobrazenie, ktoré necháva bod $1 + 2i$ na mieste a bod i zobrazí do bodu $-i$.

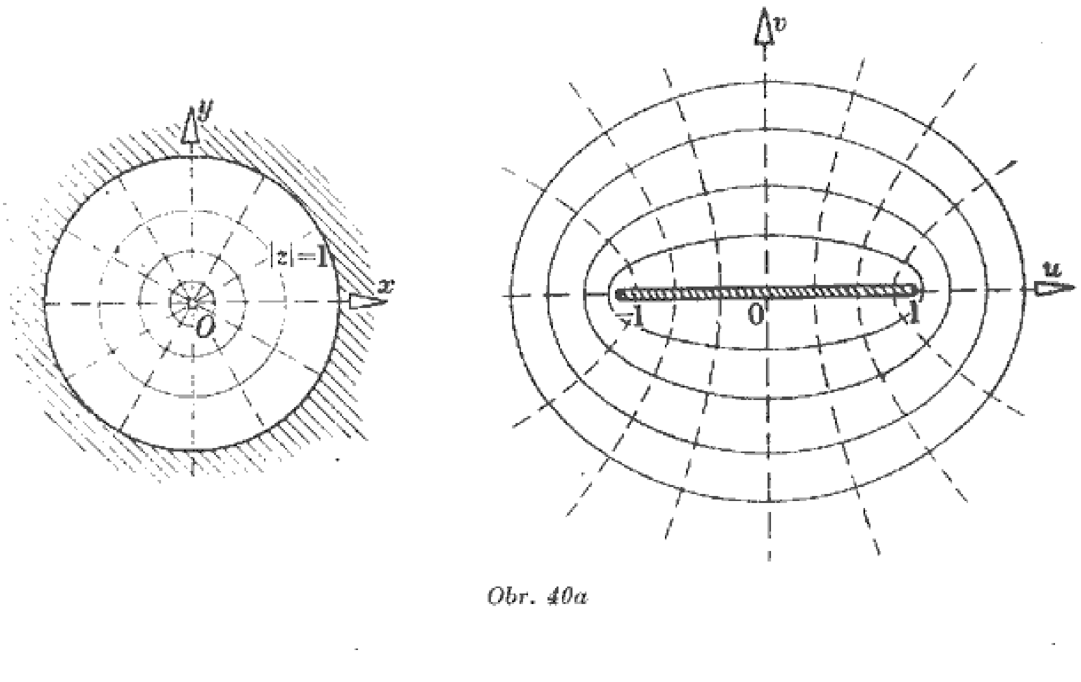
Riešenie. Lineárne celistvé zobrazenie má tvar $w = az + b$, kde $a \neq 0$, pričom komplexné čísla a a b určíme z podmienok:

$$1 + 2i = a(1 + 2i) + b$$

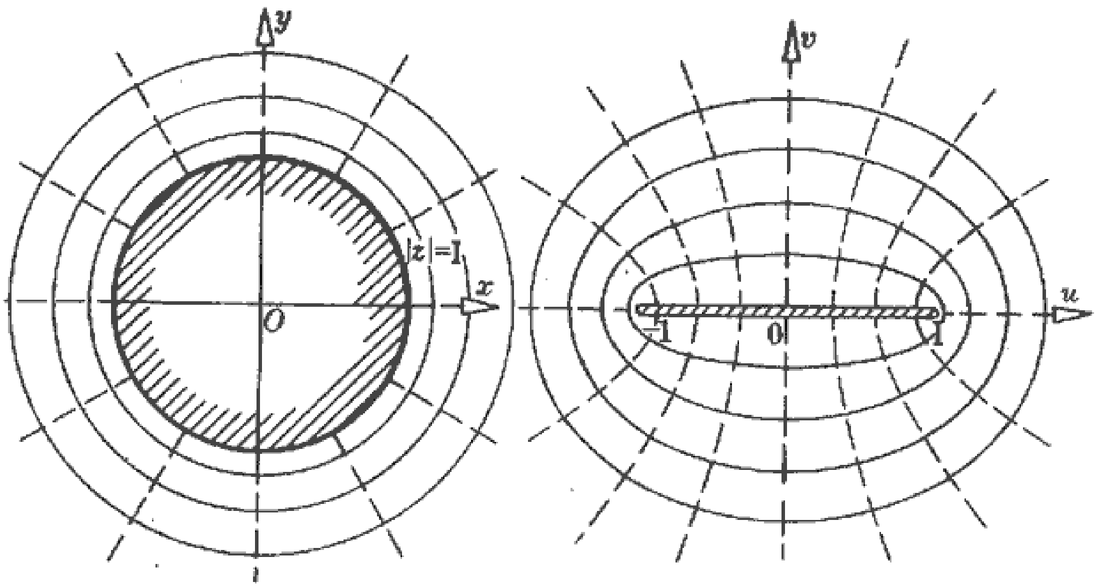
$$-i = a i + b.$$



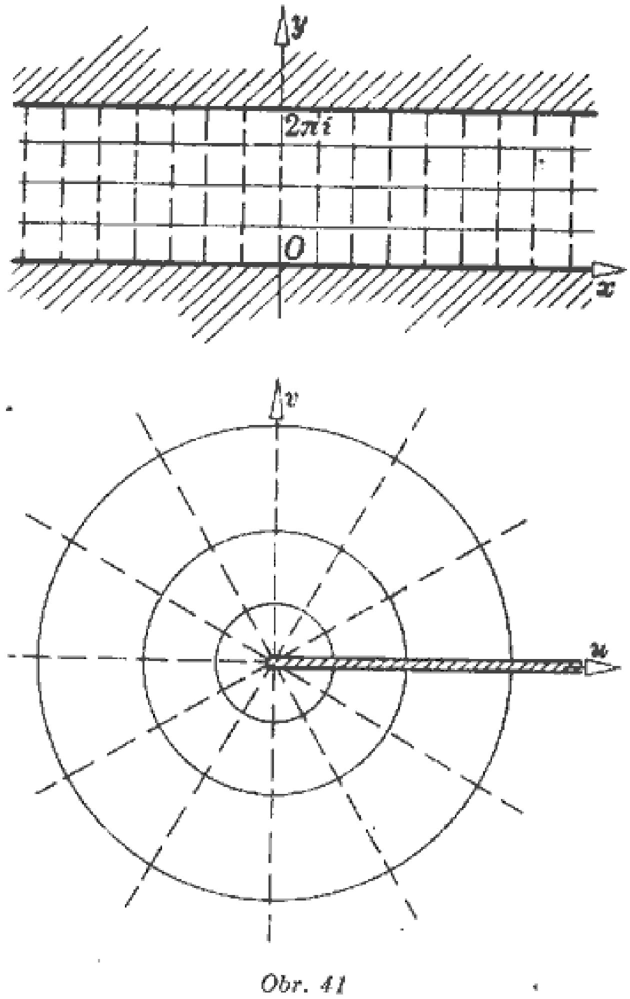
Obr. 39



Obr. 40a



Obr. 40b



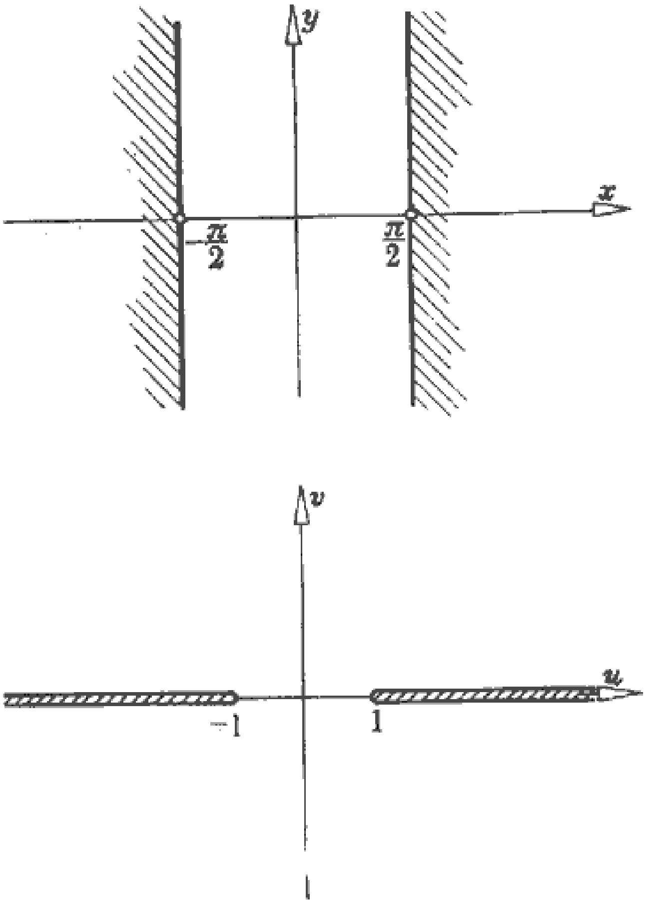
Obr. 41

To je systém dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi a a b, ktorého jediným riešením je dvojica $(a, b) = (2 + i, 1 - 3i)$. Preto hľadané celistvé lineárne zobrazenie je $w = (2 + i)z + (1 - 3i)$.

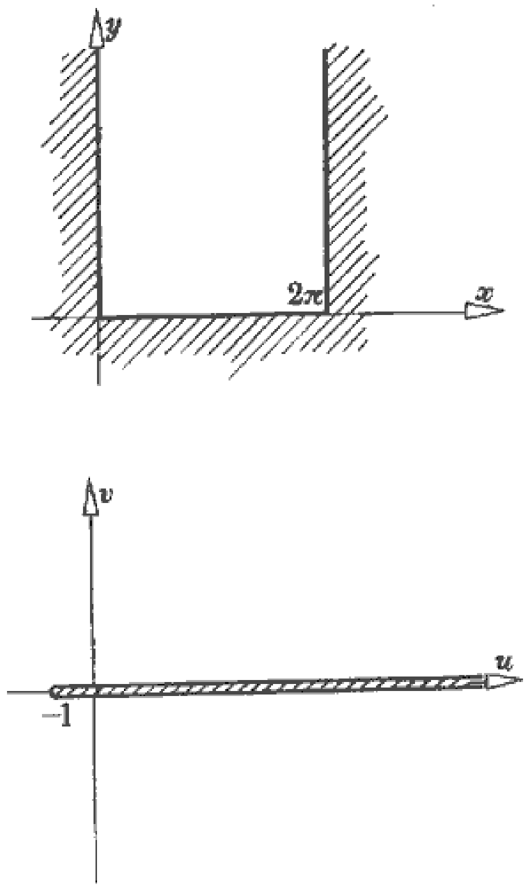
Príklad 2. Zobrazme kruh $|z| < 1$ pomocou lineárneho lomeného zobrazenia f na kruh $|w| < 1$ tak, aby $f(i/2) = 0$ a $\arg f'(i/2) = \pi/2$.

Riešenie. Lineárne lomené zobrazenie, ktoré zobrazuje kruh $|z| < 1$ na kruh $|w| < 1$ a bod $i/2$ na 0 podľa vety 9 je:

$$w = e^{i\vartheta}\frac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}z} \quad \text{a po úprave} \quad w = e^{i\vartheta}\frac{2z - i}{2 + iz}. \tag{1}$$



Obr. 42



Obr. 43

Ďalej máme $f'(z) = e^{i\vartheta}\frac{3}{(2 + iz)^2}$, $f'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4}{3}e^{i\vartheta}$ a $\arg f'\left(\frac{i}{2}\right) = \arg\left(\frac{4}{3}e^{i\vartheta}\right) = \vartheta$. Pretože má platiť $\arg f'(i/2) = \pi/2$, dostávame, že má byť $\vartheta = \pi/2$. Odtiaľ máme pre hľadané lineárne lomené zobrazenie $w = \frac{2iz + 1}{2 + iz}$.

Príklad 3. Nájdime konformné zobrazenie, ktoré zobrazí jednojednoznačne pás $0 < \operatorname{Re} z < 1$ bez úsečky $0 < \operatorname{Re} z \leq h$, $h < 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ na hornú polrovinu.

Riešenie. 1. Zobrazenie $w = \pi z$ zobrazí jednojednoznačne pás $0 < \operatorname{Re} z < 1$ bez úsečky $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ na pás $0 < \operatorname{Re} w < \pi$ bez úsečky $0 < \operatorname{Re} w \leq \pi h$, $\operatorname{Im} z = 0$. Táto množina je symetrická podľa reálnej osi.

2. Ďalej zobrazíme iba polpás $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z = 0$ pomocou zobrazenia $w = \cos z$. Pretože $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, ľahko zistíme:

a) Pri prebiehaní bodu z po polpriamke $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu $z = \infty$ po bod $z = 0$ prebieha bod $w = \cos z$ polpriamku $\operatorname{Re} w \geqq 1$, $\operatorname{Im} w = 0$ od bodu $w = \infty$ po bod $w = 1$.

b) Pri prebiehaní bodu z po úsečke $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi$, $\operatorname{Im} z = 0$ od bodu 0 po bod π prebieha bod $w = \cos z$ úsečku $-1 \leqq \operatorname{Re} w \leqq 1$, $\operatorname{Im} w = 0$ od bodu 1 po bod -1.

c) Pri prebiehaní bodu z po úsečke $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi h$, $\operatorname{Im} z = 0$[$\pi h \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi$, $\operatorname{Im} z = 0$] prebieha bod $w = \cos z$ po úsečke $\cos \pi h \leqq \operatorname{Re} w \leqq 1$, $\operatorname{Im} w = 0$[$-1 \leqq \operatorname{Re} w \leqq \cos \pi h$, $\operatorname{Im} w = 0$].

d) Pri prebiehaní bodu z po polpriamke $\operatorname{Re} z = \pi$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$ od bodu $z = \pi$ po bod $z = \infty$ prebieha bod $w = \cos z$ po polpriamke $\operatorname{Re} w \leqq -1$, $\operatorname{Im} w = 0$ od bodu $w = -1$ po bod $w = \infty$.

Pri postupnom prebiehaní bodu z opísanom v a), b) a d) prebieha bod z hranicu polpása $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$, pričom tento polpás zostáva po ľavej strane. Bod $w = \cos z$ pritom prebieha reálnu os a po ľavej strane zostáva dolná polrovina. Preto sa uvedený polpás jednojednoznačne zobrazí na dolnú polrovinu.

Úsečka $\pi h \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi$, $\operatorname{Im} z = 0$ je časťou hranice tohto polpása a zobrazí sa pri zobrazení $w = \cos z$ na úsečku $-1 \leqq \operatorname{Re} w \leqq \cos \pi h$, $\operatorname{Im} w = 0$, ktorá je časťou hranice dolnej polroviny. Použitím princípu symetrie (veta 4) zistíme, že pás $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ bez úsečky $0 < \operatorname{Re} z < \pi h$, $\operatorname{Im} z = 0$ sa jednojednoznačne zobrazí pri zobrazení $w = \cos z$ na K^* bez polpriamok $\operatorname{Re} w \geqq \cos \pi h$, $\operatorname{Im} z = 0$ a $\operatorname{Re} w \leqq -1$, $\operatorname{Im} z = 0$.

3. Zobrazenie $w = (z - \cos \pi h)/(z + 1)$ zobrazí jednojednoznačne množinu K^* bez polpriamok $\operatorname{Re} z \geqq \cos \pi h$, $\operatorname{Im} z = 0$ a $\operatorname{Re} z \leqq -1$, $\operatorname{Im} z = 0$ na K^* bez polpriamky $\operatorname{Re} w \geqq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$. To vyplýva jednoducho z toho, že zobrazuje bod $\cos \pi h$ na 0, bod -1 na ∞ (teda úsečku na polpriamku) a bod 1 na $(1 - \cos \pi h)/2$ (> 0).

4. Zobrazenie $\sqrt{z}$ zobrazuje jednojednoznačne K^* bez polpriamky $\operatorname{Re} z \geqq 0$, $\operatorname{Im} z = 0$ na hornú polrovinu.

Zobrazenia v 1—4 sú jednojednoznačné a konformné. Ich zložením dostaneme hľadané jednojednoznačné a konformné zobrazenie

$$w = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h}{1 + \cos \pi z}},$$

ktoré zobrazuje pás $0 < \operatorname{Re} z < 1$ bez úsečky $0 < \operatorname{Re} z \leqq h$, $h < 1$ na hornú polrovinu.

1323. Pri zobrazeniach $w = z^2$ a $w = z^3$ nájdite uhol otočenia a lokálnu deformáciu v nasledujúcich bodoch:

a) 1, b) $-1/4$, c) $1 + i$, d) $-3 + 4i$.

1324. Nájdite dĺžku krivky, ktorá je obrazom úsečky $z = it$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ pri zobrazení $w = z/(1 - z)^2$.

1325. Zistite, v ktorej časti roviny K dochádza pri zobrazení $w = f(z)$ k lokálnej kontrakcii a v ktorej ku lokálnej dilatácii, ak:

a) $w = z^2$, b) $w = 1/z$, c) $w = z^2 + 2z$, d) $w = e^z$, e) $w = \ln(z - 1)$.

1326. Lineárne lomené zobrazenie $w = \dfrac{z + 1}{z - 1}$ zobrazuje hranicu polkruhu $|z| \leqq 1$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$ do dvoch polpriamok, vychádzajúcich z bodu $w = 0$. Nájdite uhol α medzi obrazom úsečky $z = t$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ a polpriamkou $\operatorname{Re} w \geqq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$ a lokálnu deformáciu v bode $z = -1$.

1327. Nájdite zobrazenie, ktoré zobrazí pravouhlý trojuholník s vrcholmi $z_1 = 3 + 2\,i$, $z_2 = 7 + 2\,i$, $z_3 = 5 + 4\,i$ na rovnoramenný trojuholník s vrcholmi $w_1 = 0$, $w_2 = -2\,i$, $w_3 = 1 - i$.

1328. Nájdite lineárne zobrazenie f, ktoré zobrazuje úsečku s koncovými bodmi $z = a$, $z = b$ na úsečku s koncovými bodmi $w = c$, $w = d$ tak, že $f(a) = c$, $f(b) = d$.

1329. Pre dané lineárne zobrazenie nájdite vlastný samodružný bod z_0, uhol otočenia a koeficient podobnosti. Upravte tieto zobrazenia na tvar $w - z_0 = \lambda(z - z_0)$ (*kanonická forma*):

a) $w = 2z + 1 - 3\,i$, c) $w = z + 1 - 2\,i$,

b) $w = iz + 4$, d) $w = az + b$, $a \neq 0$.

1330. Nájdite lineárne zobrazenie, ktoré zobrazí:

a) hornú polrovinu na seba,
b) hornú polrovinu na dolnú polrovinu,
c) hornú polrovinu na polrovinu $\operatorname{Re} z \geqq 0$.

1331. Nájdite lineárne zobrazenie, ktoré zobrazuje:

a) pás $0 < \operatorname{Re} z < 1$ na seba,
b) pás $-2 < \operatorname{Im} z < 1$ na seba,
c) pás $(\operatorname{Re} z) - 1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$ na seba.

1332. Nájdite lineárne zobrazenie, ktoré zobrazí pás $0 < \operatorname{Re} z < 1$ na pás $-\pi/2 < \operatorname{Im} w < \pi/2$, ak $w(1/2) = 0$.

1333. Nájdite celistvé lineárne zobrazenie $w(z)$, ktoré zobrazuje pás medzi danými priamkami na pás $0 < \operatorname{Re} w < 1$ pri daných podmienkach:

a) $a < \operatorname{Re} z < a + h$, $w(a) = 0$, b) $y = x\sqrt{3}$, $y = x\sqrt{3} + 2$, $w(0) = 0$.

1334. Nájdite lineárne lomené zobrazenie, ktoré zobrazuje body -1, i, $1 + i$ na body:

a) $0, 2i, 1 - i$, b) $i, \infty, 1$.

1335. Nájdite lineárne lomené zobrazenie, ktoré zobrazuje body -1, ∞, i na body:

a) $i, 1, 1 + i$, b) $\infty, i, 1$.

1336. Nájdite všetky lineárne lomené zobrazenia, pri ktorých body $z_1 = 1$ a $z_2 = -1$ sú samodružnými, t. j. $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$.

1337. Nájdite lineárne lomené zobrazenie, pre ktoré body $z = 1/2$ a $z = 2$ sú samodružné a bod $z = (5/4) + (3/4)\,i$ sa zobrazí na ∞.

1338. Nájdite obraz paraboly $z = t + it^2$ pri zobrazení $w = 1/z$.

1339. Dokážte, že pri zobrazení $w = 1/z$ kruh $|z - a| < r$, $|a| \neq r$ sa zobrazí na kruh $|w - b| < R$, pričom $b = \bar{a}/(|a|^2 - r^2)$ a $R = r/(|a|^2 - r^2)$. Vyšetrite prípad $|a| = r$.

1340. Nájdite stred a polomer kružnice, na ktorú zobrazenie $w = \dfrac{z - 8\,\mathrm{i}}{z + 2 - 3\,\mathrm{i}}$ zobrazí reálnu os.

1341. Nájdite priamku, ktorá sa pri lineárnom lomenom zobrazení $2wz + \mathrm{i}(w + z) - 2 = 0$ zobrazí na seba.

1342. Nájdite obraz polpása $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ pri zobrazení $w = 1/z$.

V úlohách **1343** až **1347** nájdite obraz oblasti D pri danom lineárnom lomenom zobrazení:

1343. D je uhol $0 < \arg z < \pi/4$, $w = \dfrac{z}{z - 1}$.

1344. D je kvadrant $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $w = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

1345. D je pás $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $w = \dfrac{z - 1}{z - 2}$.

1346. D je polkruh $|z| \leqq 1$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$, $w = \dfrac{2z - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}z}$.

1347. D je medzikružie $1 < |z| < 2$, $w = \dfrac{z}{z - 1}$.

V úlohách **1348** až **1351** nájdite konformné zobrazenie hornej polroviny na seba, ak sú dané obrazy w_1, w_2, w_3 bodov z_1, z_2, z_3:

1348. $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$.

1349. $w(\infty) = 0$, $w(0) = 1$, $w(1) = \infty$.

1350. $w(0) = 1$, $w(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$.

1351. $w(a_1) = 0$, $w(a_2) = 1$, $w(a_3) = \infty$, pričom pre reálne čísla a_1, a_2, a_3 platí $a_1 < a_2 < a_3$.

1352. Nájdite zobrazenie kružnice $|z| = 2$ na seba, ak $w(4) = 0$ a kružnica $|z| = 1$ sa zobrazí na priamku rovnobežnú s imaginárnou osou.

1353. Nájdite lineárne lomené zobrazenie, ktoré kruh $|z| < 1$ zobrazí na kruh $|w| < 1$ tak, že:

a) $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = 0$,
b) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\pi/2$,
c) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$,
d) $w(-1) = -1$, $w(\mathrm{i}) = (3\mathrm{i} + 4)/5$, $w(1) = 1$,
e) $w(1) = 1$, $w(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

1354. Zobrazte kruh $|z| < 1$ na kruh $|w - 1| < 1$ tak, aby $w(0) = 1/2$ a $w(1) = 0$.

1355. Zobrazte kruh $|z - 2| < 1$ na kruh $|w - 2\,\mathrm{i}| < 2$ tak, aby $w(2) = \mathrm{i}$ a $\arg w'(2) = 0$.

1356. Zobrazte hornú polrovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na jednotkový kruh $|w| < 1$ tak, aby $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.

1357. Nájdite zobrazenie $w = f(z)$ hornej polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na kruh $|w| < R$ tak, že $w(i) = 0$, $w'(i) = 1$. Aký veľký je polomer R?

1358. Zobrazte hornú polrovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na kruh $|w - w_0| < R$ tak, aby bod i sa zobrazil do stredu kruhu a aby lokálna deformácia v tomto bode bola kladná.

1359. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na hornú polrovinu tak, aby $w(-1) = \infty$, $w(1) = 0$, $w(i) = 1$.

1360. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na dolnú polrovinu $\operatorname{Im} w < 0$ tak, aby $w(1) = 1$, $w(i) = 0$, $w(-i) = -1$.

1361. Nájdite konformné zobrazenie $w(z)$, ktoré zobrazuje kruh $|z| < R$ na pravú polrovinu $\operatorname{Re} w > 0$ tak, že $w(R) = 0$, $w(-R) = \infty$, $w(0) = 1$. Načo sa zobrazí horný polkruh?

1362. Zobrazte kruh $|z - 4i| < 2$ na polrovinu $\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$ tak, aby $w(4i) = -4$ a $w(2i) = 0$.

1363. Nájdite oblasť roviny w, na ktorú sa zobrazí pomocou zobrazenia $w = \dfrac{z - i}{z + i}$ prienik kruhov $|z + 1| \leqq \sqrt{2}$, $|z - 1| \leqq \sqrt{2}$.

1364. Nájdite jednojednoznačné konformné zobrazenie medzikružia ohraničeného kružnicami $|z| = 1$, $|z - 1| = 5/2$ na medzikružie $1 < |w| < R$. Aký je vonkajší polomer R tohto medzikružia?

1365. Nájdite konformné zobrazenie oblasti $|z - 3| > 9$, $|z - 8| < 16$ na medzikružie $\varrho < |w| < 1$.

1366. Nájdite lineárne lomené zobrazenie oblasti $|z - a| > a$, $|z - b| < b$, kde $0 < a < b$ na pás $0 < \operatorname{Im} w < \pi$.

1367. Nájdite lineárne lomené zobrazenie polroviny $\operatorname{Re} z > 0$ bez kruhu $|z - (d/2)| \leqq d/2$ na pás $0 < \operatorname{Re} w < 1$.

1368. Vyjadrite zobrazenie $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$ ako superpozíciu lineárnych celistvých zobrazení a inverzie.

1369. Dokážte, že body z, z^* sú symetrické vzhľadom na kružnicu $|z - a| = r$, ak bod z^* leží na priamke idúcej bodmi a, z, pričom platí $|z - a|\,|z^* - a| = r^2$. Nájdite bod symetrický k bodu $2 + i$ vzhľadom na kružnicu $|z - i| = 3$.

1370. Nájdite obraz pri symetrii vzhľadom na kružnicu $|z| = 1$:

a) kružnice $|z - 1| = 1$,

b) hyperboly $|z - \sqrt{2}| - |z + \sqrt{2}| = 1$.

1371. Bod $w = a^2/\bar{z}$ je symetrický k bodu z vzhľadom na kružnicu $|z| = a$. Nájdite obraz polroviny $\operatorname{Re} z > 2a$ pri tejto symetrii.

1372. Nájdite podmienky, pri ktorých zobrazenie $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ zobrazí kruh $|z| < 1$ na hornú polrovinu.

1373. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na vnútro kardioidy $w = 2(1 + \cos\varphi)\,e^{i\varphi}$.

1374. Nájdite konformné zobrazenie oblasti ležiacej vľavo od paraboly $z = t^2/(2p) + it$, $p > 0$, $t \in (-\infty, \infty)$ na kruh $|w| < 1$ tak, aby $w(p/2) = 0$ a obraz vrcholu paraboly bol $w = -1$.

1375. Nájdite konformné zobrazenie časti roviny ležiacej vľavo od pravej vetve hyperboly $z = \sqrt{1 + t^2} + it$, $t \in (-\infty, \infty)$ a uzavretej vnútri uhla $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$ na pás $-1 < \operatorname{Im} w < 1$.

1376. Nájdite konformné zobrazenie pása ohraničeného parabolami $y^2 = 4(x + 1)$, $y^2 = 8(x + 2)$ na pás $|\operatorname{Im} w| < 1$.

1377. Nájdite konformné zobrazenie kvadrantu $0 < \arg z < \pi/2$ na kruh $|w| < 1$ tak, aby $w(1 + i) = 0$, $w(0) = 1$.

1378. Nájdite konformné zobrazenie, ktoré zobrazí oblasť $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ na hornú polrovinu $\operatorname{Im} w > 0$.

1379. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na rovinu bez kladnej časti reálnej osi, $\operatorname{Im} w = 0$, $\operatorname{Re} w > 0$.

1380. Nájdite konformné zobrazenie $w(z)$, ktoré zobrazí polkruh $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ na hornú polrovinu pri daných podmienkach:

a) $w(-1) = 0$, $w(0) = 1$, $w(1) = \infty$,
b) $w(i/2) = i$, $\arg w'(i/2) = -\pi/2$.

1381. Nájdite konformné zobrazenie $w(z)$, ktoré zobrazí polkruh $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ na kruh $|w| < 1$ pri daných podmienkach:

a) $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$, $w(0) = -i$,
b) $w(i/2) = 0$, $\arg w'(i/2) = \pi/2$.

1382. Nájdite obrazy:

a) kružníc $|z| = R$, b) polpriamok $\arg z = \varphi$

pri Žukovského zobrazení $w = (z + z^{-1})/2$, $|z| > 1$.

1383. Nájdite oblasť, na ktorú zobrazí Žukovského funkcia $w = (z + z^{-1})/2$ kruh $|z| \leqq 1$ s výrezom pozdĺž úsečky s koncovými bodmi:

a) $1/2, 1$, b) $-1/2, 1$.

1384. Zobrazte konformne vonkajšok kruhu $|z| > 1$ na vonkajšok elipsy $|w - c| + |w + c| > 2a$ ($c^2 = a^2 - b^2$, $a, b, c > 0$).

1385. Zobrazte konformne vonkajšok jednotkového kruhu $|z| > 1$ bez polpriamky $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z < -1$ na:

a) rovinu w bez polpriamky $\operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w = 0$,
b) pravú polrovinu $\operatorname{Re} w > 0$.

1386. Nájdite konformné zobrazenie oblasti medzi dvoma konfokálnymi elipsami $2\sqrt{5} < |w - 2| + |w + 2| < 6$ na medzikružie $R_1 < |z| < R_2$. Nájdite R_2/R_1.

1387. Nájdite konformné zobrazenie horného polkruhu $|z| < 1$ na hornú polrovinu $\operatorname{Im} w > 0$ tak, aby $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$.

1388. Nájdite konformné zobrazenie vonkajšku kruhu $|z| > 1$ na rovinu w bez oblúka $|w| = 1$, $-\pi/2 \leqq \arg w \leqq \pi/2$, pričom $w(\infty) = \infty$.

V úlohách **1389** až **1400** nájdite konformné zobrazenie danej oblasti na hornú polrovinu, ak daná oblasť je:

1389. Rovina bez úsečky $\operatorname{Im} z = 0$, $-1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$.

1390. Rovina bez úsečky $\operatorname{Re} z = 0$, $-1 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$.

1391. Rovina bez polpriamok $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, \infty)$.

1392. Polrovina $\operatorname{Im} z > 0$ bez úsečky $\operatorname{Re} z = 0$, $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq h$, $h > 0$.

1393. Kruh $|z| < 1$ bez úsečky $\operatorname{Im} z = 0$, $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$.

1394. Rovina bez úsečky s koncovými bodmi $1 + \mathrm{i}$, $2 + 2\,\mathrm{i}$.

1395. Vonkajšok jednotkového kruhu $|z| > 1$ bez polpriamky $\operatorname{Re} z = 0$, $1 < \operatorname{Im} z$.

1396. Kruh $|z| < 1$ bez úsečiek $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z = 0$ a $a < \operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z = 0$, $0 < a < 1$.

1397. Horný polkruh $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ bez úsečky $\operatorname{Re} z = 0$, $\alpha < \operatorname{Im} z < 1$, kde $0 < \alpha < 1$.

1398. Oblasť $\operatorname{Im} z > 1$, $|z| > 2$.

1399. Kruhový výsek $|z| < 2$, $0 < \arg z < \pi/4$.

1400. Oblasť $|z| > R$, $0 < \arg z < \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqq 2$.

1401. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| \leqq 1$ bez úsečky $\operatorname{Im} z = 0$, $1/3 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$ na kruh $|w| \leqq 1$.

1402. Nájdite konformné zobrazenie vnútra elipsy $4x^2 + 5y^2 = 2$ bez úsečky spájajúcej jej ohniská na medzikružie $1 < |w| < R$. Nájdite polomer R.

1403. Nájdite konformné zobrazenie vonkajšku elipsy $|z - 3| + |z + 3| > 10$ na vonkajšok kružnice $|w| > 1$.

1404. Nájdite konformné zobrazenie uhla $0 < \arg z < \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqq 2$ na hornú polrovinu.

1405. Nájdite konformné zobrazenie oblasti $\alpha < \arg z < \beta$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ na polrovinu $\operatorname{Re} w > 0$.

1406. Na akú oblasť sa zobrazí kruh $|z| < 1$, ak $w = nz - z^n$, kde n je prirodzené číslo, $n > 1$. Nájdite obsah tejto oblasti.

1407. Nájdite konformné zobrazenie uhla $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$ na hornú polrovinu tak, aby $w(1 - \mathrm{i}) = 2$, $w(\mathrm{i}) = -1$, $w(0) = 0$.

1408. Nech A je kruh $|z| < 1$ a B kruh $|z + \mathrm{i}| = 1$. Nájdite konformné zobrazenie oblasti:

a) $A \cap B$, b) $A - B$, c) $B - A$, d) $K - (A \cup B)$

na hornú polrovinu.

1409. Nájdite konformné zobrazenie oblasti $|z| > 2$, $|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}$ na hornú polrovinu.

1410. Nájdite zobrazenie oblasti $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ bez polpriamky $\operatorname{Re} z = 0$, $2 \leqq \operatorname{Im} z$ na hornú polrovinu.

V úlohách **1411** až **1416** nájdite konformné zobrazenie danej oblasti na hornú polrovinu, ak daná oblasť je:

1411. Pás $a < \operatorname{Re} z < b$.

1412. Pás $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z + h$.

1413. Oblasť $|z| < 2$, $|z - 1| < 1$.

1414. Oblasť $|z| > 2$, $|z - 3| > 1$.

1415. Polpás $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < a$.

1416. Pás $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ bez polpriamky $\operatorname{Im} z = \pi/2$, $\operatorname{Re} z < 0$.

1417. Nájdite konformné zobrazenie polroviny $\operatorname{Re} z > 0$, bez kruhu $|z - 1/2| \leqq 1/2$ a bez úsečky $1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 2$, $\operatorname{Im} z = 0$ na hornú polrovinu.

1418. Nájdite konformné zobrazenie, ktoré zobrazuje oblasť $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z < 1$ na:

a) hornú polrovinu, pričom $w(-3\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$, $\arg w'(-3\mathrm{i}) = \pi$,

b) kruh $|w| < 1$, pričom $w(-3\mathrm{i}) = 0$, $\arg w'(-3\mathrm{i}) = \pi/3$.

1419. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na pás $0 < \operatorname{Im} w < 1$, pričom $w(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, $w(-\mathrm{i}) = 0$ a $w(0) = \mathrm{i}/2$.

1420. Nájdite konformné zobrazenie oblasti $|z - a \operatorname{cotg} \alpha| > a/\sin \alpha$, $|z - a \operatorname{cotg} (\alpha + \beta)| < a/\sin (\alpha + \beta)$, $\operatorname{Im} z > 0$, a, α, β sú reálne čísla, na pás $0 < \operatorname{Im} w < h$.

1421. Nájdite konformné zobrazenie roviny bez polpriamok $\operatorname{Re} z < -a$, $\operatorname{Im} z = 0$ a $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = 0$ na pás $0 < \operatorname{Im} w < b$ tak, aby sa prvá polpriamka zobrazila na priamku $\operatorname{Im} w = 0$ a druhá polpriamka sa zobrazila na priamku $\operatorname{Im} w = b$, pričom $w(0) = b\,\mathrm{i}/2$.

1422. Nájdite konformné zobrazenie polpása $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ na hornú polrovinu tak, aby bolo $w(\pi/2) = 1$, $w(-\pi/2) = -1$, $w(0) = 0$.

1423. Nájdite konformné zobrazenie pása $-\pi/2 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi/2$ bez úsečky $0 \leqq \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z = 0$ na hornú polrovinu.

V úlohách **1424** až **1429** nájdite konformné zobrazenie danej oblasti na hornú polrovinu, ak daná oblasť je:

1424. Oblasť $|z - 1| > 1$, $|z + 1| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

1425. Polpás $\operatorname{Re} z < 1$, $0 < \operatorname{Im} z < h$.

1426. Rovina bez častí parabol $z = (t^2 - 1) + 2t\,\mathrm{i}$, $t \in \langle -2, \infty)$, $z = (4 - t^2) + 4t\,\mathrm{i}$, $t \in \langle -1, 0 \rangle$ a bez polpriamky $0 \leqq \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z = 0$.

1427. Polpás $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ bez úsečky $\operatorname{Re} z = \pi/2$, $h \leqq \operatorname{Im} z$, $h > 0$.

1428. Oblasť $|z - 1| < 1$, $|z - 2| < 2$ bez úsečky $\operatorname{Im} z = 0$, $2 \leqq \operatorname{Re} z \leqq a$, $a < 4$.

1429. Oblasť $|z - 1| > 1$, $|z + 1| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ bez úsečky $\operatorname{Re} z = 0$, $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq h$.

1430. Nájdite obraz pása $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ pri zobrazení $w = \operatorname{tg} z$.

1431. Nájdite konformné zobrazenie pása $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ na kruh $|w| < 1$ bez úsečky $\operatorname{Im} w = 0$, $0 \leqq \operatorname{Re} w \leqq 1$.

1432. Nájdite konformné zobrazenie vonkajšku kruhu $|z| > 1$ bez úsečiek $-d \leqq \operatorname{Re} z \leqq -1$, $\operatorname{Im} z = 0$ a $1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq d$, $\operatorname{Im} z = 0$ na hornú polrovinu.

1433. Na akú oblasť sa konformne zobrazí horná polrovina $\operatorname{Im} z > 0$, ak $\cos w = \cosh a \cos z$ a $w(\pi/2) = \pi/2$.

1434. Konformné zobrazenie $w = \operatorname{arctg} z$ zobrazuje kruh $|z| < 1$ na pás v rovine w. Nájdite šírku tohto pása.

1435. Nájdite konformné zobrazenie pása $|\operatorname{Im} z| < 1/2$ na jednotkový kruh $|w| < 1$ tak, aby $w(0) = 0$. Nájdite obrazy priamok $\operatorname{Re} z = c_1$, $\operatorname{Im} z = c_2$.

1436. Nájdite konformné zobrazenie pása $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ bez úsečky $\operatorname{Re} z = 0$, $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq h$ na hornú polrovinu.

1437. Nájdite konformné zobrazenie pása $-1 < \operatorname{Im} z < 1$ bez úsečiek $-1 \leqq \operatorname{Im} z \leqq -1/2$, $\operatorname{Re} z = 0$ a $1/2 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$, $\operatorname{Re} z = 0$ na hornú polrovinu.

1438. Nájdite konformné zobrazenie danej oblasti na hornú polrovinu, ak pre túto oblasť platí $|z - \mathrm{i}| > \sqrt{2}$ pre $\operatorname{Im} z > 0$ a pre $\operatorname{Im} z < 0$ bod z neleží na úsečke $z = \mathrm{i}t$, $t \in \langle -2, 0 \rangle$.

1439. Nájdite obraz kruhu $|z| < 1$ pri konformnom zobrazení $w = \operatorname{Argtgh} z$.

Úlohy **1440** až **1443** riešte pomocou princípu symetrie.

1440. Nájdite konformné zobrazenie oblasti:

a) vnútra paraboly $y^2 < 2px$,

b) vnútra pravej vetve hyperboly, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} > 1$, $x > a$

na hornú polrovinu.

1441. Nájdite konformné zobrazenie hornej polroviny bez úsečiek $z = k\pi + \mathrm{i}t$, $t \in \langle 0, h \rangle$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ na hornú polrovinu.

1442. Nájdite konformné zobrazenie roviny bez úsečiek $-1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ a $\operatorname{Re} z = 0$, $-2 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 0$ (písmeno T) na hornú polrovinu.

1443. Nájdite konformné zobrazenie roviny bez úsečiek $z = t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ a $z = t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ (písmeno X) na vonkajšok kruhu $|w| > 1$.

6,5. Integrál funkcie komplexnej premennej

V komplexnej rovine K, podobne ako v článku 4,1, zavádzajú sa pojmy a označenia: *jednoduchý orientovaný oblúk, jednoduchá uzavretá cyklicky orientovaná krivka, vnútro uzavretej krivky, jednoduchá súvislá oblasť* a ďalej pojmy: *delenie oblúka, norma delenia, normálna postupnosť delení orientovanej krivky.*

Nech C je orientovaná krivka v komplexnej rovine s parametrickým vyjadrením

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{1}$$

Nech $f(z)$ je funkcia komplexnej premennej, ktorej obor definície obsahuje krivku C a nech $f(z)$ je na C ohraničená. Nech D je delenie krivky C dané deliacimi bodmi $z(\alpha) = z_0, z_1, \ldots, z_n = z(\beta)$. Nech bod ζ_j leží na krivke C medzi bodmi z_{j-1} a z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Integrálnym súčtom funkcie $f(z)$ pre delenie D orientovanej krivky C a pre výber bodov ζ_j nazývame súčet

$$S_f(D) = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\,(z_j - z_{j-1}). \tag{2}$$

Integrálom funkcie $f(z)$ na orientovanej krivke C nazývame také číslo J, že pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ krivky C a ľubovoľný výber bodov ζ_j platí:

$$J = \lim_{n \to \infty} S_f(D_n).$$

Integrál z funkcie $f(z)$ po krivke C sa označuje:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Funkcia $f(z)$ sa nazýva *integrovateľná* na krivke C, ak existuje $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

Pre integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ platia analogické vety k vetám 4, 6, 7 pre krivkový integrál II. druhu (pozri článok 4,1). Ďalej platí:

Veta 1. Nech orientovaná krivka C má dĺžku L. Nech $f(z)$ je na krivke C integrovateľná a platí $|f(z)| \leq M$, $z \in C$. Potom platí:

$$\left| \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq ML.$$

Veta 2. Nech C je súhlasne [nesúhlasne] orientovaný oblúk s parametrickým vyjadrením $z(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Nech $z'(t)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ a nech funkcia $f(z)$ je ohraničená na C. Potom $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ existuje práve vtedy, keď existuje $\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t$ a platí:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left[\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Veta 3. Nech C je po čiastkach hladká krivka súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením $z(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Nech funkcia $f(z)$ je na krivke C spojitá. Potom platí:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u(x, y)\,\mathrm{d}x - v(x, y)\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v(x, y)\,\mathrm{d}x + u(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Veta 4. (*Cauchyho integrálna veta.*) Nech G je otvorená množina. Nech funkcia $f(z)$ je na G analytická. Nech C je uzavretá, cyklicky orientovaná, po čiastkach hladká krivka, ktorá aj so svojím vnútrom leží v G. Potom platí:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Veta 5. Nech funkcia $f(z)$ je analytická v oblasti D. Nech $F(z)$ je primitívna funkcia ku $f(z)$, t. j. $F'(z) = f(z)$, $z \in D$. Nech C je po čiastkach hladká krivka so začiatočným bodom z_1 a koncovým z_2 ležiaca v D. Potom platí:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1). \tag{3}$$

Poznámka. Keďže integrál v (3) nezávisí od integračnej cesty, podobne ako pri krivkovom integrále, označujeme ho takto

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Veta 6. Nech $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sú uzavreté kladne [záporne] orientované krivky (pozri 4,3) a nech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ležia vnútri krivky C tak, že žiadne dve a ani ich vnútra nemajú spoločné body. Nech krivka C a jej vnútro, bez vnútra kriviek $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ležia v oblasti G. Nech $f(z)$ je analytická na G. Potom platí:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Veta 7. (*Cauchyho integrálna formula.*) Nech na oblasti G je funkcia $f(z)$ analytická. Nech C je uzavretá kladne orientovaná krivka, ktorá leží so svojím vnútrom v oblasti G. Nech bod z_0 leží vnútri krivky C. Potom platí:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Veta 8. Nech funkcia $f(z)$ je analytická na oblasti D. Nech C je uzavretá kladne orientovaná po čiastkach hladká krivka, ktorá so svojím vnútrom A leží v oblasti D. Potom funkcia $f(z)$ má v každom bode $z \in A$ deriváciu ľubovoľného rádu, pre ktorú platí:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Veta 9. (*Cauchyho nerovnosť.*) Nech $f(z)$ je analytická funkcia na oblasti D a nech C je kružnica $|z - a| = R$, ktorá aj so svojím vnútrom leží v D. Nech $M = \max\limits_{z \in C} |f(z)|$. Potom platí:

$$|f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Veta 10. (*Veta o strednej hodnote analytických funkcií.*) Nech $f(z)$ je analytická funkcia v kruhu $|z - a| \leqq R$. Potom platí:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi,$$

kde C je kladne orientovaná kružnica $|z - a| = R$.

Veta 11. (*Liouvilleova veta.*) Nech funkcia $f(z)$ je analytická na celej komplexnej rovine K a nech je tam ohraničená. Potom funkcia $f(z)$ je konštantná na celej komplexnej rovine K.

Príklad 1. Vypočítajme integrál $\int_C \frac{1}{z}\,dz$, pričom C je úsečka so začiatočným bodom i a koncovým bodom 1.

Riešenie. Keďže $i = [0,1]$ a $1 = [1,0]$, úsečka C má parametrické rovnice $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Parametrické vyjadrenie úsečky C v komplexnej rovine je:

$$z(t) = t + (1 - t)\,i,\ t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Keďže sú splnené predpoklady vety 2, máme:

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{t + (1 - t)\,i}\,(1 - i)\,dt = \int_0^1 \frac{2t - 1}{2t^2 - 2t + 1}\,dt - i\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln|2t^2 - 2t + 1|\Big]_0^1 - i\Big[\operatorname{arctg}(2t - 1)\Big]_0^1 = -i\,\frac{\pi}{2}.$$

Príklad 2. Vypočítajme integrál $\int_C \bar{z}\,dz$, ak krivka C je časť kružnice $z = e^{it}$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$ súhlasne orientovanej s parametrickým vyjadrením.

Riešenie. Použijeme vetu 3. Ak označíme $f(z) = \bar{z}$, $z = x + iy$, máme $\operatorname{Re} f(z) = x$, $\operatorname{Im} f(z) = -y$. Keďže sú splnené predpoklady vety 3, máme:

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C x\,dx + y\,dy + i\int_C -y\,dx + x\,dy,$$

kde C je časť orientovanej kružnice, ktorej parametrické rovnice sú $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$.
Podľa vety 3 článku 4,1 ďalej máme:

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^{\pi/2} (-\cos t\sin t + \sin t\cos t)\,dt + i\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = i\int_0^{\pi/2} dt = i\,[t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi i}{2}.$$

Príklad 3. Vypočítajme integrál

$$\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)},$$

kde C je kladne orientovaná kružnica $|z - 1| = 1/2$.

Riešenie. Daný integrál upravíme takto

$$\int_C \frac{1}{z(z^2 - 1)}\,dz = \int_C \frac{1/z(z + 1)}{z - 1}\,dz$$

a použijeme Cauchyho integrálnu formulu. Funkcia $f(z) = 1/z(z + 1)$ je na kružnici $|z - 1| = 1/2$, ako aj v jej vnútri analytická. Preto podľa vety 7 máme:

$$\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)} = \int_C \frac{1/z(z + 1)}{z - 1}\,dz = 2\pi i\left[\frac{1}{z(z + 1)}\right]_{z=1} = \pi i.$$

1444. Pomocou integrálnych súčtov dokážte, že platí:

a) $\displaystyle\int_C dz = z_1 - z_0$, b) $\displaystyle\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2)$,

kde C je jednoduchý orientovaný oblúk od bodu z_0 do bodu z_1.

V úlohách **1445** až **1451** vypočítajte dané integrály po krivke C.

1445. $\int_C z \, dz$, kde C je úsečka $z(t) = 3t + 4ti$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

1446. $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$, ak krivka C je:

a) úsečka so začiatočným bodom $z_1 = 0$ a koncovým $z_2 = 1 + i$,

b) polkružnica $|z| = 1$, $0 \leqq \arg z \leqq \pi$ od $z_1 = 1$ po $z_2 = -1$,

c) kladne orientovaná kružnica $|z| = a$.

1447. $\int_C \operatorname{Im} z \, dz$, kde krivka C je:

a) úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým $2 + i$,

b) lomená krivka pozostávajúca z dvoch úsečiek, pričom prvá má začiatočný bod 0, koncový bod i a druhá začiatočný bod i a koncový $2 + i$,

c) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ od bodu 1 po bod -1.

1448. $\int_C \frac{1}{z} \, dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica $|z| = a$.

1449. $\int_C |z| \, dz$, ak krivka C je:

a) úsečka od bodu 0 po bod $2 - i$,

b) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$ so začiatočným bodom -1 a koncovým 1,

c) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \leqq 0$ so začiatočným bodom $-i$, koncovým bodom i,

d) kladne orientovaná kružnica $|z| = a$.

1450. $\int_C \frac{1}{z^2 + 1} \, dz$, kde C je:

a) kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$,

b) kladne orientovaná elipsa $z = \cos t + i(\sin t)/2$.

1451. $\int_C (z - a)^n \, dz$, n je celé číslo, ak krivka C je:

a) polkružnica $|z - a| = R$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$ od bodu $a + R$ po bod $a - R$,

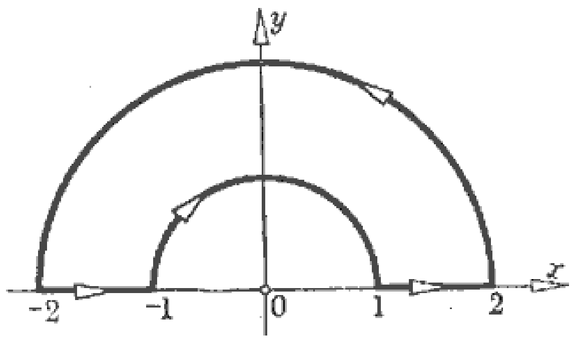
b) kladne orientovaná kružnica $|z - a| = R$,

c) kladne orientovaný obvod štvorca so stredom v bode a a stranami rovnobežnými so súradnicovými osami.

1452. Vypočítajte $\int_C |z|\,\bar{z}\,\mathrm{d}z$, kde C je uzavretá kladne orientovaná krivka, zložená z polkružnice $|z| = 1$ $\operatorname{Im} z > 0$ a úsečky $-1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$, $\operatorname{Im} z = 0$.

1453. Vypočítajte $\int_C \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, kde C je orientovaná krivka podľa *obr. 44.*

1454. $\int_C \frac{2z - 1}{z(z - 1)}\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnica $|z| = 3$ kladne orientovaná.



Obr. 44

1455. $\int_C z \sin z\,\mathrm{d}z$, ak krivka C je:

a) úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým i,

b) parabola $z = t^2 - t + \mathrm{i}t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením.

1456. $\int_C e^{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, kde C je lomená krivka, zložená z dvoch úsečiek, pričom začiatočný bod je 0, koncový bod $1 + \mathrm{i}$ a spoločný bod oboch úsečiek je a) 1, b) i.

1457. Dokážte: Ak C je kladne orientovaný obvod štvorca, ktorého vrcholy sú $z_1 = z_0 + a + \mathrm{i}a$, $z_2 = z_0 - a + \mathrm{i}a$, $z_3 = z_0 - a - \mathrm{i}a$, $z_4 = z_0 + a - \mathrm{i}a$, kde $a > 0$, potom platí:

$$\int_C \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}.$$

1458. Dokážte, že ak jednoduchý po čiastkach hladký oblúk C od bodu 0 po bod 1 neprechádza bodmi i a $-\mathrm{i}$, tak

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

kde k je celé číslo.

1459. Dokážte, že ak jednoduchý po čiastkach hladký oblúk od bodu 1 po bod z neprechádza začiatkom $z = 0$, tak

$$\int_C \frac{dz}{z} = \ln |z| + i\varphi + 2k\pi i,$$

kde k je celé číslo a $z = |z| e^{i\varphi}$.

1460. Dokážte, že ak C je ľubovoľná, jednoduchá, uzavretá, kladne orientovaná krivka, ktorá neprechádza bodom a, tak

$$\int_C (z - a)^n \, dz = \begin{cases} 0, & \text{keď } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{keď } n = -1,\ a \text{ je vnútri } C, \\ 0, & \text{keď } n = -1,\ a \text{ je zvonku } C, \end{cases}$$

pričom n je celé číslo.

V úlohách **1461** až **1468** pomocou Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte daný integrál po kladne orientovanej kružnici C:

1461. $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z - 2i}\, dz$, ak pre C platí a) $|z| = 3$, b) $|z| = 1$.

1462. $\displaystyle\int_C \frac{z + 4}{z^2 + 2z + 5}\, dz$, ak pre C platí a) $|z| = 1$, b) $|z + 1 - i| = 2$, c) $|z + 1 + i| = 2$.

1463. $\displaystyle\int_C \frac{z\, dz}{z^4 - 1}$, ak pre C platí $|z - a| = a$, $a > 1$.

1464. $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z + i}\, dz$, ak pre C platí $|z + i| = 1$.

1465. $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}\, dz$, ak pre C platí $|z - 2i| = 3/2$.

1466. $\displaystyle\int_C \frac{\sin (\pi z/4)}{z^2 - 1}\, dz$, ak pre C platí $|z - 1| = 1$.

1467. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z^2 + a^2}\, dz$, ak pre C platí $|z| = R$, $R > a$.

1468. $\displaystyle\int_C \frac{e^z \cos z}{(1 + z^2) \sin z}\, dz$, ak pre C platí $|z - 2 - i| = \sqrt{2}$.

1469. Vypočítajte $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2 + 9}$. Krivka C je jednoduchá uzavretá po čiastkach hladká, pričom:

a) $3i$ leží vnútri C, $-3i$ zvonku C,

b) $-3i$ leží vnútri C, $3i$ zvonku C,

c) $3i$, $-3i$ ležia vnútri C.

1470. Vypočítajte všetky možné hodnoty integrálu

$$\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$$

pre rôzne jednoduché uzavreté po čiastkach hladké krivky C, ak krivky C neprechádzajú žiadnym z bodov 0, 1, -1.

V úlohách **1471** až **1475** pomocou Cauchyho integrálnej vety pre $f^{(n)}(z)$ vypočítajte:

1471. $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+9)^2}\,dz$, ak C je kladne orientovaná kružnica

a) $|z-2i| = 2$, b) $|z+2i| = 2$.

1472. $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz$, ak krivka C je kladne orientovaná elipsa $z = \cos t + i(1+2\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

1473. $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$, kde C je kladne orientovaný obvod štvorca určeného vrcholmi 1, $1+2i$, $-1+2i$, -1.

1474. $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}\,dz$, ak C je kladne orientovaná kružnica:

a) $|z-1| = 1$, b) $|z+1| = 1/2$, c) $|z| = 2$.

1475. $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z+2)^4}\,dz$, ak bod -2 je vnútri jednoduchej uzavretej hladkej krivky C, kladne orientovanej.

1476. Vypočítajte $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$, ak C je jednoduchá, uzavretá, kladne orientovaná krivka, pričom:

a) bod 0 leží vnútri a 1 zvonku C,

b) bod 1 leží vnútri a 0 zvonku C,

c) bod 0 aj 1 leží vnútri C.

1477. Vypočítajte $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-b)(z-a)^m}\,dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica $|z| = r$, $|a| < r < |b|$ a m je prirodzené číslo.

1478. Nech C je kladne orientovaná kružnica $|z| = r$, $r < R$. Dokážte, že ak $f(z)$ je regulárna funkcia v oblasti $0 < |z| < R$, potom integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi$ nezávisí od r.

1479. Pomocou vety o strednej hodnote analytických funkcií vypočítajte integrál

$$\int_0^{2\pi} \ln|r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - a|\,\mathrm{d}\varphi, \quad r < |a|.$$

6,6. Nekonečné rady

A. Komplexné nekonečné rady

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísiel (pozri 2,2/II). Výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

nazývame *komplexným nekonečným radom* alebo *komplexným radom*.

Súčet $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ nazývame n-tým čiastočným súčtom komplexného radu (1). Postupnosť komplexných čísiel $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *postupnosťou čiastočných súčtov komplexného radu* (1).

Komplexný rad (1) je konvergentný, ak je jeho postupnosť čiastočných súčtov konvergentná. Číslo $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ nazývame *súčtom komplexného radu* (1). Ak komplexný rad (1) nie je konvergentný, hovoríme, že je *divergentný*.

Veta 1. Majme komplexný rad (1), pričom $a_n = u_n + \mathrm{i}v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, kde u_n a v_n, $n = 1, 2, \ldots$ sú reálne čísla. Komplexný rad (1) konverguje vtedy a len vtedy, keď konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Ak komplexný rad (1) konverguje, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Nech pre komplexný rad (1) platí $|a_n| \leqq \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ s nezápornými reálnymi členmi nazývame *majorantným radom* ku komplexnému radu (1).

Veta 2. Ak ku komplexnému radu (1) existuje konvergentný majorantný rad, potom komplexný rad (1) je konvergentný.

Veta 3. Ak nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentný, potom konverguje aj komplexný rad (1).

Veta 4. Ak komplexný rad (1) konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka 1. Pre komplexný rad (1) sa zavádza pojem absolútne a relatívne konvergentného radu rovnako ako pre nekonečné rady s reálnymi číslami (pozri čl. 1,1). Operácie s komplexnými radmi sa definujú podobne ako operácie s nekonečnými radmi (pozri čl. 1,2). Pre konvergenciu komplexných radov platí Bolzano—Cauchyho, Cauchyho, limitné Cauchyho, d'Alembertovo limitné d'Alembertovo kritérium (pozri čl. 1,1).

Príklad 1. Zistime, či komplexný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(n+\ln n)}}{2^n + \sqrt{n}}$$

je absolútne konvergentný.

Riešenie. Počítajme $|a_n|$, kde $a_n = e^{i(n+\ln n)}/(2^n + \sqrt{n})$, $n = 1, 2, \ldots$, máme:

$$|a_n| = \frac{|e^{i(n+\ln n)}|}{|2^n + \sqrt{n}|} = \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n},$$

pre $n = 1, 2, \ldots$.

Z toho vyplýva, že konvergentný geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$, $q = 1/2$ je majorantný rad k danému komplexnému radu. Preto podľa vety 2 daný komplexný rad je absolútne konvergentný.

B. Funkcionálne rady komplexnej premennej

Ak členy f_n, $n = 1, 2, \ldots$, funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sú funkcie komplexnej premennej definované na množine M, hovoríme o *funkcionálnom rade komplexnej premennej.*

Definície konvergencie, divergencie, oboru konvergencie, rovnomernej konvergencie, majorantného radu funkcionálneho radu komplexnej premennej sa zavádzajú rovnako ako pre funkcionálne rady (pozri čl. 1,4). Práve tak veta 2 z čl. 1,4, ktorá hovorí o zisťovaní rovnomernej konvergencie funkcionálneho radu pomocou konvergencie majorantného radu, platí aj pre funkcionálne rady komplexnej premennej.

Na rozdiel od vety 6 z čl. 1,4 pre funkcionálne rady komplexnej premennej platia vety 5 a 6.

Veta 5. (*Weierstrassova veta.*) Nech $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ sú analytické funkcie v oblasti D a nech funkcionálny rad komplexnej premennej

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{2}$$

v oblasti D konverguje a má súčet $F(z)$, $z \in D$. Ak funkcionálny rad komplexnej premennej (2) v ľubovoľnej uzavretej oblasti A ohraničenej krivkou, ktorá leží vo vnútri oblasti D, rovnomerne konverguje, potom:

a) súčet $F(z)$ je analytická funkcia v oblasti D,

b) derivácie $F^{(k)}(z)$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ dostaneme derivovaním člena za členom funkcionálneho radu komplexnej premennej (2). Tieto rady sú opäť rovnomerne konvergentné v oblasti A.

Veta 6. Nech funkcie $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ sú spojité na množine D. Nech funkcionálny rad komplexnej premennej (2) konverguje na množine D rovnomerne a má súčet $F(z)$, $z \in D$. Nech C je orientovaná, po čiastkach hladká krivka, ktorá leží v množine D. Potom funkcionálny rad komplexnej premennej (2) môžeme integrovať člena za členom po krivke C, t. j. platí:

$$\int_C F(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_C f_n(z)\,dz \right].$$

Príklad 2. Nájdime množinu, na ktorej funkcionálny komplexný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \tag{3}$$

konverguje rovnomerne.

Riešenie. Zistime obor konvergencie funkcionálneho radu komplexnej premennej pomocou d'Alembertovho kritéria, ak máme:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)}{\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\,.$$

$$.\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z+z^{-2n-1}}{1+z^{-2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\,.\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{z}\,\frac{z^{2n+2}+1}{z^{2n}+1}\right|.$$

Pre $|z| > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} z^{-n} = 0$ a dostávame:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = 1\,.\left|\frac{z+0}{1+0}\right| = |z| > 1$$

a teda rad (3) pre $|z| > 1$ je divergentný. Pre $|z| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$ a dostávame:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = 1\left|\frac{1}{z}\,\frac{0+1}{0+1}\right| = \frac{1}{|z|} > 1$$

a teda rad (3) pre $|z| < 1$ je divergentný. Ostáva vyšetriť prípad $|z| = 1$. Počítajme $|f_n|$, máme:

$$|f_n| = \frac{1}{n^2}\left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| \le \frac{1}{n^2}\left(|z^n| + \frac{1}{|z^n|}\right) = \frac{1}{n^2}\left(|z|^n + \frac{1}{|z|^n}\right) = \frac{2}{n^2}\,,$$

čiže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2/n^2)$ je majorantný rad k funkcionálnemu radu komplexnej premennej (3). Podľa vety 15 z článku 1,1 je tento majorantný rad konvergentný a podľa vety 2 z článku 1,4 o rovnomernej konvergencii, daný rad (3) rovnomerne konverguje na kružnici $|z| = 1$.

C. Mocninové rady

Mocninový rad komplexnej premennej je funkcionálny rad komplexnej premennej tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots, \tag{4}$$

pričom $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a a sú komplexné čísla. Číslo a nazývame *stredom mocninového radu* (4) komplexnej premennej.

Veta 7. Ak mocninový rad (4) komplexnej premennej konverguje v bode z_0, potom je absolútne konvergentný v každom bode kruhu $|z-a| < |z_0-a|$.

Veta 8. Pre mocninový rad (4) komplexnej premennej nastáva práve jeden z týchto troch prípadov:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ vtedy a len vtedy, keď jeho obor konvergencie je množina s jediným číslom $z = a$.

b) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ vtedy a len vtedy, keď jeho obor konvergencie je množina všetkých komplexných čísiel K.

c) $0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ vtedy a len vtedy, keď jeho obor konvergencie je množina, ktorá obsahuje každé komplexné číslo z, pre ktoré platí $|z - a| < \varrho$ a neobsahuje žiadne komplexné číslo z, pre ktoré by platilo $|z - a| > \varrho$, pričom $\varrho = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Poznámka 2. Číslo ϱ sa nazýva *polomerom konvergencie* mocninového radu (4). Obor konvergencie mocninového radu (4) je kruh $|z - a| < \varrho$ so stredom a a polomerom ϱ, prípadne aj nejaká množina bodov konvergenčnej kružnice $|z - a| = \varrho$. V prípade a) z vety 8 sa definuje $\varrho = 0$ a v prípade b) $\varrho = \infty$.

Poznámka 3. Operácie s mocninovými radmi komplexnej premennej sa zavádzajú podobne ako operácie s mocninovými radmi reálnej premennej a práve tak platia vety pre operácie s mocninovými radmi komplexnej premennej (pozri. čl. 1,5).

Veta 9. Nech $\varrho > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu (4) komplexnej premennej. Nech je $0 < \varrho_1 < \varrho$. Potom:

a) mocninový rad (4) komplexnej premennej rovnomerne konverguje v kruhu $|z - a| \leq \varrho_1$ so stredom v bode a a polomerom ϱ_1,

b) súčet $F(z)$ mocninového radu (4) komplexnej premennej je analytická funkcia v kruhu $|z - a| < \varrho$,

c) súčet $F(z)$ má v kruhu $|z - a| < \varrho$ derivácie každého rádu, $k = 1, 2, \ldots$, ktoré dostaneme derivovaním člena za členom mocninového radu (4) komplexnej premennej,

d) tieto mocninové rady komplexnej premennej pre $F^{(k)}(z)$ majú rovnaký polomer konvergencie ako mocninový rad (4) komplexnej premennej.

Veta 10. Nech $0 < \varrho_1 < \varrho$, kde ϱ je polomer konvergencie mocninového radu (4) komplexnej premennej a $F(z)$ jeho súčet. Ak orientovaný, po čiastkach hladký oblúk od bodu a po bod z leží v kruhu $|z - a| \leq \varrho_1$, potom možno integrovať mocninový rad komplexnej premennej člena za členom po oblúku C a platí:

$$\int_C F(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - a)^{n+1}.$$

Veta 11. Nech $F(z)$ je v kruhu $|z - a| < \varrho$, $\varrho > 0$ súčtom mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - a)^n$ komplexnej premennej, ako aj súčtom mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - a)^n$ komplexnej premennej. Potom $a_n = b_n$, pre $n = 1, 2, \ldots$.

Príklad 8. Nájdime polomer konvergencie daného mocninového radu komplexnej premennej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Riešenie. V danom mocninovom rade je $a_0 = 0$ a $a_n = 1/n^2$. Protože existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1,$$

je aj $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Pre polomer konvergencie daného radu platí $\varrho = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Zistime konvergenciu daného radu na konvergenčnej kružnici $|z| = 1$. Pre $|z| = 1$ máme $|z^n/n^2| = |z|^n/n^2 = 1/n^2$. Ale nekonečný rad reálnych čísiel $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ je konvergentný majorantný rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$, kde $|z| = 1$. Preto podľa vety 2 daný rad konverguje v každom bode kružnice $|z| = 1$. Daný mocninový rad komplexnej premennej konverguje teda pre všetky body z z kruhu $|z| \leq 1$.

D. Taylorov rad

Nech funkcia $f(z)$ má v bode a deriváciu každého rádu. Mocninový rad komplexnej premennej

$$f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(z-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(z-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^{(n)} + \ldots,$$

nazývame Taylorovým radom funkcie $f(z)$ v bode a.

Veta 12. Každý mocninový rad (4) komplexnej premennej s polomerom konvergencie ϱ, $\varrho > 0$ a súčtom $F(z)$ je Taylorov rad funkcie $F(z)$ v bode a a pre koeficienty a_n mocninového radu (4) platí:

$$a_0 = F(a), \qquad a_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Veta 13. Nech funkcia $f(z)$ je analytická v oblasti D. Nech a je bod z oblasti D a $|z - a| < \varrho$ je kruh, ktorý leží v oblasti D. Taylorov rad funkcie $f(z)$ v bode a konverguje v každom bode kruhu $|z - a| < \varrho$ a jeho súčet je $f(z)$ pre z z tohto kruhu.

Veta 14. Pre každý bod $z \in K$ platí:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Pre $|z| < 1$ platí:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

$$[(1+z)^m]_0 = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-n+1)}{n!} z^n + \ldots,$$

pričom m je ľubovoľné komplexné číslo.

Bod a nazývame *nulovým bodom* funkcie $f(z)$, ak $f(a) = 0$. Bod a nazývame *nulovým bodom k-tého rádu* funkcie $f(z)$, ak platí $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Príklad 4. Rozviňme funkciu $f(z) = (\sqrt{z + i})_0$ do Taylorovho radu zo stredom v bode 0.

Riešenie. Daná funkcia je v bode $z = 0$ analytická a podľa vety 13 existuje jej Taylorov rad v bode $z = 0$, ktorý je jej súčtom v kruhu $|z| < \varrho$. Počítajme $f^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Pre $f^{(n)}(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, dostávame $f(z) = (z + i)^{1/2}$*), $f'(z) = (1/2)(z + i)^{-1/2}, \ldots, f^{(n)}(z) = (1/2)(1/2 - 1)(1/2 - 2) \cdot \ldots \cdot (1/2 - n + 1)(z + i)^{1/2-n}, \ldots$. Z toho vyplýva:

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) i^{1/2-n}$$

čiže

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 3)\, i^{1/2} \cdot i^{-n}/2^n$$

alebo

$$f^{(n)}(0) = -\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \frac{(2n - 3)!!}{2^n} i^n,$$

pre $n = 1, 2, \ldots$. Pre $n = 0$, je $f(0) = i^{1/2} = (1 + i)/\sqrt{2}$. Po dosadení do Taylorovho radu funkcie f v bode 0 dostávame:

$$f(z) = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{iz}{2} - \frac{i^2z^2}{8} - \frac{i^3z^3}{16} - \frac{5\, i^4z^4}{128} - \ldots - \frac{(2n - 3)!!}{(2n)!!} i^n z^n - \ldots\right)$$

pre $|z| < \varrho$. Pomocou d'Alembertovho kritéria ľahko zistíme, že $\varrho = 1$. Preto

$$f(z) = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{i}{2} z + \frac{1}{8} z^2 + \frac{i}{16} z^3 - \frac{5}{128} z^4 - \ldots - \frac{(2n - 3)!!}{(2n)!!} i^n z^n - \ldots\right)$$

pre $|z| < 1$.

V úlohách 1480 až 1486 zistite, či daný komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, ak:

1480. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$.

1481. $a_n = e^{in}$.

1482. $a_n = \dfrac{e^{in}}{n}$.

1483. $a_n = \dfrac{1}{n} e^{\pi i/n}$.

1484. $a_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$.

1485. $a_n = \dfrac{n}{3^n} \sin(in)$.

1486. $a_n = \dfrac{\cos(in)}{5^n}$.

1487. Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergujú. Dokážte, že ak $\operatorname{Re} a_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ je konvergentný.

V úlohách 1488 až 1492 nájdite obor konvergencie daných funkcionálnych radov komplexnej premennej.

1488. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \dfrac{1}{2^n z^n}\right)$.

1489. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{z \ln n}$.

*) V tomto príklade kvôli stručnosti píšeme namiesto $[(z + i)^{1/2}]_0$ iba $(z + i)^{1/2}$, resp. namiesto $(i^{1/2})_0$ len $i^{1/2}$ atď.

1490. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$.

1491. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n}\right)$.

1492. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$.

V úlohách **1493** až **1496** nájdite množiny, na ktorých rovnomerne konvergujú dané funkcionálne rady komplexnej premennej.

1493. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nz}$.

1494. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-z \ln n}$.

1495. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$.

1496. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$.

1497. Dokážte, že dané funkcionálne rady komplexnej premennej sú konvergentné a definujú analytickú funkciu na ľubovoľnej ohraničenej oblasti:

a) $1 + \frac{\mathrm{e}^z}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{2z}}{2!} + \frac{\mathrm{e}^{3z}}{3!} + \ldots + \frac{\mathrm{e}^{nz}}{n!} + \ldots$,

b) $\sin z + \frac{\sin 2z}{2!} + \frac{\sin 3z}{3!} + \ldots + \frac{\sin nz}{n!} + \ldots$.

V úlohách **1498** až **1505** nájdite polomer konvergencie daného mocninového radu komplexnej premennej.

1498. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

1499. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

1500. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$.

1501. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

1502. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}$.

1503. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \cos (in)$.

1504. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$.

1505. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$.

1506. Dokážte, že kružnica $|z| = 1$ je konvergenčnou kružnicou mocninového radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ (t. j. polomer konvergencie je 1).

1507. Nech polomer konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ je ϱ_1 a radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ je ϱ_2. Dokážte, že platí:

a) polomer konvergencie ϱ radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ spĺňa nerovnosť $\varrho \geqq \min(\varrho_1, \varrho_2)$,

b) polomer konvergencie ϱ radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ spĺňa nerovnosť $\varrho \geqq \varrho_1 \varrho_2$,

c) polomer konvergencie ϱ radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n / b_n$, $b_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, spĺňa nerovnosť $\varrho \leqq \varrho_1/\varrho_2$,

d) polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n) z^n$ spĺňa podmienku $\varrho \geqq \min(\varrho_1, \varrho_2)$.

V úlohách **1508** až **1512** zistite, pre ktoré body daný mocninový rad komplexnej premennej konverguje na konvergenčnej kružnici $|z| = \varrho$, kde ϱ je polomer konvergencie.

1508. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

1509. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

1510. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

1511. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

1512. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$.

1513. Dokážte, že rad

$$1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \ldots + \frac{z^n}{n^2} + \ldots$$

konverguje rovnomerne na svojom obore konvergencie.

1514. Pomocou operácie s nekonečnými radmi dokážte:

a) $\cos z + i \sin z = e^{iz}$, b) $\cos z - i \sin z = e^{-iz}$.

1515. Násobením mocninových radov komplexnej premennej $\sum_{n=0}^{\infty} z_1^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} z_2^n/n!$ dokážte, že platí $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

V úlohách **1516** až **1519** nájdite súčet daných mocninových radov komplexnej premennej v kruhu $|z| < 1$:

1516. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

1517. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

1518. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

1519. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$.

1520. Dokážte, že platí:

a) $\sin \varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \frac{1}{5} \sin 5\varphi + \ldots = \frac{\pi}{4}$, pre $\varphi \in (0, \pi)$;

b) $\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \frac{1}{5} \cos 5\varphi + \ldots = \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\right)$,

pre $\varphi \neq k\pi$, kde k je celé číslo.

1521. Nech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pre $|z| < 1$ a nech existuje $M > 0$ také, že $|f(z)| \leqq M$ pre všetky $|z| < 1$, potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

1522. Nech $\varrho > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a nech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pre $z \in M$, kde M je kruh $|z| < \varrho$. Dokážte, že pre $0 < r < \varrho$ platí:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\varphi})|^2\, d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

(*Parsevalova nerovnosť.*)

V úlohách **1523** až **1535** rozviňte dané funkcie do mocninových radov komplexnej premennej zo stredom v bode 0 a nájdite ich polomer konvergencie.

1523. $f(z) = \sin^2 z$.

1524. $f(z) = \cosh^2 z$.

1525. $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$.

1526. $f(z) = (1 + \sqrt{1+z})^{1/2}$.

1527. $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$.

1528. $f(z) = \ln^2 (1-z)$.

1529. $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

1530. $f(z) = \arcsin z$.

1531. $f(z) = \operatorname{arctg}^2 z$.

1532. $f(z) = \ln (1 + \sqrt{1+z^2})$.

1533. $f(z) = (\operatorname{arctg} z) \ln (1 + z^2)$.

1534. $f(z) = \int\limits_C e^{\zeta^2} \, d\zeta$,

kde C je úsečka od bodu 0 po bod z.

1535. $f(z) = \int\limits_C \frac{\sin \zeta}{\zeta} \, d\zeta$,

kde C je úsečka od bodu 0 po bod z.

V úlohách **1536** až **1539** rozviňte danú funkciu do mocninového radu komplexnej premennej v bode $z = 1$.

1536. $f(z) = \frac{z}{z + 2}$.

1537. $f(z) = \ln z$.

1538. $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$.

1539. $f(z) = \sin (2z - z^2)$.

1540. Nájdite Taylorov rad funkcie $f(z)$ v bode i, ak:

a) $f(z) = \sqrt[3]{z}$, b) $f(z) = \ln z$.

V úlohách **1541** až **1545** nájdite prvé štyri členy Taylorovho radu funkcie $f(z)$ v bode $z = 0$, ak:

1541. $f(z) = \ln (1 + e^z)$.

1542. $f(z) = \frac{1}{\cos z}$.

1543. $f(z) = \sin \frac{1}{1 - z}$.

1544. $f(z) = e^{1/(1-z)}$.

1545. $f(z) = \frac{z}{\operatorname{arctg} z}$.

1546. Dokážte, že

$$1 - \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1}{7}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots = \ln (1 + \sqrt{2}).$$

1547. Koeficient a_n v Taylorovom rade funkcie $f(z) = (4 - z^2)/(4 - zt + z^2)$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ v bode $z = 0$ je Čebyševov polynóm $T_n(t)$. Dokážte, že

$$T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos (n \arccos t).$$

1548. Nájdite rád všetkých nulových bodov funkcie $f(z)$, ak:

a) $f(z) = z^2 + 16$,

b) $f(z) = (z^2 + 1)(z^2 + 25)^5$,

c) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4}$,

d) $f(z) = z \sin z$,

e) $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z}$,

f) $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$,

g) $f(z) = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$,

h) $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$,

i) $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$,

j) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$.

6,7. Laurentov rad. Singulárne body funkcie

A. Laurentov rad

Množinu všetkých bodov $z \in K$, ktoré spĺňajú nerovnosti:

$$0 \leqq r_1 < |z - a| < r_2 \tag{1}$$

alebo

$$0 \leqq r_1 < |z - a|, \tag{2}$$

kde r_1, r_2 sú dané čísla, nazývame *otvoreným medzikružím* so stredom v bode a.

Množinu všetkých bodov $z \in K$, ktoré spĺňajú nerovnosť:

$$0 \leqq r_1 \leqq |z - a| \leqq r_2 \text{ alebo } 0 \leqq r_1 \leqq |z - a|,$$

kde r_1, r_2 sú dané čísla, nazývame *uzavretým medzikružím* so stredom v bode a.

Poznámka 1. Takto definované medzikružie je medzikružím v geometrickom zmysle len pre $0 < r_1 < r_2$. Pre $0 = r_1 < r_2$ dostaneme kruh bez bodu a. Pre $r_1 < |z - a|$ vonkajšok kruhu s polomerom r_1 so stredom v bode a.

Nech funkcia $f(z)$ je analytická na medzikruží M a C je ľubovoľná uzavretá kladne orientovaná, po čiastkach hladká krivka, ktorá leží v medzikruží M so stredom v bode a, pričom bod a leží v jej vnútri.

Rad tvaru

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - a)^k, \tag{3}$$

pričom

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \, d\zeta, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

nazývame *Laurentovým radom* funkcie $f(z)$ v bode a pre medzikružie M. Čísla a_k nazývame *koeficientmi Laurentovho radu*.

Rad $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - a)^k$ sa nazýva *hlavnou časťou*, rad $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - a)^k$ sa nazýva *analytickou* (*normálnou*) časťou Laurentovho radu (3).

Veta 1. Nech f je analytická funkcia v medzikruží $M : r < |z - a| < R$. Potom pre každý bod $z \in M$ platí:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - a)^k, \tag{5}$$

kde pre koeficienty a_k platí vzorec (4). Rad (3) konverguje rovnomerne v každom uzavretom medzikruží M', ktoré leží v M.

Poznámka 2. Ak je medzikružie M dané nerovnosťou, $r_1 < |z - a| < r_2$, potom hlavná časť Laurentovho radu (1) konverguje pre všetky z, pre ktoré platí $|z - a| < r_2$. Analytická časť Laurentovho radu (1) konverguje pre všetky z, pre ktoré platí $r_1 < |z - a|$.

Veta 2. Nech rad tvaru $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - a)^k$ je konvergentný v medzikruží M a nech $f(z)$ je jeho súčet. Potom tento rad je Laurentovým radom funkcie $f(z)$ v bode a pre medzikružie M.

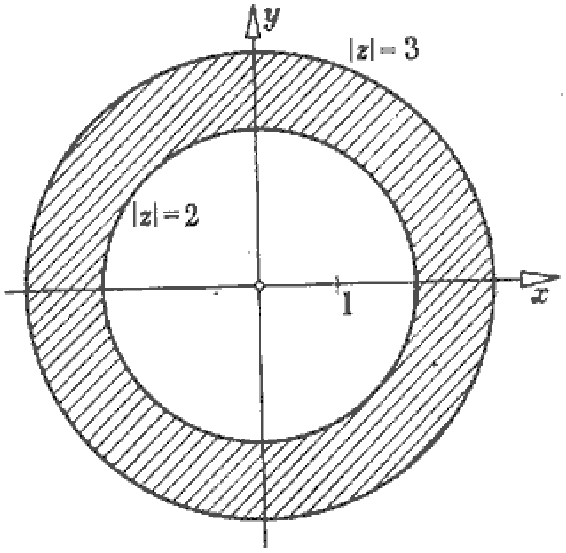
Poznámka 3. Veta 2 umožňuje hľadať výhodne Laurentov rad danej funkcie tak, že jeho koeficienty nepočítame podľa vzorca (4), ale používame vhodné algebraické úpravy a známe mocninové rady elementárnych funkcií.

Laurentov rad funkcie $f(z)$ v bode $a = \infty$ pre medzikružie $|z| > R$ definujeme ako Laurentov rad funkcie $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta) = f(z)$, v bode $\zeta = 0$ pre medzikružie $0 < |\zeta| < 1/R$.

Príklad 1. Nájdime Laurentov rad funkcie $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ v bode 0 pre medzikružie $M: 2 < |z| < 3$.

Riešenie. Dané medzikružie je ohraničené kružnicami s rovnicami $|z| = 2$ a $|z| = 3$ (pozri *obr. 45*). Daná funkcia je racionálna funkcia. Rozložme ju na elementárne zlomky, pre všetky $z \in M$ dostaneme:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}.$$



Obr. 45

Pre $|z| > 2$ je:

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^3}{z^3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{z^{n-1}} + \ldots\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}. \tag{6}$$

Pre $|z| < 3$ je

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{3^{n-1}} + \ldots\right)$$

a

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}. \tag{7}$$

Pomocou radov (6) a (7) pre všetky $z \in M$ dostaneme:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}.$$

Podľa vety 2 takto nájdený rad je Laurentovým radom danej funkcie v bode $a = 0$ pre medzikružie M a platí:

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{2^2}{z^3} - \dots - \frac{2^{k-1}}{z^k} - \dots - \frac{1}{3} - \frac{z}{3^2} - \frac{z^2}{3^3} - \dots - \frac{z^k}{3^{k+1}} - \dots .$$

Príklad 2. Nájdime Laurentov rad funkcie $f(z) = z^2 e^{1/z}$ v bode $a = \infty$ pre medzikružie $|z| > 0$.

Riešenie. Laurentov rad danej funkcie $f(z)$ v bode $a = \infty$ pre medzikružie $|z| > 0$ nájdeme ako Laurentov rad funkcie

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2} e^{\zeta}$$

v bode $\zeta = 0$ pre medzikružie $0 < |\zeta|$.

Hľadaný Laurentov rad nájdeme tak, že do Taylorovho radu funkcie $\varphi(\zeta)$ dosadíme $\zeta = 1/z$. Taylorov rad funkcie e^{ζ} v bode $\zeta = 0$ je:

$$e^{\zeta} = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta^2}{2!} + \dots + \frac{\zeta^n}{n!} + \dots . \tag{8}$$

Odtiaľ Laurentov rad pre funkciu $\varphi(\zeta)$ v bode $a = 0$ pre medzikružie $0 < |\zeta|$ je:

$$\frac{1}{\zeta^2} e^{\zeta} = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{1!\zeta} + \frac{1}{2!} + \frac{\zeta}{3!} + \dots + \frac{\zeta^{n-2}}{n!} + \dots . \tag{9}$$

Po dosadení $1/z$ za ζ do radu (9) dostaneme:

$$f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-2}} + \dots,$$

pre všetky $|z| > 0$.

Podľa vety 2 tento rad je Laurentovým radom danej funkcie $f(z)$ v bode $a = \infty$ pre medzikružie $|z| > 0$.

B. Singulárne body funkcie

Singulárnym bodom funkcie $f(z)$ komplexnej premennej nazývame každý bod, v ktorom funkcia $f(z)$ nie je analytická.

Ak bod a je singulárnym bodom funkcie $f(z)$ a existuje také jeho okolie, že v ňom funkcia $f(z)$ nemá iný singulárny bod, nazývame bod a *izolovaným singulárnym bodom* funkcie $f(z)$ alebo aj izolovanou singularitou.

Izolovaný singulárny bod a sa nazýva:

a) *odstrániteľným singulárnym bodom*, ak existuje konečná limita

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \neq \infty;$$

b) *pólom* (*nepodstatne singulárnym bodom*), ak

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

c) *podstatne singulárnym bodom*, ak

$$\lim_{z \to a} f(z) \text{ neexistuje.}$$

Veta 3. Bod $z = a$ je odstrániteľným singulárnym bodom funkcie z vtedy a len vtedy, keď Laurentov rad funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ obsahuje iba jeho normálnu časť

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - a)^k.$$

Poznámka 4. Ak funkcia $f(z)$ je ohraničená v okolí singulárneho bodu a, potom je bod a odstrániteľný singulárny bod funkcie $f(z)$.

Veta 4. Nech funkcia $f(z)$ je analytická v medzikruží $M: 0 < |z - a| < R$ a funkcia $g(z) = 1/f(z)$ je analytická v bode a, pričom $g(z) \neq 0$ pre všetky $z \in M$. Potom funkcia $f(z)$ má v bode a pól vtedy a len vtedy, keď funkcia $g(z)$ má v bode a nulový bod.
Rádom pólu $z = a$ funkcie $f(z)$ nazývame *rád nulového bodu* funkcie $g(z) = 1/f(z)$.

Veta 5. Bod $z = a$ je pólom m-tého rádu funkcie $f(z)$ vtedy a len vtedy, keď pre hlavnú časť Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode a pre medzikružie M platí $a_{-m} \neq 0$ a $a_{-k} = 0$, pre $k > m$.

Veta 6. Nech bod $z = a$ je podstatne singulárnym bodom $f(z)$, potom ku každému ľubovoľnému komplexnému číslu A možno nájsť takú postupnosť bodov $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k bodu $z = a$, že platí:

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A.$$

Veta 7. Funkcia $f(z)$ má v bode $z = a$ podstatnú singularitu vtedy a len vtedy, keď hlavná časť jej Laurentovho radu v bode $z = a$ pre medzikružie M má nekonečný počet členov s nenulovými koeficientmi.

Poznámka 5. Druh singulárneho bodu funkcie $f(z)$ v bode $z = \infty$ zisťujeme tak, že vyšetríme druh singulárneho bodu funkcie $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ v bode $\zeta = 0$.

Príklad 3. Dokážme, že funkcia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ má v bode $a = 0$ odstrániteľný singulárny bod.

Riešenie. Nájdime Laurentov rad danej funkcie v bode $a = 0$ pre medzikružie $0 < |z|$, máme:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots +$$
$$+ (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Pretože Laurentov rad obsahuje len normálnu časť, podľa vety 3 bod $a = 0$ je odstrániteľným singulárnym bodom danej funkcie.

Príklad 4. Dokážme, že bod $a = 0$ je pólom druhého rádu funkcie $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$.

Riešenie. Pre všetky $|z| < \infty$ platí:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Potom

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Tento rad konverguje v medzikruží $|z| > 0$ a je podľa vety 2 Laurentovým radom funkcie $f(z)$ v bode $a = 0$ pre medzikružie $|z| > 0$.
Podľa vety 5 bod $a = 0$ je pólom druhého rádu funkcie $f(z)$.

V úlohách 1549 až 1565 nájdite Laurentov rad funkcie $f(z)$ v bode a pre dané medzikružie:

1549. $f(z) = \dfrac{1}{z - a}$, a) $a = 0$, $|z| < 2$,
b) $a = \infty$, $|z| > 2$.

1550. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, a) $a = 0, |z| < 1$,
b) $a = 1, |z| > 1$,
c) $a = \infty, |z| > 1$.

1551. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$, a) $a = 2, 0 < |z-2| < \sqrt{5}$,
b) $a = 0, 1 < |z| < 2$.

1552. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $a = 0, 1 < |z| < 2$.

1553. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $a = \mathrm{i}, 0 < |z - \mathrm{i}| < 2$.

1554. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$, a) $a = 0, 1 < |z| < 2$,
b) $a = 0, |z| > 2$.

1555. $f(z) = \sin \dfrac{z}{z-1}$, $a = 1, |z-1| > 1$.

1556. $f(z) = \cos \dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $a = 2, |z-2| > 0$.

1557. $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $a = \infty, |z| > 1$

1558. $f(z) = z^5 \mathrm{e}^{1/z}$, $a = 0, |z| > 0$.

1559. $f(z) = \mathrm{e}^{z+1/z}$, $a = 0, 0 < |z| < \infty$.

1560. $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{z}{z+2}}$, $a = \infty, |z| > 2$.

1561. $f(z) = \ln \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$, $a = \infty, |z| > 1$.

1562. $f(z) = \ln \dfrac{z^2}{z^2-1}$, $a = 0, |z| > 1$.

1563. $f(z) = \dfrac{1}{z-2} \ln \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$, a) $a = 0, 1 < |z| < 2$,
b) $a = 0, |z| > 2$.

1564. $f(z) = \sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $a = 0, 1 < |z| < 2$, ak $\operatorname{Im} f(3/2) > 0$.

1565. $f(z) = \operatorname{cotg} z$, $a = 0, \pi < |z| < 2\pi$.

1566. Koeficient pri n-tej mocnine z v Laurentovom rade funkcie $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$ v bode $z = \infty$ pre medzikružie $|z| > 0$ je Besselova funkcia prvého druhu $J_n(t)$. Nájdite vyjadrenie funkcie $J_n(t)$ v integrálnom tvare a odvoďte jej mocninový rad.

1567. Rozhodnite, či dané funkcie možno v bode a pre dané medzikružie $0 < |z - a|$ rozložiť do Laurentovho radu:

a) $\cos\dfrac{1}{z}$, $a = 0$,

b) $\cos\dfrac{1}{z}$, $a = \infty$,

c) $\operatorname{tgh}\dfrac{1}{z}$, $a = 0$,

d) $\ln z$, $a = 0$.

1568. Dokážte, že nutnou a postačujúcou podmienkou, aby rad $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ mal neprázdny obor konvergencie, je:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} < \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

V úlohách 1569 až 1589 nájdite singulárne body danej funkcie f a zistite druh týchto singulárnych bodov, ak $f(z)$ sa rovná:

1569. $z^3 + z + 2$.

1570. $1/(z - z^3)$.

1571. $\dfrac{z}{z^2 + 1}$.

1572. $\dfrac{z^5}{(1 - z)^2}$.

1573. $\dfrac{1}{(z^2 + i)^3}$.

1574. $\dfrac{1}{\sin z}$.

1575. $\sin\dfrac{1}{z}$.

1576. $\operatorname{tg}^2 z$.

1577. $\dfrac{\cos z}{z^2}$

1578. $\dfrac{1 - \cos z}{z^2}$.

1579. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z - 1}$.

1580. $\dfrac{\operatorname{tg}(z - 1)}{z - 1}$.

1581. $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$.

1582. $e^{\frac{1}{z - 2i}}$.

1583. $z^2 e^{-z}$.

1584. $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$.

1585. $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$.

1586. $\dfrac{1}{e^z - 1}$.

1587. $\dfrac{e^z}{1 + z^2}$.

1588. $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$.

1589. $\operatorname{tgh} z$.

V úlohách **1590** až **1597** vyšetrite funkciu $f(z)$ v bode $z = \infty$, ak $f(z)$ sa rovná:

1590. $\dfrac{z^2}{3 + z^2}$.

1591. $\dfrac{2z^5 - z + 1}{z^2 + z + 1}$.

1592. $\dfrac{z}{5 - z^4}$.

1593. e^z.

1594. $\sin z$.

1595. $e^{1/z} + z^2 - 4$.

1596. $e^{-z} + z^3 + z - 2$.

1597. $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

1598. Nech A je ľubovoľné komplexné číslo, potom existuje postupnosť bodov $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k podstatne singulárnemu bodu a tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. Nájdite tieto postupnosti pre bod $a = 0$ a pre funkcie:

a) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$, b) $f(z) = e^{1/z}$.

6,8. Rezíduum funkcie a jeho aplikácie

Nech z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie $f(z)$, ktorá je na medzikruží $M: 0 < |z - z_0| < R$ analytická. Nech Laurentov rad funkcie $f(z)$ v bode z_0 pre dané medzikružie je:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Koeficient a_{-1} v tomto Laurentovom rade sa nazýva *rezíduum funkcie* $f(z)$ v bode z_0. Rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_0 označuje sa aj $\operatorname{res}[f(z)]_{z=z_0}$ alebo $\operatorname{res} f(z_0)$.

Veta 1. Pre rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_0 platí:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz, \tag{1}$$

kde C je jednoduchá uzavretá kladne orientovaná po čiastkach hladká krivka, ktorá leží v medzikruží M a v jej vnútri leží bod z_0.

Veta 2. Ak má funkcia $f(z)$ v bode z_0 pól prvého rádu, platí:

$$\operatorname{res}[f(z)]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} [(z - z_0) f(z)]. \tag{2}$$

Ak z_0 je pólom k-tého rádu ($k > 1$) funkcie $f(z)$, tak platí:

$$\operatorname{res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]. \tag{3}$$

Veta 3. Nech

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{4}$$

pričom $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ sú v bode z_0 analytické. Nech $\psi(z_0) = 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Potom bod z_0 je pólom prvého rádu funkcie $f(z)$ a pre rezíduum platí:

$$\operatorname{res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{5}$$

Veta 4. (*Cauchyho veta o rezíduách.*) Nech $f(z)$ je analytická funkcia na oblasti D s výnimkou konečného počtu bodov. Nech C je jednoduchá uzavretá po čiastkach hladká, kladne orientovaná krivka. Nech krivka C aj so svojím vnútrom leží v oblasti D. Nech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sú všetky jej singulárne body, ktoré ležia vnútri krivky C. Potom platí:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i[\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) + \ldots + \operatorname{res} f(z_n)]. \tag{6}$$

Nech funkcia $f(z)$ je analytická v okolí $|z| > r$, bodu $z = \infty$. *Reziduom funkcie $f(z)$ v bode $z = \infty$* nazýva sa záporne vzatý koeficient a_{-1} v Laurentovom rade funkcie $f(z)$ v bode $z = \infty$ pre medzikružie $|z| > r$.

Veta 5. Pre rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z = \infty$ platí:

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} f(z)\,dz, \tag{7}$$

kde C^* je záporne orientovaná kružnica $|z| = R$, $R > r$.

Veta 6. Ak funkcia $f(z)$ má v rozšírenej komplexnej rovine K^* konečný počet singulárnych bodov, tak súčet rezíduí vo všetkých týchto bodoch sa rovná nule.

Nech funkcia $f(z)$ je analytická v bode z_0. *Logaritmickým reziduom funkcie $f(z)$ v bode z_0* nazýva sa rezíduum jej logaritmickej derivácie

$$[\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{8}$$

Veta 7. (*Princip argumentu.*) Nech funkcia $f(z)$ je analytická v oblasti D s výnimkou konečného počtu jej pólov. Nech C je jednoduchá uzavretá po čiastkach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá so svojím vnútrom leží v oblasti D. Nech $f(z)$ je analytická v bodoch krivky C a $f(z) \neq 0$, $z \in C$. Potom rozdiel medzi počtom N všetkých nulových bodov a počtom P pólov funkcie $f(z)$ ležiacich vnútri krivky C rovná sa súčtu logaritmických rezíduí funkcie $f(z)$ v póloch vnútri krivky C, t. j. platí:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{9}$$

Veta 8. (*Rouchéova veta.*) Nech funkcie $f(z)$ a $g(z)$ sú analytické funkcie v uzavretej oblasti D. Ak pre každý bod hranice tejto oblasti, ktorou je po čiastkach hladká krivka, platí:

$$|f(z)| > |g(z)| > 0, \tag{10}$$

potom funkcie $f(z)$ a $[f(z) + g(z)]$ majú v oblasti D rovnaký počet nulových bodov.

Príklad 1. Daná je funkcia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z^3}.$$

Nájdime všetky póly tejto funkcie a vypočítajme v nich rezíduá.

Riešenie. Hľadajme póly funkcie $f(z)$ pomocou vety 3 z článku 6.7. Utvorme funkciu $g(z) = 1/f(z)$. Máme:

$$g(z) = z^3 + z^2 = z^2(z + 1).$$

Táto funkcia je analytická na K a má nulové body, a to $z_1 = -1$ prvého rádu a $z_2 = 0$ druhého rádu. Preto funkcia $f(z)$ má v bode $z_1 = -1$ pól prvého rádu a v bode $z_2 = 0$ pól druhého rádu.

Počítajme $\operatorname{res} f(-1)$. Funkcia $f(z)$ má tvar (4), pričom $\varphi(z) = 1$, $\psi(z) = z^3 + z^2$. Pretože $\psi'(-1) = (3z^2 + 2z)_{z=-1} = 1 \neq 0$, môžeme použiť vetu 3. Máme:

$$\operatorname{res} f(-1) = \left[\frac{1}{3z^2 + 2z}\right]_{z=-1} = 1.$$

$\operatorname{Res} f(0)$ vypočítame podľa vety 2. Máme:

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z - 0)^2\frac{1}{z^2(z + 1)}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{z + 1}\right]' = -\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z + 1)^2} = -1.$$

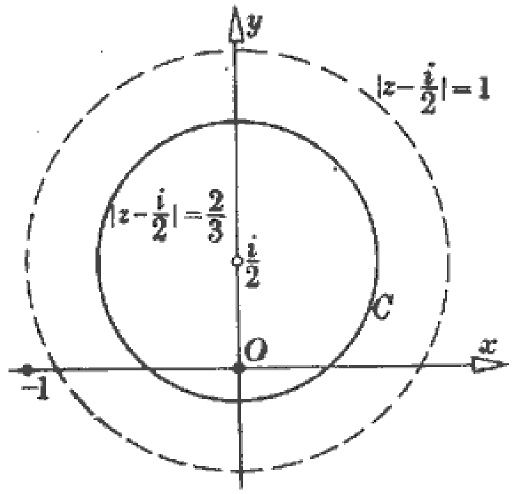
Príklad 2. Vypočítajme integrál

$$\int_C \frac{1}{z^3 + z^2}\, dz,$$

kde C je kružnica $|z - i/2| = 2/3$ kladne orientovaná.

Riešenie. Funkcia $f(z) = 1/(z^3 + z^2)$ je analytická na oblasti $|z - i/2| < 1$ s výnimkou bodu $z_1 = 0$ (pozri *obr. 46*). Krivka C aj so svojím vnútrom leží v tejto oblasti. Podľa Cauchyho vety o rezíduách a na základe príkladu 1 máme:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi\, i \operatorname{res} f(0) = 2\pi\, i(-1) = -2\pi\, i.$$



Obr. 46

Cauchyho veta o rezíduách sa často používa s výhodou aj pri výpočte určitých integrálov funkcie reálnej premennej.

Príklad 3. Vypočítajme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\, dx.$$

Riešenie. Pre daný integrál platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\, dx.$$

Keďže obidva uvedené nevlastné integrály existujú (pozri zrovnávacie vety z článku 5,9/II), platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\, dx.$$

Počítajme preto integrál z funkcie komplexnej premennej

$$J = \int_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)^3}\, dz,$$

kde C je kladne orientovaná krivka (pozri *obr. 47*), kde $R > 1$. Podľa Cauchyho vety o rezíduách platí:

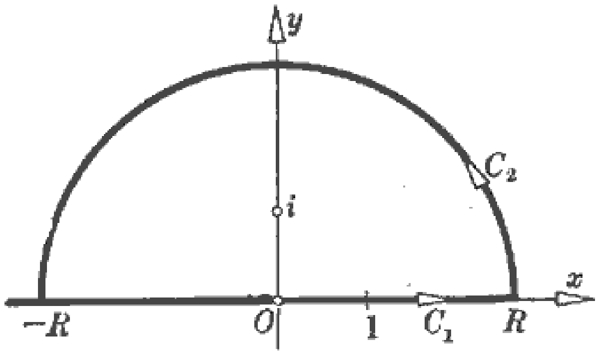
$$\int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}\,f(\mathrm{i}). \tag{11}$$

Vypočítajme rezíduum $\mathrm{res}\,f(\mathrm{i})$ funkcie

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,.$$

Podľa (3) máme:

$$\mathrm{res}\,f(\mathrm{i}) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})^3}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{2z^2 - 8\,\mathrm{i}z - 2}{(z+\mathrm{i})^5} = \frac{1}{16\,\mathrm{i}}\,.$$



Obr. 47

Zo vzťahu (11) máme:

$$J = \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{res}\,f(\mathrm{i}) = 2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{1}{16\,\mathrm{i}} = \frac{\pi}{8}\,. \tag{12}$$

Integrál J však môžeme rozložiť na dva integrály

$$J_1 = \int_{C_1} \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z, \qquad J_2 = \int_{C_2} \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z,$$

pričom

$$J = J_1 + J_2.$$

Krivka C_1 je orientovaná úsečka od bodu $-R$ po bod R a krivka C_2 je polkružnica s polomerom $R > 1$ (pozri *obr. 47*).

Ďalej platí:

$$J_1 = \int_{C_1} \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Polkružnica C_2 má parametrické vyjadrenie $z(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. Preto je:

$$J_2 = \int_{C_2} \frac{z^2}{(z^2+1)^3}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{(R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^3}\,R\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{R^3\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}}{(R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Pretože je $|R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + 1| \geq |R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}| - 1 = R^2 - 1$, máme:

$$\left|\frac{R^3\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}}{(R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^3}\right| < \frac{R^3}{(R^2-1)^3}$$

a podľa vety 1 článku 6,5 dostaneme:

$$|J_2| \leqq \frac{R^3}{(R^2-1)^3}\pi R.$$

Kedže je $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{R^4}{(R^2-1)^3} = 0$, z poslednej nerovnosti máme:

$$\lim_{R\to\infty} |J_2| = 0, \quad \text{a} \lim_{R\to\infty} J_2 = 0.$$

Počítajme teraz daný integrál. Máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} J_1 = \lim_{R\to\infty}(J-J_2) = \frac{\pi}{8} - 0.$$

Teda je:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

V úlohách 1599 až 1620 nájdite rezíduum funkcie $f(z)$ v jej izolovaných singulárnych bodoch:

1599. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-2}$.

1600. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

1601. $f(z) = \dfrac{1}{z^3-z^5}$.

1602. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

1603. $f(z) = \dfrac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$.

1604. $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$.

1605. $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$, n prirodzené číslo.

1606. $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z}$.

1607. $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$.

1608. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^4}$.

1609. $f(z) = e^{z+1/z}$.

1610. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+4)}$.

1611. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$, $z \neq \infty$.

1612. $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$.

1613. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

1614. $f(z) = \sin\dfrac{z}{z+1}$.

1615. $f(z) = \sin z \sin\dfrac{1}{z}$.

1616. $f(z) = z^n \sin\dfrac{1}{z}$, n celé číslo.

1617. $f(z) = \dfrac{(\sqrt{z})_0}{\sin(\sqrt{z})_0}$.

1618. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

1619. $f(z) = \operatorname{cotg}^2 z$.

1620. $f(z) = \operatorname{cotg}^3 z$.

V úlohách **1621** a **1626** vypočítajte:

1621. $\operatorname{res}\,(e^{1/z})_{z=0}$.

1622. $\operatorname{res}\left[\dfrac{e^{a\ln z}}{(1+z^2)^2}\right]_{z=i}$.

1623. $\operatorname{res}\left[\ln\dfrac{z-a}{z-b}\right]_{z=\infty}$.

1624. $\operatorname{res}\,[(\sqrt{(z-a)(z-b)}\,)_0]_{z=\infty}$.

1625. $\operatorname{res}\left[e^z\ln\dfrac{z-a}{z-b}\right]_{z=\infty}$.

1626. $\operatorname{res}\left[\left[(1+z^2)\cosh\dfrac{\pi}{2}z\right]^{-1}\right]_{z=i}$.

1627. Dokážte, ak funkcia $f(z)$ je nepárna, tak $\operatorname{res}\,[f(z)]_{z=a} = \operatorname{res}\,[f(z)]_{z=-a}$. Ak funkcia $f(z)$ je párna, tak $\operatorname{res}\,[f(z)]_{z=a} = -[\operatorname{res} f(z)]_{z=-a}$.

1628. Nech k je prirodzené číslo, $k \geqq 2$ a funkcia $f(z)$ je analytická v okolí bodu $z = a$. Dokážte, že platí:

$$\operatorname{res}\,[(z-a)^{-k} f(z)]_{z=a} = \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

1629. Vypočítajte $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4+1}\,dz$, kde C je kružnica $z = (1+\cos t) + i\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ kladne orientovaná.

1630. Vypočítajte $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\,dz$, kde C je kružnica $z = (1+2\cos t) + i(1+2\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ kladne orientovaná.

1631. Dokážte, že $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^4+1)(\sqrt{z^2+1}\,)_0} = \frac{1}{2}\pi i\sqrt{1+\sqrt{2}}$, kde C je parabola $z = t^2 + it$, $t \in (-\infty, \infty)$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením.

V úlohách **1632** až **1640** vypočítajte dané integrály po kladne orientovanej krivke C:

1632. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, kde C je asteroida $z = 2\cos^3 t + 2i\sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

1633. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, kde n je prirodzené číslo a C je krivka $z = \cos t + i\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, ak:

a) $|a| < |b| < 1$, b) $|a| < 1 < |b|$, c) $1 < |a| < |b|$.

1634. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^4}$, kde C je elipsa $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

1635. $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,dz$, kde C je kružnica $|z-2| = 1/2$.

1636. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$, kde C je kružnica $|z| = r \neq 1$.

1637. $\int\limits_C \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)}$, kde C je kružnica $|z| = 2$.

1638. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)}\, dz$, kde C je kružnica $|z| = 1$.

1639. $\int\limits_C \sin^2 \frac{1}{z}\, dz$, kde C je kružnica $|z| = r$.

1640. $\int\limits_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1 + z}\, dz$, kde C je kružnica $|z| = 2$.

V úlohách **1641** až **1669** vypočítajte dané integrály pomocou integrálov funkcie komplexnej premennej.

1641. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$.

1642. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$.

1643. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^3}\, dx$, $a > 0$.

1644. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13}\, dx$.

1645. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^6}{(a^2 + x^4)^2}\, dx$.

1646. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2}$.

1647. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n}\, dx$,

n je prirodzené číslo.

1648. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\, dx$, $m < n$.

1649. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1 + x}\, dx$.

1650. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx$.

1651. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x}\, dx$,

$0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

1652. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$,

a je komplexné číslo, $|a| \neq 1$.

1653. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}}{1 + 2x\cos b + x^2}\, dx$, $-1 < a < 1$, $-\pi < b < \pi$.

1654. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$.

1655. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1 + x^2}\, dx$.

1656. $\int_0^\infty \frac{x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

1657. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos x + a}\,dx$, $a > 1$.

1658. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1659. $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$.

1660. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(1+x^2+x^4)}\,dx$.

1661. $\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx$.

1662. $\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+r^2}\,dx$, $a > 0$, $r > 0$.

1663. $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^4}\,dx$, $a > 0$.

1664. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\,dx$, $a > 0$.

1665. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x^2)}}$.

1666. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx$.

1667. $\int_0^\pi \operatorname{cotg}(x-a)\,dx$, $\operatorname{Im} a \neq 0$.

1668. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b\cos x}\,dx$.

1669. $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx$.

1670. Pomocou rovnosti $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ dokážte Fresnelove vzorce

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1671. Pomocou integrálu funkcie $f(z) = \left[(1+z^2)\cosh\frac{1}{2}\pi z\right]^{-1}$ po obvode štvoruholníka s vrcholmi $\pm N$, $\pm N + 2\mathrm{i}N$, kde N je celé číslo, dokážte, že

$$\int_0^\infty \left[(1+x^2)\cosh\frac{1}{2}x\right]^{-1} dx = \ln 2.$$

1672. Pomocou integrálu funkcie $f(z) = e^z z^{-n-1}$ po kružnici $|z| = 1$ dokážte, že platí:

a) $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(nx - \sin x)\,dx = \frac{2\pi}{n!}$,

b) $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin (nx - \sin x) \, dx = 0.$

1673. Nájdite počet nulových bodov daných polynómov v každom kvadrante:

a) $f(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$,

b) $f(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

1674. Koľko koreňov má rovnica:

a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$,

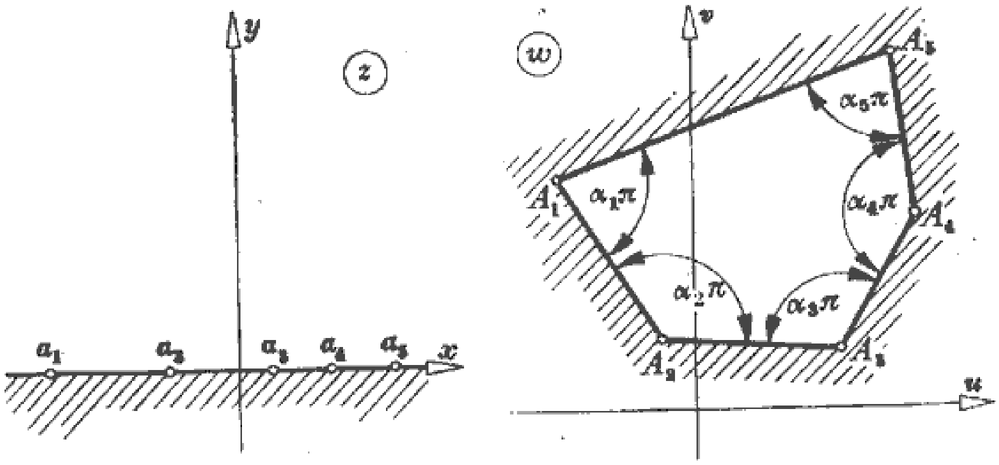
b) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$

vnútri jednotkového kruhu $|z| < 1$.

1675. Koľko koreňov má rovnica $z^4 - 8z + 10 = 0$:

a) v kruhu $|z| < 1$, b) v medzikruží $1 < |z| < 3$.

1676. Dokážte, že ak funkcia $f(z)$ je analytická v kruhu $|z| \leqq 1$ a $|f(z)| < 1$, potom má rovnica $f(z) = z$ v kruhu $|z| < 1$ jediné riešenie z_0, a to samodružný bod pri zobrazení $w = f(z)$.



Obr. 48

6,9. Konformné zobrazenie mnohouholníkov

Nech W je mnohouholník v rovine w, pričom A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $A_k \neq \infty$ sú jeho vrcholy usporiadané súhlasne s kladnou orientáciou hranice mnohouholníka W a $\alpha_k\pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sú veľkosti jeho vnútorných uhlov $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2\right)$.

Funkcia $w = f(z)$, ktorá zobrazuje hornú polrovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na vnútro mnohouholníka W, je daná integrálom Schwarza—Christoffela

$$f(z) = C \int\limits_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots\ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} \, d\zeta + C_1 = C \int\limits_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} \, d\zeta + C_1{}^{*}). \quad (1)$$

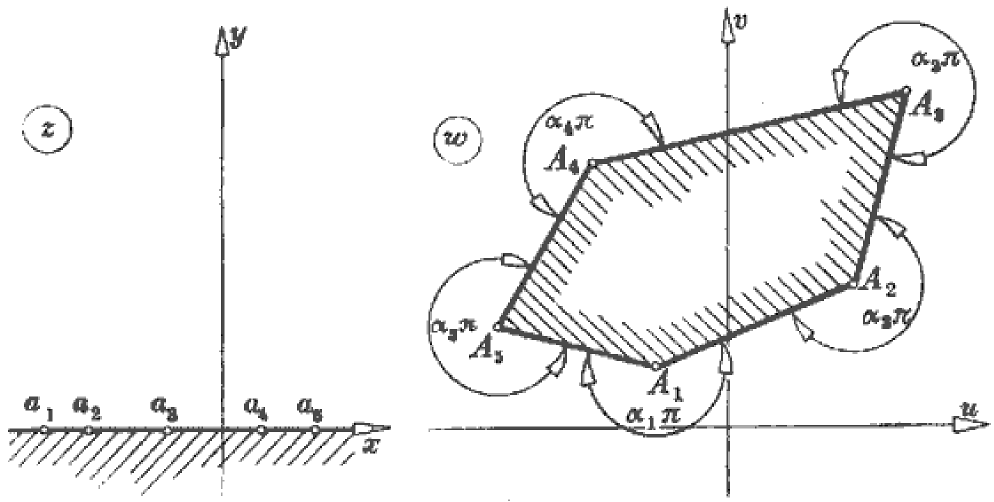
*) Vo vzorcoch (1) a (2) kvôli prehľadnosti píšeme namiesto $[(\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}]_0$ len $(\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}$.

kde $-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty$ sú body na reálnej osi, ktoré sa zobrazia na vrcholy A_1, $A_2, \ldots, A_n$ mnohouholníka W, C, C_1 sú komplexné čísla a z a z_0 sú z hornej polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ (pozri *obr. 48*).

Konformné zobrazenie polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na vonkajšok mnohouholníka W je dané funkciou

$$F(z) = C \int_{z_0}^{z} \prod_{i=1}^{n} (\zeta - b_k)^{\alpha_k - 1} \frac{1}{(\zeta - b)^2 (\zeta - \bar{b})^2} \, d\zeta + C_1, \tag{2}$$

kde $w(b) = \infty$, body na reálnej osi $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ sa zobrazia na vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $\beta_k \pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sú veľkosti vonkajších uhlov mnohouholníka $W(\beta_k = 2 - \alpha_k, \sum_{k=1}^{n} \beta_k = n + 2)$ (pozri *obr. 49*).



Obr. 49

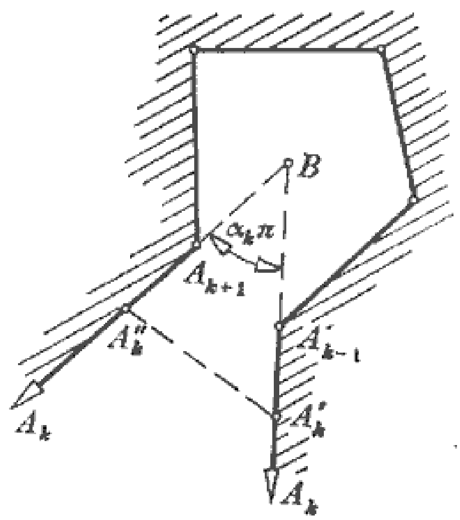
Poznámka 1. Ak obraz bodu $z = \infty$ je niektorý z vrcholov A_k mnohouholníka W, potom vo vzorci (1) chýba dvojčlen $(\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}$.

Poznámka 2. Nech mnohouholník W nie je ohraničený a má jeden vrchol A_k v bode $w = \infty$. Nech strany so spoločným vrcholom A_k sú rovnobežné, potom $\alpha_k = 0$. Ak tieto strany nie sú rovnobežné, potom na každej si zvolíme bod A_k', A_k'' rôzne od vrcholu A_k (pozri *obr. 50*). Nech ich konečný priesečník je B, potom za uhol pri vrchole A_k berieme záporné vzatý vnútorný uhol pri vrchole B v trojuholníku A_k', A_k'', B.

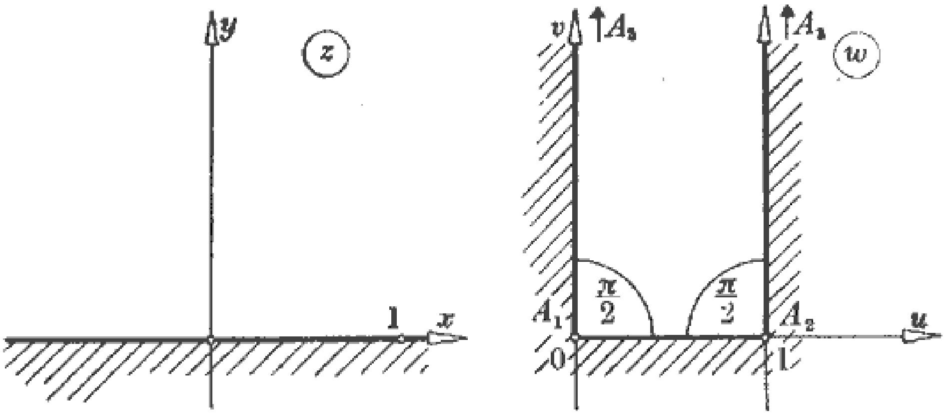
Poznámka 3. Vzorec (1) platí aj pre tento prípad, ak uhly vo vrcholoch $w = \infty$ počítame podľa poznámky 2.

Príklad 1. Nájdime zobrazenie hornej polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na polpás $0 \leq \operatorname{Re} w \leq 1$, $\operatorname{Im} w > 0$, pričom $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$ (pozri *obr. 51*).

Riešenie. Zobrazená oblasť predstavuje „trojuholník" s vrcholmi $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = \infty$, pričom $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Uhly pri vrcholoch sú $\alpha_1 \pi = \pi/2$, $\alpha_2 \pi = \pi/2$, $\alpha_3 \pi = 0$, čiže $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 0$.



Obr. 50

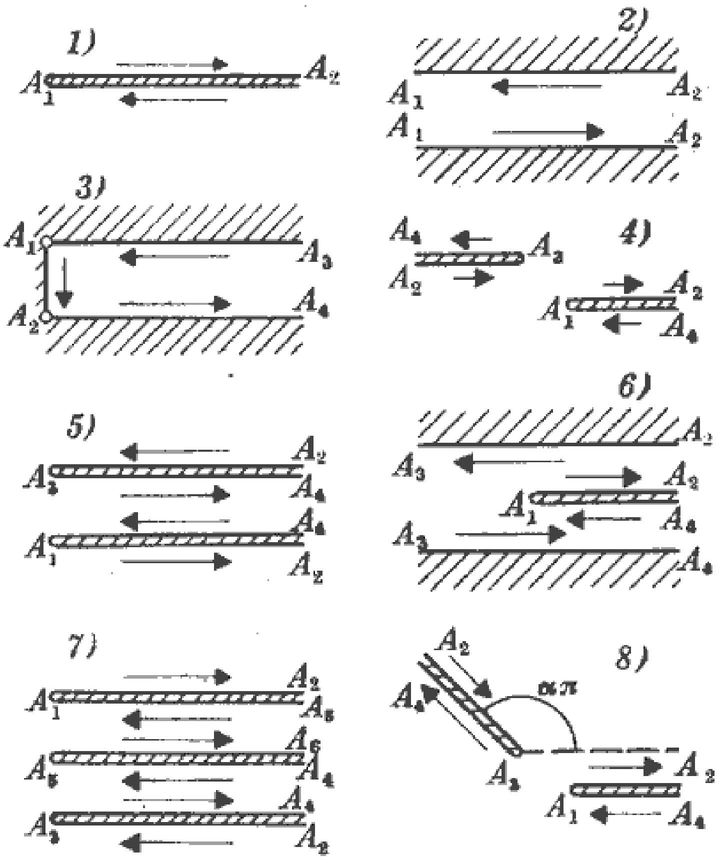


Obr. 51

Hľadané zobrazenie je dané vzorcom (1)

$$f(z) = C\int_{z_0}^{z} (\zeta - 0)^{-1/2}(\zeta - 1)^{-1/2}\,\mathrm{d}\zeta + C_1 = C'\int_{z_0}^{z} \zeta^{-1/2}(1-\zeta)^{-1/2}\,\mathrm{d}\zeta + C_1 =$$

$$= C'\int_{z_0}^{z} \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}\,\mathrm{d}\zeta + C_1 = C' \arcsin(2z - 1) + C_2. \tag{3}$$



Obr. 52

Konštanty C', C_2 určíme z podmienky $w(0) = 0$, $w(1) = 1$. Odtiaľ dostaneme $C' = 1/\pi$, $C_2 = 1/2$. Po dosadení do (3) dostaneme hľadané zobrazenie

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin (2z - 1) + \frac{1}{2}\,.$$

1677. Nájdite príslušné α_k vo vzorci (1) pre oblasti (ohraničené rovnobežnými priamkami) s vrcholmi v nekonečne podľa *obr. 52*.

1678. Nájdite oblasť, na ktorú sa konformne zobrazí horná polrovina $\operatorname{Im} z > 0$, ak

$$w = \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} (\zeta - a_3)^{\alpha_3 - 1}\, d\zeta$$

a

a) $\alpha_3 = 1$, b) $\alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

1679. Dokážte, že funkcia $w = \int_0^z z^{\frac{1}{3} - 1} (1 - z)^{\frac{1}{3} - 1} dz$ zobrazí hornú polrovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na rovnostranný trojuholník so stranou $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma^3 \left(\frac{1}{3}\right)$.

V úlohách **1680** a **1681** nájdite tie oblasti z roviny w, na ktoré zobrazenie

$$w(z) = \int_0^z t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\beta - 1}\, dt,$$

$[\arg w'(0) = 0]$ zobrazí hornú polrovinu $\operatorname{Im} z > 0$, ak:

1680. $0 < \alpha \leqq 2$, $0 < \beta \leqq 2$, preskúmajte prípady:

a) $\alpha + \beta < 1$; b) $\alpha + \beta = 1$; c) $\alpha + \beta > 1$,

špeciálne $\alpha + \beta = 2$ a $\alpha = \beta = 3/2$.

1681. $1 \leqq \alpha \leqq 2$, $-1 \leqq \beta \leqq 0$, $\alpha + \beta \geqq 1$, preskúmajte prípady:

a) $\alpha = 1$; b) $\alpha + \beta = 1$; c) $\alpha = 2$; d) $\alpha = 2$, $\beta = -1/2$; e) $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

V úlohách **1682** až **1696** nájdite konformné zobrazenie hornej polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na:

1682. Pás $0 < v < h$, ak $w(1) = \infty$, $w(0) = 0$.

1683. Pravouhlý trojuholník s vnútornými uhlami $\pi/3$, $\pi/6$, ak $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = 1 + i/3$.

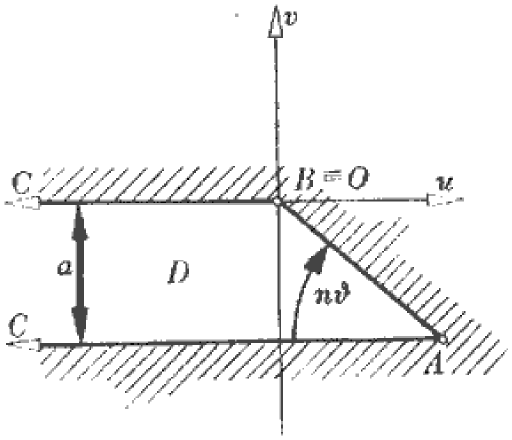
1684. Pravouhlý rovnoramenný trojuholník, ak $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = 1 + i$.

1685. Rovnostranný trojuholník, ak $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = (1 + i\sqrt{3})/2$.

1686. Obdĺžnik s vrcholmi $w_1 = a$, $w_4 = -a$, $a > 0$, $w_2 = a + b\,\mathrm{i}$, $w_3 = -a + b\,\mathrm{i}$, $b > 0$, ak $w(0) = 0$, $w(1) = a$, $w(\infty) = b\,\mathrm{i}$, $w(1/a) = a + b\,\mathrm{i}$, $w(-1/a) = -a + b\,\mathrm{i}$.

V úlohách 1687 až 1698 nájdite konformné zobrazenie hornej polroviny $\mathrm{Im}\, z \geqq 0$ na oblasť D danú na uvedenom obrázku.

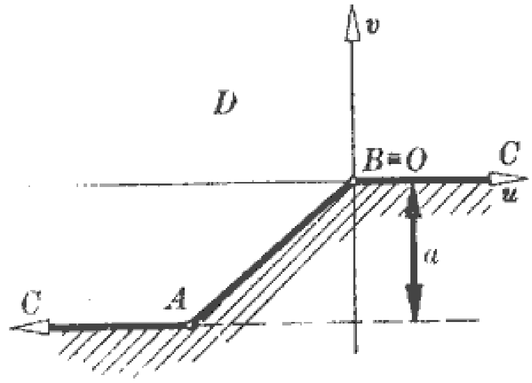
1687.



Obr. 53

$w(1) = 0$, $w(\infty) = \infty$, $w(0) = A$.

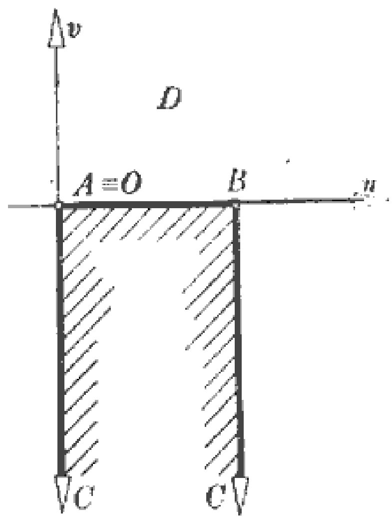
1688.



Obr. 54

$w(1) = 0$, $w(\infty) = \infty$, $w(0) = A$.

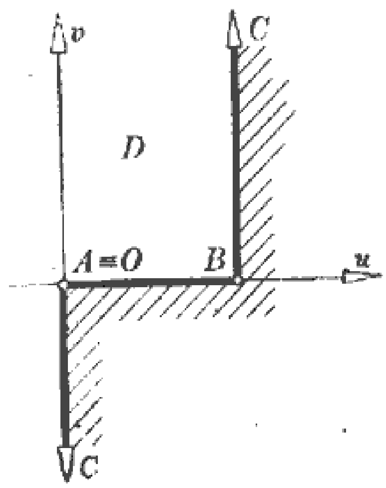
1689.



Obr. 55

$w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$, $w(0) = 0$.

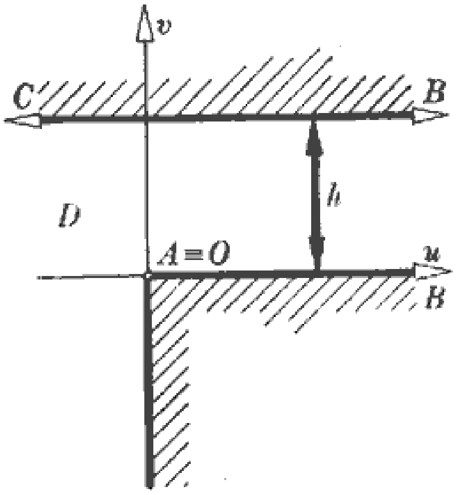
1690.



Obr. 56

$w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$.

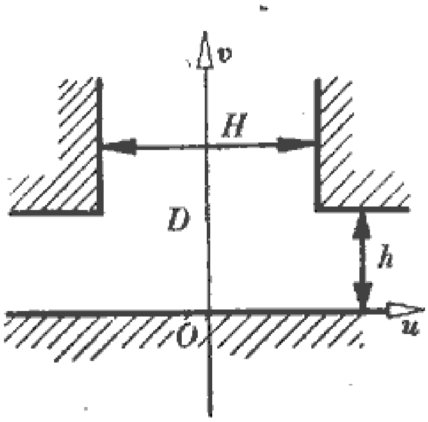
1691.



Obr. 57

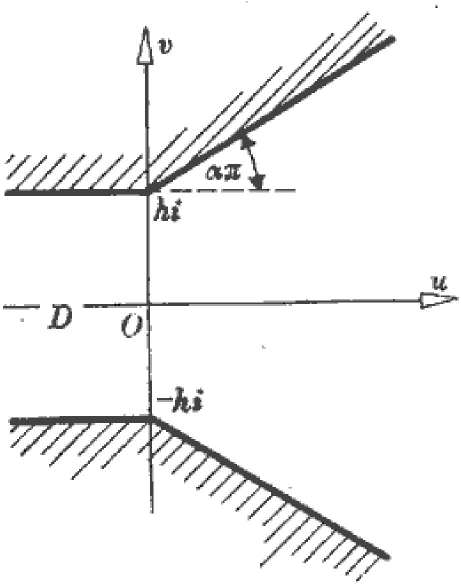
$w(0) = 0,\ w(1) = \infty,\ w(\infty) = \infty.$

1692.



Obr. 58

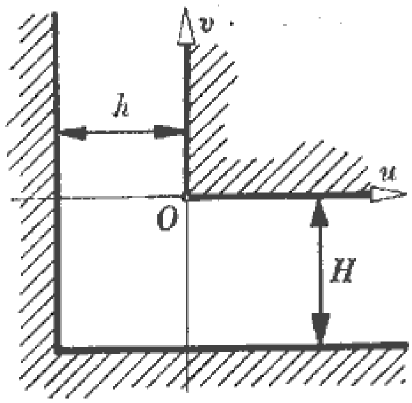
1693.



Obr. 59

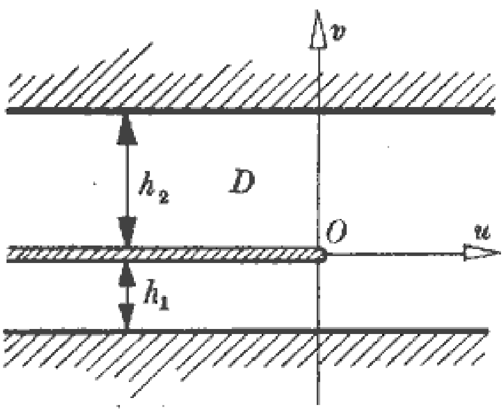
Preskúmajte zvlášť prípady $\alpha = 1/2$ a $\alpha = 1$.

1694.



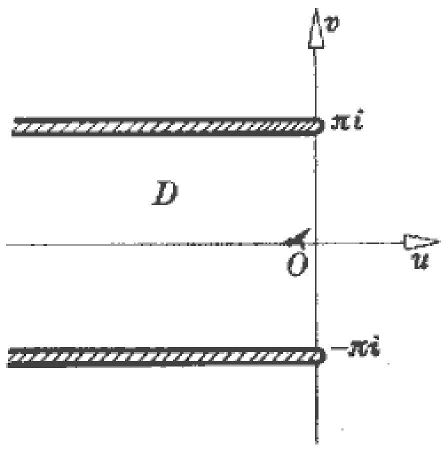
Obr. 60

1695.



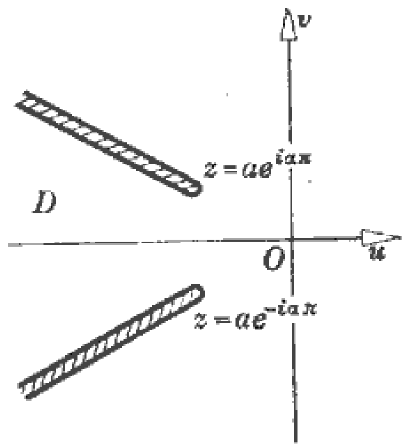
Obr. 61

1696.



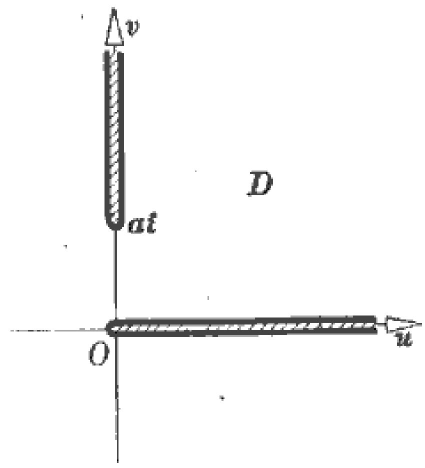
Obr. 62

1697.



Obr. 63

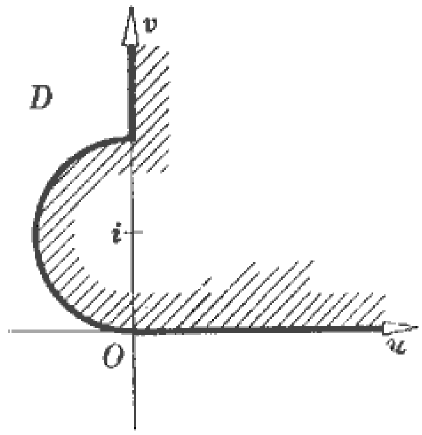
1698.



Obr. 64

1699. Nájdite konformné zobrazenie polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na rovinu w bez polpriamok $\operatorname{Re} w = n\pi$, $\operatorname{Im} w \leqq 0$, kde n je celé číslo.

1700. Nájdite konformné zobrazenie hornej polroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na rovinu, bez kruhu $|w - \mathrm{i}| \leqq 1$ a prvého kvadrantu $\operatorname{Im} w \geqq 0$, $\operatorname{Re} w \geqq 0$ (pozri *obr. 65*).



Obr 65

1701. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na vonkajšok mnohouholníka

$$w = C_1 \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots . (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{1}{\zeta^2} \, \mathrm{d}\zeta + C_2,$$

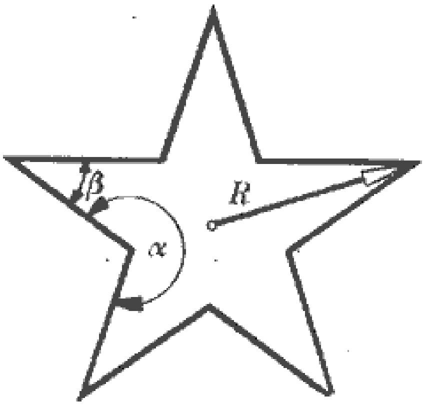
kde α_k sú vonkajšie uhly mnohouholníka, a_k sú body na jednotkovej kružnici odpovedajúce vrcholom mnohouholníka a C a C_2 sú konštanty. Predpokladajte pritom, že stred kružnice $z = 0$ sa zobrazí do bodu $w = \infty$.

1702. Odvoďte vzťah pre zobrazenie jednotkového kruhu $|z| < 1$ na mnohouholník

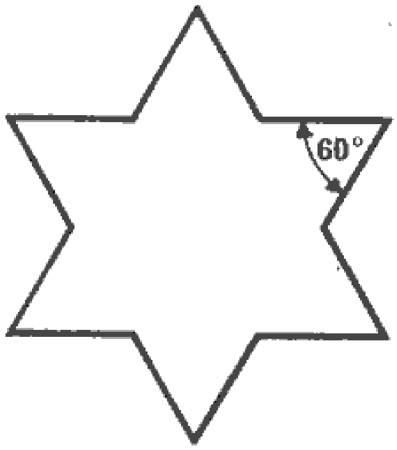
$$w = C \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} \, d\zeta + C_1,$$

kde α_k sú veľkosti uhlov mnohouholníka vyjadrené ako násobok čísla π, body a_k na jednotkovej kružnici $|z| = 1$, $|a_k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sa zobrazia na vrcholy mnohouholníka a C, C_1 sú konštanty, pričom $|z_0| < 1$.

1703. Dokážte, že zobrazenie $w = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\sqrt{1 - z^4}} \, dz$ zobrazí kruh $|z| < 1$ na štvorec so stranou $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2(1/4)$.



Obr. 66



Obr. 67

1704. Dokážte, že zobrazenie $w = \int_{0}^{z} (1 - z^2)^{-1/3} (1 + z^2)^{-2/3} \, dz$ zobrazí vnútro kruhu $|z| < 1$ na kosoštvorec s uhlom 60° a so stranou $\frac{1}{4\pi} \Gamma(1/3) \Gamma(1/6)$.

1705. Dokážte, že zobrazenie $w = \int_{0}^{z} \frac{1}{(1 - z^n)^{2/n}} \, dz$ zobrazí vnútro kruhu $|z| < 1$ na pravidelný n-uholník, ktorého dĺžka strany je

$$\frac{2\pi}{n} \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

1706. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na vonkajšok pravidelného n-uholníka.

1707. Nájdite konformné zobrazenie vnútra kruhu $|z| < 1$ na vnútro hviezdy — $2n$-uholníka, ktorý má všetky strany rovnaké a pre vnútorné uhly ktorého platí $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{2n-1} = \gamma$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_{2n} = \delta$.

1708. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na vnútro 5-cípej hviezdy, ak $\alpha = 7\pi/5$, $\beta = \pi/5$ a $R = 1$ (pozri *obr. 66*).

1709. Nájdite konformné zobrazenie kruhu $|z| < 1$ na „vianočnú" hviezdu (pozri *obr. 67*).

6,10. Aplikácie funkcie komplexnej premennej v teórii rovinného poľa

Majme dvojrozmerné vektorové pole $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{g}(x, y)$, $(x, y, z) \in E_3$. Hovoríme, že $\mathbf{f}(x, y, z)$ je rovinné pole, ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme je $\mathbf{f}(x, y, z) = g_1(x, y)\,\mathbf{i} + g_2(x, y)\,\mathbf{j}$, $(x, y, z) \in E_3$.

Poznámka 1. Rovinné vektorové pole posunutím pozdĺž osi o_z sa nemení, preto ho stačí skúmať iba v rovine R_{xy} ako usporiadanú dvojicu reálnych funkcií dvoch reálnych premenných. Preto sa používa pri vyšetrovaní rovinných vektorových polí funkcia komplexnej premennej $w = g(z)$, $g(z) = g_1(x, y) + \mathrm{i}g_2(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$.

Poznámka 2. Každému vektoru $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, kde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sú jednotkové vektory v pravouhlom súradnicovom systéme v rovine, možno jednojednoznačne priradiť komplexný vektor (v ďalšom texte len vektor) $\mathbf{a} = a_1 + \mathrm{i}a_2$, kde i je imaginárna jednotka a a_1, a_2 sú reálne čísla. Pre takto zavedené vektory $\mathbf{a} = a_1 + \mathrm{i}\,a_2$, $\mathbf{b} = b_1 + \mathrm{i}\,b_2$ sa definuje analogicky rovnosť, súčet, rozdiel dvoch vektorov, násobok vektora reálnym číslom (skalárom) ako v článku 4,5/I. Takto zavedené operácie majú rovnaké vlastnosti ako sú uvedené v článku 4,5/I, t. j. platí:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1) + \mathrm{i}(a_2 + b_2),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1) + \mathrm{i}(a_2 - b_2),$$

$$k\mathbf{a} = ka_1 + \mathrm{i}ka_2,$$

kde k je reálne číslo.

Poznámka 3. Pre skalárny súčin dvoch vektorov $\mathbf{a} = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $\mathbf{b} = b_1 + \mathrm{i}b_2$ platí:

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

V tomto prípade treba rozlišovať súčin dvoch komplexných čísiel a skalárny súčin ako súčin dvoch vektorov.

Nech $\mathbf{g}(z) = g_1(x, y)\,\mathbf{i} + g_2(x, y)\,\mathbf{j}$, t. j. $\mathbf{g}(z) = g_1(x, y) + \mathrm{i}g_2(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$, je rovinné vektorové pole v rovine K. Podobne ako sa zaviedli pojmy tok vektorového poľa, cirkulácia vektorového poľa po krivke, gradient skalárneho poľa, divergencia vektorového poľa a rotácia vektorového poľa v čl. 5,4 definujú sa nasledujúce pojmy:

Gradient skalárneho poľa $\Phi(x, y)$ v bode $z = x + \mathrm{i}y$ je:

$$\operatorname{grad} \Phi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Tok rovinného vektorového poľa cez jednoduchú uzavretú po čiastkach hladkú orientovanú krivku C je:

$$T(C) = \int_C \mathbf{g}(z) \,.\, \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \int_C g_1(x, y)\,\mathrm{d}y - g_2(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor normály ku krivke C.

Divergencia vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ v bode z je:

$$\operatorname{div} \mathbf{g}(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varrho \to 0} \frac{T(C)}{\varrho^2}$$

kde C je kružnica so stredom z a polomerom ϱ. Ak funkcia $g(z)$ je v bode z analytická, potom

$$\operatorname{div} \mathbf{g}(z) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}.$$

Bod $z = a$ nazývame bodovým žriedlom [bodovým norom] vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$, ak v istom okolí $O(a)$ bodu a je pre všetky $z \neq a$, $\operatorname{div} \mathbf{g}(z) = 0$ a $T(C) > 0$ [$T(C) < 0$], kde C je ľubovoľná jednoduchá uzavretá po čiastkach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá celá leží v $O(a)$ a neprechádza bodom a.

Nech v kruhu $0 < |z - a| \leq \varrho$ je $\operatorname{div} \mathbf{g}(z) = 0$ a bod $z = a$ je žriedlo [nor]. Potom tok $T(C)$ vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ po kladne orientovanej kružnici $|z - a| = \varrho$ sa nazýva *výdatnosťou žriedla [noru]* a označuje sa $Q[-Q]$, $Q > 0$. Výdatnosť žriedla [noru] nezávisí od polomeru ϱ kružnice C.

Bod vektorového poľa, v ktorom splynuli dva žriedla s výdatnosťou Q nachádzajúce sa vo vzdialenosti h tak, aby súčin $p = Qh$ bol konštantný pre $h \to 0$, nazývame *dipólom* s momentom p.

Vektorové pole $\mathbf{g}(z)$ nazýva sa v oblasti D *solenoidálne*, ak platí $\operatorname{div} \mathbf{g}(z) = 0$ pre každý bod z oblasti D.

Ak vektorové pole $\mathbf{g}(z)$ je solenoidálne v jednoducho súvislej oblasti D, potom existuje prúdová funkcia vektorového poľa $v = \psi(x, y)$, pre ktorú platí:

$$v = \int_A^B -g_2(x, y)\,\mathrm{d}x + g_1(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

kde krivkový integrál sa uvažuje od bodu A určeného komplexným číslom $z = a$ po bod B určený komplexným číslom z. Pre vektorové krivky vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ platí $\psi(x, y) = C$, kde C je ľubovoľné reálne číslo.

Cirkulácia vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ po jednoduchej, po čiastkach hladkej, orientovanej krivke C je:

$$\Gamma(C) = \int_C \mathbf{g}(z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_C g_1(x, y)\,\mathrm{d}x + g_2(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Rotácia vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ v bode z je vektor kolmý na rovinu R_{xy}, pre ktorý platí:

$$|\operatorname{rot} \mathbf{g}(z)| = \frac{1}{\pi} \lim_{\varrho \to 0+} \frac{|\Gamma(C)|}{\varrho^2},$$

kde C je kružnica so stredom v bode z a polomerom ϱ. Ak funkcia $g(z)$ je v bode z analytická, potom pre rotáciu vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ v bode z platí:

$$|\operatorname{rot} \mathbf{g}(z)| = \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|.$$

Bod $z = a$ sa nazýva *vírom* vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$, ak v istom okolí $O(a)$ bodu a je pre všetky $z \neq a$, $\operatorname{rot} \mathbf{g}(z) = \mathbf{o}$ a $\Gamma(C) \neq 0$, kde C je ľubovoľná jednoduchá, uzavretá, po čiastkach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá celá leží v $O(a)$ a neprechádza bodom a.

Nech v kruhu $0 < |z - a| \leq \varrho$ je $|\operatorname{rot} \mathbf{g}(z)| = 0$ a bod $z = a$ je vír. Potom cirkulácia $\Gamma(C)$ vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$ po kladnej orientovanej kružnici $|z - a| = \varrho$ sa nazýva *cirkuláciou víru* $z = a$ a označuje sa Γ. Cirkulácia víru Γ nezávisí od polomeru kružnice C.

Ak v každom bode oblasti D je $|\operatorname{rot} \mathbf{g}(z)| = 0$, hovoríme, že vektorové pole $\mathbf{g}(z)$ je *potenciálne*. Potenciálne vektorové pole má potenciál $u = \varphi(x, y)$ a platí:

$$\mathbf{g}(z) = \operatorname{grad} u,$$

a

$$u = \Gamma(C) = \int_A^B g_1(x, y)\,\mathrm{d}x + g_2(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je úsečka od zvoleného bodu A určeného komplexným číslom $z = a$ po bod B určený komplexným číslom z.

Krivky $\varphi(x, y) = C$ nazývame *ekvipotenciálnymi hladinami* vektorového poľa $\mathbf{g}(z)$.

Veta 1. Rovinné vektorové pole $\mathbf{g}(z)$, ktoré je v oblasti D solenoidálne a potenciálové, má potenciál $\varphi(x, y)$ a prúdovú funkciu $\psi(x, y)$, $(x, y) \in D$, pričom $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sú v oblasti D harmonicky združené funkcie, t. j. existuje analytická funkcia $w = f(z)$, pričom $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, $z = x + iy$ v oblasti D.

Funkcia $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ z vety 1 nazýva sa *komplexným potenciálom vektorového poľa* $\mathbf{g}(z)$ v oblasti D.

Veta 2. Komplexný potenciál žriedla [noru] $z = a$ s výdatnosťou Q je:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln (z - a).$$

Komplexný potenciál víru $z = a$ s cirkuláciou Γ je:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (z - a).$$

Komplexný potenciál dipólu v bode $z = a$ s momentom p je:

$$w = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z - a}.$$

Poznámka 3. Ak v bode $z = a$ je zároveň žriedlo aj vír, potom hovoríme o vírovom žriedle a pre jeho komplexný potenciál platí:

$$w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln (z - a).$$

Veta 3. Komplexný potenciál v páse $0 < \operatorname{Im} z < h$ je $w = kz + k_1$, kde k, k_1 sú konštanty, $\operatorname{Im} k = 0$. Ekvipotenciálne hladiny a vektorové krivky sú úsečky, resp. priamky (pozri *obr. 68*).

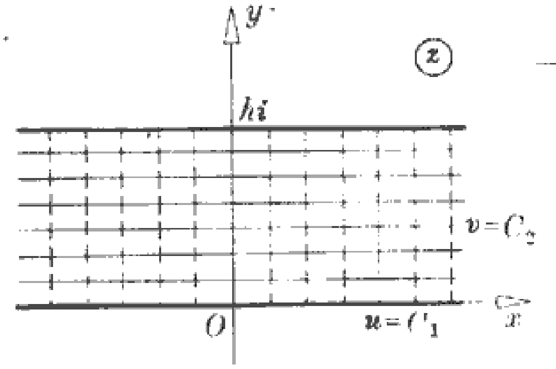
Komplexný potenciál v medzikruží $r_1 < |z| < r_2$ je $w = k\,i \ln z + k_1$, kde k, k_1 sú konštanty, $\operatorname{Im} k = 0$. Ekvipotenciálne hladiny a vektorové krivky sú úsečky, resp. kružnice (pozri *obr. 69*).

Veta 4. Nech rovinné vektorové pole $\mathbf{g}(z)$ má v oblasti D komplexný potenciál $w = f(z)$. Potom platí:

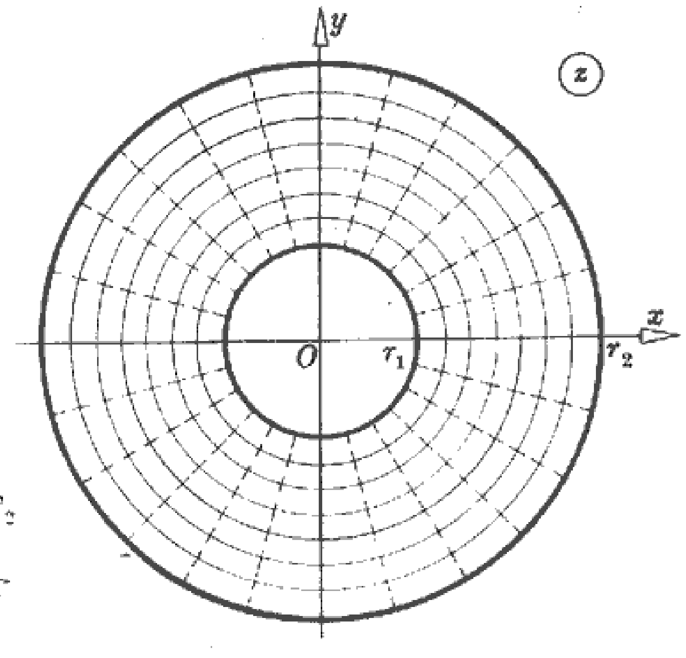
$$\mathbf{g}(z) = \overline{f'(z)}.$$

Veta 5. Nech rovinné vektorové pole $\mathbf{g}(z)$ má v oblasti D komplexný potenciál $w = f(z)$ a C je jednoduchá uzavretá po čiastkach hladká orientovaná krivka. Potom platí:

$$\Gamma(C) + i T(C) = \int_C f'(z)\, dz.$$



Obr. 68



Obr. 69

Poznámka 4. Medzi rovinné vektorové polia, ktoré majú komplexný potenciál, patrí napríklad:

a) pole rýchlosti **v** rovinného prúdenia kvapaliny v oblasti bez žriediel, norov a vírov,

b) rovinné elektrostatické pole intenzity **E** v oblasti bez nábojov,

c) rovinné pole vektora hustoty tepelného prúdenia $\mathbf{i} = -\lambda \operatorname{grad} T$ v oblasti bez tepelných zdrojov. Teplota T je reálna časť jeho komplexného potenciálu v oblasti D. Konštanta λ je špecifická tepelná vodivosť prostredia.

Význam jednotlivých veličín charakterizujúcich tieto polia je uvedený v *tab. 2.*

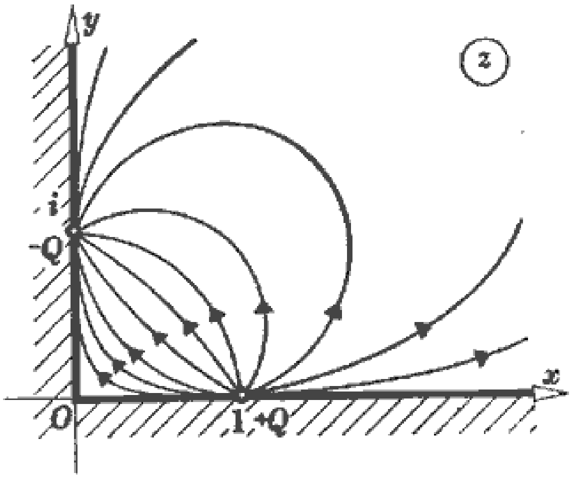
Tabuľka 2

Vektorové pole	Teplotné pole	Prúdenie kvapaliny	Elektrostatické pole
$w = f(z)$	$f = u + iv$	$f = u + iv$	$f = u + iv$
$\mathbf{g}(z)$ $\mathbf{g}(z) = \overline{f'(z)}$	$\mathbf{i} = -\operatorname{grad} u$ $\mathbf{i} = -\overline{w'(z)}$	$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$ $\mathbf{v} = \overline{w'(z)}$	$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$ $\mathbf{E} = -\overline{iw'(z)}$
u	teplota	potenciál	silová funkcia
krivky $u = \text{const}$ ekvipotenciálne krivky	izotermy	ekvipotenciálne hladiny	siločiary
v	prúdová funkcia	prúdová funkcia	potenciál
krivky $v = \text{const}$ vektorové krivky	prúdnice	prúdnice	ekvipotenciálne hladiny
žriedlo	žriedlo	žriedlo	—
vír	—	vír	bodový náboj
$u_2 - u_1$	tepelný spád	—	—
$v_2 - v_1$	—	prietok	potenciálny rozdiel

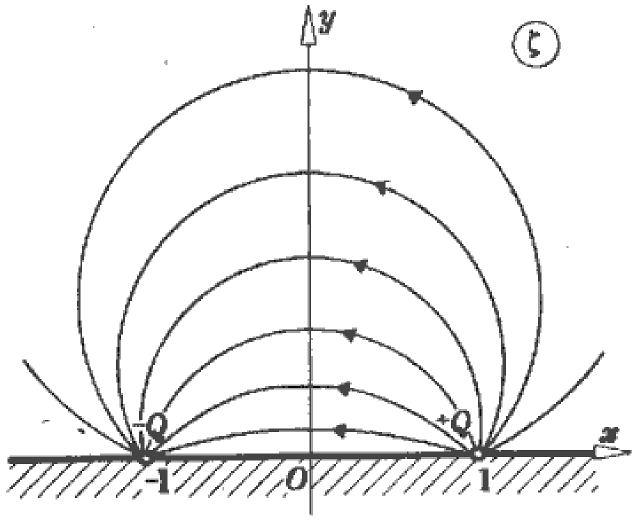
Poznámka 5. Pri hľadaní komplexného potenciálu daného vektorového poľa používame predovšetkým metódy konformného zobrazenia daného poľa na jednoduché základné polia (pole v páse, pole v kruhu, pole v medzikruží atď., kde vektorové krivky a ekvipotenciálne hladiny sú priamky a kružnice, resp. ich časti). Keďže komplexný potenciál týchto polí poznáme, môžeme potom jednoducho superpozíciou príslušných zobrazení dostať hľadaný komplexný potenciál. Z fyzikálnej povahy úloh vyplýva jednoznačnosť takto nájdeného riešenia.

Poznámka 6. *Princíp symetrie.* (Princíp „zrkadlenia".) Pri hľadaní komplexného potenciálu často používame spolu s konformným zobrazením princíp symetrie, ktorý tkvie v tom, že pole v danej oblasti D môže symetricky pokračovať cez ekvipotenciálnu hladinu resp. vektorovú krivku, ktorá má tvar priamky alebo kružnice alebo ich časti. Pritom žriedlu [noru] odpovedá symetricky položené žriedlo [nor] s rovnakou výdatnosťou, víru odpovedá symetricky položený vír s opačnou cirkuláciou, ak symetria je vzhľadom na vektorovú krivku. Ak symetria je vzhľadom na ekvipotenciálnu hladinu, potom žriedlu [noru] odpovedá symetricky položený nor [žriedlo] s rovnakou výdatnosťou Q a víru symetricky položený vír s rovnakou cirkuláciou.

Príklad 1. Nájdime prúdenie kvapaliny v prvom kvadrante $\operatorname{Re} z \geqq 0$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$, ak v bode $z = 1$ je žriedlo s výdatnosťou Q a v bode $z = i$ je nor s výdatnosťou $-Q$. Pozdĺž polpriamok $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z \geqq 0$ a $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z \geqq 0$ sú pevné stienky.



Obr. 70



Obr. 71

Riešenie. Daná oblasť je znázornená na *obr. 70*. Aby sme našli komplexný potenciál, zobrazme ju konformne na polrovinu, máme $\zeta = z^2$, pričom žriedlo je opäť v bode 1 a nor sa zobrazil do bodu $\zeta = -1$, *obr. 71*. Keďže reálna os $\operatorname{Im} \zeta = 0$ je v rovine (ζ) prúdnica, pomocou princípu symetrie dostávame celú rovinu (ζ) so žriedlom v bode $\zeta = 1$ a norom v bode $\zeta = -1$ (*obr. 72*). Aby sme našli komplexný potenciál prúdenia v tejto rovine, zobrazme konformne rovinu (ω) pomocou lin. lomeného zobrazenia tak, aby $\omega(1) = 0$ a $\omega(-1) = \infty$, t. j.

$$\omega = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}.$$

Pri tomto zobrazení dostaneme rovinu (ω) so žriedlom $\omega = 0$ a norom v bode $\omega = \infty$ (*obr. 73*). Podľa vety 3 pre komplexný potenciál v rovine (ω) máme:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln \omega.$$

Superpozíciou jednotlivých zobrazení dostávame hľadaný komplexný potenciál prúdenia v danej oblasti

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right).$$

Príklad 2. Nájdime potenciál rovinného elektrostatického poľa medzi dvoma rotačnými valcami s rovnobežnými osami, ak ich priesečnice s rovinou R_{xy} sú kružnice $|z| = 1$, $|z - 1| = 4$ a potenciál na prvom valci je $V = 100$ Voltov a druhý valec je uzemnený.

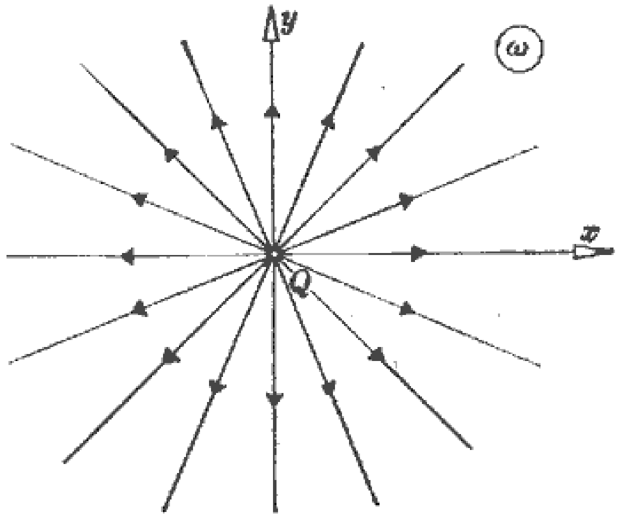
Riešenie. Daná oblasť D je dvojnásobne súvislá (pozri *obr. 74*). Komplexný potenciál poľa nájdeme tak, že oblasť D konformne zobrazíme na medzikružie so stredom v bode 0. Vyžadované zobrazenie má tvar

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

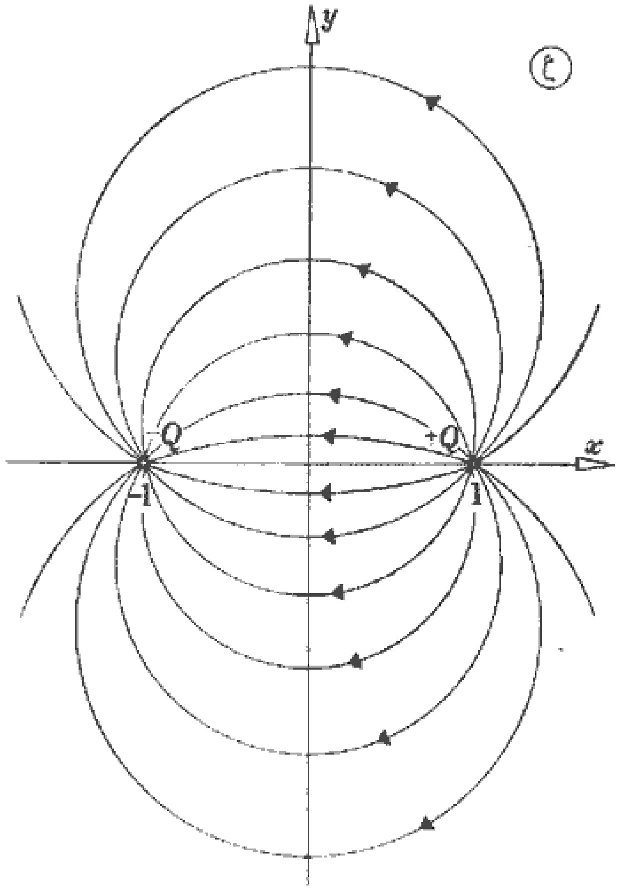
kde body z_1, z_2 sú navzájom združené body podľa obidvoch kružníc (pozri čl. 6,4). Keďže tieto body musia ležať na spojnici stredov obidvoch kružníc, pre body z_1 a z_2 platí: $z_1\overline{z_2} = 1$, $(z_1 - 1)\,\overline{(z_2 - 1)} = 16$ a čísla z_1, z_2 sú reálne, t. j. $z_1 = \bar{z}_1$, $z_2 = \bar{z}_2$. Odtiaľ máme:

$$z_1 z_2 = 1,$$

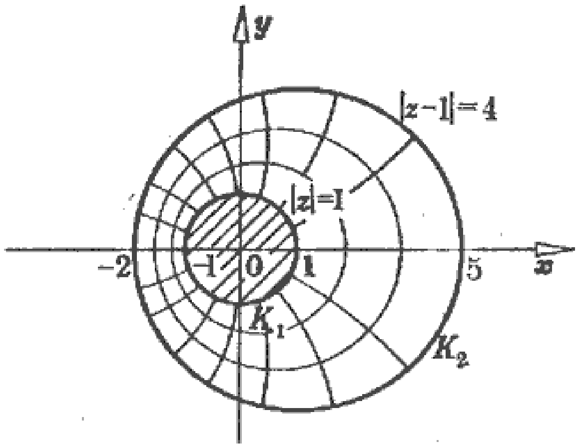
$$z_1 z_2 - z_1 - z_2 = 15.$$



Obr. 73



Obr. 72



Obr. 74

Z toho vyplýva, že $z_1 = -7 - 4\sqrt{3}$, $z_2 = -7 + 4\sqrt{3}$
a

$$\omega = \frac{z + 7 + 4\sqrt{3}}{z + 7 - 4\sqrt{3}}.$$

Pritom obraz kružnice $|z| = 1$ je kružnica $|\omega| = 7 + 4\sqrt{3}$, a obraz kružnice $|z - 1| = 4$ je kružnica $|\omega| = 2 + \sqrt{3}$ (pozri *obr. 75*). Podľa vety 4 je komplexný potenciál tohto medzikružia

$$w = k\,\mathrm{i} \ln \omega + k_1$$

a teda komplexný potenciál daného poľa je:

$$w = k\,\mathrm{i} \ln \left(\frac{z + 7 + 4\sqrt{3}}{z + 7 - 4\sqrt{3}}\right) + k_1.$$

Pre hľadaný potenciál V platí:

$$V = \operatorname{Im} w$$

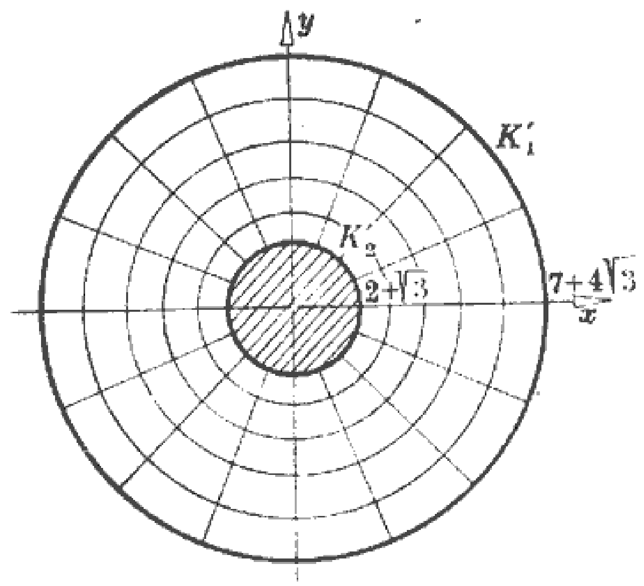
a

$$V = k \ln \left| \frac{z + 7 + 4\sqrt{3}}{z + 7 - 4\sqrt{3}} \right| + k_2,$$

kde reálne konštanty k, $k_2 = \operatorname{Im} k_1$ určíme z podmienok, že na kružnici $|z| = 1$ je $V = 100$ a na kružnici $|z - 1| = 4$ je $V = 0$. Zvoľme si preto na prvej kružnici bod $z = 1$ a na druhej $z = 5$, po dosadení do vzťahu pre potenciál V dostaneme:

$$100 = k \ln \left| \frac{8 + 4\sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}} \right| + k_2$$

$$0 = k \ln \left| \frac{12 + 4\sqrt{3}}{12 - 4\sqrt{3}} \right| + k_2.$$



Obr. 75

Z toho vyplýva:

$$k = \frac{100}{\ln (2 + \sqrt{3})}, \quad k_2 = -100.$$

Hľadaný potenciál daného elektrostatického poľa je:

$$V = \frac{100}{\ln (2 + \sqrt{3})} \ln \left| \frac{z + 7 + 4\sqrt{3}}{z + 7 - 4\sqrt{3}} \right| - 100.$$

V úlohách **1710** až **1716** nájdite vektor poľa, vektorové krivky a ekvipotenciálne hladiny vektorového poľa, ak je daný jeho vektorový potenciál. Nájdite aj žriedla resp. víry tohto poľa.

1710. $w = 3\,\mathrm{i}z$. **1711.** $w = z^2$.

1712. $w = 1/z^2$. **1713.** $w = \sqrt{z - 1}$.

1714. $w = \ln z$.

1715. $w = (1 + \mathrm{i}) \ln z$.

1716. $w = \mathrm{i} \ln [z/(z - 1)]$.

1717. Prúdová funkcia vektorového poľa je:

$$v = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi y}{\operatorname{tgh} \pi x}.$$

Nájdite ekvipotenciálne krivky a komplexný potenciál tohto vektorového poľa.

V úlohách **1718** až **1722** nájdite pre daný komplexný potenciál rovinného prúdenia kvapaliny ekvipotenciálne krivky a prúdnice. Nájdite rýchlosť prúdenia $\mathbf{v}(z)$, singulárne a kritické body prúdenia, výdatnosť žriediel a cirkuláciu vírov, dipólové momenty a zistite vlastnosti prúdenia v bode ∞.

1718. $w = cz$ $(c = \alpha + \mathrm{i}\beta)$, α, β sú reálne čísla.

1719. $w = z^n$.

1720. $w = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln z$.

1721. $w = \dfrac{\Gamma + \mathrm{i}Q}{2\pi \mathrm{i}} \ln \dfrac{z - a}{z - b}$.

1722. $w = \ln \dfrac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}$, $a > 0$.

1723. Majme žriedlo s výdatnosťou Q/a v bode $z = a$ a nor s výdatnosťou $-Q/a$ v bode $z = -a$. Prúdenie vytvorené touto dvojicou v prípade, že $a \to 0$ nazýva sa *prúdením bodového dipólu* v bode $z = 0$ s momentom $M = 2Qa$. Nájdite jeho komplexný potenciál.

1724. Dva víry s cirkuláciami Γ a $-\Gamma$ sú v bodoch z_1, z_2, $z_1 \neq z_2$. Dokážte, že prúdnice tohto rovinného prúdenia kvapaliny spôsobeného týmito vírmi sú kružnice.

1725. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny, ak jeho prúdnice majú tvar $x/(x^2 + y^2) = C$.

1726. Prúdnice rovinného prúdenia kvapaliny sú lemniskáty $\varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Nájdite pomer veľkosti rýchlosti prúdenia v bodoch $z = a$, $z = a(\sqrt{3/8} - \mathrm{i}\sqrt{1/8})$, a je reálne číslo.

1727. Prúdenie v polrovine $\operatorname{Im} z > 0$ je vytvorené žriedlom v bode $z = a\mathrm{i}$. Dokážte, že prúdnice sú hyperboly $z^2 + a^2 = (c + 2\mathrm{i}) \operatorname{Re} z . \operatorname{Im} z$.

1728. Nájdite tok kvapaliny cez jednoduchú uzavretú po čiastkach hladkú krivku C, vnútri ktorej leží bod $z = 0$, ak komplexný potenciál tohto prúdenia je $w = \ln z$.

1729. Komplexný potenciál rovinného prúdenia kvapaliny je $w = \ln \sinh \pi z$. Nájdite tok kvapaliny cez kružnicu $2|z| = 3$ a cirkuláciu rýchlosti prúdenia po tejto kladne orientovanej kružnici.

1730. Komplexný potenciál rovinného prúdenia kvapaliny je $w = \operatorname{arctg} z^2$. Nájdite tok a cirkuláciu rýchlosti prúdenia kvapaliny cez kladne orientovanú kružnicu $|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}| = 1$.

1731. Prúdenie je dané funkciou $w = 2\,\mathrm{i} \ln (z^2 - a^2)$. Nájdite cirkuláciu rýchlosti prúdenia po kladne orientovaných kružniciach $|z - a| = a$, $|z + a| = a$.

1732. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny, ak jeho prúdová funkcia je

$$\mathbf{v} = \ln (\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\varphi + a^4),$$

kde $z = \varrho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

1733. Prúdenie kvapaliny je spôsobené žriedlom $z = a$ s výdatnosťou Q. Nájdite prúdnice a ekvipotenciálne krivky tohto prúdenia.

1734. Nájdite komplexný potenciál prúdenia s vírom v bode $z = a\,\mathrm{i}$ a s cirkuláciou Γ $[\mathbf{v}(\infty) = 0]$.

1735. Prúdenie kvapaliny má v bode $z = 0$ vír s cirkuláciou Γ a žriedlo s výdatnosťou Q (vírivé žriedlo). Dokážte, že prúdnice sú logaritmické špirály.

1736. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny vytvoreného žriedlom s výdatnosťou Q v bode $z = -1$ a s norom výdatnosti Q v bode $z = 0$, pričom $\mathbf{v}(\infty) = 0$.

1737. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny v hornej polrovine vytvoreného žriedlom s výdatnosťou Q v bode $z = a\,\mathrm{i}$, ak rýchlosť $\mathbf{v}(\infty)$ je rovnobežná s reálnou osou. Nájdite rýchlosť prúdenia v bode $z = 0$.

1738. Dokážte, že reálna os je prúdnica, ak prúdenie je vytvorené žriedlami s výdatnosťou Q, ktoré sú v bodoch $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$, $z_2 = a - b\,\mathrm{i}$.

1739. V bodoch $z_1 = a$, $z_2 = 1/a$ sú žriedla s výdatnosťou Q a v bode $z = 0$ nor s výdatnosťou $-Q$. Dokážte metódou zrkadlenia, že kružnica $|z| = 1$ je prúdnicou tohto prúdenia.

1740. Nájdite prúdenie kvapaliny zvonka kružnice $|z| = 1$ spôsobené žriedlom výdatnosti Q v bode $z = a$, kde $a > 1$.

1741. Nájdite komplexný potenciál a prúdnice rovinného prúdenia kvapaliny v prvom kvadrante, ak v bode $z = 1 + \mathrm{i}$ je žriedlo s výdatnosťou Q a v bode $z = 0$ nor s výdatnosťou $-Q$.

1742. Nájdite prúdenie kvapaliny v oblasti $|z| > 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ vytvorené vírom s cirkuláciou Γ v bode $z = a\,\mathrm{i}$, $a > 1$.

1743. Nájdite prúdenie kvapaliny v kruhovom výseku $0 < \arg z < \pi/3$, $|z| < 1$, ak v bode $z_0 = a(\sqrt{3} + 1)/2$ je žriedlo s výdatnosťou Q.

1744. Žriedlo s výdatnosťou $Q = 2\pi$ je v bode $z_0 = a + b\,\mathrm{i}$, kde $a > 0$, $0 < b < \pi/2$. Dokážte, že prúdenie z tohto žriedla v polpáse $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi/2$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ je dané komplexným potenciálom

$$w = \ln [\sinh (z - z_0) \sinh (z + z_0) \sinh (z - \overline{z_0}) \sinh (z + \overline{z_0})].$$

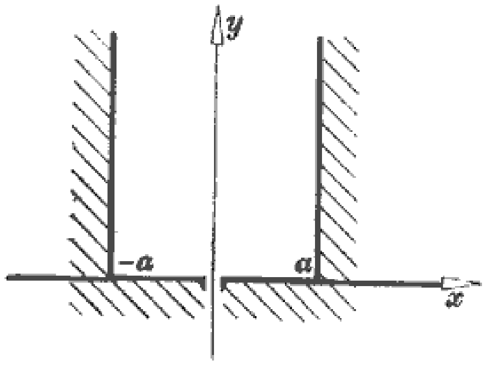
1745. Nájdite prúdenie v páse $|\mathrm{Re}\, z| < \pi/2$, ak v bode z_0 je žriedlo s výdatnosťou Q, pričom:

a) $z_0 = 0$, b) $z_0 = \pi/2 + h\,\mathrm{i}$.

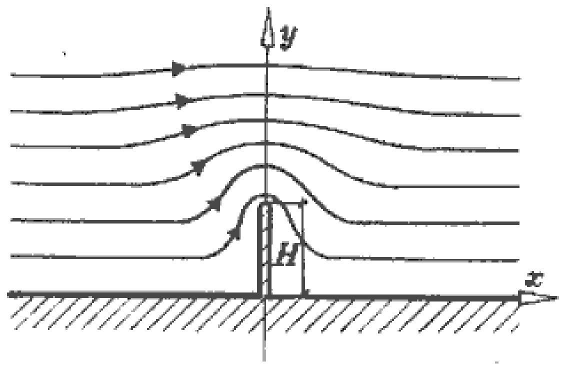
1746. Prúdenie kvapaliny je dané žriedlami s výdatnosťou $Q = 2$ v bodoch $z = 2k\pi \mathrm{i}$, k je celé číslo a postupným prúdením s rýchlosťou $\mathbf{v}(z) = -v$, $v > 1$. Dokážte, že kvapalina z týchto žriedieľ sa môže dostať iba do bodov, pre ktoré platí $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \ln \frac{v+1}{v-1}$.

1747. Dokážte, že pri prúdení z predchádzajúcej úlohy je oblasť prúdenia zo žriedla $z = 0$ ohraničená krivkou $\operatorname{cotgh} x \,.\, \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} vy$. Dokážte, že vzdialenosť jej vetiev pre $x \to \infty$ je $2\pi/(v + 1)$.

1748. Nájdite prúdenie ideálnej kvapaliny v priamom potrubí s výškou $2H$, v ktorom je kolmo na jeho stenu postavená prepážka výšky H. Prietok v potrubí je Q.



Obr. 76



Obr. 77

1749. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny v potrubí, ktorého steny majú tvar parabol $z = t^2 - 1/4 + \mathrm{i}t$, $z = t^2/4 - 1 + \mathrm{i}t$, $t \in (-\infty, \infty)$, ak prietok kvapaliny potrubím je Q.

1750. Nájdite komplexný potenciál rovinného prúdenia kvapaliny, ktorá prúdi z ľavej polroviny do pravej polroviny otvorom na imaginárnej osi medzi bodmi $z_1 = -\mathrm{i}$ a $z_2 = \mathrm{i}$. Prietok je Q.

1751. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny v nádobe podľa *obr. 76*, ak v strede jej dna je malý otvor s prietokom Q.

1752. Nájdite prúdenie kvapaliny, pri obtekaní prepážky výšky H nad vodorovnou rovinou, s rýchlosťou $\mathbf{v}(\infty)$ (*obr. 77*).

1753. Nájdite prúdenie, ktoré vzniká pri obtekaní polkruhu $|z + 4/3| < 2/3$, $\operatorname{Im} z > 0$, ak $\mathbf{v}(\infty) = -v$.

1754. Nájdite komplexný potenciál prúdenia $w = f(z)$ pre spojité symetrické obtekanie eliptického valca s rezom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ktoré v bode $z = \infty$ má rýchlosť $\mathbf{v}(\infty) = v$.

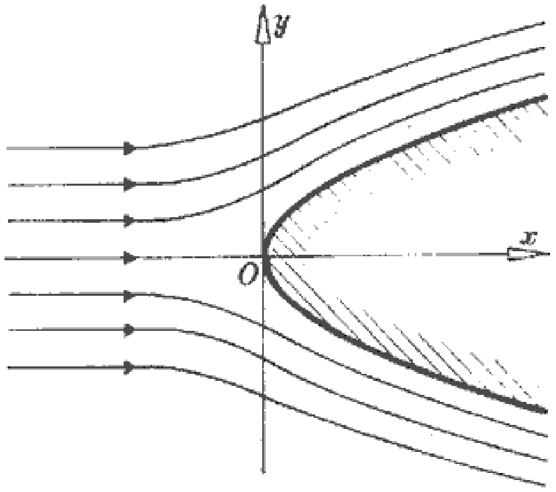
V úlohách 1755 až 1757 nájdite obtekanie daných profilov.

1755. Paraboly $z = \mathrm{i}t + t^2/2p$, $t \in (-\infty, \infty)$.

1756. Pravej vetvy hyperboly $z = \frac{a}{c}\sqrt{b^2 + t^2} + it$, $t \in (-\infty, \infty)$.

1757. Polpriamky $\operatorname{Re} z < -1$, $|\operatorname{Im} z| = \pi$.

1758. Nájdite prúdenie kvapaliny pri obtekaní paraboly $z = it + t^2/2p$, $t \in (-\infty, \infty)$, ak prúdenie je symetrické podľa reálnej osi a smeruje k parabole (pozri *obr. 78*). Ukážte, že bod $z = 0$ je bodom rozvetvenia prúdenia.



Obr. 78

1759. Nájdite komplexný potenciál prúdenia kvapaliny obtekajúcej valec $|z| = 1$, ak prúdenie je vytvorené žriedlom s výdatnosťou Q v bode $z = a$ $(a > 1)$, pričom $\mathbf{v}(\infty) = 0$.

1760. Riešte úlohu ako v **1759**, ak prúdenie je dané namiesto žriedla vírom s cirkuláciou Γ.

1761. Nájdite obtekanie doštičky tvaru $|\operatorname{Re} z| \leqq c$, $\operatorname{Im} z = 0$:

a) s danou rýchlosťou $\mathbf{v}(\infty)$ bez cirkulácie,

b) s danou rýchlosťou s cirkuláciou určenou podmienkou, aby jeden z koncov doštičky bol bodom zjednotenia prúdenia (Čaplyginova veta).

1762. Nájdite obtekanie Žukovského profilu s danou rýchlosťou $\mathbf{v}(\infty)$ a cirkuláciou Γ, ak bod vratu profilu je bodom zjednotenie prúdenia.

Nech prúdenie kvapaliny je určené komplexným potenciálom $w = f(z)$ s izolovanými singulárnymi bodmi a_k, $k = 1, 2, \ldots$ Ak prúdenie je stacionárne (s časom sa nemení), tak body a_k sú pevné. Ak prúdenie nie je stacionárne, potom body a_k sa pohybujú v rovine z, pričom pre rýchlosť k-tého bodu platí:

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} = \left[\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_k(z)}{\mathrm{d}z}\right)}\right]_{z = a_k},$$

kde $f_k(z) = f(z) - H(z, a_k)$ a $H(z, a_k)$ je súčet hlavnej (normálnej) časti Laurentovho radu funkcie $f(z)$ v bode a_k pre medzikružie $|z - a_k| < \varrho$, $\varrho > 0$ a logaritmického člena, ak a_k je vírové žriedlo.

1763. Pozdĺž reálnej osi je nepriepustná stena. V bode $z = hi$ je vír s cirkuláciou Γ, ktorý vytvára nestacionárne prúdenie v hornej polrovine $\operatorname{Im} z > 0$. Dokážte, že vír sa pohybuje rovnobežne s osou o_x rýchlosťou $\Gamma/(4\pi h)$.

1764. Nestacionárne prúdenie v prvom kvadrante $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ je dané vírom v bode $z = \xi + \eta i$ s cirkuláciou Γ. Dokážte, že trajektória víru je $\xi^{-2} + \eta^{-2} = c$ a jeho rýchlosť je

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi(\xi^2 + \eta^2)}\left(\frac{\xi^2}{\eta} - i\frac{\eta^2}{\xi}\right).$$

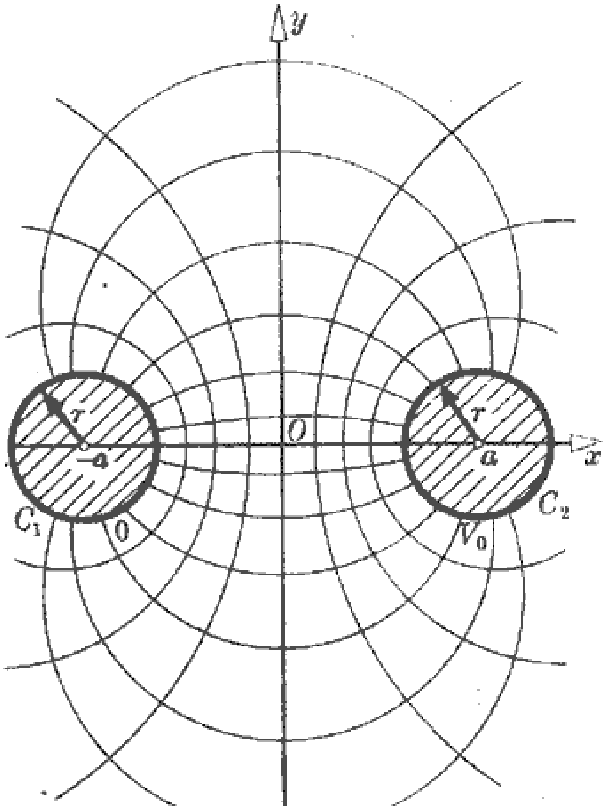
1765. Nájdite tok elektrostatického poľa cez kružnicu $|z| = 3$, ak jeho komplexný potenciál je $w = \ln(z^2 + 4) + 3i \ln z$.

1766. Nájdite náboje a ich polohu, ktoré vytvárajú elektrostatické pole s komplexným potenciálom $w = 2q \mathrm{i} \ln (z^2 + 1/z^2)$.

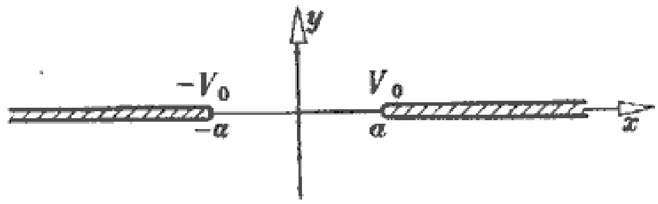
1767. Nájdite celkový náboj rozložený v kruhu $|z| < n + 1/2$, n je prirodzené číslo, ak komplexný potenciál poľa je $w = 2q \mathrm{i} \ln (1/\sin \pi z)$.

1768. Nájdite komplexný potenciál elektrostatického poľa vytvoreného nekonečne dlhým priamym drôtom, ktorý je kolmý na rovinu z a pretína ju v bode O.

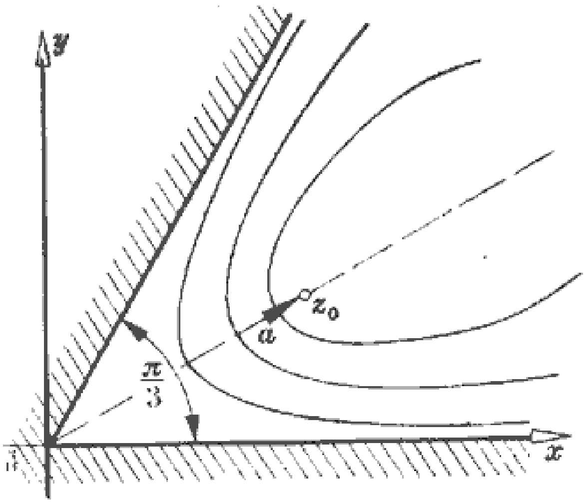
1769. Nájdite komplexný potenciál a ekvipotenciálne krivky elektrostatického poľa vytvoreného dvoma rovnobežnými drôtmi nabitými kladným nábojom q na jednotku dĺžky, ktoré sú od seba vzdialené $2h$.



Obr. 79



Obr. 80



Obr. 81

1770. Nájdite komplexný potenciál elektrostatického poľa vytvoreného dvoma súosovými rotačnými valcami s polomermi r, R, $r < R$. Dokážte, že kapacita takého kondenzátora je $\frac{1}{2}\left(\ln \frac{R}{r}\right)^{-1}$ na jednotku dĺžky.

1771. Nájdite komplexný potenciál elektrostatického poľa medzi dvoma valcami $|z| = 1$, $|z - 1| = 4$, ak potenciál prvého valca je 1 a druhý valec je uzemnený. Nájdite kapacitu takéhoto kondenzátora.

1772. Nájdite elektrostatické pole dvojžilového vedenia (pozri *obr. 79*), ak potenciálny rozdiel medzi obidvoma žilami je V_0.

1773. Nájdite elektrostatické pole kondenzátora, ktorý sa skladá z dvoch nekonečne veľkých dosiek, ktoré ležia v jednej rovine a rez kolmý na túto rovinu má tvar ako na *obr. 80*. Rozdiel potenciálov na doskách je $2V_0$.

1774. V bode $z = 2$ je náboj q. Imaginárna os je uzemnená. Nájdite potenciál v bode $z = 1$.

1775. Na krivke $|z - 1| + |z + 1| = 4$ sa potenciál rovná 1 a na úsečke medzi jej ohniskami je 0. Nájdite potenciál v bode $z = i$.

1776. Nájdite elektrostatické pole v polkruhu $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, ak na oblúku $0 < \arg z < \pi/2$, $|z| = 1$ je potenciál $-V_0$, na oblúku $\pi/2 < \arg z < \pi$, $|z| = 1$ je potenciál V_0 a na priemere $-1 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$, $\operatorname{Re} z = 0$ je potenciál 0. Body $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ sú izolujúce body.

1777. Nájdite elektrostatické pole zvonku elipsy $z = a\cos t + ib\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, ak elipsa je jednou z ekvipotenciálnych hladín tohto poľa.

1778. Na lomenej čiare $z = x + \pi i$, $x < 0$, $z = iy$, $y > \pi$ potenciál sa rovná π. Na osi o_x potenciál sa rovná 0. Nájdite elektrostatické pole v oblasti ohraničenej danými čiarami použitím Christoffelovho-Schwarzovho integrálu.

1779. Nájdite elektrostatické pole zvonku štvorca $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, na ktorom je náboj q.

1780. Na kružnici $|z - 2i| = 1$ je hustota náboja $\sigma = 1$. Ako sa rozloží náboj na tejto kružnici, ak uzemníme priamku $\operatorname{Im} z = 0$.

1781. Nájdite elektrostatické pole v priestore medzi dvoma rotačnými valcami s rovnobežnými osami, ktorých priesečnice s rovinou kolmou na ich osi sú kružnice $|z| = 1$, $|z - 1| = 5/2$. Rozdiel potenciálov medzi valcami je $V_0 = 1$. Nájdite najmenšiu a najväčšiu hustotu náboja na valcoch.

1782. Na polpriamke $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z > 1$ je potenciál V_0 a na priamke $\operatorname{Im} z = 0$ sa rovná nule. Nájdite hustotu náboja σ na priamke $\operatorname{Im} z = 0$, ak viete, že $\sigma = |\mathbf{E}|/4\pi$.

V úlohách 1783 až 1787 nájdite komplexný potenciál elektrostatických polí vytvorených danými bodovými nábojmi v daných oblastiach:

1783. V hornej polrovine $\operatorname{Im} z > 0$ nábojom $2q$ v bode z_0.

1784. V kruhu $|z| < R$ nábojom $2q$ v bode z_0, $|z_0| < R$.

1785. Na vonkajšku kruhu $|z| > R$ nábojom $2q$ v bode z_0, $|z_0| > R$.

1786. Na vonkajšku elipsy $|z - e| + |z + e| = 2a$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ nábojom $2q$ v bode $z = a$.

1787. Na vonkajšku štvorca $|\operatorname{Re} z| < d$, $|\operatorname{Im} z| < d$ nábojom $2q$ v bode $z = \infty$.

1788. Nájdite elektrostatické pole medzi dvoma rovinami, ktoré zvierajú uhol $\pi/3$, ak v rovine ich symetrie vo vzdialenosti a od ich priesečnice je homogénne nabitá priamka s lineárnou hustotou q (pozri *obr. 81*). Nájdite aj ekvipotenciálne hladiny tohto poľa.

V úlohách **1789** až **1792** nájdite elektrostatické pole vytvorené daným dipólom v daných oblastiach:

1789. V kruhu $|z| < R$ dipólom v bode a s momentom p.

1790. Na vonkajšku kruhu $|z| > R$ dipólom v bode a s momentom p.

1791. Na okolí úsečky $|\operatorname{Re} z| < R$, $\operatorname{Im} z = 0$, dipólom v bode ∞ s momentom p.

1792. Na vonkajšku elipsy $|z - e| + |z + e| = 2a$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ dipólom v bode ∞ s momentom p.

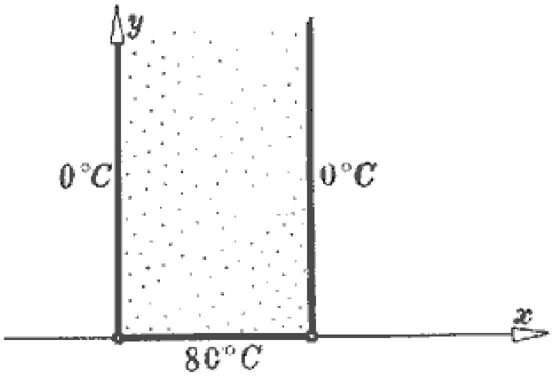
1793. Na kružnici $|z - 5\mathrm{i}| = 4$ je teplota $100°$ C a na reálnej osi $\operatorname{Im} z = 0$ je nulová. Nájdite teplotu v bode $z = \mathrm{i} + 1$.

1794. Na kružnici $|z| = 1$ je teplota $0°$ C a na kružnici $|z - 1| = 5/2$ je teplota $100°$ C. Nájdite rozloženie teploty v priestore medzi kružnicami.

1795. Na elipse s polosami $2, \sqrt{3}$ sa teplota rovná $0°$ C a na úsečke medzi ohniskami je teplota $100°$ C. Nájdite rozloženie teploty.

1796. Nájdite rozloženie teploty vnútri polkruhu $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, ak teplota na polkružnici $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ je $0°$C a na priemere $|\operatorname{Re} z| < 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ rovná sa $10°$ C.

1797. Nájdite rozloženie teploty kruhového výseku $0 < \arg z < \alpha$, $|z| < a$, ak teplota na jej ramenách sa rovná $0°$ C a na oblúku $100°$ C.



Obr. 82

1798. Nájdite rozloženie teploty v doske ohraničenej dvoma rovnobežnými stenami, ktoré udržujeme na konštantnej teplote $0°$ C a hranou, ktorá je zohriata na $80°$ C (pozri *obr. 82*).

V úlohách **1799** až **1801** nájdite rozloženie teploty v daných oblastiach, ak tepelné pole je vytvorené tepelným zdrojom v bode z_0 s príkonom Q a na hranici oblasti je teplota konštantná:

1799. V hornej polrovine $\operatorname{Im} z > 0$, $z_0 = a$.

1800. V kruhu $|z| < R$, $z_0 = a$,

1801. V polpáse $|\operatorname{Re} z| < a$, $\operatorname{Im} z > 0$, $z_0 = \mathrm{i}h$, $h > 0$.

Nech $u(\zeta) = u(R, \vartheta)$ je reálna funkcia definovaná na kružnici $\zeta = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Potom integrál

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \vartheta)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\vartheta,$$

sa nazýva *Poissonovým integrálom* ($z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$).

Integrál

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\vartheta + iv(0),$$

kde $v(0)$ je reálne číslo, nazýva sa *Schwarzovým integrálom* ($\zeta = Re^{i\vartheta}$, $z = re^{i\varphi}$).

Veta 6. Nech $u(\zeta) = u(R, \vartheta)$ je po čiastkach spojitá reálna funkcia na kružnici $\zeta = R\,e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Potom:

a) Funkcia

$$u(z) = u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \vartheta)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\,r\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\,d\vartheta \tag{1}$$

je harmonickou funkciou na kruhu $|z| < R$, $z = r\,e^{i\varphi}$ a táto funkcia v bodoch spojitosti ζ na kružnici $\zeta = R\,e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ nadobúda hraničné hodnoty $u(\zeta)$, t. j. platí:

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = u(\zeta),$$

ak z sa blíži k ζ po ľubovoľnej krivke, ktorá leží v kruhu $|z| < 1$.

b) Funkcia

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\vartheta + iv(0) \tag{2}$$

je analytická na kruhu $|z| < R$ pričom funkcia $u(z)$ zo vzťahu (1) je jej reálnou časťou.

Príklad. Nájdime harmonickú funkciu na jednotkovom kruhu, ktorá na oblúku $\zeta = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in \langle\alpha, \beta\rangle$ hraničnej kružnice nadobúda hraničnú hodnotu 1 a na zvyšku hraničnej kružnice nadobúda hraničnú hodnotu 0.

Riešenie. Podľa vety 6 počítame Poissonov integrál

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\,d\vartheta.$$

Použijeme substitúciu $\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta - \varphi}{2} = t$ a po úprave dostaneme:

$$u(z) = \frac{1 - r^2}{\pi}\int_{\frac{\alpha-\varphi}{2}}^{\frac{\beta-\varphi}{2}} \frac{dt}{(1 - r)^2 + t^2(1 + r)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1 - r^2}{(1 + r)^2}\int_{\frac{\alpha-\varphi}{2}}^{\frac{\beta-\varphi}{2}} \frac{dt}{\left(\frac{1 - r}{1 + r}\right)^2 + t^2}.$$

Hľadaná harmonická funkcia je:

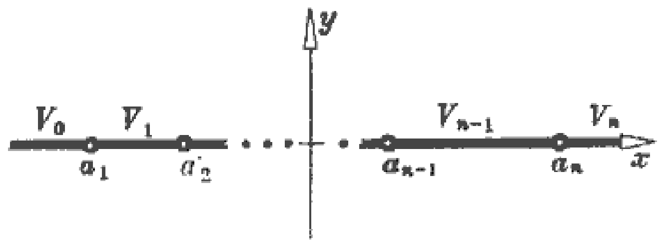
$$u(z) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1 + r}{1 - r}\operatorname{tg}\frac{\beta - \varphi}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + r}{1 - r}\operatorname{tg}\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)\right],$$

kde $z = r\,e^{i\varphi}$.

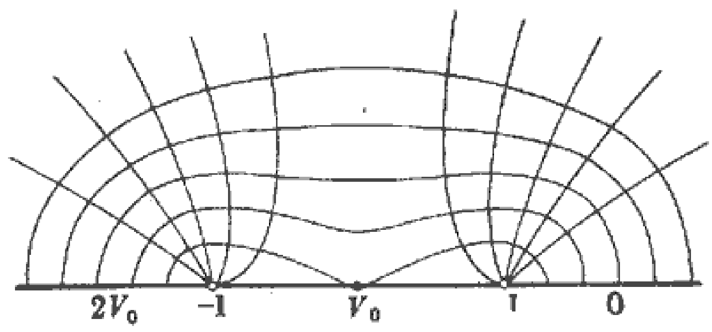
1802. Nájdite elektrostatické pole v polrovine s $n + 1$ elektródami, ktorých potenciály sú $V_0, V_1, \ldots, V_n$ a ležia na reálnej osi, pričom izolujúce body sú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (pozri *obr. 83*).

1803. Nájdite elektrostatické pole v polrovine s troma elektródami na reálnej osi s potenciálmi $2V_0$, V_0, 0 a izolujúcimi bodmi $z_1 = -1$, $z_2 = 1$. Nájdite siločiary tohoto poľa (pozri *obr. 84*).

1804. Nájdite komplexný potenciál elektrostatického poľa v hornej polrovine so štyrmi elektródami na reálnej osi s potenciálmi 0, V_0, $V = V_1 + (V_2 - V_1)\,x$, 0 a izolujúcimi bodmi $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$.



Obr. 83



Obr. 84

7. VÝSLEDKY

1. Nekonečné rady

1,1. Číselné rady

1. $1/4 + 1/4 + 1/64 + 1/16 + 1/1\,024 + \ldots$ **2.** $1/3 + 5/7 + 9/13 + 13/21 + 17/31 + \ldots$ **3.** $0 + 1/2! - 2/3! + 1/4! + 0 + \ldots$ **4.** $1/(3n-2)$. **5.** $n/3^{n-1}$. **6.** $1/(2n+1)(2n-1)$. **7.** $n!/(2n-1)!!$. **8.** $s = 1$. **9.** $s = 0$. **10.** $s = 1/2$. **11.** $1/2$. **12.** $1/2$. **13.** 1. **14.** $2/5$. **15.** $-5/12$. **16.** $54/110$. **17.** $6/5$. **18.** $9/4$. **19.** a) $(a \sin \alpha)/(1 - 2a \cos \alpha + a^2)$, b) $(a \cos \alpha - a^2)/(1 - 2a \cos \alpha + a^2)$. **20.** $1 + 5\pi/4$. **21.** Diverguje. **22.** a) $s = 1/5$; 400 členov, b) $s = 1/8$; 1 768 členov. **23.** Diverguje. **24.** Diverguje. **25.** Konverguje. **26.** Konverguje. **27.** Diverguje. **28.** Konverguje. **29.** Diverguje. **30.** Konverguje. **31.** Diverguje. **32.** Konverguje. Návod: Porovnajte s radom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$. **33.** Konverguje. **34.** Konverguje pre $a > e$. **35.** Konverguje. **36.** Diverguje. **37.** Konverguje. **41.** Konverguje. **42.** Diverguje. **43.** Konverguje. **44.** Konverguje. **45.** Konverguje. **46.** Diverguje. **47.** Konverguje. **48.** Konverguje. **49.** Diverguje. **50.** Konverguje. **51.** Konverguje. **52.** Konverguje **53.** Konverguje. **54.** Konverguje. **55.** Konverguje. **56.** Diverguje. **57.** Konverguje. **58.** Konverguje. **59.** Konverguje pre $p > 2$. **60.** Konverguje. **61.** Konverguje. **62.** Konverguje. **63.** Diverguje. **64.** Konverguje. **65.** Konverguje pre $\alpha > 1$, diverguje pre $\alpha \leqq 1$. **66.** Diverguje. **67.** Konverguje. **68.** Konverguje. **69.** Diverguje. **70.** Konverguje. **71.** Konverguje. **72.** Diverguje. **73.** Konverguje. **74.** Diverguje. **75.** Diverguje. **76.** Konverguje. **77.** Konverguje. **78.** Diverguje. **79.** Konverguje. **80.** Konverguje. **81.** Diverguje. **83.** Konverguje. **84.** Konverguje. **85.** Konverguje. **86.** Konverguje. **87.** Diverguje. **88.** Diverguje. **89.** Relatívne konverguje. **90.** Diverguje. **91.** Relatívne konverguje. **92.** Absolútne konverguje. **93.** Absolútne konverguje. **94.** Absolútne konverguje. **95.** Absolútne konverguje. **96.** Absolútne konverguje. **97.** Relatívne konverguje. **98.** Absolútne konverguje. **100.** a) $1{,}6 < s < 1{,}7$, b) $1{,}206 < s < 1{,}207$, c) $0{,}12 < s < 0{,}15$. **101.** Konverguje. **102.** $V = 2\pi h^3 R^2/3(4R^2 + 3h^2)$.

1,2. Operácie s radmi

112. $14 + \frac{14}{17}$. **113.** a) môže byť konvergentný, b) nemôže byť konvergentný. **114.** $s = \frac{1+x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. **115.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$. **116.** a) $\sum_{n=1}^{\infty} n a^{2n-2}$, b) $(n+1)$-vý člen radu je $\frac{a^n}{n!}\left[1 - \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \ldots (-1)^n\right]$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{n-j} j^{3/2}}\right)$, d) $1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \ldots$ **117.** $\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1}$. **118.** $\frac{25}{49}$. **119.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$, diverguje. **122.** $\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}_{4} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{4} - \frac{1}{4} \ldots$ **123.** $\underbrace{1 + \frac{1}{3}}_{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}}_{3} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17}}_{4} - \frac{1}{6} \ldots$

1,3. Postupnosť funkcií

124. $(-\infty, \infty)$, $f(x) = x/2$. **125.** $(-1, 1\rangle$, $f(x) = 0$ pre $x \in (-1, 1)$, $f(1) = 5/6$. **126.** $(-\infty, \infty)$, $f(x) = e^x$. **127.** $(0, \infty)$, $f(x) = \ln x$. **128.** $(-\infty, \infty)$, $f(x) = 0$. **129.** $(-\infty, \infty)$, $f(x) = x$. **130.** $N = (-\infty, \infty) - \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (\{2k\pi + \pi\} \cup \{2k\pi + 3\pi/2\})$, $f(x) = 1$ pre $x \in M = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (\{2k\pi\} \cup \{2k\pi + \pi/2\})$, $f(x) = 0$ pre $x \in N - M$. **131.** $\langle 0, \infty)$, $f(x) = 0$ pre $x > 0$, $f(0) = 1$. **132.** a) $\langle -1, 1\rangle$, $f(x) = 0$; b) $\langle -1, 1\rangle$, $f(x) = 1/x$ pre $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$, $f(0) = 0$. **133.** áno. **134.** nie. **135.** áno. **136.** áno. **137.** nie. **138.** áno. **139.** áno. **140.** áno. **141.** nie. **142.** áno. **143.** nie. **147.** 0. **149.** áno.

1,4. Funkcionálne rady

150. $1/(1 + 2x)$, $x \in (-1/2, 1/2)$. **151.** $1 + x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$ **152.** $n > 10$; $n > 1\,000$. **153.** $1/[2(x + 1)]$, $1/[2(x + 2n + 1)]$, $n \geqq 25$. **154.** Súčet radu je 1 a zvyšok po n-tom člene $R_n(x) = x^{n+1}$; $n = 65$; také n neexistuje. **155.** $(-\infty, \infty)$. **156.** $(-e, e)$. **157.** $\langle -1, 1\rangle$. **158.** $(-2, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2)$. **159.** $(-1, 1)$. **160.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. **161.** Všetky čísla okrem $0, -1, -2, \dots -n, \dots$. **162.** $(-1, 1)$. **163.** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **164.** $(1, \infty)$. **165.** $(-\infty, 0)$. **166.** $(-\infty, \infty)$. **167** $(-\infty, \infty)$. **168.** $(-\infty, \infty)$. **169.** $(-\infty, \infty)$ **170.** $(0, \infty)$. **171.** $(0, \infty)$. **172.** $(1/2e, e/2)$. **173.** $(1, \infty)$ **174.** $(0, \infty)$. **175.** $(1, \infty)$; $(-\infty, 0\rangle$. **176.** (e, ∞); $(0, 1\rangle$. **177.** $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$, k je celé číslo; v ostatných bodoch je divergentný. **178.** $n \geqq 7$. **191.** $(-\infty, \infty)$. **194.** $\dfrac{x^2 + 1}{x}$, nespojitá v čísle 0. **195.** $1 - x$, pre $x > 0$; 0 pre $x = 0$; $-1 - x$ pre $x < 0$. **199.** 1/2. **201.** a) $\ln \dfrac{3}{2}$; b) $\dfrac{1}{3} \ln 2 + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **202.** $-\ln(1 - x)$, $x \in \langle -1, 1)$. **203.** $\operatorname{arctg} x$, $|x| \leqq 1$. **204.** $1 + \dfrac{1 - x}{x} \ln(1 - x)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. **205.** $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$, $x \in (-1, 1)$. **206.** $\dfrac{1}{1 - x}$, $x \in (-1, 1)$.

1,5. Mocninové rady

207. 1/5. **208.** 0. **209.** ∞. **210.** $\sqrt{2}/2$. **211.** $\sqrt{2}/3$. **212.** 1. **213.** 4e/27. **214.** 1. **215.** 2. **216.** e. **217.** $(-\infty, \infty)$. **218.** $\langle -e, e\rangle$. **219.** $\langle -1, 1\rangle$. **220.** $(-1/3, 1/3)$. **221.** $\langle -1, 1)$. **222.** $(-\infty, \infty)$. **223.** $\langle -1, 1)$. **224.** $\langle -0{,}1; 0{,}1)$. **225.** $(-2, 2)$. **226.** $(-4, 4)$. **227.** $\langle -1, 1\rangle$. **228.** $(-1, 1)$. **229.** $(-1/e, 1/e)$. **230.** $\langle -1, 1\rangle$. **231.** $x = -3$. **232.** $\langle 0, 2\rangle$. **233.** $1/3 - (x - 3)/9 + (x - 3)^2/27 + \dots$. **234.** $1 + \dfrac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 5)}{2^{n-1}} \dfrac{(x - 1)^n}{n!}$. **235.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n a}{n!} x^n$. **236.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$. **237.** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n 2^n}$. **238.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n} \sin \dfrac{\pi n}{4} \dfrac{x^n}{n!}$. **239.** $1 + \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$, $\langle -1, 1\rangle$. **240.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) x^n$, $(-1, 1)$. **241.** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n + 1)}{2} (-x)^{n-1}$, $(-1, 1)$. **242.** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$, $(-2, 2)$. **243.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$, $(-1, 1)$. **244.** $-x - x^3 - \dfrac{1}{2} x^5 - \dfrac{1}{4} x^7 - \dfrac{1}{8} x^9 - \dots$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. **245.** $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2^{n-1}}{(n - 1)!} x^n$, $(-\infty, \infty)$. **246.** $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n - 1}{n!} x^n$, $(-\infty, \infty)$. **247.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $(-\infty, \infty)$. **248.** $2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n + 2)\, 3^{2n}}{(2n + 1)!} x^{2n+1}$,

$(-\infty, \infty)$. **249.** $x - x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \ldots, (-\infty, \infty)$. **250.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n + (-1)^n}{n} x^n$, $(-1/2, 1/2\rangle$.

251. $\displaystyle -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{3} \frac{x^n}{n}$. **252.** $\displaystyle x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)\,n}$, $\langle -1, 1\rangle$. **253.** $\displaystyle \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} 2^n + 1] \frac{x^n}{n}$,

$(-1/2, 1/2)$. **254.** $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n$, $(-\infty, \infty)$. **255.** $\ln 2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} -$

$- \dfrac{7x^4}{192}$. **256.** $1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5x^4}{6}$. **257.** $1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8}$. **258.** $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12} - \dfrac{x^3}{720}$. **260.** a_n

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1}$. **261.** $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\langle -1, 1\rangle$. **262.** $x +$

$\displaystyle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\langle -1, 1\rangle$. **263.** $\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\langle -1, 1\rangle$. **264.** $x +$

$+ x^2 - \dfrac{x^3}{3} + \ldots$, $\langle -1, 1\rangle$. **265.** $\displaystyle 8 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n$, $(-\infty, \infty)$. **266.** $1 +$

$\displaystyle + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 3^{2n-1})}{(2n)!} x^{2n}$, $(-\infty, \infty)$. **267.** $-3 + 7x - 11x^2 + \ldots, (-1, 1)$. **268.** $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{E(n/2)} \cdot$

$\cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. **269.** $\displaystyle 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$, $(-1, 1)$. **270.** $x -$

$- \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) x^3 - \ldots, (-1, 1)$. **271.** $x^2 + \dfrac{2}{3} \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \dfrac{x^6}{3} +$

$+ \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \dfrac{x^8}{4} + \ldots, (-1, 1)$. **272.** $\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $(-1, 1)$. **273.** $(1 + x^2)/(1 - x^2)^2$.
274. $1/(1-x)^2$. **275.** $-(1/2) \ln |1 - (x-3)^2|$. **276.** $2/(2-x)^2$. **277.** $1/(1-x)^3$. **278.** $(4x-2)/(3-2x)^2$
279. 16 **280.** 256/1 323. **281.** $1 - \ln 4$. **282.** $\ln (2/3)$. **283.** 115/128. **284.** $1 - \ln 2$.
285. $x/(1 + x^2)$. **286.** $(1-2x)/(1+x)^2$. *Návod:* Sčítajte daný rad s jeho x-násobkom.

287. $x/(1-x)^2$. **288.** $\displaystyle c + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}$, $(-\infty, \infty)$. **289.** $\displaystyle c + \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}$,

$(-\infty, 0), (0, \infty)$. **290.** $\displaystyle c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$, $\langle -1, 1\rangle$. **291.** $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

292. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$. **293.** $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}$. **294.** $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$.
295. 1,5874. **296.** 2,1831. **297.** 2,0005. **298.** 1,9955. **299.** 1,6487. **300.** 0,7788. **301.** 0,4794.
302. 0,3090. **303.** 0,9848. **304.** 0,2493. **305.** 1,4281. **306.** 0,1973. **307.** 0,6931. **308.** 1,6094. **309.** 0,4343.
310. 0,497. **311.** 0,747. **312.** 32,831. **313.** 0,071. **314.** 0,323. **315.** 0,783.

Taylorov rad pre funkcie viac premenných

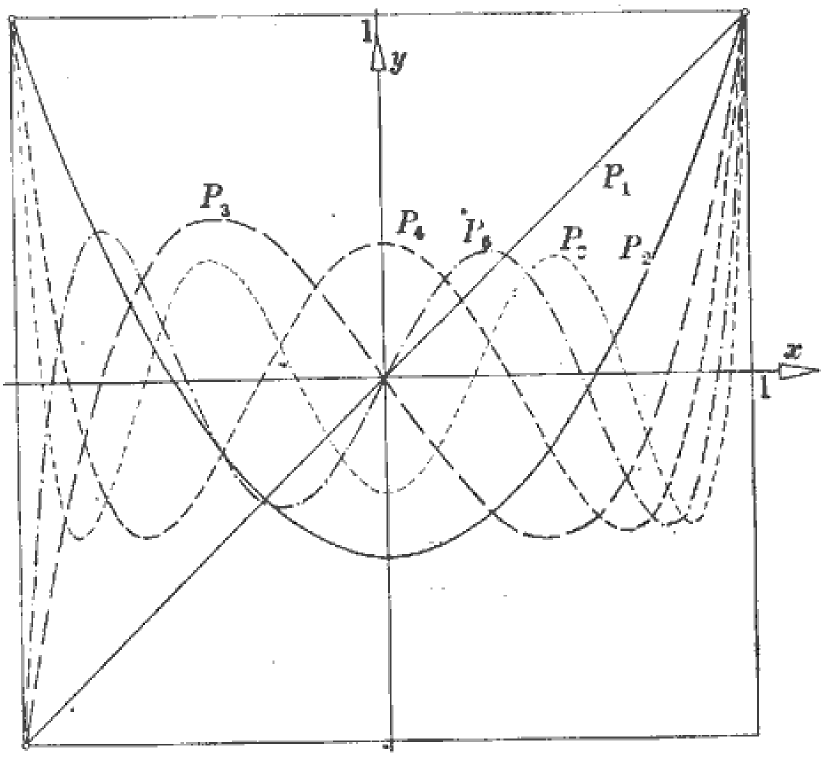
316. $\displaystyle \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m!n!}$, $(x, y) \in E_2$. **317.** $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)] (y-1)^n$,

$-\infty < x < \infty$, $0 < y < 2$. **818.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[x + (y - \pi/2)]^{2n}}{(2n)!}$, $(x, y) \in E_2$. **819.** $1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \ldots$, $(x, y) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$. **820.** $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (y - x)^n$, $|x - y| < 1$. *Návod:* $\frac{1 - x + y}{1 + x - y} = -1 + \frac{2}{1 - (y - x)}$. **821.** $1 + x + y + \frac{x^2}{2!} - \frac{y^2}{2!} + \ldots$, $(x, y) \in E_2$. **822.** $1 + x + y + z + \frac{x^2}{2!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$. **823.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2m+1} y^{2n+1}}{(2m+1)!\,(2n+1)!}$, $(x, y) \in E_2$. **824.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(x, y, z) \in E_3$. **825.** $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + y^n}{n}$, $(x, y) \in \langle -1, 1) \times \langle -1, 1)$. *Návod:* $1 - x - y + xy = (1 - x)(1 - y)$. **826.** $(x + y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1} + y^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. *Návod:* $\arcsin (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) = \arcsin x + \arcsin y$. **827.** $x - y - \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + \frac{1}{5}(x^5 - y^5) - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1} - y^{2n+1}) + \ldots$.

1,6. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou nekonečných radov, Besselova diferenciálna rovnica, Gaussova diferenciálna rovnica, Legendrova diferenciálna rovnica

829. $1 + 2(x - 1) + 4(x - 1)^2 + (25/3)(x - 1)^3 + (81/4)(x - 1)^4 + \ldots$. **830.** $x + x^2/2 + 2x^3/3 + 11x^4/24 + 53x^5/120 + \ldots$. **831.** $1 + 2x - x^2/2 - 5x^3/3 + \ldots$. **832.** $-2 + 2x - x^2 + x^3/3 - x^4/4 + 7x^5/60 - \ldots$. **833.** $1 + x + x^2/2 + x^3/3 + x^4/6 + x^5/15 + x^6/36 + \ldots$. **834.** $1 + x^2/2! + x^3/3! + x^5/5! + \ldots$. **835.** $1 + x^3/6 + x^4/24 + \ldots$. **836.** $1 + 2x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - \ldots$. **837.** $y_1 = 2x$, $y_2 = x\int x^{-2} e^{x^2}\,dx$, $y = x(c_1 + c_2 \int x^{-2} e^{x^2}\,dx)$. **838.** $y_1 = e^x$, $y_2 = x$, $y = c_1 e^x + c_2 x$. **839.** $y_1 = 1$, $y_2 = \arcsin x$, $y = c_1 + c_2 \arcsin x$. **840.** $c\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$. **841.** $c_1 [1 - 4x^3/(2 . 3) + 4^2x^6/(2 . 3 . 5 . 6) - \ldots + (-1)^k 4^k x^{3k}/(2 . 3 . 5 . 6 \ldots (3k - 1) . 3k) + \ldots] + c_2[x - 4x^4/(3 . 4) + 4^2x^7/(3 . 4 . 6 . 7) - \ldots + (-1)^k 4^k x^{3k+1}/(3 . 4 . 6 . 7 \ldots 3k . (3k + 1)) + \ldots]$. **842.** $c_1(1 - x^3/6 - x^5/40 + \ldots) + c_2(x + x^2/6 - x^4/12 + \ldots)$. **843.** $c_1(1 + x^2 + x^4 + \ldots) + c_2(x + x^3 + x^5 + \ldots) = c_1/(1 - x^2) + c_2x/(1 - x^2)$. **844.** $c_1(1 + x^2/2! + 3x^4/4! + \ldots) + c_2(x + 12x^5/5! + \ldots)$. **845.** $c_1(1 - x^2/2! - x^3/3! - x^4/4! - 2x^5/5! - \ldots) + c_2(x - x^3/3! - 2x^4/4! - 7x^5/5! + \ldots)$. **846.** $c_1(1 - x^3/6 + x^5/120 - \ldots) + c_2(x - x^4/12 + x^6/180 - \ldots)$. **847.** $c_1(1 + x^2/2 + x^3/12 + 5x^4/72 + \ldots) + c_2(x + x^3/6 + x^4/24 + \ldots)$. **848.** $c_1(1 - x/2! + x^2/4! - x^3/6! + \ldots + (-1)^k x^k/(2k)! + \ldots) + c_2x^{1/2}(1 - x/3! + x^2/5! - x^3/7! + \ldots + (-1)^{k-1} x^{k-1}/(2k - 1)! + \ldots) = c_1 \cos\sqrt{x} + c_2 \sin\sqrt{x}$. **849.** $c_1(1/x + 1 + x/2) + c_2(x^2 + x^3/4 + x^4/(4 . 5) + x^5/(4 . 5 . 6) + \ldots)$. **850.** $c_1x^{1/3}(1 + x^2/(5 . 6) + x^4/(5 . 6 . 11 . 12) + \ldots) + c_2x^{2/3}(1 + x^2/(6 . 7) + x^4/(6 . 7 . 12 . 13) + \ldots)$. **851.** $c_1\left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} 3(2x)^k/(2k + 3)!!\right] x^{1/2} + (c_2/x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. **852.** $2/\pi + (4/\pi)\sum_{k=1}^{\infty} (1/(16k^4 - 4k^2 + 1))\,[\cos 2kx - (2k/(4k^2 - 1)) \sin 2kx]$. **853.** $\sum_{k=1}^{\infty} [(k^3 + k) \cos kx - \sin kx]/[2^k\{(k^3 + k)^2 + 1\}]$. **854.** $J_0(x) = 1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2 . 4^2) - x^6/(2^2 . 4^2 . 6^2) + \ldots + (-1)^n x^{2n}/(2^2 . 4^2 \ldots (2n)^2) + \ldots =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/((2n)!!)^2$, $J_1(x) = x/2 - x^3/(2^2 \cdot 4) + x^5/(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6) - x^7/(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8) + \ldots + (-1)^n x^{2n+1}/(2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2 \cdot (2n+2)) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+1}/[((2n)!!)^2 \cdot (2n+2)]$, $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cdot \sin x$, $Y_0(x) = (2/\pi) J_0(x) \ln (x/2) - (2/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi(n) x^{2n}/((2n)!!)^2$, kde $\varphi(n) = -\gamma + 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ a $\varphi(0) = \gamma$ je Eulerova konštanta, $Y_1(x) = (2/\pi) J_1(x) \ln (x/2) - 2/(\pi x) - (2/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(2n+2) \varphi(n) + 1] x^{2n+1}/((2n+2)!!)^2$, $Y_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{2/(\pi x)} \cdot \cos x$. **355.** $c_1 J_1(x-1) + c_2 Y_1(x-1)$. **356.** $e^{-x}[c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)]$. **357.** $c_1 J_3(x^2) + c_2 Y_3(x^2)$. **358.** $c_1 J_2(\sqrt{x}) + c_2 Y_2(\sqrt{x})$. **359.** $x[c_1 J_{1/2}(x^2) + c_2 J_{-1/2}(x^2)] = c_1 \cos x^2 + c_2 \sin x^2$. **360.** $x^2 [c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)]$. **361.** $[c_1 J_1(4x) + c_2 Y_1(4x)]/x^4$. **368.** $(-q_0/\varrho\omega^2)$ $[1 - J_0(\omega r/v)/J_0(\omega a/v)] \sin (\omega t + \varphi)$. **369.** $c_1 F(2, -2, 3/2, x^2) + c_2 x^{-1/2} F(3/2, -5/2, 1/2, x^2)$. **370.** $(x^3 - 1)^{1/4}[c_1 F(1/12, -1/4, -1/3, x^3) + c_2 x^{4/3} F(17/12, 13/12, 7/3, x^3)]$. **376.** $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, $P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$, $P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$, $P_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$, $P_7(x) = (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16$ (*obr. V1*). **378.** $c_1 P_2(1/x) + c_2 Q_2(1/x)$. **379.** $c_1 P_1(\sqrt{x^2+1}) + c_2 Q_1(\sqrt{x^2+1})$. **380.** $c_1 P_3''(x) + c_2 Q_3''(x)$. **381.** $x^2[c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)]$. **382.** $c_1 F(-p/2, (1+p)/2, 1/2, \cos^2 \vartheta) + c_2 \cos \vartheta F(1/2 - p/2, 1 + p/2, 3/2, \cos^2 \vartheta)$.



Obr. V1

1,7. Ortogonálne systémy funkcií, ortogonálne rady

390. $\sqrt{2/(2n+1)}$; $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$. **391.** $\sqrt{\pi}$ pre $n = 0$, $\sqrt{\pi/2}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$; $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. **392.** $\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$; $H_1(x) =$

$= 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$. **393.** 1; $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2$, $L_3(x) = 1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6$. **398.** $3T_1(x)/4 + T_3(x)/4$. **399.** $(4/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} T_{2n-1}(x)/(2n-1)$. **400.** $2/\pi + (4/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} T_{2n}(x)/(4n^2 - 1)$. **401.** $(4/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} T_{2n-1}(x)/(2n-1)^2$. **402.** $1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{(4n-1)(2n-2)!/[2^{2n}\, n!\, (n-1)!]\}\, P_{2n-1}(x)$. **403.** $2/3 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)/[(2n-1)(2n+3)]$. **404.** $(\pi/2) \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1)\, [(2n-1)!!/2^n n!]^2\, P_{2n}(x)$. **405.** $(\pi/2) \sum_{n=0}^{\infty} [(2n-1)!!/2^n n!]^2\, [P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)]$. **407.** $(1/\sqrt{\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n+1}(x)/[(2n+1) \cdot 2^{2n} \cdot n!]$. **408.** $1/\sqrt{\pi} + (1/\sqrt{\pi}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} H_{2n}(x)/[(2n-1)\, n 2^{2n} (n-1)!]$. **409.** $e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n H_{2n}(x)/(2^n\, (2n)!$ **410.** $e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n H_n(x)/2^n\, n!$. **411.** $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(n!)^2/m!(n-m)!]\, L_m(x)$. **412.** $(1+a)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a/(1+a))^n L_n(x)$. **413.** $2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n x)/[\lambda_n J_1(\lambda_n)]$, pričom $J_0(\lambda_n) = 0$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$.
414. $2 \sum_{n=1}^{\infty} J_2(\mu_n x)/[\mu_n J_3(\mu_n)]$, pričom $J_2(\mu_n) = 0$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$.

1,8. Fourierove rady

415. a) $\frac{3}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$; b) $\frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$. **416.** $-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$. **417.** $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$. **418.** $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **419.** $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}$. **420.** $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1}$. **421.** $\frac{2 \sinh (a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx$. **422.** $\frac{2 \sin (\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{a}{n^2 - a^2} \cos nx$. **423.** $\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \right]$. **424.** $-\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$. **425.** $-\frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}$. **426.** $2 \sinh k \left[\frac{1}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{k}{k^2 + n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{k} + (-1)^{n+1} \frac{n\pi}{k^2 + n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{k} \right] \right]$. **427.** Pre a párne $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{a^2 - (2n-1)^2} \sin (2n-1)x$, pre a nepárne je $-\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{a^2 - 4n^2} \sin 2nx$.

428. $\dfrac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. **429.** $\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{n^2+1}-\dfrac{n\sin nx}{n^2+1}\right)\right]-100.$

430. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **431.** $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi x}{l}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}\sin\dfrac{2\pi nx}{l}$. **432.** $\dfrac{2}{3}+$ $+\dfrac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\cos 2\pi nx-9\cos\dfrac{2\pi nx}{3}\right]$. **433.** $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$. **434.** $\dfrac{2}{\pi}+$ $+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$. **435.** $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **436.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2\pi nx}{n}$, $x\neq n$, kde n je celé číslo. **437.** $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

438. $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n}$. **439.** $\dfrac{\pi^3}{4}+6\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}+\dfrac{24}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^4}$, $2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n^3}$. **440.** $\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$, $\left(\dfrac{2}{\pi}+1\right)\sin x-$ $-\dfrac{\sin 2x}{2}+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9\pi}\right)\sin 3x-\dfrac{\sin 4x}{4}+\ldots$. **441.** $\dfrac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$, $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$, $\dfrac{\pi^2}{6}$; $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}-\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, $x\in\langle 0,\pi\rangle$, $\dfrac{\pi^2}{12}$; $\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}-$ $-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in\langle 0,2\pi\rangle$, $\dfrac{\pi^2}{8}$. **442.** $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $\dfrac{\pi^3}{32}$. **443.** $\dfrac{\pi^2}{3}+$ $+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$; $2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n^3}$; $\dfrac{\pi^4}{5}+8\pi^2$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n^4}$. **444.** $a_{2n}=b_{2n}=0$, $n=0,1,2\ \ldots$. **445.** $a_{2n+1}=$ $=b_{2n+1}=0$, $n=0,1,2,\ \ldots$. **446.** $a_{2n}=0$, $b_n=0$, $1,2,\ \ldots$. **447.** $a_n=0$, $b_{2n}=0$, $n=$ $=0,1,2,\ \ldots$. **448.** $a_{2n-1}=0$, $b_n=0$, $n=1,2,3,\ \ldots$. **449.** $a_n=0$, $b_{2n+1}=0$, $n=0,1,2,\ \ldots$.

450. $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$. **451.** $-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n}$. **452.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

453. $\dfrac{a(\pi-a)}{2}$; $\dfrac{1}{6}(\pi^2-3\pi a+3a^2)$. **454.** $-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{2}{(2n+1)^2}+\dfrac{2a+\pi}{2n+1}\mathrm{i}\right]e^{\mathrm{i}2nx}$.

455. $\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1+\mathrm{i}(n-1)}{n^2+2n+2}e^{\mathrm{i}nx}$. **456.** $2\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{\pi^2}{n-1}-\dfrac{6}{(n-1)^3}\right]e^{\mathrm{i}nx}$.

457. $A(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\{[A(n)+A(-n)]\cos nx-[B(n)-B(-n)]\sin nx\}$, kde $A(n)=$

$= \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi[a^2 + (n-1)^2]}$ $[a\pi \cosh(a\pi) - \sinh(a\pi)]$, $B(n) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-1)}{\pi[a^2+(n-1)^2]}\Big[\pi\cosh(a\pi) + \frac{2a\sinh(a\pi)}{a^2+(n-1)^2}\Big]$ a n je celé číslo. **458.** $B(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \{[A(n) - A(-n)] \sin nx + [B(n) + B(-n)] \cdot \cos nx\}$, kde $A(n)$ a $B(n)$ má rovnaký význam ako v príklade **457.** **463.** $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

2. Základy integrálneho počtu funkcie viac premenných

2,1 Dvojitý integrál

465. 4,6. **466.** $D_n^{(1)} = \left[2 + \frac{9i}{n}\right]$, $i = 0, 1, \dots, n$; $D_n^{(2)} = \left[-2 + \frac{10j}{m}\right]$, $j = 0, 1, \dots, m$; $D_n = D_n^{(1)} \times D_n^{(2)}$. **467.** 1/4. **477.** $\pi/12$. **478.** 1/40. **479.** 4/3. **480.** $\frac{15\pi - 16}{150}$. **481.** 4. **482.** 32/3. **483.** $\pi/12$. **484.** $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **495.** $e - 1$. **486.** $2\ln 2 - 1$. **487.** 3/2. **488.** $-\pi/16$. **489.** 2. **490.** 6. **491.** $\int_3^4\Big[\int_1^2 f(x, y)\,dy\Big]\,dx$. **492.** $\int_0^4\Big[\int_0^{y/2} f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_4^6\Big[\int_0^{6-y} f(x, y)\,dx\Big]\,dy$. **493.** $\int_0^1\Big[\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx\Big]\,dy$. **494.** $\int_0^1\Big[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx\Big]\,dy$. **495.** $\int_{-1}^0\Big[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\Big]\,dx + \int_0^1\Big[\int_0^{1-x} f(x, y)\,dy\Big]\,dx$. **496.** $\int_{-1}^1\Big[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\Big]\,dx$. **497.** $\int_0^a\Big[\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_0^a\Big[\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_a^{2a}\Big[\int_{y^2/2a}^{2a} f(x, y)\,dx\Big]\,dy$. **498.** $\int_0^1\Big[\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,dx\Big]\,dy$. **499.** $\int_0^1\Big[\int_0^{1-y} f(x, y)\,dx\Big]\,dy = \int_0^1\Big[\int_0^{1-x} f(x, y)\,dy\Big]\,dx$. **500.** $\int_1^2\Big[\int_1^{3-y} f(x, y)\,dx\Big]\,dy = \int_1^2\Big[\int_1^2 f(x, y)\,dy\Big]\,dx + \int_2^3\Big[\int_1^{3-x} f(x, y)\,dy\Big]\,dx$. **501.** $\int_0^1\Big[\int_{2x+1}^{2x+4} f(x, y)\,dy\Big]\,dx = \int_1^3\Big[\int_0^{\frac{y}{2}-1} f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_3^4\Big[\int_0^1 f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_4^6\Big[\int_{\frac{y}{2}-4}^1 f(x, y)\,dx\Big]\,dy$. **502.** $\int_{-3}^{-2}\Big[\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\Big]\,dx + \int_{-2}^2\Big[\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_2^3\Big[\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\Big]\,dx = \int_{-\sqrt{5}}^{-1}\Big[\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\,dx\Big]\,dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1}\Big[\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}}$

$$f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y + \int\limits_{-1}^{1}\Big[\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y + \int\limits_{1}^{\sqrt{5}}\Big[\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y + \int\limits_{1}^{\sqrt{5}}\Big[\int\limits_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}}$$

$f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y$. **503.** $\int\limits_0^1\Big[\int\limits_0^{\sqrt{7-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x$. **504.** 3. **505.** 2/3. **506.** 66^3. **507.** 4/3. **508.** 33/140. **509.** 0. **510.** ln 2. **511.** 1/2. **512.** 1 225/64. **513.** $a^4/4$. **514.** $\pi/6$. **515.** 24π. **516.** $3\pi/2$. **517.** 9/2. **518.** $-10/3 + 4\sqrt{3}$. **519.** $\dfrac{4}{3} + 8 \ln \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **520.** $-1/e$; $-1/e + 1/2$. **521.** $-\pi/2, \pi/2$. **522.** *Návod:* Dôkaz urobte tak, že dokážete $\int\limits_0^1\Big[\int\limits_0^1 \dfrac{x - y}{(x + y)^3}\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x \neq \int\limits_0^1\Big[\int\limits_0^1 \dfrac{x - y}{(x + y)^3}\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y$. **523.** 1/4.

524. 1/6. **525.** $-6 < \iint\limits_A (x^3 + y^3 - 3xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 78$. **526.** $-19{,}4{,}5 < \iint\limits_A (x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < (-1).4{,}5$. **527.** $-\dfrac{\pi}{2} < \iint\limits_I (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 4\pi$. **528.** $4 < \iint\limits_A (1 + y)^x\,.\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 36$. **529.** $1{,}96 < \iint\limits_A \dfrac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 2$.

2,2. Trojný a n-rozmerný integrál

530. 1,5. **531.** Nech n-té delenie $D_n^{(1)}$ intervalu $\langle 1, 3\rangle$ je $2/n$, n-té delenie $D_n^{(2)}$ intervalu $\langle -1, 3\rangle$ je $4/n$ a n-té delenie $D_n^{(3)}$ intervalu $\langle 1, 5\rangle$ je $4/n$, potom delenie $D_n = D_n^{(1)} \times D_n^{(2)} \times D_n^{(3)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ je normálna postupnosť delení intervalu I. **532.** $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq (1 - x)/2$, $0 \leqq z \leqq 1 - x - 2y$. **533.** $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1 - x$, $0 \leqq z \leqq 1 - x - y$. **534.** $-2 \leqq x \leqq 2$, $-\sqrt{4 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{4 - x^2}$, $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leqq z \leqq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. **535.** $-1 \leqq x \leqq 1$, $-\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$, $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 1$. **536.** $-a \leqq x \leqq a$, $-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leqq y \leqq \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqq z \leqq \dfrac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}$. **537.** $-1 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqq z \leqq y^2$. **538.** $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 + |x| \leqq y \leqq 1 - |x|$, $-1 + |x| + |y| \leqq z \leqq 1 - |x| - |y|$. **539.** $1 \leqq x \leqq 2$ a $-2 \leqq x \leqq -1$, $1 - |x| \leqq y \leqq 2 - |x|$ a $-2 + |x| \leqq y \leqq -1 + |x|$, $1 - |x| + |y| \leqq z \leqq 2 - |x| - |y|$ a $-2 + |x| + |y| \leqq z \leqq -1 + |x| + |y|$. **540.** $0 \leqq x \leqq r$, $-\sqrt{rx - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{rx - x^2}$, $-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. **541.** $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq -x + 1$, $1 \leqq z \leqq 3 - 2x - 2y$. **542.** 18. **543.** $\pi a^2 b^3/6$. **544.** 1/110. **545.** $8(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3})/15$. **546.** 0. **547.** $2e - 5$. **548.**

$$\int\limits_0^1\Big\{\int\limits_0^x\Big[\int\limits_0^{1-x} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}z\Big\}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1\Big\{\int\limits_x^1\Big[\int\limits_{2-x}^{1-x} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}z\Big\}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\Big\{\int\limits_0^2\Big[\int\limits_{2-y}^{1-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y\Big\}\,\mathrm{d}z +$$

$$\int\limits_0^1\Big\{\int\limits_z^1\Big[\int\limits_0^{1-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y\Big\}\,\mathrm{d}z.$$

549. $$\int\limits_{-1}^1\Big\{\int\limits_{|x|}^1\Big[\int\limits_{-\sqrt{2^2-x^2}}^{\sqrt{2^2-x^2}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}z\Big\}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\Big\{\int\limits_{-2}^2\Big[\int\limits_{-\sqrt{2^2-y^2}}^{\sqrt{2^2-y^2}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\Big]\,\mathrm{d}y\Big\}\,\mathrm{d}x.$$

550. a) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{\sqrt{r^2-x^2}}^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-x-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$; b) $\int\limits_{-r}^{r} \mathrm{d}x$.

$\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^h f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$; c) $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$. **551.** $1/144$. **552.** $4/5$.
553. $104(2\sqrt{2} - 1)/3$. **554.** $3(a - 1)^2 \ln a$. **555.** $(\mathrm{e}^3 - 1)(\mathrm{e}^2 - 1)(\mathrm{e} - 1)/3$. **556.** 0. **557.** $4/45$.
558. $(3/2) - 2\ln 2$. **559.** $\pi abc^2/4$ **560.** $a^2b^2\sqrt{c}/36$. **561.** $59\pi R^5/480$. **562.** $\pi a^5(18\sqrt{3} - 97/6)/5$.
563. $\pi R^5(2 - \sqrt{2})/5$. **564.** $5ab^3/6 - a^2b^2/4$. **565.** $(\ln 2 - 5/8)/2$. **566.** $\pi^2/16 - 1/2$. **567.** $1/48$.
568. $\pi h^2R^2/4$. **569.** a) $6/5$; b) $3(\mathrm{e} - 2)$. **570.** a) $0 < \iiint\limits_A (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < 4^6\pi/3$; b) $24 <$
$< \iiint\limits_A (x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < 72$. **571.** $4/3$. **572.** $1/120$. **573.** $(2\mathrm{e} - 5)/32$. **574.** $1/945$.
575. $19/2$. **576.** $1/n!$. **577.** $\sqrt{\pi^{n+1}}/\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$. **578.** $\frac{R^n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^1 f(\sqrt{u})\, u^{n/2-1}\,\mathrm{d}u$. **582.** $16\pi^2\gamma^2R^5/15$.

2,3. Transformácia n-rozmerných integrálov

583. Je; u. **584.** Nie; $v - u$. **585.** Je; $-2u^2/v^2 - 2$. **586.** Je; $1 + 1/v^2$. **587.** Je; $\mathrm{e}^v cu^{c-1}(u \ln u - 1)$. **588.** Je; $ab\varrho$. **590.** $u = xy$, $v = x - y$. **591.** A je ohraničená dvoma sústrednými kružnicami so stredom v začiatku a polpriamkami so spoločným priesečníkom v začiatku. **592.** $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^3 f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi$. **593.** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho$. **594.** $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{1/\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)} \varrho f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho$. **595.** $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{2}/\cos(\varphi-\pi/4)}^{2} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho$. **596.** $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho$. **597.** $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int\limits_a^b f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho$. **598.** $\alpha^{-1} \int\limits_0^{1/a\alpha+b} \mathrm{d}v \int\limits_0^{a\alpha/(1-v)} f[(1 - v)u/\alpha, uv]\,u\,\mathrm{d}u + \alpha^{-1} \int\limits_{b/(a\alpha+b)}^{1} \mathrm{d}v \int\limits_0^{b/v} f[(1 - v)\,u/\alpha, uv]\,u\,\mathrm{d}u$. **599.** $2^{-1} \int\limits_1^2 \mathrm{d}u \int\limits_{-u}^{4-u} f[(u + v)/2, (u - v)/2]\,\mathrm{d}v$. **600.** $3 \int\limits_0^a \mathrm{d}\varrho \int\limits_0^{2\pi} f(\varrho\cos^3\varphi, \varrho\sin^3\varphi)\,\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. **601.** 2π. **602.** $\pi a^4/8$.
603. $a^3(\pi - 4/3)/3$. **604.** $\pi(\pi - 2)/8$. **605.** 2π. **606.** $-6\pi^2$. **607.** $\pi^2/6$. **608.** $5(a^{-6/5} - b^{-6/5})(q^{8/5} - p^{8/5})/48$. **609.** $2\pi ab/3$. **610.** 3π. **611.** $8a^2/9$. **612.** $16\pi/3$. **613.** $\pi/8$. **614.** $844\pi/15$. **615.** $\pi/10$. **616.** $\pi h^2R^2/4$. **617.** $16a^3(\pi/2 - 2/3)/3$. **618.** $4\pi abc/5$.

2,4. Obsah rovinných útvarov

620. 7. **621.** $\frac{9}{4}ab(\pi - a)$. **622.** $\frac{a^2}{12}(3\pi - 4)$. **623.** $\frac{2}{3}(a - b)\sqrt{ab}$. **624.** $\frac{40}{3}$. **625.** $\frac{23}{24}a^2 + a^2\ln 2$. **626.** $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **627.** $5 - \frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. **628.** $\frac{a^2}{3}$. **629.** a^2. **630.** $\frac{5\pi a^2}{8}$. **631.** $\frac{a^2}{6}$.
632. $\frac{\pi a^2}{2}$. **633.** $\frac{3\pi a^2}{4}$. **634.** $\frac{a^2b^2}{2c^2}$. **635.** $\frac{\pi}{2}ab(a^2 + b^2)$. **636.** $\frac{ab}{12}$. **637.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}ab\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$.

638. $\frac{ab}{70}$. **639.** $\frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{30c}$. **640.** $\frac{(a^2 - b^2)(\alpha - \beta)}{2(1 + \alpha)(1 + \beta)}$. **641.** $\frac{1}{2}(a - b) \ln \frac{\beta}{\alpha}$. **642.** $\frac{1}{6}(a^2 - b^2)(\alpha^3 - \beta^3)$. **643.** $\frac{1}{3}(a - b)(\alpha - \beta)$.

2,5. Objem telies

644. $9\frac{1}{6}$. **645.** $\frac{16}{3}$. **646.** 7,5. **647.** $4\frac{3}{8}$. **648.** $\frac{32\sqrt{2}}{15}$. **649.** $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. **650.** $12\frac{4}{21}$. **651.** $\frac{16}{3}R^3$. **652.** $3e - 8$. **653.** $\frac{4}{3}a^2b$. **654.** $78\frac{15}{32}$. **655.** $2\left(\pi^2 - \frac{35}{9}\right)$. **656.** 3π. **657.** $\frac{2}{3}$. **658.** $\frac{4\pi}{3}$. **659.** $4\pi(2 - \sqrt{2})$. **660.** $\frac{3\pi a^4}{32c}$. **661.** $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **662.** $\frac{\pi}{4}$. **663.** $\frac{45\pi}{32}$. **664.** $\pi(1 - e^{-1})$. **665.** $\frac{\pi}{8}a^3$. **666.** $\frac{3\pi c^4}{2\sqrt{2a}}$. **667.** $\frac{\pi}{12}a^3$. **668.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **669.** $\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)a^3$. **670.** $\frac{1}{16}\pi^2a^2k$. **671.** $\frac{1}{128}\pi^4a^2c$. **672.** $\frac{1}{3}abc$. **673.** $\frac{1}{8}\pi ab\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$. **674.** $\frac{1}{2}\pi^2abc$. **675.** $\frac{2}{9}abc(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$. **676.** $\frac{4a^4bc}{9h^3}$. **677.** $\frac{1}{8}\pi^2a^3\sqrt{2}$. **678.** $\frac{1}{4}\pi^2a^3$. **679.** 27. **680.** $49\frac{7}{24}$. **681.** $\frac{7}{12}$. **682.** $\frac{3}{35}$. **683.** $\frac{\pi}{96}$. **684.** $\frac{32\pi}{3}$. **685.** $4(4 - 3\ln 3)$. **686.** $\frac{7\pi}{6}$. **687.** $\frac{8\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5)$. **688.** $\frac{80\pi}{3}$. **689.** $\frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})\pi R^3$. **690.** $\frac{2}{3}R^3(\beta - \alpha)$. **691.** πa^3, $\frac{1}{3}\pi a^3$. **692.** $\frac{1}{8}\pi^2a^3\sqrt{2}$. **693.** $\frac{\pi}{3}a^3$. **694.** $\frac{1}{2}$. **695.** $\frac{64\pi a^3}{105}$. **696.** $\frac{\pi}{60}a^3$. **697.** $\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{e}\right)a^3$. **698.** $\frac{abc^4}{60d^3}$. **699.** $\frac{8}{5}\pi abc$. **700.** $\frac{\pi}{3h}a^2bc$. **701.** $\frac{5}{12}(3 - \sqrt{5})\pi abc$. **702.** $\frac{4\pi abc^7}{21h^6}$. **703.** $\frac{1}{6}\frac{(abc)^2}{h^3}$. **704.** $\frac{1}{3}abc$. **705.** $\frac{4}{3}\pi\sqrt{a}$. **706.** $\frac{3}{2}$. **707.** $\frac{49}{864}a^3$. **708.** $\frac{8h_1h_2h_3}{\Delta}$, kde $\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$.

2,6. Obsah plochy

709. $4\sqrt{3}$. **710.** $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}/2$. **711.** $\pi/\sqrt{2}$. **712.** $-2\pi/3 + 2\sqrt{2}\,[1 + (7\ln 3)/4]/3$. **713.** $2\pi\,[(1 + a^2)^{3/2} - 1]/3$. **714.** $a^2(20 - 3\pi)/9$. **715.** 13/12. **716.** $(\pi/4)\,[3\sqrt{2} - \sqrt{3} - (\sqrt{2}\ln 2)/2 + \sqrt{2}\ln 2 + \sqrt{2}\,\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$. **717.** $13\pi a^2/12$. **718.** $\pi[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]$. **719.** $52\sqrt{2}$. **720.** 4. **721.** 2π. **722.** $8\sqrt{2}ab$. **723.** $2\pi ab(\sqrt{8} - 1)/3$. **724.** $4c[b + (a^2/\sqrt{a^2 - b^2})\arcsin(b/a)]$. **725.** $2\pi a^2$. **726.** $8a^2$. **727.** $8a^2\arcsin(b/a)$. **728.** $2\sqrt{2}$. **729.** $4\pi[2\pi/3 - 1/2 - 2\arcsin(3/4) + \sqrt{21}/2]$. **730.** π^2a^2. **731.** $(\pi R^2 \sin 3^\circ \,.\, \cos 51^\circ)/10$. **732.** $\pi a\sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln[(a + \sqrt{a^2 + h^2})/h]$. **733.** $a(\delta - \gamma)\,[b(\beta - \alpha) + a(\sin\beta - \sin\alpha)]$; $4\pi^2ab$.

2,7. Fyzikálne aplikácie

734. $4a^2/3$. **735.** $\sigma ab(a^2 + b^2)/3$. **736.** $3\sigma ab^2/4$. **737.** $S_x = ab^2/3$, $S_y = a^2b/3$. **738.** $(3a/5,\ 0)$. **739.** Na osi súmernosti vo vzdialenosti $4r\sin^3(\alpha/2)/3(\alpha - \sin\alpha)$ od stredu kružnice. **740.** Na osi súmernosti vo vzdialenosti $4(R^2 + Rr + r^2)\sin(\alpha/2)$ od stredu kružnice. **741.** $\xi = \eta = a(10 - 3\pi)/3(4 - \pi)$. **742.** $T = (a^2b/14c,\ ab^2/14c)$. **743.** $T = (\pi a/8,\ \pi a/8)$. **744.** $T = (-a/5,\ 0)$. **745.** $\mathfrak{r}(a^4 - b^4)/48(a - b)$. **746.** $32bh^3/105$. **747.** $r^4[\varphi - (\sin 4\varphi)/4]/2$. **748.** $a^4(2\varphi - \sin 2\varphi)/8$; $a^4[2\varphi + \sin 2\varphi - 32(\sin^2\varphi)/9\varphi]/8$. **749.** $\pi(ab^3 - a_1b^3)/4$; $\pi(a^3b - a_1^3b)/4$. **750.** $3\pi a^4/4\sqrt{2}$; $4\pi a^4/4\sqrt{2}$. **751.** $9a^4/8$; $9a^4/8$. **753.** $a^4/32\sqrt{3}$. **754.** $-\pi a^2\delta[h - (b\cos\alpha)/2](\sin\alpha\,\boldsymbol{j} + \cos\alpha\,\boldsymbol{k})$, $\pi a^2\delta[h + (b\cos\alpha)/2](\sin\alpha\,\boldsymbol{j} + \cos\alpha\,\boldsymbol{k})$. **755.** 3/2. **756.** $2\pi\gamma R^6/3$. **757.** $13\pi/4$. **758.** $\pi R^2H(3R^2 + 2H^2)/6$. **759.** $k\pi h^2R^2/4$. **760.** $T = (5a/12,\ 5a/12,\ 5a/12)$. **761.** $T = (0,\ 0,\ 1/4)$. **762.** $T = (3a/5,\ 3b/5,\ 9\sqrt{ab}/32)$.

763. $T = [3\pi a\,(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)/16(\varphi_2 - \varphi_1),\ 3\pi a\,(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)/16(\varphi_2 - \varphi_1),\ 3a/8)$. **764.** $T = (0,\ 0,\ 3c/8)$. **765.** $T = (1,\ 1,\ 5/3)$. **766.** $T = (0,\ 0,\ 7/20)$. **767.** $T = (9\pi a/8a(3\pi - 4),\ 0,\ 0)$. **768.** $T = (0,\ 0,\ 5a(6\sqrt{3} + 5)/83)$. **769.** $T = (0,\ 0,\ 3a/8)$. **770.** $T = (9a\pi/448,\ 9b\pi/448,\ 9c\pi/448)$. **771.** $T = (3/4,\ 5/6,\ 7/8)$. **772.** $I_x = abc(b^2 + c^2)/60$, $I_y = abc(a^2 + c^2)/60$, $I_z = abc(a^2 + b^2)/60$. **773.** $I_z = \pi h(b^4 - a^4)/2$. **774.** $I_x = \pi abc(b^2 + 4c^2)/20$, $I_y = \pi abc(a^2 + 4c^2)/20$. $I_z = \pi abc(a^2 + b^2)/20$. **775.** $I_x = 4\pi abc(b^2 + c^2)/15$, $I_y = 4\pi abc(a^2 + c^2)/15$, $I_z = 4\pi abc(a^2 + b^2)/15$. **776.** $I_z = \pi^2 a\varrho^2(4a^2 + 3\varrho^2)/2$. **777.** $I_z = 32\sqrt{2a^5}/135$. **778.** $I_z = 4\pi(4\sqrt{2} - 5)/15$. **779.** $I_x = 2abc[105\pi(b^2 + c^2) - 16(17b^2 + 7c^2)]/1\,575$, $I_y = 2abc[105\pi(a^2 + c^2) - 92a^2 - 112c^2]/1\,575$, $I_z = 2abc[105\pi(a^2 + b^2) - 92a^2 - 272b^2]/1\,575$. **781.** $2a^5/3$. **782.** $28\pi R^5/15$. **783.** $4MR^2/9$, kde M je hmotnosť gule. **784.** $\varkappa Mm/a^2$, kde M je hmotnosť gule a $\varkappa$ je gravitačná konštanta. **785.** $2\pi h(\sqrt{R^2 + h^2} - h)^2/\sqrt{R^2 + h^2}$. **787.** $\mathbf{F} = -2\pi\gamma\varkappa[\sqrt{a^2 + \zeta^2} - \sqrt{a^2 + (h - \zeta)^2} - (|\zeta| - |h - \zeta|)]\,\mathbf{k}$, $\varkappa$ je gravitačná konštanta. **788.** $17\varkappa M/56R^2$, $\varkappa$ je gravitačná konštanta. **789.** a) $(h\sin\alpha)/2$; b) $(3h\sin\alpha)/4$.

2,8. Nevlastné viacrozmerné integrály

790. 2. **791.** 0. **792.** $\frac{ab\pi}{2}$. **793.** $\frac{1}{2}$. **794.** $\frac{\pi}{2}$. **795.** $\frac{-\pi^2 \ln 2}{2}$. **796.** Konverguje. **797.** Diverguje. **798.** Pre $\alpha < 1$ konverguje. **799.** Pre $\alpha < 2$ konverguje. **800.** Diverguje. **801.** $\frac{\pi}{\alpha - 1}$. **802.** $\frac{\pi}{4a^2}$. **803.** $\frac{1}{2}$. **804.** $\frac{\pi ab}{c}$. **805.** 4. **806.** $\frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}$. **807.** $\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)^3}}$. **808.** Neexistuje. **809.** Neexistuje. **810.** Pre $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$ existuje. **812.** $\frac{2}{5}$. **813.** π^2. **814.** $2\pi R^3$. **815.** $\frac{R^5}{15}\,\frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}$. **816.** $\frac{4\pi}{3}$. **817.** $\frac{8}{15}$. **818.** $\frac{8}{3}\pi a^3\left(\ln a - \frac{1}{3}\right)$. **819.** $\pi^{3/2}$. **820.** $\frac{e}{2} - 1$. **821.** Konverguje. **822.** Diverguje. **823.** a) konverguje pre $\alpha < \frac{3}{2}$; b) konverguje pre $\alpha > \frac{3}{2}$. **824.** $\sqrt{\pi^n}$.

3. Parametrické integrály

3,1. Integrály závislé od parametra

825. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **829.** 1. **830.** $8/3$. **831.** $\pi/4$. **832.** $(1/2)\ln[y^2/(1 + y^2)]$. **833.** $3f(y) + 2yf(y)$. **834.** $(n - 1)!\,f(y)$. **839.** $[(n + 1)\,2^{n+1}\ln 2 - 2^{n+1} + 1]/(n + 1)^2$. **840.** $(3/8\alpha^5)\operatorname{arctg}(1/\alpha) + 3/[8\alpha^4(\alpha^2 + 1)] + 1/[4\alpha^2(\alpha^2 + 1)^2]$. **841.** $\pi\ln[(a + \sqrt{a^2 - 1})/2]$. **842.** 0 pre $|a| \leqq 1$, $\pi\ln a^2$ pre $|a| > 1$. **843.** $\pi\operatorname{sgn} a \,.\, \ln(1 + |a|)/2$. **844.** $(1/2)\ln[(b^2 + 2b + 2)/(a^2 + 2a + 2)]$. **845.** $2y\,e^{-y^5} - e^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y}\,dx$. **846.** $e^{(3y^2+1)y}\,[1/y + 6y/(3y^2 + 1)] - 3\,e^{y^3}/y$. **847.** $[1/b + 1/(b + y)]\sin[y(b + y)] - [1/a + 1/(a + y)]\sin[y(a + y)]$. **848.** $-e^{y|\sin y|}\sin y + e^{y|\cos y|}\cos y + \int_{\sin y}^{\cos y}\sqrt{1 - x^2}\,e^{y\sqrt{1 - x^2}}\,dx$.

3,2. Nevlastné parametrické integrály

849. $y \in \langle 0, \infty)$. **850.** $y \in (1/2, \infty)$. **851.** $y \in (-\infty, 1)$. **852.** $y \in (1, \infty)$. **853.** Rovnomerne konverguje. **854.** Rovnomerne konverguje. **855.** Nerovnomerne konverguje. **856.** Rovnomerne konverguje. 857. Rovnomerne konverguje. 858. Rovnomerne konverguje. 859. Nerovnomerne konverguje. 860. Rovnomerne konverguje. 862. Body nespojitosti pre $y = 1$, $y = -1$. 863. Spojitá funkcia. 864. Spojitá funkcia. 865. Nespojitá funkcia pre $y = 0$. 866. $(n-1)!/a^n$. 867. $\dfrac{\pi}{2a^{2n-1}} \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)}$. 868. $\ln \dfrac{b}{a}$. 869. $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{b}{a}$. 870. $\ln \dfrac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}$. 871. $\operatorname{arctg} \dfrac{b}{m} - \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha}{m}$. 872. $\dfrac{1}{4} \ln \left(1 + \dfrac{4b^2}{a^2}\right)$. 873. $\operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} - \operatorname{arctg} \dfrac{c}{a} = \operatorname{arctg} \dfrac{a(b-c)}{a^2 + bc}$. 874. $\dfrac{1}{2} \cdot \ln \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$. 875. $\dfrac{1}{2} \ln (1 + a)$. 876. $\pi \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$. 877. $\dfrac{\pi}{b} \ln (a + b)$. 878. $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2} \cdot (\arcsin a)^2$. 879. $\dfrac{\pi}{2} \ln (a + \sqrt{1 + a^2})$. 880. $\dfrac{\pi}{2} \ln (1 + a)$, pre $a \geqq 0$, $-\dfrac{\pi}{2} \ln (1 - a)$, pre $a \leqq 0$. 881. $\dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{(a+b)^{a+b}}{(ab)^{ab}}$. 882. $\pi \left(\dfrac{b}{2} - \sqrt{a}\right)$. 883. $\dfrac{\pi}{2} \ln (1 + a)$, pre $a > 0$, $-\dfrac{\pi}{2} \ln (1 - a)$, pre $a < 0$. 884. $\sqrt{\pi}/2$. 885. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. 886. $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{b^2/4a}$ 887. $\dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a}$ 888. $\dfrac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}\, e^{-b^2/4a}$. 889. $\dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{\pi}{y}}$. 891. $\sqrt{\pi/2}$, $\sqrt{\pi/2}$. 892. $\dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} b$. 893. $\dfrac{\pi}{2}(a - b)$, $a > b > 0$. 894. $\dfrac{\pi}{2} |a|$. 895. $\dfrac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a$. 896. $\dfrac{1}{2} \operatorname{sgn} (1 + a) + \dfrac{1}{2} \operatorname{sgn} (1 - a)$. 897. a) $n!/p^{n+1}$; b) $p/(p^2 + 1)$; c) $1/(p - a)$; d) $\Gamma(3/2)/p^{3/2}$.

8,3. Eulerove integrály

901. a) 2,9913; b) 1,5446; c) $3\sqrt{\pi}/4$; d) 1,2280. 902. $\Gamma(a)$. 903. $\Gamma(a)$. 904. $|n|^{-1}\Gamma[(m+1)/n]$ pre $(m+1)/n > 0$. 905. $\pi/8$. 906. π. 907. $B(1/5, 3/4)/5$. 908. $\sqrt{\pi}\, \Gamma(1/n)/n\Gamma(1/n + 1/2)$, $n > 0$. 909. $B(1/m, 1 - 1/n)/m$, $n < 0$, $n > 1$. 910. $2\pi/\sqrt{3}$. 911. $2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha + 1, \beta + 1)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. 912. $3^{-1/2}\pi\, 1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n - 2)/3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3n$. 915. $\pi/2\sqrt{2}$. 916. $2\pi/3\sqrt{3}$. 917. $\pi/2\sqrt{2}$. 918. $2\pi/9\sqrt{3}$. 919. $\pi c/\sin \pi c$. 920. $B(n - m, m)$, $0 < m < n$. 921. $\pi/[n \sin (m\pi/n)]$, $0 < m < n$. 922. $\sqrt{\pi}\Gamma(n - 1/2)/\Gamma(n)$. 923. $\pi(1 - a)/\sin a\pi$. 924. $[\pi^2 \sin (\pi a/2)]/4 \cos^2 (\pi a/2)$. 925. $\pi^3[1 + \sin^2 (\pi a/2)]/8 \cos^3 (\pi a/2)$. 926. $\sqrt{\pi}\, \Gamma(n/2 + 1/2)/2\Gamma(n/2 + 1)$. 927. $2^{-1}B(m/2 + 1/2, n/2 + 1/2)$, $m > -1$, $n > -1$. 928. $\pi/2$. 929. $\pi/4$. 930. $\pi[\operatorname{tg} (\pi m/2n)]/2n$. 931. $\pi/[2n \cos (\pi m/2n)]$. 932. a) $\pi a^{m-1}/2\Gamma(m) \cos (m\pi/2)$; b) $\pi a^{m-1}/2\Gamma(m) \sin (m\pi/2)$. 933. $a^2[B(1/4, 1/4)]/2$. 934. $aB(1/2, 1/4)$. 935. $\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)\, \Gamma(\gamma)/\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)$. 936. $[B(p/\alpha, q/\beta)]/\alpha\beta(p/\alpha + q/\beta - m)$, ak $p/\alpha + q/\beta > m$. 937. $a^p b^q c^r [\Gamma(p/\alpha)\, \Gamma(q/\beta)\, \Gamma(r/\gamma)] [\Gamma(p/\alpha + q/\beta + r/\gamma)]^{-1} \displaystyle\int_0^1 f(\xi)\, \xi^{(p/\alpha + q/\beta + r/\gamma - 1)}\, d\xi$.

8,4. Fourierov integrál

938. $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x\, d\omega$. 939. $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega x\, d\omega$. 940. $\dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \left(\dfrac{\sin \omega}{\omega}\right)^2 \cos \omega x\, d\omega$. 941. $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}{\omega^2} \cos \omega x\, d\omega$. 942. $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos \frac{\omega\pi}{2}}{1 - \omega^2} \cos \omega x\, d\omega$. 943. $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos \omega x + (-1)^{n+1} \cos (x + n\pi)}{1 - \omega^2}\, d\omega$. 944. $\dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin \pi\omega}{\omega(4 - \omega^2)} \cos \omega x\, d\omega$. 945. $\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_0^\infty e^{-a\omega} \cos \omega x\, d\omega$. 946. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a\omega} \sin \omega x\, d\omega$. 947. $\dfrac{2a}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2}\, d\omega$. 948. $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cos \omega x\, d\omega$.

949. $\int\limits_0^\infty \frac{Ea}{\pi} \frac{\cos \frac{\omega\pi}{2a}}{a^2 - \omega^2} \cos \omega x \, d\omega$. **950.** a) $\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} \, d\omega$; b) $\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} \, d\omega$. **951.** $\frac{\pi}{2}$ pre $0 < x < \tau$, 0 pre $x \geqq \tau$. **952.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{x^2 + a^2}$. **953.** $e^{-\frac{x^2}{2}}$. **954.** $e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} \cosh ax$. **955.** $| S(\omega) | = \frac{2}{\omega} \left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|$. **956.** $| S(\omega) | = \frac{1}{\omega^2}$. **957.** $| S(\omega) | = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$. **958.** $S(\omega) = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2} e^{-i\omega}$.

4. Krivkové integrály

4,1. Krivkové integrály I. a II. druhu

959. $\sqrt{5} \ln 2$. **960.** $1 + \sqrt{2}$. **961.** 24. **962.** $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12$. **963.** $(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})/3$. **964.** $a^4/3$. **965.** $2a^2$. **966.** $a^6 b[\arcsin (c/a) - bc(b^2 - c^2)/a^4]/8c^3$, kde c je ohnisková vzdialenosť, $c^2 = a^2 - b^2$. **967.** $4a^{7/3}$. **968.** $2a^2(2 - \sqrt{2})$. **969.** $4\pi a^{3/2}$. **970.** $2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)$. **971.** $2a^2 b\sqrt{1 + b^2}/(1 + 4b^2)$. **972.** $8\pi^3 a\sqrt{2}/3$. **973.** $(8 - 2\sqrt{2})/3$. **974.** $2\pi a^3/3$. **975.** $\sqrt{2}\,(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln [(25 + 4\sqrt{38})/17])/512$. **976.** a) 23/2; b) 38/3; c) 22/3. **977.** 0. **978.** 0. **979.** 4/3. **980.** $-14/15$. **981.** 0. **982.** -2π. **983.** 0. **984.** $-2\pi a^2$. **985.** $3\pi a^{4/3}/16$. **986.** $\pi/4 - 1$. **987.** 13. **988.** 0. **989.** 23/6. **990.** 0. **991.** $-\pi$. **992.** -4. **993.** $-\pi a^3/4$.

4,2. Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty

994. a) -88; b) -88; c) -88; d) -88. **995.** Nezávisí. **996.** Nezávisí. **997.** Nezávisí. **998.** Závisí. **999.** Rovná sa nule, ak krivka C neobsahuje bod $O = (0, 0)$. **1000.** 2π, ak bod $O = (0, 0)$ je vnútri, 0, ak bod O nie je vnútri oblasti ohraničenej krivkou C. **1003.** 4. **1004.** 62. **1005.** $-15/4$. **1006.** $\ln (13/5)$. **1007.** $\ln (5/2) - 1/10$. **1008.** 56. **1009.** $-0{,}5$. **1010.** $-53\frac{7}{12}$. **1011.** 0. **1012.** $b - a$. **1013.** $V(x, y) = x^3/3 + x^2 y - xy^2 - y^3/3 + C$. **1014.** $V(x, y) = \ln (y/x) - xy/(x - y) + C$. **1015.** $V(x, y) = e^{x+y}(x - y + 1) + y\,e^x + C$. **1016.** $V(x, y, z) = x - x/y + xy/z + C$. **1017.** $(x^3 + y^3)/3 + C$. **1018.** $x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$. **1019.** $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + C$. **1020.** $\operatorname{arctg} xyz + C$.

4,3. Greenova veta

1021. a) 4; b) 4π; c) $3\pi/2$. **1022.** 0. **1023.** $\frac{\pi}{12} \ln 2$. **1024.** $2\pi a^2$. **1025.** 4. **1026.** $\frac{3\pi}{2}$. **1027.** $-2\pi ab$. **1030.** $P = \frac{1}{2} \int\limits_C x \, dy - y \, dx$.

4,4. Geometrické a fyzikálne aplikácie krivkového integrálu

1037. πab. **1038.** $3\pi a^2$. **1039.** $3\pi a^2/8$. **1040.** $3a^2/2$. **1041.** 4/3. **1042.** 1/30. **1043.** $\pi(n \pm 1)(n \pm 2) r^2$. **1044.** $a^2 B(2m + 1, 2n + 1)/2$. **1045.** $(ab/2) \ln (x_0/a + y_0/b)$. **1046.** $k\{17\sqrt{2}/32 - [\ln (2\sqrt{2} + 3)]/64\}$. **1047.** $2b[b + a (\arcsin \varepsilon)/\varepsilon]$. **1048.** $a[(6\sqrt{3} - 2) + 3 \ln (1 + 2/\sqrt{3})]/16$. **1049.** $k\sqrt{a^2 + b^2}\,(2\pi a^2 + 8\pi^3 b^2/3)$. **1050.** $(1 - e^{-a})\sqrt{3}$. **1051.** $2\pi k/3$. **1052.** $T = (\alpha^{-1} a \sin \alpha, \alpha)$. **1053.** $T = (\pi a,$

$4a/3)$. **1054.** $T = (4a/3\pi,\ 4a/3\pi,\ 4a/3\pi)$. **1055.** $T = (2/5,\ 1/5,\ 1/2)$. **1056.** $4a^3$. **1057.** $I_x = I_y = (a^2/2 + h^2/3)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$, $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}$. **1059.** a) $4/3$; b) $17/12$; c) $3/2$; d) 1. **1061.** πa^2. **1062.** 0. Pole je konzervatívne. **1063.** 0. **1064.** $(2e^{2\pi} - 5e^{\pi} - 5\pi - 3)/10$. **1065.** $k(a^2 - b^2)/2$, k je konštanta úmernosti. **1066.** $(k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ln 2)/c$, k je konštanta úmernosti. **1067.** $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}\cdot[(x - y)\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j}]$, $L = \ln\sqrt{2}$. **1068.** a) $V = -mgz$, $L = mg(z_1 - z_2)$; b) $V = \mu/r$, $L = -\mu/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; c) $V = -k^2r^2/2$, $L = k^2(b^2 - a^2)/2$. **1069.** $V = 2\pi\varkappa a\ln(1/a)$, ak $x_0^2 + y_0^2 \leqq a^2$; $V = 2\pi\varkappa a\ln(1/r_0)$, ak $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 > a^2$. **1070.** $\mathbf{B} = [\mu a^2I/2(a^2 + z^2)^{3/2}]\,\mathbf{k}$. **1073.** $B_z = (\mu I/4\pi a\ \mathrm{tg}\,\alpha)\{(N\pi a\ \mathrm{tg}\,\alpha + b)/[a^2 + (N\pi a\ \mathrm{tg}\,\alpha + b)^2]^{1/2} + (N\pi a\ \mathrm{tg}\,\alpha - b)/[a^2 + (n\pi a\ \mathrm{tg}\,\alpha - b)^2]^{1/2}\}$. **1074.** $\pm\mu I_1I_2/2\pi a$, $+$ ak prúdy majú opačný smer, $-$ ak prúdy majú rovnaký smer.

5. Plošné integrály

5,1. Plošné integrály I. a II. druhu

1077. $\pi^2[a\sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})]$. **1078.** $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$. **1079.** $\frac{4\pi}{3}$. **1080.** $\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$. **1081.** $\frac{2\pi r^6}{15}$. **1082.** $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$. **1083.** $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$. **1084.** $\pi[R\sqrt{R^2 + 1} + \ln(R + \sqrt{R^2 + 1})]$. **1085.** $\frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$. **1086.** 0. **1087.** a) $\frac{3}{4}$; b) $-\frac{\pi}{2}$; c) 24; d) $4\pi a^3$. **1088.** $\frac{3\pi a^4}{8}$. **1089.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **1090.** $-\frac{\pi}{2}$. **1091.** $-\frac{1}{6}$. **1092.** $R^2a\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi a}{8}\right)$. **1093.** 0. **1094.** a) $3a^4$; b) $\frac{a^4}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16}\right)$; c) $\frac{8\pi}{3}(a + b + c)\,r^3$. **1095.** $\frac{1}{8}$. **1096.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$.

5,2. Stokesova veta, veta Gaussova-Ostrogradského

1097. $\int_C x(z - y)\,\mathrm{d}x + y(x - z)\,\mathrm{d}y + z(y - x)\,\mathrm{d}z = \iint_\sigma [(y + z)\,\mathbf{i} + (z + x)\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}]\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}$, áno. **1098.** 0. **1099.** 0. **1100.** 0. **1101.** $2\pi a^2b$. **1102.** $-9a^3/2$. **1104.** $h^3/3$. **1106.** π. **1107.** 0. **1108.** $4/3$. **1109.** -4. **1110.** $4\pi a^3$. **1111.** $1/8$. **1112.** 1. **1113.** $72(\pi + 2)$. **1114.** 3. **1115.** $\pi/8$. **1116.** $12\pi a^5/5$. **1121.** *Návod*: Dokážte, najprv vetu o strednej hodnote: Ak $u(x, y, z)$ je funkcia harmonická vnútri guľovej plochy σ s polomerom a a so stredom v bode $S = (x_0, y_0, z_0)$, potom $u(S) = [1/(4\pi a^2)]\iint_\sigma u(x, y, z)\,\mathrm{d}p$.

5,3. Geometrický a fyzikálny význam plošného integrálu

1123. $65\pi(\sqrt{65} - 1)/6$. **1124.** $8\pi/3$. **1125.** $\pi^2a^2/8$. **1127.** $4\pi abc/3$. **1128.** $\frac{4\pi}{3}\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)|c|$. **1129.** $2a^3/9$. **1131.** $\sqrt{2\pi}\,a^3\Gamma^2(1/4)/48$. **1132.** $2\pi(1 + 6\sqrt{3})\,k/15$. **1133.** a) $\pi^2R^3/2$; b) $4\pi R^4/3$. **1134.** a) $M_{xy}(\sigma) = 2\pi R^4/3$; $(0,\ 0,\ 4R/3)$; b) $M_{xy}(\sigma) = \pi R^5/2$, $(0,\ 0,\ 3R/8)$. **1135.** $(a/2,\ a/2,\ a/2)$. **1136.** $(a/2,\ 0,\ 16a/9)$. **1137.** $\left(\frac{26 - 15\sqrt{2}}{14}, \frac{26 - 15\sqrt{2}}{14}, \frac{61\sqrt{2} - 15\ln(1 + \sqrt{2})}{96(\sqrt{2} + 1)}\right)$. **1138.** $(a\sqrt{2}/4,\ a\sqrt{2}/4,\ a(\sqrt{2} + 1)/\pi)$. **1139.** $2\sqrt{2}\,k\pi/3$, $(0,\ 0,\ 3/4)$. **1140.** $\left(0, \frac{4}{3\pi}, \frac{n^3 - h^3}{an + h^2\ln\frac{a + n}{h}}, \frac{h}{2}\right)$.

1141. $8\pi a^4\gamma/3$. **1142.** $2\pi r\gamma(2r^3 - 3r^2H + H^3)/3$. **1143.** $(55 + 9\sqrt{3})\,c^2\gamma/65$. **1144.** $\pi a^3\gamma\,.\,\sqrt{a^2 + h^2}/2$. **1145.** $\pi\gamma a(3a^2 + 2b^2)\sqrt{a^2 + b^2}/12$. **1146.** a) $2V$; b) $9V\zeta$; c) $V\zeta$; d) $4J_z$. **1147.** $V(P_0) = 4\pi\gamma . \min(a, a^2/r_0)$, kde $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **1148.** $F = -4\gamma a h^2 k/15$, $C = (0, 0, -4h/7)$. **1149.** $F = -\pi\gamma abhk/2$, $C = (0, 0, 0)$. **1150.** $L_{12} = \dfrac{\mu}{\pi\sqrt{3}}\left[(a + b)\ln\left(1 + \dfrac{a}{b}\right) - a\right]$. **1151.** $L_{12} = 4\pi\mu(b - \sqrt{b^2 - a^2})$.

5,4. Základy teórie poľa

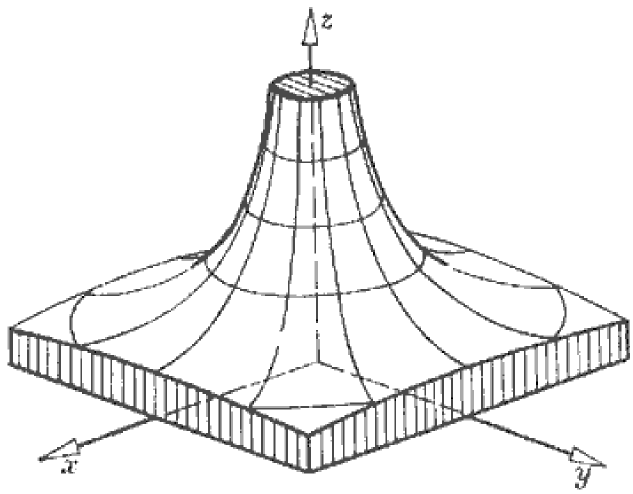
1152. $[(\sqrt{x^2 + y^2} + yz)\,\boldsymbol{i} - (\sqrt{x^2 + y^2} + xz)\,\boldsymbol{j} + (x - y)\,z\boldsymbol{k}]/[(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}]$. **1153.** 3; **o**. **1154.** $2(x + y + z)$; **o**. **1155.** $6xyz$; $x(z^2 - y^2)\,\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\,\boldsymbol{j} + z(y^2 - x^2)\,\boldsymbol{k}$. **1156.** $-x \sin y$; $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. **1157.** $y\,e^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2)$; $z^2\sin(xz^2)\,\boldsymbol{j} - [x\,e^{xy} + y\sin(xy)]\,\boldsymbol{k}$. **1158.** 0; **o**. **1159.** **o**. **1160.** -3. **1162.** Rovnobežky $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k})\,t$, $t\in(-\infty, \infty)$, kde $\boldsymbol{r}_0$ je ľubovoľný vektor. **1163.** $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + c_1t\boldsymbol{j} + c_2t^2\boldsymbol{k}$, kde c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne čísla. **1164.** Kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$, $x + y + z = c_2$. **1165.** Skrutkovice $\boldsymbol{r} = c_1\cos(at + c_2)\,\boldsymbol{i} + \sin(at + c_2)\,\boldsymbol{j} + (ht + c_3)\,\boldsymbol{k}$. **1166.** Krivky $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$, $yz = c_2x$. **1167.** $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = -2\omega^2$, ak v čase t je bod X bodom telesa. **1168.** Mimo bodov X_i, $i = 1, \ldots, n$, je $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. **1169.** $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = (1/h_1h_2h_3)\left[\dfrac{\partial}{\partial u}(h_2h_3f_u) + \dfrac{\partial}{\partial v}(h_3h_1f_v) + \dfrac{\partial}{\partial w}(h_1h_2f_w)\right]$, kde $\boldsymbol{f} = f_u\boldsymbol{u}^0 + f_v\boldsymbol{v}^0 + f_w\boldsymbol{w}^0$ a $h_1 = (q_{1u}'^2 + q_{2u}'^2 + q_{3u}'^2)^{1/2}$, $h_2 = (q_{1v}'^2 + q_{2v}'^2 + q_{3v}'^2)^{1/2}$, $h_3 = (q_{1w}'^2 + q_{2w}'^2 + q_{3w}'^2)^{1/2}$. Pre cylindrický súradnicový systém $X = (\varrho, \varphi, u)$ máme $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \dfrac{1}{\varrho}\left[\dfrac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho f_\varrho) + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}f_\varphi + \varrho\dfrac{\partial}{\partial u}f_v\right]$. Pre sférický súradnicový systém $X = (r, \varphi, \vartheta)$ je $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = \dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\vartheta\,.\,f_r) + r\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(f_\varphi) + r\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,.\,f_\vartheta)\right]$. **1172.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, ak bod X je v čase t bodom telesa. **1173.** 0. **1174.** $3\pi/8$. **1175.** 0; 0. **1176.** a) 0; b) π; c) π. **1177.** 0. **1178.** $2\pi R^2h$. **1180.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i$. **1181.** $2\pi a^2$. **1182.** 0. **1183.** $2\pi^2b^2$. **1184.** a) $\pm 2\pi n$, kde n je počet okruhov krivky C okolo osi o_z; b) 0. **1186.** $V(x, y, z) = 5x^2y - 3xy^2 - 5y + 1$. **1187.** $V(x, y, z) = xyz(x + y + z) + C$. **1188.** $V(X) = \varkappa m/r$. **1189.** Jedno také skalárne pole je $g(X) = (xyz)^{-2}$. **1190.** $-(z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + y^3\boldsymbol{k})/3 + (1/3)\operatorname{grad}(x^3y + y^3z + z^3x)$. **1191.** Jedno také pole je $\boldsymbol{f}(X) = (3x - 2z)\,\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$. **1194.** *Návod:* Zvoľte kruh so stredom v bode X a polomerom ε tak, aby ležal vnútri krivky C. Potom použite druhú Greenovu formulu a $\varepsilon \to 0$. **1198.** $c\gamma\dfrac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad} T)$, kde c je merné teplo a γ je hustota telesa.

6. Základy teórie funkcie komplexnej premennej

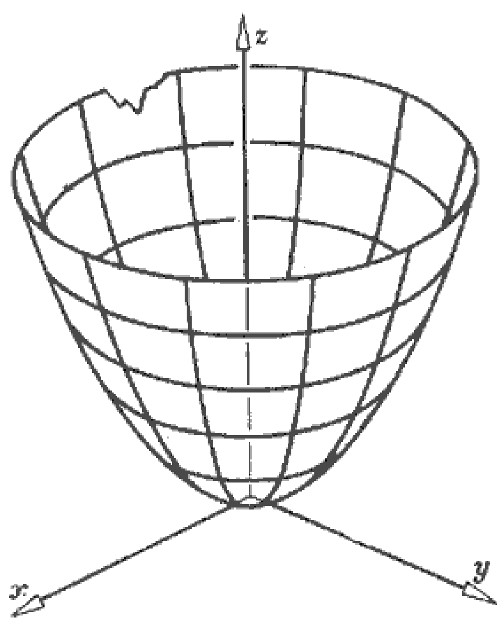
6,1. Funkcia komplexnej premennej, elementárne transcendentné funkcie

1199. Parabola. **1200.** Elipsa. **1201.** $a \neq 0$: $a = b$ cykloida, $a < b$ predĺžená cykloida, $a > b$ skrátená cykloida. **1202.** Evolventa kružnice. **1203.** Pre $a \neq 0$ logaritmická špirála, pre $a = 0$ kružnica. **1204.** Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$. **1205.** Kruh aj so svojou hranicou. **1206.** Vnútro lemniskáty. **1207.** Kružnica. **1208.** Ak $\operatorname{Re} z < 0$ vonkajšok kruhu $(x + 1)^2 + y^2 = 2$. **1209.** Prienik vonkajších častí kruhov $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ a $x^2 + (y + 1)^2 = 2$. **1210.** a) $4 + 2\,\mathrm{i}$; b) $16 + 3\,\mathrm{i}$; c) $36 - 90\,\mathrm{i}$.

1211. $-2-3\,\mathrm{i}, \mathrm{i}, \mathrm{i}$. **1212.** E_2. **1213.** K bez bodu $-\frac{\mathrm{i}}{2}$. **1214.** K bez bodov $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$. **1215.** K bez kružnice $|z| = 1$. **1216.** K bez bodov $(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}$, k celé. **1217.** a) $\mathrm{i}, \frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{i}, \frac{\pi}{4}$, c) $\mathrm{e}^3(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1)$, 1; d) $\mathrm{e}^{-3}(\cos 4 - \mathrm{i}\sin 4)$, $2\pi - 4$. **1218.** a) $\cos(2k\sqrt{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(2k\sqrt{2}\pi)$; b) $\cos[(2k+1)\pi\sqrt{2}] + \mathrm{i}\sin[(2k+1)\pi\sqrt{2}]$; c) $\mathrm{e}^{2k\pi}$; d) $\mathrm{e}^{\ln 2 - 2k\pi}(\cos\ln 2 + \mathrm{i}\sin\ln 2)$; e) $\mathrm{e}^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$; f) $\cos\frac{3\pi}{8}(1+4k) + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}(1+4k)$; g) $5\,\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi}\left[\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$; h) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\pi}{8}(1+8k) + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}(1+8k)\right]$. **1219.** a) $\ln 4 + 2k\pi\,\mathrm{i}$; b) $(2k+1)\pi\,\mathrm{i}$; c) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\,\mathrm{i}$; d) $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi\,\mathrm{i}$; e) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}$; f) $\ln 17 - \mathrm{i}\operatorname{arctg}\frac{15}{8} + (2k+1)\pi\,\mathrm{i}$, **1220.** a) $\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$; b) $\cos 2\cosh 1 - \mathrm{i}\sin 2\sinh 1$; c) $\frac{\sin 4 - \mathrm{i}\sinh 2}{2(\cos^2 2 + \sinh^2 1)}$; d) $\frac{8+15\,\mathrm{i}}{17}$. **1221.** $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$; b) $2k\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1)$; c) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; d) $k\pi + \frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2$; e) $\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\frac{\ln 3}{2} + k\pi$, k celé číslo; f) $k\pi + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\mathrm{i}}{4}\ln 5$. **1222.** a) $\sinh 2\cos 1 - \mathrm{i}\cosh 2\sin 1$; b) $\cos 1$; c) i; d) $\frac{\sinh 8 - \mathrm{i}\sin 4}{2(\cosh^2 4 - \cos^2 2)}$. **1223.** a) $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\mathrm{i}$, k celé číslo; b) $(2k+1)\pi\,\mathrm{i}$, k celé číslo; c) $\ln(\sqrt{5} \pm 2) + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi\,\mathrm{i}$; d) $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\mathrm{i}$, k celé číslo. **1224.** $\operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} w = \frac{-y}{x^2+y^2}$. **1225.** $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} w = 2xy$. **1226.** $\operatorname{Re} w = \cosh y \sin x$, $\operatorname{Im} w = \sinh y \cos x$. **1227.** $\operatorname{Re} w = \cos x \cosh y$, $\operatorname{Im} = -\sin x \sinh y$. **1228.** $\operatorname{Re} w = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$, $\operatorname{Im} w = \frac{\sinh 2y}{\cosh 2y + \cos 2x}$. **1229.** $\operatorname{Re} w = \mathrm{e}^{-\varphi}\cos(\ln r)$, $\operatorname{Im} w = \mathrm{e}^{-\varphi}\sin(\ln r)$, $\varphi = \arg z$, $r = |z|$. **1230.** $\operatorname{Re} w = r^{\pi}\cos(\pi\varphi)$, $\operatorname{Im} w = r^{\pi}\sin(\pi\varphi)$, $\varphi = \arg z$, $r = |z|$. **1231.** $w = -\mathrm{i}z^2 + 2z - 1$. **1232.** $w = \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - \frac{\mathrm{i}}{4}(z^2 -$

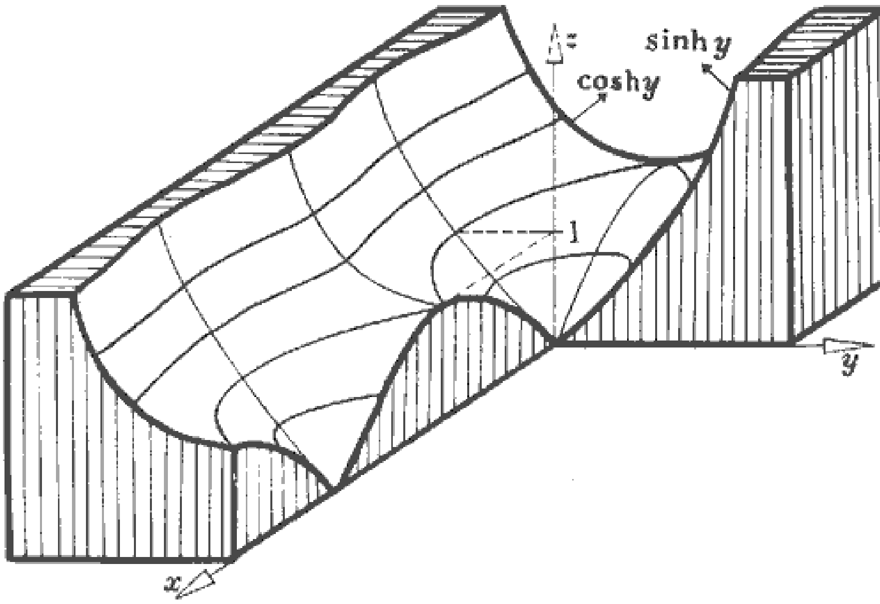


Obr. V2



Obr. V3

$-2z\bar{z}+\bar{z}^2)$. **1233.** a) $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$; b) $v=0$; c) $u+v=0$; d) $u^2+v^2=\frac{1}{9}$; e) $u=\frac{1}{2}$. **1234.** a) kružnice $\varrho=e^C$, polpriamky $\vartheta=C$, špirála $\varrho=e^\vartheta$; b) krivky $y=e^x+2k\pi$. **1235.** Kružnica $u^2+v^2-2u\cot\alpha=1$. **1236.** Kružnicu $|z|=R\neq 1$ zobrazí na elipsu $\frac{u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$, kružnicu $|z|=1$ zobrazí na úsečku $v=0$, $-2\leqq u\leqq 2$. **1237.** Lemniskáta $\varrho=\sqrt{2\,|\cos 2\vartheta|}$, kde $w=\varrho\, e^{i\vartheta}$. **1238.** Kruh $|w|<1$. **1239.** Kruh $u^2+v^2<2v$. **1240.** K bez polpriamok $v=\pi$, $-\infty<u<-1$ a $v=-\pi$, $-\infty<u<-1$. **1241.** Štvrtina vnútra elipsy s polosami $\sinh a$, $\cosh a$, s ohniskami v bodoch 1 a -1. **1242.** Kruh $|w|<1$. **1243.** Pás $|\operatorname{Re} w|<\frac{\pi}{4}$. **1244.** Pás $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{4}$. **1245.** Úsečka $v=0$, $-1\leqq u\leqq 1$. **1246.** $\frac{8}{3}$, $2\ln(1+\sqrt{2})\,e^{1+\sqrt{2}}$. **1253.** Rotačná plocha $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *obr. V2.* **1254.** Rotačný paraboloid $z=x^2+y^2$, *obr. V3.* **1255.** $z=\cosh^2 y\sin^2 x+\sinh^2 y\cos^2 x$, *obr. V4.*



Obr. V4

6,2. Limita a spojitosť funkcie komplexnej premennej

1256. Pre pravouhlé súradnice X, Y, Z obrazu bodu $z=x+iy$ platí $X=4R^2x/(4R^2+|z|^2)$, $Y=4R^2y/(4R^2+|z|^2)$, $Z=2R\,|z|^2/(4R^2+|z|^2)$, kde R je polomer guľovej plochy a $o_X=o_x$, $o_Y=o_y$ a os o_Z prechádza stredom guľovej plochy. a) Obraz bodu $-z$ leží v priesečníku poludníka a rovnobežky, ktoré prechádzajú obrazom bodu z; b) Obraz bodu $\bar{z}$ leží na rovnobežke, ktorá prechádza obrazom bodu z, a na poludníku, ktorý je súmerne položený k poludníku prechádzajúcom obrazom bodu z vzhľadom na rovinu, v ktorej ležia obrazy reálnych čísiel. **1257.** $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $(-2/3, 2/3, 1/3)$, $(3/13, -4/13, 12/13)$. **1261.** Logaritmická špirála. **1263.** Má. **1264.** Má. **1265.** Má. **1266.** Nemá. **1267.** a) Nie; b) nie; c) áno. **1268.** Neexistuje. **1269.** 0. **1270.** $-i+1/2$. **1271.** ∞. **1272.** Neexistuje. **1273.** $i/5$. **1274.** a) Spojitá; b) nespojitá; c) nespojitá. **1275.** a) Je; b) je. **1277.** Pre $z\neq 0$ a), b), c), d) sú spojité; pre $z=0$ a), d) sú spojité, b), c) sú nespojité. **1278.** Body nespojitosti tvoria priamku $\operatorname{Im} z=0$. **1279.** Body nespojitosti tvoria priamky $\varphi=\pi k/6$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6$. **1280.** $\max|f|=4$ pre $z=0$, $\min|f|=0$ pre $z=0$.

6,3. Derivácia funkcie komplexnej premennej a analytická funkcia

1282. $r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}$. **1283.** $3z^2 - 5 - \dfrac{1}{(z-4)^2}$, $z \neq 4$, $z \neq \infty$. **1284.** $\dfrac{6z - 16\,\mathrm{i} - 6}{(2\,\mathrm{i}z + 4)^2}$, $z \neq 2\,\mathrm{i}$. **1285.** $\dfrac{6z^5 - 8z^3}{(z^2-1)^{3/2}}$, $z \neq \pm 1$, $z \neq \infty$. **1286.** $(1 + \mathrm{i})(1 + z)\,\mathrm{e}^z$. **1287.** $-2z\mathrm{e}^{-z^2}$, $z \neq \infty$. **1288.** $-3/z^4$, $z \neq 0$. **1289.** $1 - 1/z^2$, $z \neq 0$. **1290.** 0. **1293.** a) Komplexná rovina bez bodu $z = \infty$; b) komplexná rovina bez bodu $z = 0$; c) komplexná rovina okrem bodov $\mathrm{Re}\, z < 0$, $\mathrm{Im}\, z = 0$; d) prázdna množina. **1296.** $f(z)$ je regulárna v oblasti D, teda $\ln \varphi(x) + \ln \psi(y)$ je harmonická funkcia. Potom $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln \varphi(x) = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\ln \psi(y) = 2a = \text{const}$ (a je reálne číslo). Odtiaľ $\ln \varphi(x) = ax^2 + b_1x + c_1$, $\ln \psi(y) = -ay^2 + b_2y + c_2$; $\ln |f(z)| = a(x^2 - y^2) + b_1x + b_2y + c_1 + c_2$, $\arg f(z) = 2axy + b_1y - b_2x + d_1$, $\log f(z) = az^2 + bz + c$. **1297.** $w(z) = z^2(2 - \mathrm{i})/2$. **1298.** $b = z^3(1 - 2\,\mathrm{i})$. **1299.** $w = z^2 + 3\,\mathrm{i}z + c$. **1300.** $w = 1/z + 2\,\mathrm{i}z + c\,\mathrm{i}$. **1301.** $w = 1/2 - 1/z$. **1302.** $w = 1/2z + \mathrm{i}z^2 + 3\,\mathrm{i} + c$. **1303.** $w = z\,\mathrm{e}^z + (1 + \mathrm{i})\,z$. **1304.** $w = z\,\mathrm{e}^z + 2\,\mathrm{i}\cos z + z^3 - \mathrm{i}z + c\,\mathrm{i}$. **1305.** $w = \mathrm{cotg}\, z$. **1306.** $2\,\mathrm{i}\ln z - (2 - \mathrm{i})\,z + c$. **1307.** $w = \alpha \ln z + \beta\,\mathrm{i} + \gamma$. **1308.** $\ln w = \mathrm{i}\alpha/z^2 + \beta + \mathrm{i}\gamma$. **1309.** $w = cz^{\mathrm{i}\alpha}$. **1310.** $|f(z)|$ nie; $\arg f(z)$, $\ln |f(z)|$ áno. **1311.** $f(u) = au + b$. **1315.** $\varrho\dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$; $u = c_1 \ln \varrho + c_2$. **1316.** a) $u = c_1 \,\mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x} + c_2$; b) $u = c_1 \ln (x^2 + y^2) + c_2$; c) neexistuje. **1317.** $v(x, y) = (-x^2 + y^2)/2 + 2xy$, $f(z) = (1 - \mathrm{i}/2)\, z^2$. **1318.** $v(x, y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^2$, $f(z) = (1 - 2\,\mathrm{i})\, z^3$. **1319.** $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, $f(z) = z^{-1}$. **1320.** $u(x, y) = \mathrm{Re}\, \dfrac{z^2}{|z|^4} = \mathrm{Re}\, z^{-2}$; $v(x, y) = \mathrm{Im}\, z^{-2}$; $f(z) = z^{-2}$. **1321.** $v(x, y) = \mathrm{Im}\, z\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(y \cos y + x \sin y)$. **1322.** $w + 1 = 2\,\mathrm{i}(z - \mathrm{i})$, čiže $w = 1 + 2\,\mathrm{i}z$; $|\mathrm{d}w - \Delta w| = |z - \mathrm{i}|^2$.

6,4. Konformné zobrazenie

1323. $w = z^2$: a) 0,2; b) π, $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{\pi}{4}$; $2\sqrt{2}$, d) $\pi - \mathrm{arctg}\, \dfrac{4}{3}$, 10, $w = z^3$: a) 0,3, b) 0, $\dfrac{3}{16}$; c) $\dfrac{\pi}{2}$, 6; d) $-2\,\mathrm{arctg}\, \dfrac{4}{3}$, 75. **1324.** $\dfrac{\pi}{4}$. **1325.** Kontrakcia pre a) $|z| < \dfrac{1}{2}$; b) $|z| > 1$; c) $|z + 1| < \dfrac{1}{2}$; d) $\mathrm{Re}\, z < 0$; e) $|z - 1| > 1$. Dilatácia pre a) $|z| > \dfrac{1}{2}$; b) $|z| < 1$; c) $|z + 1| > \dfrac{1}{2}$; d) $\mathrm{Re}\, z > 0$; e) $|z - 1| < 1$. **1326.** π, $\dfrac{1}{2}$. **1327.** $w = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} - 1$. **1328.** $w = [(d - c)\, z + bc - ad]/(b - a)$. **1329.** a) $-1 + 3\,\mathrm{i}$, 0, 2, $w + 1 - 3\,\mathrm{i} = 2(z + 1 - 3\,\mathrm{i})$; b) $2 + 2\,\mathrm{i}$, $\dfrac{\pi}{2}$, 1, $w - 2 - 2\,\mathrm{i} = \mathrm{i}(z - 2 - 2\,\mathrm{i})$; c) nemá vlastný samodružný bod; d) keď $a = 1$, tak nemá vlastný samodružný bod, keď $a \neq 1$: $\dfrac{b}{1-a}$, $\arg a$, $|a|$, $w - \dfrac{b}{1-a} = a\left(z - \dfrac{b}{1-a}\right)$. **1330.** a) $w = az + b$, $a > 0$, b reálne; b) $w = az + b$, $a < 0$, b reálne; c) $w = \mathrm{i}(az + b)$, $a > 0$, b reálne. **1331.** a) $w = z + b\,\mathrm{i}$, alebo $w = -z + 1 + b\,\mathrm{i}$; b) $w = z + b$, alebo $w = -z + \mathrm{i} + b$; c) $w = z + b(1 + \mathrm{i})$, alebo $w = -z + 1 + b(1 + \mathrm{i})$. **1332.** $w = \pi\,\mathrm{i}\left(z - \dfrac{1}{2}\right)$. **1333.** a) $w = \dfrac{z - a}{h}$; b) $w = z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$. **1334.** a) $w = -\dfrac{2\,\mathrm{i}(z + 1)}{4z - 1 - 5\,\mathrm{i}}$; b) $w = -\dfrac{(1 + 2\,\mathrm{i})\, z + 6 - 3\,\mathrm{i}}{5(z - \mathrm{i})}$. **1335.** a) $w = \dfrac{(1 + \mathrm{i})\, z + 1 + 3\,\mathrm{i}}{(1 + \mathrm{i})\, z + 3 + \mathrm{i}}$; b) $w = \dfrac{\mathrm{i}z + 2 + \mathrm{i}}{z + 1}$. **1336.** $\dfrac{w - 1}{w + 1} = a\,\dfrac{z - 1}{z + 1}$, kde a je ľubovoľné komplexné číslo. **1337.** $w = \dfrac{z(1 - 4\,\mathrm{i}) - 2(1 - \mathrm{i})}{2z(1 - \mathrm{i}) - (4 - \mathrm{i})}$. **1338.** Kissoida $u^2(v + 1) + v^3 = 0$. **1339.** Obrazom je priamka. **1340.** $\dfrac{-5 + 2\,\mathrm{i}}{6}$, $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$.

1341. Priamka určená bodmi $-(\sqrt{3}+i)/2$, $(\sqrt{3}-i)/2$. 1342. Oblasť $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Im}\, z < 0$ bez polkruhu $\left|w-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$. 1343. Dolná polrovina $\mathrm{Im}\, w < 0$ bez kruhu $\left|w-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 1344. Polkruh $|w| < 1$, $\mathrm{Im}\, w < 0$. 1345. Oblasť ohraničená kružnicami $\left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ a $\left|w-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$. 1346. Oblasť, obsahujúca bod $w = 0$ a ohraničená oblúkmi kružníc $|w| = 1$ a $\left|w+\frac{5i}{4}\right| = \frac{3}{4}$. 1347. Dvojnásobne súvislá oblasť, ktorej hranicou je priamka $\mathrm{Re}\, w = \frac{1}{2}$ a kružnica $\left|w-\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}$. 1348. $w = \frac{2}{2-z}$. 1349. $w = \frac{1}{1-z}$. 1350. $w = -2\frac{2z+1}{z-2}$. 1351. $w = \frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\,\frac{z-a_1}{z-a_3}$. 1352. $w = \frac{z-4}{z-1}$. 1353. a) $w = \frac{2z-1}{2-z}$; b) $w = -iz$; c) $\frac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$; d) $w = \frac{2z+1}{z+2}$; e) $w = \frac{1-(1+i)z}{1-i-z}$. 1354. $w = \frac{1-z}{z+2}$. 1355. $w = 2\frac{z-2+i}{iz+2-2i}$. 1356. $w = i\frac{z-2i}{z+2i}$. 1357. $w = 2i\frac{z-i}{z+i}$, $R = 2$. 1358. $w = Ri\frac{z-i}{z+i}+w_0$. 1359. $w = i\frac{1-z}{1+z}$. 1360. $w = \frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+3i+1}$. 1361. $w = \frac{R-z}{R+z}$, horný polkruh sa zobrazí na IV. kvadrant $\mathrm{Re}\, w > 0$, $\mathrm{Im}\, w < 0$. 1362. $w = -4\frac{zi+2}{z-2-4i}$. 1363. $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$, kde $w = \varrho e^{i\varphi}$. 1364. $w = \frac{4z+1}{z+4}$, $R = 2$. 1365. $w = \frac{z+24}{3z}$, $\varrho = \frac{3}{2}$. 1366. $(b-a)zw = \pi a(2b i - z)$. 1367. $w = -\frac{d}{z}+1+hi$, alebo $w = \frac{d}{z}+hi$. 1368. Pri $c \neq 0$ je $w = \frac{bc-ad}{c}z_1+\frac{a}{c}$, $z_1 = \frac{1}{z_2}$, $z_2 = cz+d$. 1369. $\frac{9}{2}+i$. 1370. a) priamka $\mathrm{Re}\, z = 1/2$; b) lemniskáta $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$. 1371. Kruh $|z-(a/4)| < a/4$. 1372. $a\bar{d}-\bar{b}c = 0$, $\mathrm{Im}\,(b/d) > 0$. 1373. $w = (1+z)^2$. 1374. $w = 1-2(a/z)^2$. 1375. $w = i(2z^2-1)$. 1376. $w = \frac{2\sqrt{z}-i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2-1}}$. 1377. $w = \frac{2+iz^2}{2-iz^2}$. 1378. $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. 1379. Napr. $w = -\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^2$. 1380. a) $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$; b) $w = \frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}$. 1381. a) $w = \frac{z^2+2iz+1}{iz^2+2z+i}$; b) $w = \frac{2z^2+3iz+2}{2z^2-3iz+2}$. 1382. a) elipsy $u^2\left[\frac{1}{2}(R+R^{-1})\right]^{-2}+v^2\left[\frac{1}{2}(R-R^{-1})\right]^{-2} = 1$; b) polovica jednej vetve hyperbol $u^2\cos^{-2}\vartheta - v^2\sin^{-2}\vartheta = 1$. 1383. a) K bez úsečky $-1 \leq \mathrm{Re}\, w \leq \frac{5}{4}$, $\mathrm{Im}\, w = 0$; b) K bez polpriamok $\mathrm{Re}\, w \geq -\frac{5}{4}$, $\mathrm{Im}\, w = 0$ a $\mathrm{Re}\, w \geq -1$, $\mathrm{Im}\, w = 0$. 1384. $w = \frac{1}{2}[(a+b)z+(a-b)z^{-1}]$. 1385. a) $w = z+\frac{1}{z}-2$; b) $\sqrt{w} = (1-z)/\sqrt{z}$. 1386. $w = z+\frac{1}{z}$, $R_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $R_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$, $R_2/R_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. 1387. $w = \frac{2z}{1+z^2}$. 1389. $w = z(z+\sqrt{2})/(1+z\sqrt{2})$. 1389. $w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$. 1390. $w = \sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. 1391. $w = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$. 1392. $w = \sqrt{z^2+h^2}$. 1393. $w = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$. 1394. $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{2-2i-z}}$. 1395. $w = \sqrt{1-\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2}$. 1396. $w = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$. 1397. $w = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right]}$. 1398. $w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 1399. $w =$

$= \left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$. **1400.** $w = \left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}} - R^{\frac{1}{\alpha}}}{z^{\frac{1}{\alpha}} + R^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2$. **1401.** $w = \frac{3}{8}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} + \sqrt{\left[\frac{3}{8}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4}\right]^2 - 1}$.

1402. $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, $R = 2 + \sqrt{5}$. **1403.** $w = \frac{1}{9}(z + \sqrt{z^2 - 9})$. **1404.** $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$.

1405. $w = z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} e^{-\frac{i\pi}{2}\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}$. **1406.** Vnútro epicykloidy s plochou $\pi n(n+1)$. **1407.** $w =$

$= \frac{2(\sqrt[3]{4}+1) e^{\frac{\pi i}{3}} z^{\frac{3}{4}}}{(\sqrt[3]{4}-2) e^{\frac{\pi i}{3}} z^{\frac{3}{4}} + 3\sqrt[3]{4}}$. **1408.** a) $w = i\left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} + i}\right)^{\frac{3}{2}}$; b) $w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} + i}\right)^3$,

c) $w = \left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} + i}\right)$; d) $w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} + i}\right)^{\frac{3}{2}}$. **1409.** $w = \left(\frac{z - \sqrt{2}(1-i)}{z - \sqrt{2}(1+i)}\right)^4$.

1410. $w = \frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{2(z^2+1)}$. **1411.** $w = e^{\frac{\pi i(z-a)}{b-a}}$. **1412.** $w = e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$. **1413.** $w = e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}$.

1414. $w = e^{\frac{2}{3}\pi i\frac{z-4}{z-2}}$. **1415.** $w = \frac{e^{-\frac{\pi z}{a}} - 1}{e^{-\frac{\pi z}{a}} + 1}$. **1416.** $w = \sqrt{e^{2z} + 1}$. **1417.** $w =$

$= \sqrt{1 + e^{i\pi\left(\frac{1}{z} - \frac{i}{2} + 1\right)}}$. **1418.** a) $w = \frac{2e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}}{1 + e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}}$; b) $w = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{tgh}$

$\frac{\pi i(z+3i)}{4(z-i)}$. **1419.** $w = \frac{1}{\pi}\ln\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)$. **1420.** $w = \frac{h}{\beta}\left[\ln\frac{z+a}{z-a} - (\pi+\alpha)i\right]$. **1421.** $w =$

$= \frac{b}{\pi}\ln\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}$. **1422.** $w = \sin z$. **1423.** $w = \sqrt{\frac{\sin z + 1}{\sin z}}$. **1424.** $w = \cos\frac{\pi(z+2)}{2z}$.

1425. $w = -\cosh\frac{(z-1)\pi}{h}$. **1426.** $w = \cosh[\pi(2 + \sqrt{z})]$. **1427.** $w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \cosh 2h}{\cos 2z + 1}}$.

1428. $w = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{4\pi}{z}}{\cos\frac{4\pi}{z} - \cos\frac{4\pi}{a}}}$. **1429.** $w = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{h} - \cos\frac{\pi}{z}}{1 - \cos\frac{\pi}{z}}}$. **1430.** $|w| < 1$.

1431. $w = \mathrm{tg}^2\frac{z}{2}$. **1432.** $w = \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right]}$. **1433.** Horná polrovina bez úsečiek $z = n\pi + t\,i$, $t \in \langle 0, a\rangle$, n je celé číslo. **1434.** $\frac{\pi}{2}$. **1435.** $w = \mathrm{tgh}\frac{\pi z}{2}$. **1436.** $w = \sqrt{\mathrm{tgh}^2\frac{z}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{h}{2}}$

1437. $w = \sqrt{\frac{\mathrm{tgh}^2\left[\frac{\pi}{4}(z-i)\right] + 3 + 2\sqrt{2}}{\mathrm{tgh}^2\left[\frac{\pi}{4}(z-i)\right] + 8{,}5 - 6\sqrt{2}}}$. **1438.** $w = \sqrt{\mathrm{tgh}^2\left(\frac{2}{5}\ln\frac{1+z}{1-z}\right) + \mathrm{tg}^2\left(\frac{2}{5}\,\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)}$.

1439. Pás $|\mathrm{Im}\, w| < \frac{\pi}{4}$. *Návod:* $w = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$. **1440.** a) $w = i\sqrt{2}\cosh\left[\pi\sqrt{\frac{z}{2p} - \frac{1}{4}}\right]$; b) $w = i\sqrt{2}\cosh\left[\frac{\pi}{2\alpha}\,\mathrm{argcosh}\frac{z}{e}\right]$, kde $\alpha = \arcsin\frac{a}{e}$. **1441.** $w = \arccos\left(\frac{\cos z}{\cosh h}\right)$. **1442.** $w =$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{z^2-1} + i\sqrt{5}}{i - \sqrt{z^2-1}}}$. **1443.** $w = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{1 - iz^2} + \sqrt{1 + iz^2}]$.

6,5. Integrál funkcie komplexnej premennej

1445. $(3 + 4\,\mathrm{i})^2/2$. **1446.** a) $(1 + \mathrm{i})/2$; b) $\pi\,\mathrm{i}/2$; c) $\pi a^2\,\mathrm{i}$. **1447.** a) $1 + \mathrm{i}/2$, b) $2 + \mathrm{i}/2$, c) $-\pi\,\mathrm{i}/2$. **1448.** $2\pi\,\mathrm{i}$. **1449.** a) $\sqrt{5}\,(1 - \mathrm{i}/2)$, b) 2, c) $2\,\mathrm{i}$, d) 0. **1450.** a) 0, b) 0. **1451.** a) $R^{n+1}[(-1)^{n+1} - 1]/(n + 1)$, keď $n \neq -1$; $\pi\,\mathrm{i}$, keď $n = -1$. b); c) 0, keď $n \neq -1$; $2\pi\,\mathrm{i}$, keď $n = -1$. **1452.** $\pi\,\mathrm{i}$. **1453.** $4/3$. **1454.** $4\pi\,\mathrm{i}$. **1455.** $\mathrm{i}\,(\sinh 1 - \cosh 1)$. **1456.** a) $-\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}} - 1 + 2\,\mathrm{e}$; b) $1 + \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}} - 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$. **1461.** a) $-8\pi\,\mathrm{i}$; b) 0. **1462.** a) 0; b) $(2 - 3\,\mathrm{i})/4$; c) $(2 + 3\,\mathrm{i})/4$. **1463.** $\pi\,\mathrm{i}/2$. **1464.** $2\pi \sinh 1$. **1465.** $2^{-1}\,\mathrm{e}^{-(1+\pi\mathrm{i}/2)}$. **1466.** $-\mathrm{i}/2$. **1467.** $(\sin a)/a$. **1468.** 0. **1469.** a) $\pi/3$; b) $-\pi/3$, c) 0. **1470.** $0, \pm\pi\,\mathrm{i}, \pm 2\pi\,\mathrm{i}$. **1471.** a) $\pi/54$; b) $-\pi/54$. **1472.** $\pi\,\mathrm{i}/2$. **1473.** $-\pi\,\mathrm{i}\cosh 1$. **1474.** a) $3\pi\,\mathrm{i}/8$; b) $-3\pi\,\mathrm{i}/8$; c) 0. **1475.** $\pi\,\mathrm{i}/3\,\mathrm{e}^2$. **1476.** a) 1; b) $-\mathrm{e}/2$; c) $1 - \mathrm{e}/2$. **1477.** $-2\pi\,\mathrm{i}\,(b - a)^{-m}$. **1478.** $2\pi \ln a$.

6,6. Nekonečné rady

1480. konvergentný. **1481.** divergentný. **1482.** relatívne konvergentný. **1483.** divergentný. **1484.** Relatívne konvergentný pre $\varphi \neq 2k\pi$, k je celé číslo. Divergentný pre $\varphi = 2k\pi$, k je celé číslo. **1485.** absolútne konvergentný. **1486.** divergentný. **1488.** $1/2 < |z| < 1$. **1489.** $\operatorname{Re} z < -1$. **1490.** $\operatorname{Re} z \leqq 0$. **1491.** $|z| > 1$. **1492.** $\operatorname{Im} z = 0$. **1493.** $\operatorname{Re} z \geqq a$, $a > 0$. **1494.** $\operatorname{Re} z \geqq 1 + a$, $a > 0$. **1495.** $\operatorname{Im} z = 0$. **1496.** Na každej úsečke $2k\pi + \varepsilon < \operatorname{Re} z < 2(k + 1)\,\pi - \varepsilon$, $\operatorname{Im} z = 0$, kde $0 < \varepsilon < \pi$ a k je celé číslo. **1498.** 1. **1499.** ∞. **1500.** 0. **1501.** e. **1502.** 1. **1503.** $1/\mathrm{e}$. **1504.** 1. **1505.** $\min(1, 1/c)$. **1508.** diverguje vo všetkých bodoch konvergenčnej kružnice. **1509.** absolútne konverguje vo všetkých bodoch konvergenčnej kružnice. **1510.** relatívne konverguje vo všetkých bodoch konvergenčnej kružnice okrem bodu $z = 1$. **1511.** relatívne konverguje vo všetkých bodoch konvergenčnej kružnice okrem bodu $z = -1$. **1512.** konverguje v každom bode konvergenčnej kružnice okrem bodov $z_1 = -1$, $z_2 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, $z_3 = \bar{z}_2$. **1516.** $z/(1 - z)^2$. **1517.** $-\ln(1 - z)$. **1518.** $(1/2)\ln[(1 + z)/(1 - z)]$. **1519.** $\ln(1 + z)$. **1523.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$. **1524.** $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$, $R = \infty$. **1525.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n - 1)\, z^n$, $R = 1$. **1526.** $\sqrt{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{E(n/2)} \cdot \dfrac{(2n + 1)!!}{2^{2n}(2n)!} z^n$, $R = 1$. **1527.** $2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{2n + 1}$, $R = 1$. **1528.** $2 \sum\limits_{n=2}^{\infty} \varphi(n) \dfrac{z^n}{n}$, kde $\varphi(n) = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n - 1}$, $R = 1$. **1529.** $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} \dbinom{n - 1}{k - 1} \right] z^n$, $R = 1$. **1530.** $z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{z^{2n+1}}{2n + 1}$, $R = 1$. **1531.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2n - 1}\right) z^n$, $R = 1$. **1532.** $\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dbinom{-1/2}{n} \dfrac{z^{2n}}{2n}$, $R = 1$. **1533.** $2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) \cdot \dfrac{z^n}{2n + 1}$, $R = 1$. **1534.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{n!(2n + 1)!}$, $R = \infty$. **1535.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n + 1)!\,(2n + 1)}$, $R = \infty$. **1536.** $\dfrac{1}{3} - 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(z - 1)^n}{3^{n+1}}$, $R = 3$. **1537.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(z - 1)^n}{n}$, $R = 1$. **1538.** $\dfrac{1}{4} \left[1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z - 1)^n}{2^{\varphi(n)}} \right]$, pričom $\varphi(2k) = 2k$, $\varphi(2k - 1) = 2k$, k je prirodzené číslo, $R = 2$.

1539. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(1 + \frac{n\pi}{2}\right) \frac{(z-1)^{2n}}{n!}$, $R = \infty$. **1540.** a) $\sqrt[3]{i}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\varphi(n)}{n!} \frac{(z-i)^n}{(3\,i)^n}\right]$, kde $\varphi(n) = 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, \ldots \,.\, (3n-4)$ pre $n \geqq 2$ a $\varphi(1) = 1$, $R = 1$; b) $\frac{\pi\,i}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,i^n} \,.\, (z-i)^n$, $R = 1$. **1541.** $\ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \ldots$, $R = \pi$. **1542.** $1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \frac{61z^6}{720} + \ldots$, $R = \frac{\pi}{2}$. **1543.** $\sin 1 + z\cos 1 + \left(\cos 1 - \frac{\sin 1}{2}\right) z^2 + \left(\frac{5}{6}\cos 1 - \sin 1)\right) z^3 + \ldots$, $R = 1$. **1544.** $e\left(1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \ldots\right)$, $R = 1$. **1545.** $1 + \frac{z^2}{3} - \frac{4z^4}{45} + \frac{44z^6}{945} - \ldots$, $R = 1$. **1548.** a) $4\,i$, $-4\,i$, $n = 1$; b) i, $-i$, $n = 1$, $5\,i$, $-5\,i$, $n = 5$; c) i, $-i$, $n = 1$, ∞, $n = 2$; d) 0, $n = 2$, $k\pi$, k je celé číslo, $n = 1$; e) 0, $n = 2$, $k\pi$, k je celé číslo, $n = 3$; f) —; g) $2k\pi\,i$, k je celé číslo, $n = 1, 2, -2$, $n = 3$; h) 0, $n = 3$; i) 0, $n = 15$; j) 0, $n = 4$.

6,7. Laurentov rad. Singulárne body funkcie

1549. a) $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$. **1550.** a) $z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$; b) $-(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,.\, (z-1)^n$; c) $-\sum_{n=2}^{\infty} z^{-n}$. **1551.** a) $\frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}} (z-2)^n$; b) $2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. **1552.** $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}$. **1553.** $-\frac{i}{4(z-i)} - \frac{1}{4(z-i)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)\,i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}$. **1554.** a) $\frac{1}{9}\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{2n}$, $a_n = 1$, pre $n < 0$, $a_n = \frac{3n+7}{4^{n+2}}$, pre $n \geqq 0$; b) $\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (3n-7)\,4^{n-2}}{z^{2n}}$. **1555.** $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1 + n\pi/2)}{n!(z-1)^n}$. **1556;** $\cos 1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(2k)!\,(z-2)^{4k}} + \sin 1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!\,(z-2)^{4k+2}}$. **1557.** $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6z^3} - \frac{1}{2z^4} - \ldots$. **1558.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+5}$. **1559.** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$, kde $c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **1560.** $e(1 - 2/z + 6/z^2 + \ldots)$. **1561.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,i(-1)^{k-1}}{(2k-1)\,z^{2k-1}}$.

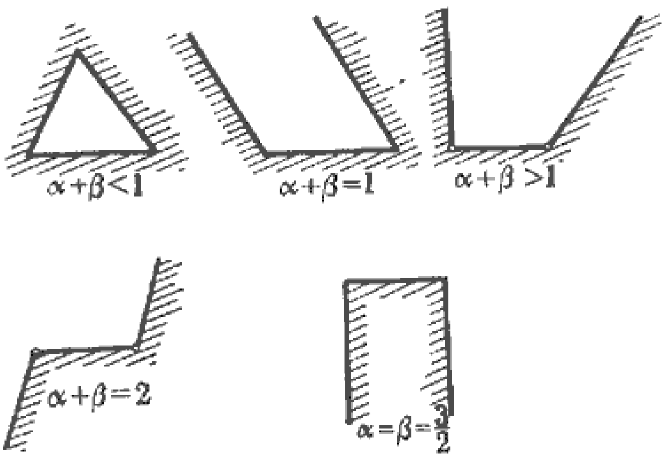
1562. $z^{-2} + z^{-4}/2 + z^{-6}/3 + \ldots$. **1563.** a) $a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{2}{z}\right)^n$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{2}{z}\right)^n$, pričom $c_{2\nu} = c_{2\nu+1} = -i\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,.\,\frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu-1)\,2^{2\nu-1}}\right]$; číslo $a = -\frac{1}{2}\ln\frac{2-i}{2+i}$, $b_n = a + - c_n$. **1564.** $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_{-n} = \frac{(-1)^n\,i}{\sqrt{2}}\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n} + \binom{-\frac{1}{2}}{m+n}\binom{-\frac{1}{2}}{m} 2^{-m}\right]$;

$c_n = 2^{-n}c_{-n}$. $c_0 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 2^{-m}\right]$. **1565.** $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{2n!} z^{2n-1}$, kde B_{2n} sú Bernoulliho čísla, pre ktoré platí $B_0 = 1$, $\binom{n+1}{0}B_0 + \binom{n+1}{1}B_1 + \ldots + \binom{n+1}{n}B_n = 0$, pričom $B_{2n+1} = 0$, pre $n = 1, 2, 3, \ldots$. **1566.** $J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi - t\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$, $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}$. **1567.** a) áno; b) áno; c) nie; d) nie (v ľubovoľnom medzikruží okolo bodu $z = 0$ funkcia nie je spojitá). **1569.** $z = \infty$ je pól tretieho rádu. **1570.** $z = 0$, $z = \pm 1$ sú póly prvého rádu; $z = \infty$ je obyčajný bod (nulový bod prvého rádu). **1571.** $z = \pm\mathrm{i}$ jednoduché póly. **1572.** $z = 1$ je pól druhého rádu; $z = \infty$ je pól tretieho rádu. **1573.** $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i})$ sú póly tretieho rádu; $z = \infty$ je odstrániteľný singulárny bod. **1574.** $z = n\pi$, kde n je celé číslo, sú jednoduché body; $z = \infty$ je podstatne singulárny bod. **1575.** $z = 0$ je podstatný singulárny bod, $z = \infty$ je odstrániteľný singulárny bod. **1576.** $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo, sú póly druhého rádu; $z = \infty$ je bod zhustenia pólov. **1577.** $z = 0$ je pól druhého rádu; $z = \infty$ je podstatne singulárny bod. **1578.** $z = 0$, $z = \infty$ sú podstatne singulárne body. **1579.** $z = 1 + \frac{2}{(2k+1)\pi}$, kde k je celé číslo, sú póly prvého rádu; $z = 1$ neizolovaný singulárny bod. **1580.** $z = \frac{2k+1}{2}\pi$, kde k je celé číslo, sú póly prvého rádu; $z = 1$ je odstrániteľný singulárny bod. **1581.** $z = -\pi/4 + k\pi$, kde k je celé číslo, sú póly prvého rádu; $z = \infty$ je neizolovaný singulárny bod. **1582.** $z = 2\mathrm{i}$ je podstatne singulárny bod. **1583.** $z = \infty$ je podstatne singulárny bod. **1584.** $z = 0$ je podstatne singulárny bod; $z = \infty$ je podstatne singulárny bod. **1585.** $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, kde k je celé číslo, sú podstatne singulárne body; $z = \infty$ je obyčajný singulárny bod; $z = 0$ je bodom zhustenia podstatne singulárnych bodov. **1586.** $z = 2k\pi\,\mathrm{i}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, sú jednoduché póly. **1587.** $z = \pm\mathrm{i}$ sú póly prvého rádu; $z = \infty$ je podstatne singulárny bod. **1588.** $z = 1$ je podstatne singulárny bod; $z = 2k\pi\,\mathrm{i}$, kde k je celé číslo, sú póly prvého rádu; $z = \infty$ je neizolovaný singulárny bod. **1589.** $z = k\pi\,i$, kde k je celé číslo, sú póly prvého rádu; $z = \infty$ je bod zhustenia pólov. **1590.** Odstrániteľný singulárny bod, $f(\infty) = 1$. **1591.** Pól tretieho rádu. **1592.** Nulový bod tretieho rádu; odstrániteľný singulárny bod, $f(\infty) = 0$. **1593.** Podstatne singulárny bod. **1594.** Podstatne singulárny bod. **1595.** Pól druhého rádu. **1596.** Podstatne singulárny bod. **1597.** Pól prvého rádu.

6,8. Reziduum funkcie a jeho aplikácie

1599. $\operatorname{res} f(2) = 5$. **1600.** $\operatorname{res} f(0) = 1$, $\operatorname{res} f(\pm 1) = -1/2$, $\operatorname{res} f(\infty) = 0$. **1601.** $\operatorname{res} f(\pm 1) = -1/2$, $\operatorname{res} f(0) = 1$, $\operatorname{res} f(\infty) = 0$. **1602.** $\operatorname{res} f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}/4$, $\operatorname{res} f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}/4$. **1603.** $\operatorname{res} f(0) = 2$, $\operatorname{res} f(1) = -3/4$, $\operatorname{res} f(-1) = -5/4$. **1604.** $\operatorname{res} f(-1) = (-1)^{n+1}\binom{2n}{n-1}$, $\operatorname{res} f(\infty) = (-1)^n \cdot \binom{2n}{n-1}$. **1605.** $\operatorname{res} f(z_k) = -z_k/n$, pre $z_k = \mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}/n}$; $\operatorname{res} f(\infty) = 0$, ak $n \neq 1$; $\operatorname{res} f(\infty) = -1$, ak $n = 1$. **1606.** $\operatorname{res} f(-1) = 1/\mathrm{e}$, $\operatorname{res} f(\infty) = -1/\mathrm{e}$. **1607.** $\operatorname{res} f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}/2$, $\operatorname{res} f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}/2$, $\operatorname{res} f(\infty) = 0$. **1608.** $\operatorname{res} f(1) = \mathrm{e}/6$, $\operatorname{res} f(\infty) = -\mathrm{e}/6$. **1609.** $\operatorname{res} f(0) = -\operatorname{res} f(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty}[1/n!(n+1)!]$. **1610.** $\operatorname{res} f(0) = 1/4$, $\operatorname{res} f(2\mathrm{i}) = \mathrm{i}(\cos 2 + \mathrm{i}\sin 2)/16$, $\operatorname{res} f(-2\mathrm{i}) = -\mathrm{i}(\cos 2 - \mathrm{i}\sin 2)/16$, $\operatorname{res} f(\infty) = (-2 + \sin 2)/8$. **1611.** $\operatorname{res} f(k\pi) = (-1)^k$, k celé číslo.

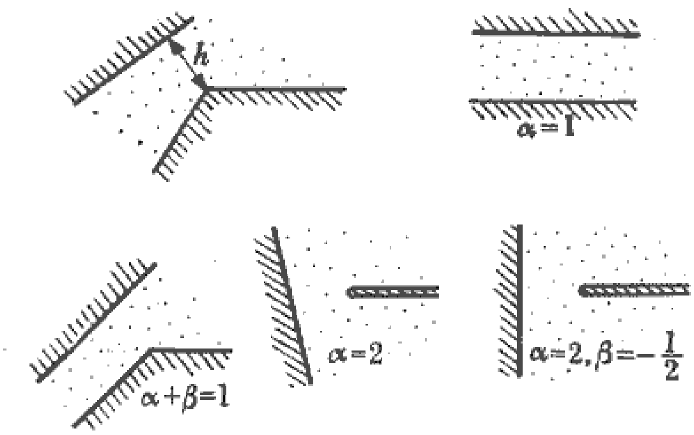
1612. res $f(2) = -\operatorname{res} f(\infty) = -143/24$. **1613.** res $f(-1) = 2 \sin 2$, res $f(\infty) = -2 \sin 2$. **1614.** res $f(-1) = -\operatorname{res} f(\infty) = -\cos 1$. **1615.** res $f(0) = \operatorname{res} f(\infty) = 0$. **1616.** res $f(0) = 0$, ak n je nepárne a $n < 0$ alebo $n > 0$; res $f(0) = (-1)^{n/2}/(n+1)!$, ak n je párne a $n > 0$ alebo $n = 0$; res $f(\infty) = -\operatorname{res} f(0)$. **1617.** res $f(k^2\pi^2) = (-1)^k\, 2k^2\pi^2$, $k = 1, 2, \ldots$. **1618.** res $f(z_k) = -1$, $z_k = (2k+1)\,\pi/2$, k celé číslo. **1619.** res $f(z_k) = 0$, $z_k = k\pi$, k celé číslo. **1620.** res $f(z_k) = -1$, $z_k = k\pi$, k celé číslo. **1621.** 1. **1622.** $(1 - a)\, e^{\pi a i/2}/4i$, a reálne číslo. **1623.** $a - b$. **1624.** $\pm(a - b)^2/8$. **1625.** $e^a - e^b$. **1626.** $1/2\pi i$. **1629.** $-\pi i/\sqrt{2}$. **1630.** $-\pi i/2$. **1632.** $3\pi i/64$. **1633.** a) 0; b) $(-1)^{n-1}\, 2\pi(2n-2)!\, i/[(n-1)!]^n (a-b)^{2n-1}$; c) 0. **1634.** $\pi(i - 1)/2\sqrt{2}$. **1635.** $-2\pi i$. **1636.** 0. **1637.** 0. **1638.** $-2\pi i/9$. **1639.** 0. **1640.** $-2\pi i/3$. **1641.** $\pi\sqrt{2}$. **1642.** $\pi/2a$. **1643.** $3\pi/8a^5$. **1644.** $\pi/8$. **1645.** $3\sqrt{2}\,\pi/16a$, $a > 0$. **1646.** $\pi(a + 2b)/2ab^3(a+b)^2$, $a > 0$, $b > 0$. **1647.** $(2n - 2)!\,\pi/2^{n-2}[(n-1)!]^2$. **1648.** $n^{-1}\pi \operatorname{cosec}[(2n+1)\,\pi/2n]$. **1649.** $\pi/\sin a\pi$, $0 < a < 1$. **1650.** $\pi/\sin a\pi$. **1651.** $\pi(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi)$. **1652.** $2\pi/|a^2 - 1|$. **1653.** $\pi(\sin ab)/\sin a\pi \sin b$. **1654.** $-\pi/4$. **1655.** $\pi^3/8$. **1656.** $\pi/4$. **1657.** $2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$. **1658.** $\pi/2$. **1659.** $3\pi/8$. **1660.** $[1 - e^{-1/\sqrt{2}} \sin(\pi/4 + 1/\sqrt{2})]/2$. **1661.** $\pi(|a| - |b|)$. **1662.** πe^{-ar}. **1663.** $4^{-1}\sqrt{2}\,\pi e^{-a/\sqrt{2}} [\cos(a/\sqrt{2}) + \sin(a/\sqrt{2})]$. **1664.** $2^{-1}\sqrt{\pi/a}\, e^{-b^2/4a}$. **1665.** $2\pi/\sqrt{3}$. **1666.** $\pi(1 - e^{-|ab|})/2b^2 \operatorname{sign} a$. **1667.** $\pi i \operatorname{sign}(\operatorname{Im} a)$. **1668.** $2\pi(a - \sqrt{a^2 - b^2})/b^2$. **1669.** $3\pi\sqrt[4]{2}/64$. **1673.** 1, 1, 1, 1. **1674.** a) 1; b) 4. **1675.** a) 0; b) 4.



Obr. V5

6,9. Konformné zobrazenie mnohouholníkov

1677. 1. $\alpha_2 = 0$; 2. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; 3. $\alpha_3 = 0$; 4. $\alpha_2 = \alpha_4 = -1$; 5. $\alpha_2 = -2$, $\alpha_4 = 0$; 6. $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; 7. $\alpha_2 = -2$, $\alpha_4 = \alpha_6 = 0$; 8. $\alpha_2 = -2$, $\alpha_4 = \alpha - 2$. **1678.** a) Uhol π; b) Pás so šírkou $\pi/(a - b)$. **1680.** „Trojuholník“ s dvoma vrcholmi v bodoch $w = 0, w = d = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$ a uhlami $\pi\alpha$, $\pi\beta$ v týchto vrcholoch. a) Keď $\alpha + \beta < 1$, tak tretí vrchol je konečný; b, c) Keď $\alpha + \beta \geqq 1$, tak tretí uhol je v nekonečne. Keď $\alpha + \beta = 1$, potom $d = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$ a „trojuholník“ má tvar šikmého polpása, ak $\alpha \neq \beta$. V prípade $\alpha + \beta = 2$, strany trojuholníka vychádzajúce z vrcholov základne sú rovnobežné, opačne orientované a $d = \dfrac{\pi(\alpha - 1)}{\sin \pi(\alpha - 1)}$. Ak $\alpha = \beta = 3/2$, tak trojuholník je vonkajšok „priameho“ polpása (pozri *obr. V5*). **1681.** „Trojuholník“ s jedným konečným vrcholom v bode $w = 0$ s uhlom $\pi\alpha$ a dvoma vrcholmi v nekonečne. Dve strany trojuholníka sú polpriamky vychádzajúce zo začiatku, tretia strana je priamka vzdialená od začiatku o $h = \dfrac{\sin \pi\beta}{\beta} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$: a) V prípade $\alpha = 1$, dostaneme pás so šírkou π; b) V prípade $\alpha + \beta = 1$, dve strany sú rovnobežné a $h = \pi$; c) V prípade $\alpha = 2$, dostaneme polrovinu s výrezom pozdĺž kladnej reálnej polosi a $h = \dfrac{\sin \pi\beta}{\beta(\beta + 1)}$; d) Špeciálne $h = 4$, ak $\beta = -1/2$; e) $h = \pi$, keď $\beta = -1$ (pozri *obr. V6*). **1682.** $w = \dfrac{h}{\pi} \ln \dfrac{1 + z}{1 - z} + a$, $z = \operatorname{tgh} \dfrac{\pi(w - a)}{2h}$, kde a je reálny parameter **1683.** $w = C \displaystyle\int_0^z z^{-5/6} (1 - z)^{-1/2}\, dz$, kde $C = 1/[B(1/6, 1/2)]$. **1684.** $w = C \displaystyle\int_0^z z^{-3/4}(1 - z)^{-1/2}\, dz$, kde $C = \dfrac{1}{B(1/4, 1/2)}$. **1685.** $w = C \displaystyle\int_0^z z^{-2/3} (1 - z)^{-2/3}\, dz$, kde $C = 1/B(1/3, 1/3)$. **1686.** $w = \displaystyle\int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}\, dz$ alebo $z = \operatorname{sn} w$, kde sn je eliptická Jacobiho funkcia. **1687.** $w = -\dfrac{a}{\pi} \displaystyle\int_1^z \frac{1}{z^{1-\vartheta}(z - 1)^\vartheta}\, dz$. **1688.** $w = \dfrac{a}{\pi\vartheta} \displaystyle\int_0^z \left(\frac{z - 1}{z}\right)^\vartheta dz$. **1689.**



Obr. V6

$w = \dfrac{2}{\pi} [\arcsin \sqrt{z} - (1 - 2z) \sqrt{z - z^2}]$. **1690.** $w = \dfrac{2}{\pi} [\arcsin \sqrt{z} - \sqrt{z - z^2}]$. **1691.** $w = \dfrac{h}{\pi} \cdot \left(\ln \dfrac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} - 2\sqrt{z}\right) = \dfrac{2h}{\pi} (\operatorname{arctgh} \sqrt{z} - \sqrt{z})$. **1692.** $w = \dfrac{2\,i}{\pi} \left(h \operatorname{arctg} \dfrac{hz}{H\sqrt{z^2 - a^2}} + H \operatorname{arctg} h \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}\right)$. **1693.** $w = \dfrac{h}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^z \frac{(z + 1)^\alpha}{z}\, dz + ih$; $\alpha = 1/2$, $w = \dfrac{2h}{\pi} \left[\sqrt{z + 1} + \ln (\sqrt{z + 1} - 1) - \dfrac{\ln z}{2}\right]$; $\alpha = 1$, $w = \dfrac{h}{\pi} (\ln z + z + 1)$. **1694.** $w = \dfrac{H^2 + h^2}{h\,i} \cdot \displaystyle\int_0^z \frac{\sqrt{z}}{(z - 1)(z + H^2/h^2)}\, dz$. **1695.** $w = \dfrac{h_1}{\pi} \ln (1 - z) + \dfrac{h_2}{\pi} \ln \left(1 + \dfrac{h_1}{h_2} z\right)$. **1696.** $w = z + 1 + \ln z$. **1697.** $w = a\alpha^\alpha(1 - \alpha)^{1-\alpha} (e^{\alpha z} - e^{(\alpha-1)z})$. **1698.** $w = \dfrac{3a}{16} \sqrt{3z} \left(1 - \dfrac{1}{z}\right)^2$. **1699.** $w = i \ln \sin z$. **1700.** $w = \dfrac{1}{\pi}\left\{\sqrt{z(z - 1)} - \dfrac{1}{2} \ln \left[2z - 1 + 2 \sqrt{z(z - 1)}\right]\right\}$. **1706.** $w =$

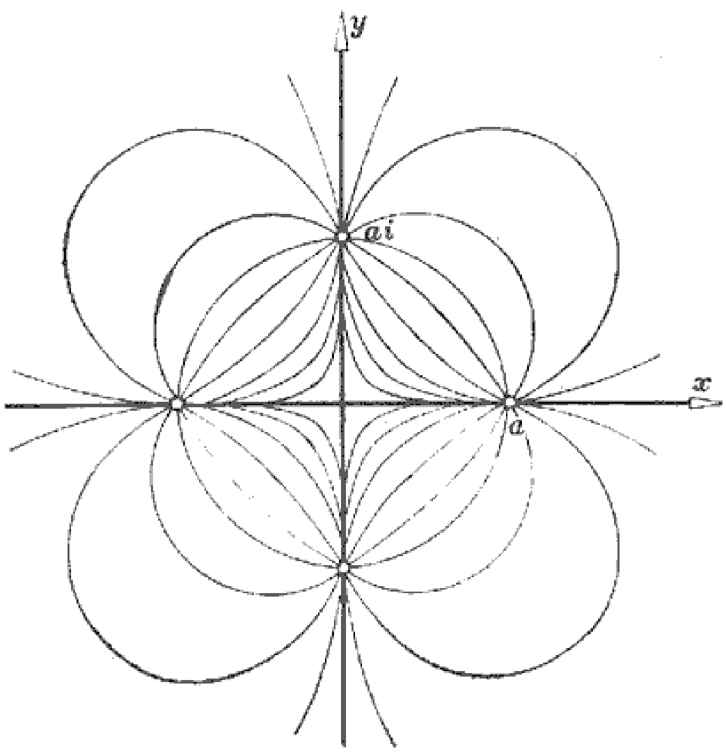
$= C \int\limits_0^z \frac{(1 - z^n)^{2/n}}{z^2} \,\mathrm{d}z + C_1$. **1707.** $w = \int\limits_0^z \frac{(1 - \zeta^n)^\lambda}{(1 - \zeta^n)^{\lambda + 2/n}} \,\mathrm{d}\zeta$, $0 < \lambda < 1 - \frac{2}{n}$. **1708.** $w =$ $= \frac{20 \sqrt[5]{4}\, \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)} \int\limits_0^z \frac{(z^5 - 1)^{2/5}}{(z^5 + 1)^{4/5}} \,\mathrm{d}z$. **1709.** $w = \int\limits_0^z \frac{(1 - z^6)^{1/3}}{(1 - z^6)^{2/3}} \,\mathrm{d}z$.

6,10. Aplikácie funkcie komplexnej premennej v teórii rovinného poľa

1710. $-3\,\mathrm{i}$ $y = c_1$, $x = c_2$. **1711.** $2\bar{z}$, $xy = c_1$, $x^2 - y^2 = c_2$. **1712.** $-2/\bar{z}^3$, $\varrho^2 = c_1 \cos 2\varphi$, $\varrho^2 = c_2 \sin 2\varphi$. **1713.** $1/(2\sqrt{\bar{z} - 1})$, $\varrho = c_1/\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $\varrho = c_2/\cos^2 \frac{\varphi}{2}$, keď polárny súradnicový systém má pól v bode $z = 1$ a polárna súradnicová os je súhlasne orientovaná s osou o_x. **1714.** $1/\bar{z}$, $y = c_1 x$, $x^2 + y^2 = c_2$ bod $z = 0$ je žriedlo s výdatnosťou 2π. **1715.** $(1 - \mathrm{i})/\bar{z}$, $\varrho = c_1\, \mathrm{e}^{-\varphi}$, $\varrho = c_2\, \mathrm{e}^{\varphi}$. Bod $z = 0$ je žriedlo s výdatnosťou 2π a vír s cirkuláciou -2π. **1716.** $\mathrm{i}/[\bar{z}(\bar{z} - 1)]$, kružnice $(x - C)^2 + y^2 = C(C - 1)$, kružnice idúce bodmi $z = 0$ a $z = 1$; v bode $z = 0$ je vír s cirkuláciou -2π a v bode $z = 1$ je vír s cirkuláciou 2π. **1717.** $|\sinh(\pi z)| = c_1$, $w = \ln \sinh(\pi z) + C$.

Obr. V7

1718. Postupné prúdenie s rýchlosťou $\mathbf{v} = \alpha - \mathrm{i}\beta$; v bode ∞ dipól s momentom $p = 2\pi c$; prúdnice $\beta x + \alpha y = c_1$, ekvipotenciálne krivky $\alpha x - \beta y = c_2$. **1719.** $\mathbf{v} = n\bar{z}^{n-1}$; v bode $z = 0$ kritický bod (bod rozvetvenia), v bode ∞ multipól $2n$-tého rádu. Prúdnice $\varrho^n \sin n\varphi = c_1$, ekvipotenciálne krivky $\varrho^n \cos n\varphi = c_2$. **1720.** $\mathbf{v} = \mathrm{i}/(2\pi\bar{z})$ v bode $z = 0$ je vír s cirkuláciou $\Gamma = 1$; prúdnice sú kružnice $\varrho = c_1$, ekvipotenciálne krivky $\varphi = c_2$. **1721.** $\mathbf{v} = \frac{Q + \Gamma\mathrm{i}}{2\pi} \frac{\bar{a} - \bar{b}}{(\bar{z} - \bar{a})(\bar{z} - \bar{b})}$, v bodoch a, b vírivé žriedla s výdatnosťou Q, resp. $-Q$ a cirkuláciou Γ, resp. $-\Gamma$. Prúdnice sú $\ln \varrho = (Q/\Gamma)\,\vartheta + C_1$, ekvipotenciálne krivky $\ln \varrho = -(Q/\Gamma)\,\vartheta + C_2$, kde $\varrho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} = (z - a)/(z - b)$, pozri *obr. V7*. **1722.** $\mathbf{v} = 4a\bar{z}^2/(\bar{z}^4 - a^4)$, $\mathbf{v}(\infty) = 0$; v bode $z = 0$ je kritický bod; v bodoch a, $-a$ sú žriedla s výdatnosťou 2π a v bodoch $a\,\mathrm{i}$, $-a\,\mathrm{i}$ sú žriedla s výdatnosťou -2π. Prúdnice sú $\varrho^4 + c_1 a^2 \varrho^2 \sin 2\varphi - a^4 = 0$ a $\varphi = \pi k/2$, $k = 0, 1, 2, 3$; ekvipotenciálne krivky sú $\varrho^4 + c_2 a^2 \varrho^2 \cos 2\varphi + a^4 = 0$, $|c_2| > 2$, pozri *obr. V8*. **1723.** $w = -Q/\pi z$. **1725.** $w = k\,\mathrm{i}/z$, k je reálne číslo. **1726.** $1 : 2\sqrt{2}$. **1728.** 2π. **1729.** 6π; 0. **1730.** 0; π. **1731.** -4π, -4π. **1732.** $w = 2\,\mathrm{i} \ln(z^2 - a^2) + C$. **1733.** $c_1(x - a) + c_2 y = 0$; $(x - a)^2 + y^2 = c_3^2$. **1734.** $(\Gamma/2\pi\,\mathrm{i}) \ln(z - a)$. **1736.** $w = (Q/2\pi) \ln[(z + 1)/z]$. **1737.** $w = zv(\infty) + (Q/2\pi) \ln(z^2 + a^2)$, $\mathbf{v}(0) = v(\infty)$. **1740.** $w = (Q/2\pi) \ln(z - a + z^{-1} - a^{-1})$, kružnica $|z| = 1$ je jedna z prúdnic. **1741.** $w = (Q/2\pi) \ln(1 + 4/z^4)$, $\varrho^4 = 4(C \sin 4\varphi - \cos 4\varphi)$. **1742.** $w = (\Gamma/2\pi\,\mathrm{i}) \ln \frac{(z - a\,\mathrm{i})(z + \mathrm{i}a^{-1})}{(z + a\,\mathrm{i})(z - \mathrm{i}a^{-1})}$. **1743.** $w = (Q/2\pi) \ln(z^6 + a^6)$. **1745.** a) $w = (Q/2\pi) \ln \sin z$; b) $w = (Q/4\pi) \ln \sin(z - h\,\mathrm{i})$. **1748.** $w = (2Q/\pi) \ln\left(\sqrt{2} \cosh \frac{\pi z}{4H} + \sqrt{\cos \frac{\pi z}{2H}}\right)$. **1749.** $w = 2Q\sqrt{z}$. **1750.** $w = (Q/\pi) \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) + \frac{Q\,\mathrm{i}}{2}$. **1751.** $w = (Q/\pi) \ln \sin[(\pi z)/(2d)]$. **1752.** $w = \mathbf{v}(\infty)\sqrt{z^2 + H^2}$. **1753.** $w = -v[z + 4/3 + 4/(9z + 12)]$. **1754.** $w = v(az - b\sqrt{z^2 - c^2})/(a - b)$, $c^2 = a^2 - b^2$. **1755.** Pre obtekanie paraboly zvonka platí $w = \sqrt{z - p/2} + C$; pre obtekanie znútra $w = \mathrm{i} \cosh (\sqrt{2z - p}/(2\sqrt{p}))$. **1756.** Pre obtekanie zvonka je $w = (1/\sqrt{2}) [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{\pi/2\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha/2\beta} - (z - \sqrt{z^2 - c^2})^{\pi/2\beta} . \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha/2\beta}] + C_1$, kde $\operatorname{tg} \alpha = b/a$, $\beta = \pi - \alpha$, $c^2 = a^2 + b^2$, pre obtekanie znútra je $w = (\mathrm{i}/\sqrt{2}) [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{\pi/2\alpha} + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^{\pi/2\alpha}] + C_2$. **1757.** Pre w platí: $z = \mathrm{e}^{\pi w/v} + \pi w/v$. **1758.** $w = \mathbf{v}(\infty) . (z - p - \mathrm{i}\sqrt{2pz - z^2})$. **1759.** $w = (Q/2\pi) \ln (z + z^{-1} - a - a^{-1})$. **1760.** $w = (\Gamma/2\pi \mathrm{i}) \ln [(z - a)/(z - a^{-1})$. **1761.** a) $w = v(z - \cos \alpha - \mathrm{i}\sqrt{z^2 - c^2} \sin \alpha) + C_1$, kde $\mathbf{v}(\infty) = v \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$; b) $w = v(z \cos \alpha - \mathrm{i}\sqrt{z^2 - c^2} \sin \alpha) + (\Gamma/2\pi \mathrm{i}) . \ln (z + \sqrt{z^2 - c^2}) + C_2$ kde $\Gamma = -2\pi c v \sin \alpha$, $\mathbf{v}(\infty) = v \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ a c je bod zjednotenia. **1762.** $w = (vR/2) (\eta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}/R + R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}/\eta) + (\Gamma/2\pi \mathrm{i}) \ln \eta + C_2$, pričom Žukovského profil vznikne zobrazením kružnice $|\zeta - \zeta_0| =$



Obr. V8

$= |1 - \zeta_0| = R > 1$, $\zeta_0 = 1 - R \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$, $0 \leq \beta < \pi/2$ pri zobrazení $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $\eta = z - \zeta_0 + \sqrt{z^2 - 1}$ a $\mathbf{v}(\infty) = v \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\Gamma = -2\pi R v \sin (\alpha + \beta)$. **1765.** π. **1766.** V bode $z = 0$ náboj $2q$ a v bodoch $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k/4}$ $k = 1, 3, 5, 7$ náboje $-q$. **1767.** $Q = (2n + 1) q$. **1768.** $w = -2q \mathrm{i} \ln z$. **1769.** $w = 2q \mathrm{i} \ln (z^2 - h^2)$, Cassiniho ovály, $|z - h| . |z + h| = c_1$. **1770.** $w = \mathrm{i} \ln^{-1}(r/R) \ln (z/R)$. **1771.** $w = -\mathrm{i} \ln^{-1} (2 + \sqrt{3}) . \ln [z/(2 + \sqrt{3})]$, $C = 1/[2 \ln (2 + \sqrt{3})]$. **1772.** $w = (V_0 \mathrm{i}/2) \ln^{-1} [(a + \sqrt{a^2 - r^2})/r] \ln [(z + \sqrt{a^2 - r^2})/(z - \sqrt{a^2 - r^2})]$. **1773.** $w = (2V_0/\pi) \ln (z + \sqrt{z^2 - a^2})$, $\mathbf{E} = (2V_0/\pi)/\sqrt{|z + a| |z - a|}$, ekvipotenciálne krivky sú hyperboly s ohniskami $z_1 = a$, $z_2 = -a$. **1774.** $V = 2q \ln 3$. **1775.** $V = \ln (1 + \sqrt{2})/\ln (2 + \sqrt{3})$. **1776.** $w = (2V_0/\pi) \ln [(1 - z^2)/(1 + z^2)] - (2V_0/\pi) \ln 2$, $V = (2V_0/\pi) \arg [(1 - z^2)/(1 + z^2)]$. **1777.** $2z = (a + b) \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + (a - b) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}$. Konfokálne krivky (elipsy, resp. hyperboly) $\lambda x^2 + (c^2 + \lambda) y^2 = \lambda(c^2 + \lambda)$ sú ekvipotenciálne krivky pre $\lambda > 0$, siločiary pre $-c^2 < \lambda < 0$, $c^2 = a^2 - b^2$. **1778.** $z = \int_0^w \sqrt{\mathrm{e}^{\zeta} + 1} \, \mathrm{d}\zeta + 2[\sqrt{2} - \ln (\sqrt{2} + 1)]$. **1779.** $q(z - 1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos t} \, \mathrm{d}t =$

$= \mathrm{i} \int_0^w \sqrt{\cos(\zeta/2)}\, \mathrm{d}\zeta$. **1780.** $\sqrt{3}/(2 + \sin\varphi)$. **1781.** $w = (\mathrm{i}/\ln 2) \cdot \ln[(4z + 1)/(z + 4)]$, $\sigma_1 = 225a/(17 + 8\cos\varphi)$, $\sigma_2 = 18a/(5 + 4\cos\varphi)$; $\sigma_{1,\max} = 25a$, $\sigma_{1,\min} = 9a$, $\sigma_{2,\max} = 18a$, $\sigma_{2,\min} = 2a$. **1782.** $V_0/(2\pi^2\sqrt{1 + x^2})$. **1783.** $w = 2q\,\mathrm{i} \ln[(z - \bar{z}_0)/(z - z_0)] + C$. **1784.** $w = 2q\,\mathrm{i}\ln[(R^2 - \bar{z}_0 z)/(Rz - Rz_0)] + C$. **1786.** $w = 2q\,\mathrm{i} \ln[(a - b)/(z - \sqrt{z^2 - c^2})] + C_1$, $c^2 = a^2 - b^2$. **1787.** $w = 2q\,\mathrm{i} \ln[1/f(z)]$, kde $\zeta = f(z)$, $z = [2d/B(1/2, 3/4)] \int_\zeta^1 \zeta^{-2}\sqrt{1 - \zeta^4}\, \mathrm{d}\zeta + \mathrm{d}/2$.

1788. $w = 2q\,\mathrm{i} \ln[(z^3 + a^3\mathrm{i})/(z^3 - a^3\mathrm{i})]$, $\sin 3\varphi = C(\varrho^3 + a^6/\varrho^3)$. **1789.** $w = p\,\mathrm{i}/(z - a) + p^*\mathrm{i}/(z - a^*) + C$, $a^* = R^2/\bar{a}$, $p^* = R^2\bar{p}/\bar{a}^2$, $a \neq 0$; pre $a = 0$ je $w = p\,\mathrm{i}/z - (\bar{p}\,\mathrm{i}/R^2)\, z + C$. **1790.** $w = p\,\mathrm{i}/(z - a) + p^*\mathrm{i}/(z - a^*) + C$, $a^* = R^2/\bar{a}$, $p^* = R^2\bar{p}/\bar{a}^2$, $a \neq \infty$. Pre $a = \infty$ je $w = p\,\mathrm{i}/z - \bar{p}\,\mathrm{i}z/R^2 + C$. **1791.** $w = \varrho(z\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\sqrt{z^2 - R^2}) + C$, kde $p = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. **1792.** $w = [\varrho/(a - b)]\,[(az - b\sqrt{z^2 - c^2})\cos\alpha - \mathrm{i}(bz - a\sqrt{z^2 - c^2})\sin\alpha] + C$, kde $c^2 = a^2 - b^2$ a $p = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. **1793.** $(100/\ln 4)\ln(17/5)$. **1794.** $T = (100/\ln 2)\ln|(4z + 1)/(z + 4)|$. **1795.** $T = 100\,[1 - \ln^{-1}(2 + \sqrt{3}) \cdot \ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|]$. **1796.** $T = (20/\pi)\arg|(1 + z)/(1 - z)|$. **1797.** $T = (200/\pi)\,\mathrm{arctg}\,\{-\sin(\pi\varphi/\alpha)\sinh^{-1}[\pi\alpha^{-1}\ln(\varrho/a)]\}$. **1798.** $w = (160/\pi) \cdot \ln[\mathrm{i}\,\mathrm{cotg}(z/2)]$, $T = (160/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(\sin x/\sinh y)$. **1799.** $T = (q/2\pi)\ln|(z - \bar{a})/(z - a)| + C$. **1800.** $T = (q/2\pi)\ln|(R^2 - \bar{a}z)/(Rz - Ra)| + C$. **1801.** $T = (q/2\pi) \cdot \ln|[\sin(\pi z/2a) + \mathrm{i}\sinh(\pi h/2a)]/[\sin(\pi z/2a) - \mathrm{i}\sinh(\pi h/2a)]|$. **1802.** $V = V_n + [(V_0 - V_1)/\pi]\ln|z - a_1| + \ldots + [(V_{n-1} - V_n)/\pi]\ln|z - a_n|$, $\mathbf{E} = [(V_0 - V_1)(z - a_1)]/[\pi\,\mathrm{i}\,|z - a_1|^2] + \ldots + [(V_{n-1} - V_n)(z - a_n)]/[\pi\,\mathrm{i}\,|z - a_n|^2]$. **1803.** $V = (V_0/\pi)\ln|z^2 - 1|$, Cassiniho krivky. **1804.** $w = (V_0/\pi)\ln[z/(z + 1)] + [V_1 + (V_2 - V_1)\,z]/\{\pi\ln[(z - 1)/z]\}$.

LITERATÚRA

1. Apostol M. T.: Calculus, Volume II, Blaisdell Publishing Company, New York—London 1961.
2. Aramanovič I. G., Lunc G. L., Elsgolc L. E.: Funkcii kompleksnogo peremennogo, operacionnoje isčislenije, teorija ustojčivosti, Moskva: Izd. „Nauka" 1965.
3. Baranenkov G. S., Demidovič B. P., . . .: Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. Moskva: GIFML 1959.
4. Berman G. N.: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza. Moskva: Izd. „Nauka„ 1965.
5. Davydov N. A., Korovkin P. P., Nikolskij V. N.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskva: Izd. „Prosveščenije„ 1965.
6. Demidovič B. P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Moskva: GITTL 1956.
7. Djubjuk P. R. . . .: Sbornik zadač po kursu vysšej matematiki dľa vtuzov. Moskva: Izd. „Vyššaja škola„ 1963.
8. Fuks B. A.—Šabat B. V.: Funkce komplexní proměnné, Praha, Prírodovedecké vyd. 1953.
9. Gjunter M. N., Kuzmin R. O.: Sbornik zadač po vysšej matematike, II, III. Moskva: GITTL 1951.
10. Grebenča M. K., Novoselov S. I.: Kurs matematičeskogo analiza II, Moskva: GUPI, 1949.
11. Hildebrand B. F.: Advanced Calculus for Application, Third Printing, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
12. Churchill R. V.: Introduction to Complex Variables and Applications. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York—Toronto—London, 1948.
13. Kluvánek I., Mišík L., Švec M.: Matematika I a II, Bratislava: SVTL 1965, 1966.
14. Krysicki W., Włodarski L.: Analiza matematyczna v zadaniach część druga. Warszawa: PWN 1962.
15. Krzyż J.: Zbiór zadań z funkcji analitycznych, Warszawa, PWN 1965.
16. Leja F.: Teoria funkcji analitycznych, Warszawa, 1948.
17. Minorskij B. P.: Sbornik zadač po vysšej matematike. Moskva: GITTL 1964.
18. Privalov I. I.: Analytické funkce. Praha: Nakladatelství ČSAV 1955.
19. Saks S., Zygmund A.: Analytic Functions. Warszawa: PWN — Polish scientific publishers 1965.
20. Volkovyskij L. I., Lunc G. L., Aramovič I. G.: Sbornik zadač po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo, Moskva, FIZMATGIZ, 1961.
21. Zaporožec G. I.: Rukovodstvo k rešeniju zadač po matematičeskomu analizu. Moskva: Izd. „Vyššaja škola„ 1961.

EDÍCIA TEORETICKEJ LITERATÚRY

Zbierka je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického smeru, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní

Doc. RNDr. Jozef Eliaš, CSc. – RNDr. Ján Horváth, CSc. –
Ing. Juraj Kajan – Doc. RNDr. Robert Šulka, CSc.

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

4. časť

MDT: 517.3(076.5)
517.52/.53(076.5)

Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, Hurbanovo nám. 3, v decembri 1979, ako svoju 7027. publikáciu

Zodpovedná redaktorka Anna Známová
Technická redaktorka Jana Plšková
Obálku a väzbu navrhol Leodegar Horváth

Vytlačili Nitrianske tlačiarne, n. p., Nitra
288 strán, 92 obrázkov, 2 tabuľky; 21,63 AH, 22,05 VH
3. vydanie. Náklad 10 000 výtlačkov

302 03 2

63 – 122 – 79 Kčs 26,-

508/21; 857