JOZEF ELIAŠ — JÁN HORVÁTH — JURAJ KAJAN

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

3. časť

JOZEF ELIAŠ — JÁN HORVÁTH — JURAJ KAJAN

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

3. časť

3. vydanie

[redacted]

alfa
VYDAVATEĽSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY
BRATISLAVA

Publikácia je treťou časťou Zbierky úloh z vyššej matematiky. Každá kapitola obsahuje stručné zhrnutie základných pojmov a viet potrebných na riešenie úloh, uvedených v tomto odseku, niekoľko vyriešených príkladov s typickými metódami riešenia a napokon úlohy na samostatné riešenie. Zbierka obsahuje 1658 úloh aj s výsledkami, ktoré nadväzujú na knihu Kluvánek—Mišík—Švec: Matematika II.

Je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického smeru, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní.

1. vydanie 1967

2. vydanie 1971

3. vydanie 1980

Redakcia teoretickej literatúry — vedúca redaktorka
Anna Známová

OBSAH

*) Čísla v zátvorke označujú číslo strany, na ktorej sú príslušné výsledky

5. Výsledky

PREDHOVOR

Tretia časť Zbierky úloh z vyššej matematiky je pokračovaním prvých dvoch častí. Jej obsahom je látka z diferenciálneho počtu funkcie viac premenných, vektorová analýza, diferenciálna geometria kriviek a plôch a diferenciálne rovnice.

Táto látka tvorí časť preberanej látky z matematiky v druhom ročníku väčšiny vysokých škôl technického smeru. Zvyšná časť látky z matematiky v druhom ročníku bude zahrnutá v pripravovanom štvrtom dieli Zbierky.

Spôsob spracovania látky, ako aj usporiadanie príkladov, úloh a ich výsledkov je rovnaký ako v prvých dvoch častiach. Pri odvolávaní sa na látku z prvých dvoch častí používame takéto označenia napríklad: 4,7/I alebo 5,9/II znamená článok 4,7 prvej časti, resp. článok 5,9 druhej časti Zbierky.

Za všetky kritické pripomienky na odstránenie nedostatkov a zlepšenie tohto diela budeme čitateľom veľmi povďační.

Za mnohé významné pripomienky a kritické poznámky na zlepšenie úrovne tejto knihy ďakujeme lektorom J. Chavkovi, odb. asistentovi Katedry matematiky SF VŠT v Košiciach a doc. V. Šedovi, CSc. z Katedry matematiky PF UK v Bratislave. Zároveň vyslovujeme vďaku prom. mat. J. Zámožíkovi za nakreslenie obrázkov a Slovenskému vydavateľstvu technickej literatúry za starostlivosť, ktorú venovalo vydaniu tejto publikácie.

Autori

1. DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

1,1. Bodové množiny v E_n

Množinu všetkých n-tíc reálnych čísiel nazývame *číselným n-rozmerným Euklidovým priestorom*, ak pre každú dvojicu n-tíc $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je definované číslo

$$\varrho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2},$$

ktoré nazývame ich *vzdialenosťou*.

Pre vzdialenosť platí:

1. Číslo $\varrho(A, B)$ je nezáporné, t. j. $\varrho(A, B) \geqq 0$ a $\varrho(A, B) = 0$ vtedy a len vtedy, ak $A = B$.
2. $\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$, (vlastnosť symetrie).
3. Pre každé tri n-tice A, B, C platí $\varrho(A, C) \leqq \varrho(A, B) + \varrho(B, C)$, (trojuholníková nerovnosť).

Číselný Euklidov priestor označujeme E_n a n-tice z E_n nazývame *bodmi* číselného n-rozmerného Euklidovho priestoru.

Priestory E_1, E_2 a E_3 možno geometricky interpretovať, a to E_1 pomocou číselnej osi, E_2 pomocou roviny a E_3 pomocou priestoru, v ktorých je zavedený pravouhlý súradnicový systém.

Guľou [vnútrom gule] priestoru E_n so stredom v bode A a polomerom r, $r > 0$, nazývame množinu všetkých bodov X priestoru E_n, pre ktoré platí $\varrho(X, A) \leqq r$ [$\varrho(X, A) < r$].

Uzavretým intervalom priestoru E_n nazývame množinu všetkých bodov $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorých súradnice spĺňajú nerovnosti

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i,$$

kde $a_i \leqq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a označujeme ho $J = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n\rangle$. Uzavreté intervaly $\langle a_i, b_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nazývame *hranami* intervalu J.

Ak je $a_i < b_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$, interval J nazývame *nedegenerovaný*. Ak aspoň pre jedno i platí $a_i = b_i$, interval J nazývame *degenerovaným*.

Uzavretý interval J priestoru E_n nazývame aj *uzavretým kvádrom priestoru* E_n s hranami $\langle a_i, b_i\rangle$.

Otvoreným intervalom priestoru E_n nazývame množinu všetkých bodov $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorých súradnice spĺňajú nerovnosti $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a označujeme ho $J = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Intervaly (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ nazývame *hranami* intervalu J.

Otvorený interval J v priestore E_n nazývame niekedy aj *otvoreným kvádrom priestoru* E_n s hranami (a_i, b_i).

Úsečkou AB v priestore E_n, kde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $A \neq B$ nazývame *množinu všetkých bodov* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z priestoru E_n, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t(b_1 - a_1), \\ x_2 &= a_2 + t(b_2 - a_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= a_n + t(b_n - a_n), \end{aligned}$$

kde $t \in \langle 0, 1\rangle$. Uvedené rovnice nazývame *rovnicami úsečky* AB. Krátko ich zapisujeme $X = A + t(B - A)$*.)

*) Rovnosť a operácie sú rovnosť a operácie s n-ticami (pozri 3,1/I).

Okolím bodu A priestoru E_n nazývame vnútro každej gule priestoru E_n so stredom v bode A. Ak r je polomer gule, toto okolie označujeme $O_r(A)$.

Bodom zhustenia [hromadným bodom] množiny M z priestoru E_n nazývame taký bod Z priestoru E_n, že každé jeho okolie $O_r(Z)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny M rôzny od bodu Z.

Bod zhustenia množiny M môže, ale nemusí patriť do množiny M.

Veta 1. Bod Z je bodom zhustenia množiny M vtedy a len vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne mnoho bodov množiny M.

Uzavretá množina je taká množina, ktorá obsahuje všetky svoje body zhustenia.

Vnútorný bod množiny M je každý taký bod množiny M, ku ktorému existuje okolie, ktoré je časťou množiny M.

Vnútro množiny M je množina všetkých vnútorných bodov množiny M.

Otvorená množina je taká množina, ktorej každý bod je jej vnútorným bodom.

Veta 2. Nech A je uzavretá množina a B otvorená množina. Potom množina $A - B$ je uzavretá.

Veta 3. Nech A, B sú uzavreté množiny, potom aj $A \cup B$ a $A \cap B$ sú uzavreté množiny. Nech A, B sú otvorené množiny, potom aj $A \cup B$ a $A \cap B$ sú otvorené množiny.

Vetu 3 možno rozšíriť aj na konečný počet množín.

Hraničný bod množiny M je taký bod množiny M, ktorého každé okolie obsahuje aspoň jeden bod z množiny M a aspoň jeden bod, ktorý nepatrí do množiny M.

Hranica množiny M je množina všetkých hraničných bodov množiny M.

Ohraničená množina v priestore E_n je každá množina z E_n, pre ktorú existuje také kladné číslo $K > 0$ a bod P, že pre každý bod X tejto množiny platí $\varrho(X, P) < K$.

Množinu z E_n, ktorá nie je ohraničená, nazývame *neohraničenou množinou v E_n*.

Veta 4. Každá nekonečná množina bodov z priestoru E_n, ktorá je ohraničená, má aspoň jeden bod zhustenia.

Nech $X_1, X_2, \dots, X_k$ sú rôzne body priestoru E_n a $k > 1$. *Lomenou krivkou*, ktorá spája body X_1 a X_k, nazývame množinu všetkých bodov úsečiek $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_{k-1}X_k$.

Oblasťou nazývame otvorenú množinu M z priestoru E_n, ktorej každé dva body možno spojiť lomenou krivkou, ktorá leží celá v množine M.

Uzavretou oblasťou nazývame množinu, ktorá je súčtom danej oblasti a jej všetkých hraničných bodov.

Príklad 1. Nájdime body zhustenia množiny M, ak táto pozostáva zo všetkých bodov $(1/k, 1/m)$, kde k, m sú ľubovoľné prirodzené čísla. Zistime, či množina M je uzavretá alebo otvorená.

Riešenie. Ukážeme, že bodmi zhustenia množiny M sú všetky body $(1/k, 0)$, $(0, 1/m)$, kde k, m sú ľubovoľné prirodzené čísla a bod $(0, 0)$.

Zvoľme ľubovoľné okolie bodu $(1/k, 0)$ s polomerom ε. Potom existuje také prirodzené číslo m_1, že $1/m_1 < \varepsilon$ a vzdialenosť bodov $A = (1/k, 0)$ a $B = (1/k, 1/m_1)$ je

$$\varrho(A, B) = \sqrt{0 + \frac{1}{m_1^2}} = \frac{1}{m_1} < \varepsilon.$$

Tým sme ukázali, že v ľubovoľnom okolí bodu $(1/k, 0)$ leží aspoň jeden bod množiny M, a teda body $(1/k, 0)$ sú bodmi zhustenia množiny M. Podobne to možno ukázať aj pre body $(0, 1/m)$.

Ukážme ešte, že aj v každom okolí bodu $O = (0, 0)$ leží aspoň jeden bod množiny M. Nech polomer okolia je ε. Potom ku číslu $\varepsilon/2$ existuje také prirodzené číslo m_2, že $1/m_2 < \varepsilon/2$. Ale v ľubovoľnom okolí bodu $C = (0, 1/m_2)$, teda aj v okolí s polomerom $\varepsilon/2$, leží aspoň jeden bod z množiny M, lebo bod C je podľa už uvedeného bodom zhustenia množiny M. Nech tento bod je X. Ukážme, že bod X je bodom z okolia bodu $O = (0, 0)$ s polomerom ε. Z trojuholníkovej nerovnosti pre body O, C, X vyplýva

$$\varrho(O, C) + \varrho(C, X) \geqq \varrho(O, X)$$

a

$$\varrho(O, X) \leqq \frac{1}{m_2} + \varrho(C, X) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tým sme ukázali, že bod O je bodom zhustenia množiny M.

Množina M nie je uzavretá, lebo jej body zhustenia do nej nepatria a nie je ani otvorená, lebo nemá vnútorné body.

Príklad 2. Zistime, či množina bodov z E_2, pre ktorú platí $0 < r_1 < \varrho(O, X) < r_2$, je oblasť.

Riešenie. Daná množina M predstavuje v E_2 medzikružie (pozri *obr. 1*). Ukážeme najprv, že každý jej bod $X = (a, b)$ je vnútorným bodom množiny M. Zvoľme číslo ε tak, že

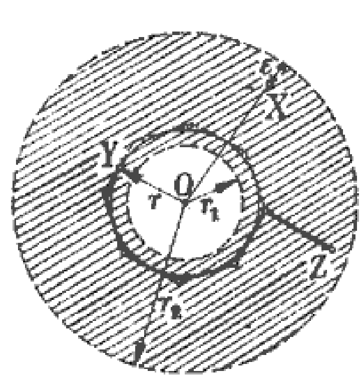
$$\varepsilon = \min \{r_2 - \varrho(O, X), \varrho(O, X) - r_1\}.$$

Potom pre každý bod $P = (x, y)$ okolia bodu $X = (a, b)$ s polomerom ε platí

$$\varrho(O, P) \leqq \varrho(O, X) + \varrho(X, P)$$

a teda

$$\varrho(O, P) < \varrho(O, X) + \varepsilon \leqq r_2.$$



Obr. 1

Podobne je

$$\varrho(O, X) \leqq \varrho(O, P) + \varrho(P, X),$$

$$\varrho(O, X) - \varrho(X, P) \leqq \varrho(O, P)$$

a teda

$$r_1 \leqq \varrho(O, X) - \varepsilon < \varrho(O, P).$$

Úhrnom máme

$$r_1 < \varrho(O, P) < r_2.$$

Tým sme dokázali, že M je otvorená množina.

Ukážme ešte, že každé dva body tejto množiny možno spojiť lomenou krivkou, ktorá celá leží v množine M. Zvoľme dva ľubovoľné body Y a Z z množiny M. Nech napríklad je $r = \varrho(O, Y) < \varrho(O, Z)$. Zostrojme pravidelný n-uholník opísaný kružnici $x^2 + y^2 = r^2$. Pritom zvoľme n také veľké, aby strana tohto n-uholníka bola menšia ako rozdiel $\varrho(O, Z) - r$. Z elementárnej geometrie potom vyplýva, že lomená krivka pozostávajúca zo strán tohto mnohouholníka a úsečky, ktorá spája bod Z s najbližším vrcholom tohto mnohouholníka, leží v množine M a spája body Y a Z. Daná množina je teda oblasť.

Nech $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ je postupnosť bodov priestoru E_n. Bod X je *limitou* tejto postupnosti, ak je

$$\lim_{k \to \infty} \varrho(X_k, X) = 0.$$

Ak postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ má limitu, hovoríme, že je *konvergentná*, ak limitu nemá, je *divergentná*.

Veta 5. Konvergentná postupnosť bodov má len jednu limitu.

Veta 6. Postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, konverguje k bodu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vtedy a len vtedy, ak $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)} = a_i$, pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

Veta 7. Ak postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu A, potom každá z nej vybraná postupnosť konverguje k bodu A.

Veta 8. Z každej ohraničenej postupnosti bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ dá sa vybrať konvergentná postupnosť.

Príklad 3. Zistime, či postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1/2^k, 1, (1 - 1/k)^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje a nájdime jej limitu.

Riešenie. Počítajme limity

$$\lim_{k \to \infty} x_1^{(k)}, \quad \lim_{k \to \infty} x_2^{(k)}, \quad \lim_{k \to \infty} x_3^{(k)},$$

máme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e}.$$

Podľa vety 6 daná postupnosť konverguje a jej limita je

$$\lim_{k\to\infty} X_k = (0, 1, 1/e).$$

1. Zostrojte guľu:

a) v priestore E_1 so stredom v bode $A = (2)$ a s polomerom $r = 1/2$,
b) v priestore E_2 so stredom v bode $A = (1, -2)$ a s polomerom 2,
c) v priestore E_3 so stredom v bode $A = (2, 1, 3)$ a s polomerom 3.

2. Zostrojte intervaly:

a) $\langle 2, 3\rangle \times \langle -1, 3\rangle$,
b) $(1, 2) \times (-2, 1)$,
c) $(3, 5\rangle \times \langle 4, 6)$,
d) $\langle 1, 2\rangle \times \langle 2, 3\rangle \times \langle -2, 1\rangle$,
e) $(-2, 1) \times (-4, -2) \times (-1, 4)$,
f) $\langle -1, 2) \times (-3, 2\rangle \times \langle -3, 2)$.

3. Nájdite všetky body zhustenia intervalu $(2, 3\rangle$.

4. Nech sa množina M skladá z bodu $A = (0, -0{,}001)$ a zo všetkých bodov $X = (x, y)$ roviny, pre súradnice ktorých platí $y \geqq |x|$, $x^2 + y^2 \leqq 2$. Dokážte, že:

a) bod $A = (0, -0{,}001)$ nie je bodom zhustenia množiny M,
b) bod $B = (0, 1)$ je bodom zhustenia množiny M,
c) bod $C = (1, 1)$ nie je bodom zhustenia množiny M.

5. Nech množina $M = (2, 4) \times (-1, 3)$. Dokážte, že množina všetkých bodov zhustenia množiny M je interval $J = \langle 2, 4\rangle \times \langle -1, 3\rangle$.

V úlohách 6 až 8 nájdite body zhustenia množiny všetkých bodov $X = (x, y, z)$, pre ktoré platí:

6. $X = (1/k, 1/l, 1/m)$, kde k, l, m sú prirodzené čísla.

7. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

8. $X = (r_1, r_2, r_3)$, kde r_1, r_2, r_3 sú racionálne čísla.

9. Zistite, ktoré z daných množín sú otvorené, ktoré sú uzavreté a nájdite ich hranice:

a) $M = (-2, 3)$,
b) $N = \langle 2, 4)$,
c) $P = \langle 3, 5\rangle$,
d) $Q = (4, 6\rangle$.

10. Z množín uvedených v úlohe 9 utvorte množiny:

a) $M \cup N$,
b) $(M \cap N) \cup P$,
c) $P \cap Q$,
d) $P - Q$

a zistite, ktoré z nich sú otvorené a ktoré uzavreté.

11. Dokážte, že množina M je uzavretá, ak:

a) $M = \langle 2, 5\rangle \times \langle 3, 7\rangle$,
b) $M = \langle 1, 3\rangle \times \langle 2, 4\rangle \times \langle 3, 5\rangle$.

12. Nech M je množina všetkých bodov $X = (x, y, z)$, pre ktoré platí $\varrho(X, A) < 2$, kde $A = (1, 1, 1)$. Dokážte, že množina M je otvorená a nájdite jej hranicu.

13. Dokážte, že množina M, ktorá je množinou všetkých bodov $X = (x, y, z)$, pre ktoré platí $\varrho(X, O) \leqq 2$, $O = (0, 0, 0)$, je uzavretá.

14. Ukážte, že množina $M = \langle -1, 2) \times (3, 6\rangle$ nie je ani otvorená, ani uzavretá.

V úlohách 15 až 22 zistite, či uvedené množiny sú otvorené alebo uzavreté:

15. $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$.

16. $0 < r_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq r_2^2$.

17. $x^2 + y^2 > 0$.

18. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqq 1$.

19. Množina všetkých bodov $X = (r_1, r_2)$, kde r_1, r_2 sú ľubovoľné racionálne čísla.

20. Množina všetkých bodov $X = (1/m, 1/n, 1/p)$, kde m, n, p sú ľubovoľné prirodzené čísla.

21. $X = A + t(B - A)$, kde $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $0 < t < 1$, v E_2.

22. $X = A + t(B - A)$, kde $A = (0)$, $B = (1)$, $0 < t < 1$, v E_1.

23. Dokážte, že množina bodov $X = (1/m, 1/n)$, kde m a n sú ľubovoľné prirodzené čísla, je ohraničená.

V úlohách 24 až 30 určte, ktoré z množín daných uvedenými nerovnosťami sú ohraničené:

24. $z > x^2 + y^2$ v E_3.

25. $|x| + |y| \leqq 4$,
$|x| + |y| \geqq 2$ v E_2.

26. $z^2 = x^2 + y^2$,
$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4$ v E_3.

27. $xyz \leqq 1$, $x > 0$,
$y > 0$, $z > 0$ v E_3.

28. $x^2/4 - y^2/9 + z^2 \leqq 1$ v E_3.

29. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + u^2/d^2 \leqq 1$ v E_4.

30. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ kde M_n je guľa so stredom $S_n = (2 - 3/2^n, 0)$ s polomerom $r_n = 1/2^n$ v E_2.

31. Zistite, či vnútra dvoch gúľ v E_n, $n = 1, 2, 3$, ktoré majú spoločný jediný hraničný bod, tvoria oblasť.

V úlohách 32 až 36 určte, ktoré z daných množín sú oblasti resp. uzavreté oblasti.

32. $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$ v E_3.

33. $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ v E_3.

34. $x^2 + y^2 \leqq r^2$, $z = 0$ v E_3.

35. $x^2 + y^2 \leqq r^2$, $(x - 2r)^2 + y^2 \leqq r^2$ v E_2.

36. $-a \leqq x \leqq a$, $-b(\sqrt{a^2 - x^2})/a \leqq y \leqq b(\sqrt{a^2 - x^2})/a$ v E_2.

V úlohách 37 až 43 zostrojte oblasť M určenú nerovnosťami:

37. $x > 0, y > 0$, $x > y$ v E_2.

38. $x^2 - y^2 > 0$ v E_2.

39. $4 + 4x - y^2 > 0$ v E_2.

40. $x^2 + y^2 - 1 > 0$, $4 - x^2 - y^2 > 0$ v E_2.

41. $1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ v E_3.

42. $z < 3 - x^2 - y^2$, $z > 0$ v E_3.

43. $x^2 + y^2 < Rx$, $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $R > 0$ v E_3.

44. Z postupnosti bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $X_k = [1/k, (k + 2)/k, 3]$ utvorte vybranú postupnosť pre postupnosť prirodzených čísiel $\{2k + 1\}_{k=1}^{\infty}$. Napíšte jej prvých päť členov.

45. Napíšte aspoň jednu postupnosť bodov z E_3, ktorá konverguje k bodu:

a) $A = (1, 1, 1)$,
b) $A = (0, 0, 0)$,
c) $A = (1, 2, 0)$.

46. Dokážte, že postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, $X_k = [k/(k + 1), (2k - 1)/3k, 1/k]$, konverguje k bodu $A = (1, 2/3, 0)$

V úlohách 47 až 49 zistite, či daná postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná a vypočítajte jej limitu.

47. $X_k = [(k-2)/k^2, \sqrt[k]{k}, 2]$.

48. $X_k = (\sqrt[k]{2}, 0, 1/k^4)$.

49. $X_k = [1 - 1/2^k, 2/k^4, (-1)^k/5^k]$.

1,2. Funkcia dvoch a viac premenných

Nech M je množina bodov priestoru E_n. Reálnu funkciu*) definovanú na množine M nazývame *reálnou funkciou n premenných* a označujeme ju

$$f(X) \text{ alebo } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{**})$$

Množinu M nazývame *oborom definície funkcie.*

Podobne ako pri funkcii jednej premennej zavádzame pojmy: *ohraničenosť zhora, ohraničenosť zdola, ohraničenosť, maximum, minimum, supremum, infimum funkcie, parciálna funkcia* a operácie s funkciami.

Zložená funkcia. Nech je funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovaná na množine bodov N priestoru E_n. Nech funkcie $x_1 = \varphi_1(T)$, $x_2 = \varphi_2(T)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(T)$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ sú definované na množine M priestoru E_m. Pritom nech platí, že bod $[\varphi_1(T), \varphi_2(T), \ldots, \varphi_n(T)]$ je z množiny N, ak T je z množiny M. Potom funkciu $f[\varphi_1(T), \varphi_2(T), \ldots, \varphi_n(T)] = F(T)$, ktorá je definovaná na množine M, nazývame *zloženou funkciou*. Funkciu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazývame *hlavnou zložkou* a funkcie $\varphi_1(T), \varphi_2(T), \ldots, \varphi_n(T)$ *vedľajšími zložkami.*

Ak je funkcia určená vzorcom a nie je udaný jej obor definície, rozumieme pod oborom definície množinu všetkých bodov, v ktorých má vzorec zmysel.

Grafom funkcie $f(X)$, definovanej na množine $M \subset E_n$, rozumieme množinu G všetkých bodov $Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ priestoru E_{n+1}, pričom prvých n súradníc určuje bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny M a $x_{n+1} = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Napríklad pri funkcii dvoch premenných $f(x, y)$ bude grafom funkcie množina všetkých bodov (x, y, z), kde bod (x, y) je bodom z oboru definície funkcie a $z = f(x, y)$.

Pri zostrojovaní grafu funkcie dvoch premenných je výhodné zostrojiť *rezy grafu funkcie* rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami alebo rovinami prechádzajúcimi niektorou zo súradnicových osí. Rovnobežné rezy s rovinou R_{xy} nazývame *vrstevnicami.*

Príklad 1. Nájdime obor definície funkcie

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Riešenie. Obor definície nájdeme z podmienky

$$9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0,$$

odkiaľ dostávame

$$x^2 + y^2 + z^2 < 9.$$

Obor definície je teda množina všetkých bodov X, pre ktoré platí $\varrho(O, X) < 3$, čiže vnútro gule so stredom v bode $S = (0, 0, 0)$ a polomerom 3.

Príklad 2. Nájdime hlavnú a vedľajšiu zložku funkcie

$$F(t_1, t_2) = \arcsin(1 - t_1 - t_2) + e^{t_1 + t_2}.$$

*) Pozri aj 1,1/II.
**) Ak nemôže nastať nedorozumenie, označujeme funkciu len znakom f.

Riešenie. Funkcia $F(t_1, t_2) = \arcsin(1 - t_1 - t_2) + e^{t_1+t_2}$ je zložená funkcia, pričom hlavná zložka je $f(x_1, x_2) = \arcsin x_1 + e^{x_2}$ a vedľajšie zložky sú

$$x_1 = 1 - t_1 - t_2, \quad x_2 = t_1 + t_2.$$

Rozklad zloženej funkcie na zložky nie je jednoznačný. Napríklad danú funkciu možno rozložiť na zložky aj takto: hlavná zložka $f(x) = \arcsin(1 - x) + e^x$ a vedľajšia zložka $x = t_1 + t_2$.

Príklad 3. Zostrojme graf funkcie

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

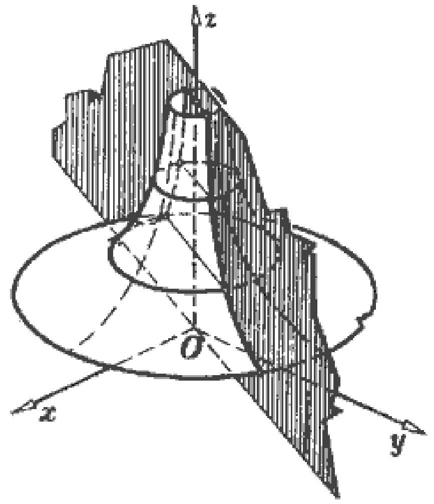
Riešenie. Daná funkcia je definovaná na celom priestore E_2 okrem bodu $O = (0, 0)$. Grafom funkcie bude množina všetkých bodov $X = (x, y, z)$ priestoru E_3, pričom $(x, y) \in E_2$, $(x, y) \neq (0, 0)$ a $z = 1/(x^2 + y^2)$. Keďže je $z > 0$, celý graf bude ležať nad rovinou R_{xy}. Roviny $z = k$, $k > 0$ režú graf funkcie v krivkách

$$\begin{cases} k = 1/(x^2 + y^2), \\ z = k, \end{cases} \quad \text{čiže} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1/k, \\ z = k. \end{cases}$$

Vidíme, že sú to kružnice so stredom $(0, 0, k)$ a polomerom $1/\sqrt{k}$. Pri reze rovinou $y = 0$ dostaneme krivku

$$\begin{cases} z = 1/x^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

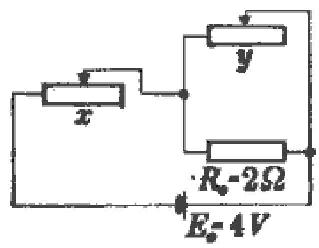
Podobne každá rovina idúca osou o_z vytvára rez takého istého tvaru. Teda graf funkcie z dostaneme rotáciou tejto krivky okolo osi o_z (*obr.* 2).



Obr. 2

50. Vyjadrite plochu trojuholníka daného obvodu $2p$ ako funkciu jeho dvoch strán x, y.

51. Vyjadrite objem V pravidelného štvorbokého ihlana ako funkciu strany a jeho základne a výšky h jeho bočnej steny.



Obr. 3

52. Vyjadrite výšku rotačného valca ako funkciu jeho objemu V a plášťa S.

53. Dané je n grammolekúl plynu, ktorý možno považovať za ideálny. Vyjadrite jeho objem V ako funkciu absolútnej teploty T a tlaku p.

54. Do okruhu sú zapojené dva premenné odpory x a y podľa *obr. 3*. Vyjadrite a) odpor okruhu ako funkciu x, y, b) výkon elektrického prúdu ako funkciu x, y.

55. Vypočítajte $f(1, 1/2)$, $f(-1, 2)$, ak:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2y + y + 1}$, c) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$.

b) $f(x, y) = (y^2 - |x|)/(x^2 - |y|)$,

56. Vypočítajte a) $f(0, 0, 0)$, b) $f(2, 1, 3)$, ak $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - z^2}$.

57. Zostavte tabuľku hodnôt funkcie $z = x^2 + 1/y$ pre celočíselné hodnoty x, y, kde $x \in \langle 0, 5\rangle$, $y \in (0, 3\rangle$.

58. Daná je funkcia $F(x, y) = x^y + y^x/2$. Nájdite:
a) $F(1, 0)$,
b) $F(a, 1/a)$, $a > 0$
c) $F(x + h, y + k)$.

59. Vypočítajte $f(y, x, z)$, $f(-x, -y, -z)$, $f(1, 1, t)$, $f(1, y/x, x/y)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, ak funkcia $f(x, y, z) = xyz + xy/z$.

60. Dokážte, že pre funkciu $f(x, y) = 3x^2y - \sqrt{x^4 - y^4}$ platí $f(tx, ty) = t^2f(x, y)$, $t \geq 0$

61. Dokážte nasledujúce vzťahy:
a) $F(x, y) = -F(1/x, 1/y)$, ak $F(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$,
b) $F(xy, z) = F(x, z) + F(y, z)$, ak $F(x, y) = \ln x \,.\, \ln y$,

62. Nájdite $f(x, y)$ ak $f(x + y, x - y) = x^2 - 2xy - y^2$.

63. Nájdite $f(x)$, ak $f(x/y) = x\sqrt{x^2 + y^2}/y^2$, $x > 0$, $y \neq 0$.

64. Nájdite funkciu $f(x, y)$ a $\varphi(x)$, ak $f(x, y) = x - y + \varphi(x + y)$ a $f(x, 0) = x^2$.

65. Nájdite funkciu $f(x, y)$, ak $f(x - y, x/y) = x^2 - y^2$.

66. Nájdite funkciu $f(x)$, ak $f(x/y) = 2xy(\ln x - \ln y)/(x^2 + y^2)$, $x > 0$, $y > 0$.

67. Nájdite obor definície funkcie f, ak:
a) $f(x, y) = 1/x + 1/(y - 1)$,
b) $f(x, y) = 1/(y^2 - x^2)$,
c) $f(x, y) = 1/(25 - x^2 - y^2)$,
d) $f(x, y) = x^2y/(2x + |y|)$.

68. Nájdite obor definície funkcie f, ak:
a) $f(x, y) = \sqrt{3x} - 2/\sqrt{y}$,
b) $f(x, y) = 2/\sqrt{xy}$,
c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$,
d) $f(x, y) = 1/\sqrt{x + |y|} - 1/\sqrt{x - |y|}$,
e) $f(x, y) = \pi y^2\sqrt{x^2 - y^2}/6$,
f) $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$.

69. Nájdite obor definície funkcie f, ak:
a) $f(x, y, z) = x/|y + z|$,
b) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$,
c) $f(x, y, z) = \ln xyz$.

70. Nájdite obor definície funkcie f, ak:
a) $f(x, y) = 1/\sin \pi(x + y)$,
b) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$.

71. Nájdite obor definície funkcie f, ak:
a) $f(x, y) = y + \arccos x$,
b) $f(x, y) = \arcsin (x + y)$.

72. Nájdite obor definície funkcie f, ak:
a) $f(x, y) = \ln (x \sin y)$,
b) $f(x, y) = \ln (|x| + y) + 1/\sqrt{y - x}$,
c) $f(x, y) = (\ln x^2y)/\sqrt{|y - x|}$,
d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln (2 - x^2 - y^2)$,
e) $f(x, y) = \pi y^2\sqrt{x^2 - y^2} + \ln xy$,
f) $f(x, y) = \ln \sin [\pi(x^2 + y^2)]$.

73. Funkcia $f(x, y, z) = x + 3y + z$ je definovaná na množine $M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Dokážte, že funkcia je ohraničená. Nájdite jej maximum a minimum.

74. Dokážte, že funkcia $f(x, y) = 1/2 - \sin^2(x^2 + y^2)$ má v bode $O = (0, 0)$ maximum.

75. Dokážte, že funkcia $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 2$ je zdola ohraničená a má v bode $A = (1, 2)$ minimum. Nakreslite jej graf.

76. Dokážte, že funkcia $f(x, y, z) = xyz$ nie je ohraničená.

77. Utvorte parciálnu funkciu z funkcie f na množine M, ak:
a) $f(x, y, z) = x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(x = 1)$,
b) $f(x, y, z) = 2 - |x| - y - z$, $M(y = 2)$, resp. $M(x = 0, z = 3)$,
c) $f(x, y, z) = \ln xyz$, $M(x = 1)$, $M(y = 2, z = 1)$.

78. Utvorte parciálnu funkciu z funkcie f na množine M, ak:
a) $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, $M(x = 2)$,
b) $f(x, y) = e^{\operatorname{arctg}(x/y)}$, $M(y = 1)$,
c) $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2)$, $M(x = 0)$.

79. Nájdite rezy daných plôch rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami R_{xz}, R_{yz}:
a) $z = x^2 - y^2$, b) $z = xy^2$.

80. Nájdite vrstevnice na daných plochách:
a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, c) $z = xy$.
b) $z = 3x^2 + 2y^2$,

81. Nájdite množinu všetkých bodov, v ktorých má funkcia f hodnotu k, kde číslo $k > 0$, ak:
a) $f(x, y, z) = 2x + y - z$, c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

82. Pomocou vrstevníc zostrojte graf funkcie:
a) $z = x - y$, c) $z = y/x$,
b) $z = x^2 - y^2$, d) $z = 2y/(x^2 + y^2)$.

83. Zostrojte graf funkcie f, ak:
a) $f(x, y) = 2 - x - y$, c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$,
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, d) $f(x, y) = e^{-x^2 + y^2}$.

84. Zostrojte graf funkcie:
a) $z = E(x + y)$, e) $z = |x - y|$,
b) $z = E(x^2 + y^2)$, f) $z = |x - y + 1|$,
c) $z = E(x + y) + E(x - y)$, g) $z = |x + y|$.
d) $z = (-1)^{E(x)+E(y)}$,

V úlohách 85 až 90 rozložte na zložky zloženú funkciu:

85. $z = \sqrt{x - y} + \sqrt{x + y}$.

86. $u = (x/y)\, e^{xz}$.

87. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2} + \log(4 - x^2 - y^2)$.

88. $u = \sin \dfrac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

89. $z = \ln \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

90. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{y/(x - y)}$.

V úlohách 91 až 93 utvorte zloženú funkciu $F(x, y)$, ktorej hlavná zložka je $\varphi(u, v)$ a vedľajšie zložky sú $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, ak:

91. $\varphi(u, v) = u + v,\ u = x + 2y,\ v = x^y$.

92. $\varphi(u, v) = \sin u + \sqrt{v},\ u = 3xy,\ v = x^2 - y^2$.

93. $\varphi(u, v) = \sqrt{uv},\ u = x - y,\ v = x + y$.

1,3. Limita a spojitosť funkcie viac premenných

Limita funkcie viac premenných. Majme funkciu $f(X)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovanú na istom okolí bodu $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ príp. s výnimkou bodu A*). Hovoríme, že číslo b je *limitou funkcie* $f(X)$ v bode A, ak pre každú postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ z oboru definície funkcie $f(X)$, pričom $X_k \neq A$, ktorá konverguje k bodu A, postupnosť funkčných hodnôt $\{f(X_k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k číslu b.

Ak také číslo b neexistuje, hovoríme, že funkcia $f(X)$ nemá v bode A limitu.

Limitu funkcie $f(X)$ v bode A označujeme buď $\lim\limits_{X \to A} f(X)$, buď $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Nech je funkcia $f(X)$ definovaná na istom okolí bodu A. Hovoríme, že funkcia $f(X)$ má v bode A *nevlastnú limitu* ∞ $[-\infty]$, ak pre každú postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov z okolia bodu A, pričom $X_k \neq A$, ktorá konverguje k bodu A, má postupnosť $\{f(X_k)\}_{k=1}^{\infty}$ nevlastnú limitu ∞ $[-\infty]$.

Nevlastnú limitu funkcie $f(X)$ v bode A označujeme buď

$$\lim_{X \to A} f(X) = \infty \quad [\lim_{X \to A} f(X) = -\infty],$$

buď

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = \infty \quad [\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = -\infty].$$

Nech $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ je *nevlastný bod*, t. j. aspoň jedno z a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ je nevlastné číslo ∞ alebo $-\infty$. *Okolím nevlastného bodu* A nazývame otvorený interval $O(A) = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$, kde J_i je okolie čísla a_i resp. okolie nevlastného čísla a_i (pozri 1,5/II).

Limita funkcie viac premenných v nevlastnom bode A definuje sa podobne ako limita funkcie viac premenných v bode A, iba namiesto okolia bodu A treba vziať okolie nevlastného bodu A.

Veta 1. Funkcia $f(X)$ má v bode A za limitu číslo b vtedy a len vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také kladné číslo δ, že pre každý bod $X \neq A$ z okolia $O_\delta(A)$ je

$$|f(X) - b| < \varepsilon.$$

Veta 2. Nech funkcie $f(X)$ a $g(X)$ majú v bode A limitu. Potom má v bode A limitu aj $|f(X)|$; $c_1 f(X) + c_2 g(X)$, kde c_1, c_2 sú konštanty; $f(X)\, g(X)$; $f(X)/g(X)$, ak $\lim\limits_{X \to A} g(X) \neq 0$ a platí

$$\lim_{X \to A} |f(X)| = |\lim_{X \to A} f(X)|,$$

$$\lim_{X \to A} [c_1 f(X) + c_2 g(X)] = c_1 \lim_{X \to A} f(X) + c_2 \lim_{X \to A} g(X),$$

$$\lim_{X \to A} [f(X)\, g(X)] = \lim_{X \to A} f(X) \lim_{X \to A} g(X),$$

$$\lim_{X \to A} [f(X)/g(X)] = \lim_{X \to A} f(X) / \lim_{X \to A} g(X).$$

Veta 3. Majme funkcie $f(X)$, $g(X)$, $h(X)$, kde $X = (x_1, \dots, x_n)$ definované na okolí bodu $A = (a_1, \dots, a_n)$ príp. s výnimkou bodu A. Nech pre každé $X \neq A$ z tohto okolia platí $f(X) \leq$

*) Niekedy sa namiesto okolia bodu A uvažuje o funkcii definovanej na množine M, pričom bod A je bodom zhustenia tejto množiny a prípadne nemusí do nej patriť.

$\leq g(X) \leq h(X)$ a $\lim\limits_{X\to A} f(X) = \lim\limits_{X\to A} h(X) = c$. Potom existuje aj limita $\lim\limits_{X\to A} g(X)$ a platí $\lim\limits_{X\to A} g(X) = c$.

Poznámka 1. Uvedené vety platia aj pre limitu funkcie v nevlastnom bode A, iba namiesto okolia bodu A treba vziať okolie nevlastného bodu A.

Poznámka 2. Pre limitu funkcie viac premenných platia všetky základné vety ako pre limitu funkcie jednej premennej. (Pozri 1,5/II.)

Veta 4. Nech funkcia $f(X) = \varphi(x_i)$, kde $X = (x_1, \ldots, x_n)$, a nech existuje $\lim\limits_{x_i\to a_i} \varphi(x_i)$. Potom existuje limita funkcie $f(X)$ v bode $A = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ a platí

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{x_i\to a_i} \varphi(x_i).$$

Veta 5. Ak existuje $\lim\limits_{X\to A} f(X) = b$, kde $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $A = (a_1, \ldots, a_n)$, potom platí $\lim\limits_{x_i\to a_i} f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) = b$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka 3. Okrem limity funkcie viac premenných často sa používajú tzv. *opakované limity funkcie viac premenných*, ktoré dostaneme postupným počítaním limít podľa jednotlivých premenných v istom poradí.

Veta 6. Ak existuje $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \alpha$ a pre ľubovoľné y také, že (a, y) je z okolia bodu $A = (a, b)$, platí $\varphi(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$, potom platí

$$\lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y) = \alpha.$$

Príklad 1. Nech $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Dokážme:

a) Ak bod $B = (b_1, b_2, b_3)$ je ľubovoľný bod priestoru E_3, platí

$$\lim_{X\to B} f(X) = f(B), \quad \text{kde } X = (x, y, z).$$

b) Táto funkcia má v bode $A = (1, 1, 1)$ limitu číslo 3.

Riešenie. a) Daná funkcia je definovaná na celom priestore E_3. Treba dokázať, že pre každú postupnosť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, bodov $X_k \neq B$, ktorá konverguje k bodu B, konverguje postupnosť $\{f(X_k)\}_{k=1}^{\infty}$ k číslu $f(B)$. Nech $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, $X_k = (x_k, y_k z_k)$, $X_k \neq B$, konverguje k bodu $B = (b_1, b_2, b_3)$. To znamená, že postupnosť čísiel $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k číslu b_1, postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k číslu b_2 a postupnosť $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k číslu b_3. Na základe pravidiel o počítaní s limitami postupností platí

$$\lim_{k\to\infty} f(X_k) = \lim_{k\to\infty} (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} x_k^2 + \lim_{k\to\infty} y_k^2 + \lim_{k\to\infty} z_k^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = f(B).$$

b) Ak $B = A = (1, 1, 1)$, z predchádzajúceho vyplýva

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 1}} (x^2 + y^2 + z^2) = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3.$$

Príklad 2. Vypočítajme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2}$.

Riešenie. Funkcia $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2}$ je definovaná v každom bode priestoru E_2 okrem bodu $A = (0, 1)$. Pretože limita menovateľa je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} [x^2 + (y-1)^2] = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} x^2 + \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (y-1)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{y\to 0} (y-1)^2 = 0 + 0 = 0,$$

nemôžeme použiť vetu 2 o limite podielu. Ale pre všetky $X \neq A$ platí

$$f(x, y) = \frac{\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1\right)}{[x^2 + (y-1)^2]\left[\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1\right]} =$$

$$= \frac{x^2 + (y-1)^2}{[x^2 + (y-1)^2]\left[\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1\right]} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1}.$$

Pretože je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1 = \sqrt{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{y\to 1} (y-1)^2 + 1} + 1 = 2,$$

máme

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Spojitosť funkcie viac premenných. Hovoríme, že funkcia $f(X)$, kde $X = (x_1, \ldots, x_n)$ je *spojitá v bode* $A = (a_1, \ldots, a_n)$, ak je v bode A definovaná a ak $\lim\limits_{X\to A} f(X) = f(A)$.

Ak je funkcia $f(X)$ spojitá v každom bode množiny M, hovoríme, že je *spojitá na množine* M. Ak je spojitá v každom bode svojho oboru definície, hovoríme, že je *spojitá*. Body, v ktorých funkcia $f(X)$ nie je spojitá, nazývame *bodmi nespojitosti*.

Nech je funkcia $f(X)$ definovaná na množine M a nech bod $A \in M$. Funkcia $f(X)$ je *spojitá v bode A s ohľadom na množinu* M, ak pre každú postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, $X_k \neq A$ z množiny M, ktorá konverguje k bodu A, konverguje postupnosť $\{f(X_k)\}_{k=1}^{\infty}$ k $f(A)$.

Ak je funkcia $f(X)$ spojitá vzhľadom na množinu M v každom bode množiny M, hovoríme, že funkcia $f(X)$ je *spojitá na množine M vzhľadom na množinu M.*

Funkcia $f(X)$ definovaná na množine M bodov priestoru E_n je na množine M *rovnomerne spojitá*, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre každé dva body $X_1 \neq X_2$ množiny M, pre ktoré je $\varrho(X_1, X_2) < \delta$, platí nerovnosť

$$|f(X_1) - f(X_2)| < \varepsilon.$$

Pre spojitosť funkcie viac premenných platia podobné vety ako pre spojitosť funkcie jednej premennej, ako napríklad veta o spojitosti súčtu, rozdielu, súčinu, podielu funkcií, veta o spojitosti zloženej funkcie. Stačí uvažovať namiesto bodov a okolia v E_1 body a okolia z E_n.

Veta 7. Nech je funkcia $f(X)$ spojitá na ohraničenej a uzavretej množine M vzhľadom na množinu M. Potom:

a) je na množine M ohraničená,
b) má na množine M maximum a minimum,
c) je na množine M rovnomerne spojitá.

Veta 8. Nech je funkcia $f(X)$ spojitá na oblasti M. Nech A, B sú dva rôzne body z oblasti M. Potom funkcia $f(X)$ nadobudne každú hodnotu medzi číslami $f(A)$, $f(B)$ aspoň v jednom bode tejto oblasti.

Príklad 3. Dokážme, že funkcia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ je spojitá v ľubovoľnom bode $B = (b_1, b_2, b_3)$ z priestoru E_3.

Riešenie. V príklade 1 sme dokázali, že v ľubovoľnom bode $B \in E_3$ má funkcia f limitu a platí

$$\lim_{X\to B} (x^2 + y^2 + z^2) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = f(B).$$

Pretože limita funkcie f v bode B sa rovná $f(B)$, je daná funkcia spojitá v bode B. Pretože bod B je ľubovoľný bod z E_2 a E_2 je oborom definície funkcie f, daná funkcia je spojitá.

Príklad 4. Dokážme, že funkcia $f(x, y) = \sin(2x + y)$ je spojitá.

Riešenie. Daná funkcia je zložená funkcia. Je definovaná na celom priestore E_2. Jej hlavná zložka $f(u) = \sin u$ je definovaná a spojitá na celom priestore E_1. Vedľajšia zložka $u = 2x + y$ je definovaná a spojitá na celom priestore E_2. Hodnoty vedľajšej zložky tvoria podmnožinu E_1. Splnené sú všetky predpoklady vety o spojitosti zloženej funkcie, preto funkcia f je spojitá na celom priestore E_2.

V úlohách **94** až **109** vypočítajte limitu funkcie.

94. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + y + 2)$.

95. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3\\ z\to 1}} (2x^2 + 7y - 3z + 5)$.

96. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$.

97. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

98. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

99. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^3 - y^3}{(x + y)^2}$.

100. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{x}{x + y + z}$.

101. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{4 - xy}}{xy}$.

102. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$.

103. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\, x^2y^2}$.

104. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{xy}$.

105. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$.

106. $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ y\to\infty}} (1 - x/y)^y$.

107. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$.

108. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4 + y^4}$.

109. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{|x| + |y|}}$

V úlohách **110** až **113** nájdite opakované limity $\lim\limits_{x\to a}\, [\lim\limits_{y\to b} f(x, y)]$ a $\lim\limits_{y\to b}\, [\lim\limits_{x\to a} f(x, y)]$.

110. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y}$, $a = \infty, b = \infty$.

111. $f(x, y) = \dfrac{y^x}{1 + y^{2x}}$, $a = 0$, $b = \infty$.

112. $f(x, y) = \log_y (x + y)$, $a = 0$, $b = 1$.

113. $f(x, y) = \dfrac{\sin \pi x}{2x + y}$, $a = \infty$, $b = \infty$.

114. Ukážte, že pre funkciu $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ neexistuje $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, ale

$\lim\limits_{x\to 0} [\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)] = 1$, $\lim\limits_{y\to 0} [\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)] = -1$.

115. Ukážte, že $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}\right) = \lim\limits_{y\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}\right)$, avšak

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ neexistuje.

116. Ukážte, že pre funkciu $f(x, y) = (x+y)\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\operatorname{tg}\dfrac{1}{y}$ obe opakované limity $\lim\limits_{x\to 0} [\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)]$, $\lim\limits_{y\to 0} [\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$ neexistujú, ale platí $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

117. Ukážte, že funkcia

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 - x - y, & \text{pre } x \neq 2,\ y \neq 1 \\ 3, & \text{pre } x = 2,\ y = 1 \end{cases}$$

je v bode $A = (2, 1)$ nespojitá. Zmeňte definíciu funkcie $f(x, y)$ v bode A tak, aby bola spojitá.

118. Ako treba zmeniť definíciu funkcie

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 5, & \text{pre } x \neq 0,\ y \neq 1,\ z \neq 2 \\ 13, & \text{pre } x = 0,\ y = 1,\ z = 2, \end{cases}$$

aby bola v bode $A = (0, 1, 2)$ spojitá.

119. Ukážte, že funkcia

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{pre } X \neq O \\ 0, & \text{pre } X = O \end{cases}$$

je v bode O nespojitá, hoci parciálne funkcie $f(x, 0)$, resp. $f(0, y)$ sú spojité funkcie.

V úlohách **120** a **121** zistite, kde je funkcia nespojitá

120. $f(x, y) = \sin\dfrac{1}{x-y}$. **121.** $f(x, y) = \dfrac{x^2+3y^2+5}{y^2-2x}$.

122. Ukážte, že funkcia

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{pre } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 2, & \text{pre } x = y = 0 \end{cases}$$

je nespojitá.

V úlohách **123** až **131** nájdite body nespojitosti funkcie.

123. $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

124. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{pre } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0, & \text{pre } x = 0,\ y = 0. \end{cases}$

125. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{pre } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0, & \text{pre } x = 0,\ y = 0. \end{cases}$

126. $z = \dfrac{1}{4 - x^2 - y^2}$.

127. $z = \sin \dfrac{1}{|x| - |y|}$.

128. $z = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$.

129. $z = \ln |1 - x^2 - y^2|$.

130. $f(x, y, z) = \dfrac{10y}{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2}$

131. $f(x, y, z) = \dfrac{3z}{x - 2y + 3z}$.

132. Dokážte, že funkcia $f(x, y) = \sqrt{xy - 1}$ je spojitá v bode $A = (2, 1/2)$ s ohľadom na množinu M danú nerovnosťami: $0 < x < \infty$, $y \geq 1/x$.

133. Nech M je množina daná nerovnosťami $-3 \leq x \leq 3$ a $-2\sqrt{9 - x^2}/3 \leq y \leq 2\sqrt{9 - x^2}/3$. Dokážte, že funkcia $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2/9 - y^2/4}$ je:

a) spojitá vnútri množiny M,

b) spojitá v každom bode elipsy $x^2/9 + y^2/4 = 1$ s ohľadom na množinu M.

Prečo nie je daná funkcia spojitá v bodoch elipsy $x^2/9 + y^2/4 = 1$?

134. Nech je daná funkcia

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x, y \text{ sú racionálne čísla} \\ 1, & \text{ak jedno z čísiel } x, y \text{ nie je racionálne.} \end{cases}$$

a) Ukážte, že funkcia $f(x, y)$ je v bode $A = (1, 1)$ spojitá s ohľadom na množinu všetkých bodov s racionálnymi súradnicami.

b) Ukážte, že funkcia $f(x, y)$ je v bode $A = (1, 1)$ nespojitá s ohľadom na E_2.

135. Dokážte, že ak v oblasti D je funkcia $f(x, y)$ spojitá s ohľadom na premennú x a spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na premennú y, t. j.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|,$$

pričom $(x, y_1) \in D$, $(x, y_2) \in D$ a L je konštanta, potom funkcia f je spojitá v oblasti D.

136. Dokážte, ak funkcia $f(x, y)$ je spojitá vzhľadom na každú premennú x, y v oblasti D a monotónna vzhľadom na jednu z premenných, potom funkcia f je spojitá v oblasti D.

1,4. Parciálne derivácie

Majme funkciu $f(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovanú v okolí $O_r(A)$ bodu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nech $g_i(x_i)$ je parciálna funkcia

$$g_i(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, definovaná na množine $M_i = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \subset O_r(A)$.

Parciálnou deriváciou funkcie $f(X)$ podľa premennej x_i v bode A nazývame deriváciu funkcie $g_i(x_i)$ v čísle $x_i = a_i$ a označujeme ju jedným zo znakov

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_A, \quad \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}(A), \; f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Platí

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = g'_i(a_i) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{g_i(x_i) - g_i(a_i)}{x_i - a_i}.$$

Ak funkciu f máme danú rovnicou $z = f(X)$, potom parciálne derivácie funkcie $f(X)$ podľa premennej x_i v bode A značíme aj takto

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_A \text{ alebo } z'_{x_i}(A).$$

Parciálnou deriváciou funkcie $f(X)$ podľa x_i nazývame takú funkciu, ktorej obor definície je množina M všetkých tých bodov, v ktorých existuje

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$$

a hodnota tejto funkcie v bode $X \in M$ je $\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i}$. Parciálnu deriváciu funkcie $f(X)$ podľa x_i označujeme ako $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, alebo $f'_{x_i}(X)$, alebo f'_{x_i}.

Poznámka. Pre parciálne derivácie funkcie $f(X)$ podľa x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, platia podobné vety ako pre derivácie funkcie jednej premennej (pozri 3,1/II). Preto tieto derivácie počítame podobne ako derivácie funkcie jednej premennej, pričom okrem x_i všetky premenné považujeme za konštanty.

Veta 1. Ak funkcia $f(X)$ má na otvorenej množine M ohraničené parciálne derivácie podľa svojich premenných, tak je na množine M spojitá.

Veta 2. *(Lagrangeova veta o prírastku funkcie).* Majme funkciu $f(X)$ definovanú v okolí bodu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a nech má v tomto okolí parciálne derivácie podľa každej premennej. Nech bod X je ľubovoľný bod z tohto okolia, potom existujú také body $P_1 = (\xi_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P_2 = (a_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n)$, $P_3 = (a_1, a_2, \xi_3, x_4, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $P_n = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \xi_n)$, že platí

$$f(X) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(P_i)}{\partial x_i}(x_i - a_i)$$

a $\varrho(P_i, A) < \varrho(X, A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Geometrický význam parciálnych derivácií funkcie $f(x, y)$. Ak graf funkcie $z = f(x, y)$ pretínajú roviny $x = a$ a $y = b$ v krivkách $x = a$, $z = f(a, y)$, resp. $y = b$, $z = f(x, b)$ a v bode $A = (a, b)$ existujú parciálne derivácie $z'_x(A)$, $z'_y(A)$, potom dotyčnice k týmto krivkám v bode A zvierajú s osou o_x, resp. osou o_y uhly α, β, pre ktoré platí

$$\operatorname{tg} \alpha = z'_x(A), \qquad \operatorname{tg} \beta = z'_y(A).$$

Príklad 1. Nájdime parciálne derivácie funkcie $z = x^y$ v bode $A = (3, 2)$.

Riešenie. Zostrojme parciálne funkcie $g_1(x) = x^2$ a $g_2(y) = 3^y$. Pre hľadané parciálne derivácie dostávame

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = g'_1(3) = (x^2)'_{x=3} = (2x)_{x=3} = 6,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = g'_2(2) = (3^y)'_{y=2} = (3^y \ln 3)_{y=2} = 9 \ln 3.$$

Príklad 2. Nájdime parciálne derivácie funkcie

$$u = xy^2 + 3x^3z + z^4 + 2xyz.$$

Vypočítajme $u'_z(A)$, ak $A = (3, 0, -1)$.

Riešenie. Počítajme $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Premenné y a z považujme za konštanty a u derivujme ako funkciu jednej premennej x, dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cdot 1 + 3z \cdot 3x^2 + 0 + 2yz \cdot 1 = y^2 + 9x^2z + 2yz.$$

Podobne pri počítaní $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ považujeme premenné x a z za konštanty a u derivujeme ako funkciu jednej premennej y, máme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot 2y + 0 + 0 + 2xz \cdot 1 = 2xy + 2xz.$$

Pri výpočte $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ považujeme premenné x a y za konštanty a u derivujeme ako funkciu jednej premennej z,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 3x^3 \cdot 1 + 4z^3 + 2xy \cdot 1 = 3x^3 + 4z^3 + 2xy.$$

Tieto parciálne derivácie funkcie $u = f(x, y, z)$ sú definované v celom priestore E_3. Pre $u'_z(A)$ dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A = 3 \cdot 3^3 + 4(-1)^3 + 2 \cdot 3 \cdot 0 = 77.$$

V úlohách 137 až 144 nájdite parciálne derivácie danej funkcie v bode A.

137. $f(x, y) = \pi x^2 y/3$, $A = (4, 6)$. **138.** $f(x, y) = x/y + y/x$, $A = (1, 1)$.
139. $f(x, y) = e^x \sin y$, $A = (1, 2)$. **140.** $f(x, y) = 3x^2y + e^{xy}$, $A = (3, 2)$.
141. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$, $A = (0, 1)$. **142.** $f(z, t) = \sqrt{2z^3 - 3t^3}$, $A = (3, 2)$.
143. $f(\varphi, \psi) = \dfrac{\varphi \cos \psi - \psi \cos \varphi}{1 + \sin \varphi + \sin \psi}$, $A = (0, 0)$.
144. $f(x, y, z, u) = \ln (x^2 + y^2 + z^2 + u^2)$, $A = (3, 2, 1, 0)$.

V úlohách 145 až 176 vypočítajte parciálne derivácie danej funkcie podľa jednotlivých premenných.

145. $f(x, y) = 3x^3 + 5x^2y - 2y^3$. **146.** $f(x, y, z) = (2xy^2 + z^3)^{11}$.
147. $f(x, y, z, u) = xyz + yzu + xzu + xyu$. **148.** $z = x^2y + y^3/x^4$.
149. $u = x/y + y/z - z/x$. **150.** $z = 1/(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.
151. $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **152.** $z = y \sin x + \cos (x - y)$.
153. $z = x^2y^2 - x^2 \sin y + 2^y$. **154.** $z = (\operatorname{cotg} x^2y)/(x + y)$.
155. $u = 2 \cos (xy - z) + (2x - z)^2 y^3$. **156.** $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{x - y}$.
157. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{1 + xy}$. **158.** $z = e^{x/y} + x^y$, $x > 0$.

159. $z = \arcsin \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$.

160. $z = \ln \dfrac{x + y}{x - y}$.

161. $z = xy\, e^{x+2y}$.

162. $z = \ln \left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

163. $u = 2^{x^2(x+y+z)}$.

164. $u = x \ln y + y \ln z + z \ln x$.

165. $z = x^y$.

166. $z = x^{x^y}$.

167. $u = y^{y^z}$.

168. $u = x^{1/y} z$.

169. $u = (y/z)^x$.

170. $u = (3x + 2z)^{yz}$.

171. $u = \sqrt{xy}\,(2x + 3z)^{\sqrt{yz}}$.

172. $z = (\ln x)^{\cos y}$, $x > 1$.

173. $u = (y \operatorname{tg} z)^{\ln x}$, kde $y > 0$, $x > 0$, $\operatorname{tg} z > 0$.

174. $u = (\sin x)^{\operatorname{tg} z} . (\operatorname{cotg} z)^{\sin y}$, kde $\sin x > 0$, $\operatorname{cotg} z > 0$.

175. $u = (\cos x)^{(\cos y)^{\cos z}}$, $\cos x > 0$, $\cos y > 0$.

176. $u = z\, e^{x^2 \ln \cos (x - y^2)}$.

177. Dokážte, že funkcia $z = \ln (x^2 + y^2)$ vyhovuje rovnici

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

178. Dokážte, že pre funkcie $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

179. Dokážte, že funkcia $z = y^2 \sin (x^2 - y^2)$ vyhovuje rovnici

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

180. Dokážte, že zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = nRT,$$

kde p je tlak, V objem a T absolútna teplota plynu, vyplýva

$$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

181. Pre intenzitu prúdu vo vodiči platí podľa Ohmovho zákona $I = U/R$, kde U je napätie na koncoch vodiča a R je jeho odpor. Vypočítajte

$$\frac{\partial I}{\partial U}, \quad \frac{\partial I}{\partial R}.$$

182. Aký uhol zviera dotyčnica ku krivke $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $y = 1$ v bode $A = \left(1, 1, \sqrt{3}\right)$ s osou o_y.

183. Vypočítajte uhly, ktoré zvierajú dotyčnice k rezom eliptického paraboloidu $z = x^2 + 2y^2$ rovinami $x = 2$, $y = 1$ v bode $A = (2, 1, 6)$ so súradnicovými osami o_x a o_y.

184. Nájdite rovnicu dotyčnice ku priesečnici eliptického paraboloidu $z = 2x^2 + 3y^2 - 4$ v bode $A = (1, -1, 1)$ s rovinou prechádzajúcou bodom A a rovnobežnou s rovinou: a) R_{xz}, b) R_{yz}.

185. Napíšte Lagrangeovu vetu o prírastku funkcie, ak je dané:
a) $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 + y^3 + 1$, $A = (1, 2)$, $X = (3, 4)$.
b) $f(x, y) = \cos xy$, $A = (0, 0)$, $X = (\pi/2, \pi/2)$.
c) $f(x, y, z) = 3xy/z$, $A = (1, 1, 1)$, $X = (2, 3, 5)$.

1,5. Totálny diferenciál a jeho použitie

Majme funkciu $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorá je definovaná na nejakom okolí $O(A)$ bodu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Hovoríme, že funkcia $f(X)$ je diferencovateľná v bode A, ak existujú čísla $K_1, K_2, \ldots, K_n$ a funkcia $\omega(X)$, ktorá je v bode A spojitá a rovná sa 0, t. j. $\lim\limits_{X \to A} \omega(X) = 0$, že platí

$$f(X) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} K_i(x_i - a_i) + \omega(X)\,\varrho(X, A). \tag{1}$$

Výraz $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x_i - a_i)$ vo vzťahu (1) nazývame *totálnym diferenciálom funkcie $f(X)$ v bode A* a označujeme ho $\mathrm{d}f(A, X)$.

Veta 1. Ak je funkcia $f(X)$ diferencovateľná v bode A, je v tomto bode spojitá.

Veta 2. Ak je funkcia $f(X)$ diferencovateľná v bode A, potom pre čísla K_i vo vzťahu (1) platí

$$K_i = \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dôsledok. Pre totálny diferenciál funkcie $f(X)$ v bode A platí

$$\mathrm{d}f(A, X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}(x_i - a_i). \tag{2}$$

Veta 3. Ak má funkcia $f(X)$ v bode A spojité parciálne derivácie podľa každej premennej, tak je diferencovateľná v bode A.

Veta 4. Nech je funkcia $f(x, y)$ spojitá v okolí bodu $A = (x_0, y_0)$ a v bode A nech je diferencovateľná. Potom rovnica dotykovej roviny ku grafu tejto funkcie v bode A je

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - y_0) - [z - f(A)] = 0. \tag{3}$$

Poznámka 1. [Geometrický význam diferenciálu funkcie $f(x, y)$.] *Prírastkom* alebo *diferenciou* $\Delta f(A, X)$ funkcie $f(X)$ vzhľadom na bod X nazývame rozdiel

$$\Delta f(A, X) = f(X) - f(A).$$

Číslo $\Delta f(A, X)$ geometricky znamená rozdiel z-ových súradníc bodu D a bodu B resp. B' (pozri *obr. 4*).

Ak položíme $f(A) = z_0$, zo vzťahu (3) vyplýva

$$z - z_0 = \mathrm{d}f(A, X). \tag{4}$$

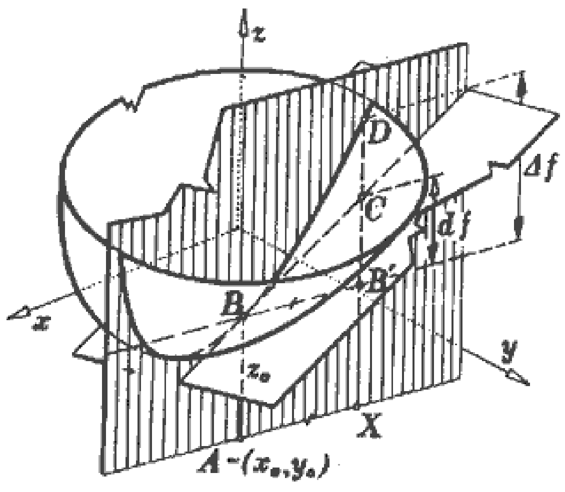
Teda diferenciál $\mathrm{d}f(A, X)$ geometricky znamená rozdiel z-ových súradníc bodu C dotykovej roviny ku grafu funkcie v bode A a bodu B resp. B' (pozri *obr. 4*).

Poznámka 2. Zo vzťahu (1) vyplýva, že pre približný výpočet prírastku funkcie $f(X)$, $\Delta f(A, X) = f(X) - f(A)$ platí

$$\Delta f(A, X) \doteq \mathrm{d}f(A, X). \tag{5}$$

Majme funkciu $f(X)$ *n premenných* a body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ z oboru definície funkcie $f(X)$ Nech je funkcia $f(X)$. diferencovateľná v každom bode X množiny M. *Diferenciálom funkcie* $f(X)$ *na množine* M nazývame funkciu $2n$ premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, ktorú označujeme $\mathrm{d}f$ a pre ktorú platí

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (y_i - x_i). \tag{6}$$



Obr. 4

Rozdiely (diferencie) $y_i - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú diferenciály nezávisle premenných x_i a označujeme ich $\mathrm{d}x_i$. Pre diferenciál funkcie $f(X)$ na množine M potom platí

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

Príklad 1. Vypočítajme totálny diferenciál funkcie $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^2$ v bode $A = (-1, 2)$.

Riešenie. Počítajme prvé derivácie.

$$f'_x = -4x/(x^2 + y^2)^3, \qquad f'_y = -4y/(x^2 + y^2)^3.$$

Toto sú spojité funkcie pre všetky body $(x, y) \neq (0, 0)$, preto podľa vety 3 je daná funkcia v bode $A = (-1, 2)$ diferencovateľná a platí

$$\mathrm{d}f(A, X) = \frac{-4}{(1^2 + 2^2)^3}(x + 1) + \frac{-4}{(1^2 + 2^2)^3}(y - 2) = -\frac{4}{125}(x + 1) - \frac{4}{125}(y - 2).$$

Príklad 2. Pomocou diferenciálu nájdime približnú hodnotu $1{,}94^2 \cdot e^{0{,}12}$.

Riešenie. Podľa poznámky 2 môžeme písať

$$f(X) - f(A) \doteq \mathrm{d}f(A, X)$$

čiže

$$f(X) \doteq f(A) + \mathrm{d}f(A, X). \tag{7}$$

Položme $f(X) = x^2 e^y$ a $A = (2, 0)$. Zo vzťahu (7) máme

$$x^2 e^y \doteq [x^2 e^y]_A + [2x e^y]_A \, \mathrm{d}x + [x^2 e^y]_A \, \mathrm{d}y =$$

$$= 4e^0 + 4e^0(x - 2) + 4e^0(y - 0) = 4 + 4(x - 2) + 4y.$$

Pre $x = 1{,}94$, $y = 0{,}12$ máme

$$1{,}94^2 e^{0{,}12} \doteq 4 + 4(1{,}94 - 2) + 4 \cdot 0{,}12 = 4 - 0{,}24 + 0{,}48 = 4{,}24.$$

Teda platí

$$1{,}94^2 e^{0{,}12} \doteq 4{,}24.$$

V úlohách 186 a 187 zistite, či funkcia $f(X)$ je v bode A diferencovateľná a nájdite jej diferenciál v bode A.

186. $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$, $A = (-1, 1)$.

187. $f(x, y) = e^{xy}$, $A = (0, 0)$.

188. Ukážte, že funkcia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{pre } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nie je v bode $(0, 0)$ diferencovateľná.

189. Dokážte, že funkcia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ je v bode $A = (1, 2, 3)$ diferencovateľná a nájdite jej diferenciál.

190. Dokážte, že funkcia $f(x, y, z) = \cos x \, . \, \sin y \, . \, \cos z$ je diferencovateľná v bode $A = (\pi/4, \pi/2, 0)$. Nájdite diferenciál $\mathrm{d}f(A, X)$.

191. Zistite, či funkcia $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je diferencovateľná v bode $A = (0, 0, 0)$.

192. Ukážte, že funkcia $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ je spojitá v bode $O = (0, 0)$, má v bode O parciálne derivácie $f'_x(0)$, $f'_y(0)$, avšak v bode O nie je diferencovateľná.

193. Ukážte, že funkcia

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{pre } X \neq O \\ 0 & , \text{pre } X = O \end{cases}$$

má v okolí bodu O parciálne derivácie f'_x, f'_y, ktoré sú v bode O nespojité a v ľubovoľnom okolí bodu O neohraničené. Ukážte, že napriek tomu je táto funkcia v bode O diferencovateľná.

194. Nájdite diferenciu $\Delta f(A, X)$ a diferenciál $\mathrm{d}f(A, X)$ funkcie $f(x, y) = 4x^2 + 2xy - y^2 + 2$ v bode $A = (3, -1)$, ak $X = (-1, 2)$.

V úlohách **195** až **196** vypočítajte hodnotu totálneho diferenciálu v bode A pre dané prírastky Δx, Δy resp. Δz.

195. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$, $A = (2, 1)$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}05$.

196. $f(x, y, z) = 2^x \sin y \, . \, \operatorname{arctg} z$, $A = (-4, \pi/2, 0)$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}06$, $\Delta z = 0{,}08$.

V úlohách **197** a **206** nájdite totálny diferenciál funkcie.

197. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$.

198. $f(x, y, z) = x^5 y^4 z^3$.

199. $f(x, y, z) = \cos(3x + 2y - 3z)$.

200. $f(x, y, z) = xy^2 \cos xyz$.

201. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

202. $f(x, y) = \ln \operatorname{cotg}(x/y)$.

203. $f(x, y, z) = e^{\alpha x} \cos(\beta y/z)$.

204. $f(x, y, z) = 3x^{yz}$.

205. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{x + y}$.

206. $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(yz/x^2)$.

V úlohách **207** až **212** pomocou diferenciálu vypočítajte približne:

207. $\sqrt{3{,}03^2 + 9{,}01^2}$.

208. $4{,}004 \, . \, 2{,}002^2 \, . \, 3{,}003^3$.

209. $1{,}05^{2{,}01}$.

210. $\ln\left(\sqrt[4]{0{,}96} + \sqrt[3]{1{,}02} + 2\right)$

211. $\sin 151° \, . \, \operatorname{cotg} 41°$.

212. $\sin 1{,}51 \, . \, \operatorname{arctg} 0{,}8 \, . \, 2^{-3{,}95}$.

213. O koľko sa približne zmení uhlopriečka a plošný obsah obdĺžnika so stranami $x = 12$ m, $y = 9$ m, ak prvá strana sa zväčší o 2 cm a druhá sa zmenší o 4 cm.

214. Výška kužeľa je $h = 15$ cm a polomer základne $r = 8$ cm. O koľko sa približne zmení objem kužeľa, keď výška sa zväčší o 0,3 cm a polomer základne sa zväčší o 0,2 cm.

215. Doba kmitu T matematického kyvadla rovná sa $T = 2\pi \sqrt{l/g}$, kde l je dĺžka kyvadla a g zrýchlenie voľného pádu. S akou chybou je určená doba kmitu T, ak pri meraní bola dĺžka kyvadla určená s chybou $\Delta l = a$ a zrýchlenie voľného pádu s chybou $\Delta g = b$.

V úlohách 216 až 218 nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie v danom bode.

216. $z = 2x^2 + y^2$, $A = (1, 1, ?)$.

217. $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$, $A = (1, ?, 2)$.

218. $z = xy$, $A = (?, 2, 2)$.

219. Nájdite dĺžku úseku priamky $x + 1 = 0$, $y - 4 = 0$ medzi grafom funkcie $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ a dotykovou rovinou ku grafu tejto funkcie v bode $A = (0, 2, 2)$.

220. Nájdite rovnicu tej dotykovej roviny elipsoidu $x^2/25 + y^2/16 + z^2/9 - 1 = 0$, ktorá vytína rovnaké úseky na súradnicových osiach.

221. K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ nájdite dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná s rovinou $4x + 2y + z = 0$.

1,6. Parciálne derivácie zloženej funkcie

Veta 1. Majme zloženú funkciu $F(X) = f[\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)]$, kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a funkcie $\varphi_i(X)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú diferencovateľné v bode $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nech $\varphi_i(A) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Nech je funkcia $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ diferencovateľná v bode $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Potom zložená funkcia $F(X)$ je v bode A diferencovateľná a platí

$$\frac{\partial F(A)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(B)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(A)}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Veta 2. Majme zloženú funkciu $F(X) = f[\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)]$, kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nech sú funkcie $\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)$ diferencovateľné na množine M z priestoru E_n a funkcia $f(Y)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je diferencovateľná na množine N z priestoru E_m. Nech pre každé $X \in M$ patrí m-tica $[\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)]$ do množiny N. Potom zložená funkcia $F(X)$ je na množine M diferencovateľná a platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(Y)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_k} \tag{2}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, kde $Y = (y_1, \ldots, y_m) = [\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X)]$.

Poznámka. Ak sú splnené predpoklady vety 2, dostaneme zo vzťahu (2) pre

a) $m = 1$, $n = 2$, $F(x, y) = f(u)$, kde $u = \varphi(x, y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{3}$$

b) $m = 2$, $n = 1$, $F(x) = f(u, v)$, kde $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

c) $m = 2$, $n = 2$, $F(x, y) = f(u, v)$, kde $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{5}$$

Príklad 1. Vypočítajme $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, ak $z = e^{2u+3v}$, kde $u = \sin x$, $v = x^2$.

Riešenie. Daná funkcia z je zložená funkcia premennej x. Funkcie $u = \varphi(x) = \sin x$, $v = \psi(x) = x^3$ sú diferencovateľné na celom priestore E_1. Funkcia e^{2u+3v} je diferencovateľná v každom bode $(u, v) = [\varphi(x), \psi(x)]$. Funkcia z je diferencovateľná a jej derivácia podľa (4) je

$$\frac{dz}{dx} = \left(2\,e^{2u+3v}\right)_{\substack{u = \sin x \\ v = x^3}} \cdot \frac{du}{dx} + \left(3\,e^{2u+3v}\right)_{\substack{u = \sin x \\ v = x^3}} \cdot \frac{dv}{dx} = e^{2\sin x + 3x^3}\,(2\cos x + 9x^2).$$

Príklad 2. Nech $F(x, y) = (3x^2 + y^2)^{3x+2y}$. Vypočítajme $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Riešenie. Daná funkcia $F(x, y)$ je zložená funkcia, ktorej hlavná zložka je $f(u, v) = u^v$, $u > 0$ a vedľajšie zložky sú $u = \varphi(x, y) = 3x^2 + y^2$, $v = \psi(x, y) = 3x + 2y$. Hlavná zložka $f(u, v)$ má spojité parciálne derivácie na oblasti N z E_2 určenej nerovnosťami $u > 0, -\infty < v < \infty$, a preto je diferencovateľná na oblasti N. Vedľajšie zložky u, v majú spojité parciálne derivácie na celom priestore E_2, a preto sú diferencovateľné na celom priestore E_2, pričom pre každý bod $A = (x, y) \in E_2$ je dvojica $(u, v) \in N$.

Podľa vety 2 resp. vzťahov (5) máme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = vu^{v-1} \,.\, 6x + u^v (\ln u) \,.\, 3,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = vu^{v-1} \,.\, 2y + u^v(\ln u) \,.\, 2,$$

kde $u = 3x^2 + y^2$, $v = 3x + 2y$. Z toho dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (3x^2 + y^2)^{3x+2y-1}\,[18x^2 + 12xy + 3(3x^2 + y^2)\ln(3x^2 + y^2)],$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (3x^2 + y^2)^{3x+2y-1}\,[6xy + 4y^2 + 2(3x^2 + y^2)\ln(3x^2 + y^2)].$$

Príklad 3. Dokážme, že funkcia $z = xy + x\varphi(y/x)$, kde funkcia φ je diferencovateľná, vyhovuje rovnici

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Riešenie. Položme $y/x = u$. Potom má daná funkcia tvar

$$z = xy + x\varphi(u).$$

Počítajme $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, máme:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(u) + x\frac{d\varphi}{du}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\,\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{1}{x} = x + \varphi'(u),$$

kde $u = y/x$.

Po dosadení $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ do ľavej strany danej rovnice dostaneme

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\,\varphi'(u)\right] + y[x + \varphi'(u)] =$$
$$xy + x\varphi(u) - y\varphi'(u) + xy + y\varphi'(u) = xy + x\varphi(u) + xy = xy + z,$$

čo sme mali dokázať.

222. Vypočítajte $\dfrac{dz}{dx}$ v čísle $x = 2\pi$, ak $z = x^2 + \sqrt{y}$, kde $y = \cos x$.

223. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(t) = \sqrt{xy}$, pričom $x = \sin t$, $y = t^2$.

224. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(t) = x^{\ln y}$, pričom $x = t^3$, $y = t^2$.

225. Vypočítajte deriváciu funkcie $z = x\sqrt{y}$, kde $x = \ln t$, $y = 1 + e^t$.

226. Vypočítajte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{dz}{dx}$:

a) $z = \ln(x^2 + y^2)$, kde $y = \varphi(x)$ je diferencovateľná funkcia.

b) $z = xyu$, kde $y = \varphi(x)$, $u = \psi(x, y)$ sú diferencovateľné funkcie.

V úlohách 227 až 229 vypočítajte $\dfrac{dz}{dx}$.

227. $z = u\,e^{uvw}$, kde $u = \sin x$, $v = \cos x$, $w = \operatorname{tg} x$.

228. $z = (u - v)\,e^{3w/10}$, kde $u = 3\sin x$, $v = \cos x$, $w = x$.

229. $z = u^2 + uv + v^2$, kde $u = e^x$, $v = \sin x$.

V úlohách 230 až 237 vypočítajte parciálne derivácie prvého rádu daných funkcií.

230. $z = u^2v - uv^2$, kde $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.

231. $z = u^2\ln v$, kde $u = x/y$, $v = 3x - 2y$.

232. $z = \operatorname{arctg}(u/v)$, kde $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.

233. $z = \dfrac{u}{v}\operatorname{arctg}(u + v)$, kde $u = xy$, $v = x + y$.

234. $z = u\,e^{u/v}$, kde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

235. $z = \ln(u^2 + v^2)$, kde $u = y\cos x$, $v = x\sin y$.

236. $z = f(u, v)$, kde $u = x + y$, $v = x - y$ a f je diferencovateľná funkcia.

237. $z = f(u, v)$, kde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ a f je diferencovateľná funkcia.

V úlohách 238 až 240 vypočítajte $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

238. $u = r + v^2$, kde $r = x^2 + \sin y + 3z$, $v = \ln(x + y + z)$.

239. $u = r + v\ln w$, kde $r = 3x - y + z^2$, $v = x^2 - 3y + z$, $w = x^2 + y^2 + z^2$.

240. $u = \ln(r^2 + v + s^2)$, pričom $r = 2^{x+y^2+z}$, $v = x^2yz$, $s = \sin(x + y + z)$.

241. Vypočítajte $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial v}$, $\dfrac{\partial u}{\partial w}$, ak $u = \ln\cos\dfrac{xy}{\sqrt{z}}$, $x = tvw$, $y = e^{v/t}$, $z = \sqrt{\dfrac{tv}{w}}$.

242. Vypočítajte $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, ak $u = f(r, s, t)$, kde $r = x + 2y - z$, $s = 3x - y - 2z$, $t = \sin x \sin y \sin z$, pričom f je diferencovateľná funkcia.

V úlohách 243 až 245 dokážte, že diferencovateľná funkcia $z = f(x, y)$ vyhovuje danej rovnici.

243. $z = x\varphi(y^2 - x^2)$, $\quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{x^2}$.

244. $z = f(x^2 + y^2)$, $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

245. $z = xy + yg(x/y)$, $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

246. Dokážte, že funkcia $z = \operatorname{arctg}(u/v)$, kde $u = x + y$, $v = x - y$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

247. Dokážte, že funkcia $u = x^3 \sin \dfrac{z^2 + y^2}{x^2}$ vyhovuje rovnici

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 3u.$$

248. Dokážte, že funkcia $u = (x^2 + y^2 + z^2)/2 + \varphi(x - y - z)$, kde φ je funkcia, ktorá má prvú deriváciu, vyhovuje rovnici

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2x + y + z.$$

249. Dokážte, že funkcia $u = xy\, \varphi(x^2 - y^2 - z^2)$, kde φ je funkcia, ktorá má prvú deriváciu, vyhovuje rovnici

$$\frac{1}{2x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) u.$$

Funkciu $f(X)$ nazývame *homogénnou funkciou k-tého stupňa*, k je reálne číslo, ak platí

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

pre každé X z oboru definície funkcie f a pre každé $t > 0$.

250. Dokážte, že pre homogénnu funkciu k-tého stupňa, ktorá je v bode $X \neq O$ diferencovateľná, platí

$$x_1 \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} = kf(X),$$

kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (Eulerova veta o homogénnych funkciách).

1,7. Parciálne derivácie vyšších rádov

Majme funkciu $f(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s oborom definície M a predpokladajme, že má na množine $M_1 \in M$ parciálnu deriváciu $f'_{x_i} = g(X)$. Nech funkcia $g(X)$ má na množine $M_2 \subset M_1$ parciálnu deriváciu g'_{x_j} podľa premennej x_j. Táto parciálna derivácia g'_{x_j} sa nazýva *druhou parciálnou deriváciou* funkcie $f(X)$ podľa premenných x_i a x_j alebo *parciálnou deriváciou druhého rádu* funkcie $f(X)$ podľa premenných x_i a x_j na množine M_2 a označujeme ju znakom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{alebo } f''_{x_i x_j}$$

Ak je $x_i = x_j$, potom píšeme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Podobne definujeme parciálne derivácie tretieho rádu, štvrtého rádu a ďalších vyšších rádov.

Parciálnou deriváciou k-tého rádu funkcie $f(X)$ podľa premenných $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\varkappa, x_\lambda$ na množine M nazývame *parciálnu deriváciu podľa premennej* x_λ z funkcie, ktorá je parciálnou deriváciou $(k - 1)$-ho rádu z funkcie $f(X)$ podľa premenných $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\varkappa$. Túto deriváciu označujeme znakom

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\varkappa \partial x_\lambda} \quad \text{alebo } f^{(k)}_{x_\alpha x_\beta \ldots x_\varkappa x_\lambda}$$

Teda je

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\varkappa \partial x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\varkappa} \right) \tag{1}$$

Ak sa premenná, podľa ktorej derivujeme viackrát za sebou opakuje, píšeme v menovateli namiesto znaku $\underbrace{x_i x_i \ldots x_i}_{l\text{-krát}}$ iba ∂x_i^l. Napríklad

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_3 \partial x_3 \partial x_3} = \frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_3^3 \partial x_2 \partial x_3}.$$

Veta 1. Ak funkcia $f(X)$ má v bode A diferencovateľné parciálne derivácie f'_{x_i}, f'_{x_j}, potom platí

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{2}$$

Dôsledok. Ak má funkcia $f(X)$ v bode A spojité parciálne derivácie druhého rádu, potom platí (2).

Funkciu $f(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazývame *k-krát diferencovateľnou v bode A*, ak má diferencovateľné všetky parciálne derivácie $(k - 1)$-rádu v bode A.

Veta 2. Nech parciálne derivácie k-tého rádu funkcie $f(X)$ sú spojité v bode A, potom funkcia f je v bode A k-krát diferencovateľná.

Veta 3. Nech funkcia $f(X)$ je v bode A k-krát diferencovateľná, potom v bode A sa navzájom rovnajú všetky zmiešané parciálne derivácie k-tého rádu podľa tých istých premenných v rovnakom počte, ktoré sa líšia od seba iba poradím derivovania.

Veta 4. Majme zloženú funkciu $F(X) = F[\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)]$, kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nech funkcie $\varphi_i(X)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ majú v istom okolí bodu X_0 diferencovateľné derivácie prvého rádu a funkcia $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ má v istom okolí bodu $Y_0 = (\varphi_1(X_0), \varphi_2(X_0), \ldots, \varphi_m(X_0))$ diferencovateľné parciálne derivácie prvého rádu. Potom platí

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{3}$$

Vzťah (3) je dosť komplikovaný. Preto v praxi vyššie derivácie zloženej funkcie počítame postupným derivovaním.

Diferenciál k-tého rádu funkcie $f(X)$ v bode A. Majme funkciu $f(X)$ v bode A k-krát diferencovateľnú. *Diferenciálom rádu k-tého* alebo *k-tým diferenciálom funkcie* $f(X)$ v bode A pre bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazývame polynóm

$$\mathrm{d}^k f(A, X) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - a_i)\right]^k f(A). \tag{4}$$

Symbol na pravej strane vzťahu (4) znamená, že:

1. treba utvoriť „k-tú mocninu" z výrazu v zátvorke,
2. namiesto mocnín znakov $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ treba uvažovať parciálne derivácie funkcie $f(X)$ v bode A takého rádu, aká je mocnina,
3. mocniny dvojčlenov $(x_i - a_i)$ zostávajú mocninami.

Poznámka. Pomocou vzťahu 4 možno počítať aj totálny diferenciál k-tého rádu funkcie f, $\mathrm{d}^k f$, stačí uvažovať všetky derivácie v bode X a namiesto diferencií $x_i - a_i$ dosadiť diferenciály nezávisle premenných $\mathrm{d}x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Príklad 1. Vypočítajme parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y) = x^4y^2 + 3xy^3 + 2x^3 + 3y^2.$$

Vypočítajme aj $f''_{xyy}(A)$, ak $A = (1, 2)$.

Riešenie. Pre prvé parciálne derivácie na množine E_2 dostávame

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 + 3y^3 + 6x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4y + 9xy^2 + 6y.$$

Tieto parciálne derivácie sú diferencovateľné funkcie na E_2 a je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^2 + 3y^3 + 6x^2) = 12x^2y^2 + 12x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2 + 3y^3 + 6x^2) = 8x^3y + 9y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^4y + 9xy^2 + 6y) = 8x^3y + 9y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^4y + 9xy^2 + 6y) = 2x^4 + 18xy + 6$$

na množine E_2. Keďže všetky druhé parciálne derivácie sú spojité na E_2, je $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Počítajme ešte $f'''_{xyy}(A)$, dostávame

$$\frac{\partial^3 f(A)}{\partial x \partial y^2} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\right]_A = \left[\frac{\partial}{\partial y}(8x^3y + 9y^2)\right]_A = (8x^3 + 18y)_A = 44.$$

Príklad 2. Nájdime z''_{xy}, ak z je zložená funkcia $z = f(u, v)$, kde $u = xy$, $v = x/y$, ktorá má diferencovateľné parciálne derivácie prvého rádu.

Riešenie. Počítajme z'_x, máme

$$z'_x = f'_u \,.\, u'_x + f'_v \,.\, v'_x = yf'_u + (1/y)f'_v.$$

Z toho dostávame

$$z''_{xy} = [z'_x]'_y = [yf'_u + (1/y)f'_v]'_y = [yf'_u + (1/y)f'_v]'_u \,.\, u'_y + [yf'_u + (1/y)f'_v]'_v \,.\, v'_y + f'_u - (1/y^2)f'_v =$$
$$= [yf''_{uu} + (1/y)f''_{vu}]\,x + [yf''_{uv} + (1/y)f''_{vv}]\,(-x/y^2) + f'_u - (1/y^2)f'_v.$$

Po úprave a použití vety 2 máme

$$z''_{xy} = xyf''_{uu} - (x/y^3)f''_{vv} + f'_u - (1/y^2)f'_v.$$

Príklad 3. Vypočítajme $d^3f(A, X)$, ak je daná funkcia z príkladu 1, $f(x, y) = x^4y^2 + 3xy^3 + 2x^3 + 3y^2$ a bod $A = (1, 2)$.

Riešenie. Podľa vzorca (4) máme

$$d^3f(A, X) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - a_1) + \frac{\partial}{\partial y}(y - a_2)\right]^3 f(A) = f'''_{xxx}(A)\,(x - a_1)^3 +$$
$$+ 3f'''_{xxy}(A)\,(x - a_1)^2\,(y - a_2) + 3f'''_{xyy}(A)\,.\,(x - a_1)\,(y - a_2)^2 + f'''_{yyy}(A)\,(y - a_2)^3.$$

Vypočítame ešte potrebné derivácie tretieho rádu. Z príkladu 1 vyplýva

$$f'''_{xxx}(A) = [(f''_{xx})'_x]_A = (24xy^2 + 12)_A = 108,$$
$$f'''_{xxy}(A) = [(f''_{xx})'_y]_A = (24x^2y)_A = 48,$$
$$f'''_{xyy}(A) = 44,$$
$$f'''_{yyy}(A) = [(f''_{yy})'_y]_A = (18x)_A = 18.$$

Úhrnom máme

$$d^3f(A, X) = 108(x - 1)^3 + 144(x - 1)^2\,(y - 2) + 132\,(x - 1)\,.\,(y - 2)^2 + 18(y - 2)^3.$$

V úlohách 251 až 268 nájdite parciálne derivácie druhého rádu danej funkcie.

251. $z = x^3 - 3x^4y + y^5$.

252. $u = xyz$.

253. $u = xy + yz + zx$.

254. $u = (x^2 - y^2)^3 z^2$.

255. $z = 1/3xy$.

256. $z = xy + y/x$.

257. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

258. $u = e^{ax+by+cz}$.

259. $z = e^{2y} \sin x$.

260. $u = 2^{xyz}$.

261. $z = \ln \dfrac{x^2 + 1}{y^2 - 1}$.

262. $u = \ln (x^2 + y^2 + z^2)$.

263. $z = xy + \cos (x - y)$.

264. $u = x \sin (x + y) + y \cos (x + y)$.

265. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{x + y}$.

266. $z = x^y$.

267. $z = yx^{x/y}$.

268. $u = x^{y^z}$.

V úlohách 269 až 272 zistite, či platí $z''_{xy}(A) = z''_{yx}(A)$.

269. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \sin (x^2 - y^2)$, $A = (0, 0)$.

270. $z = x^2y^4 \sin (x/y)$ pre $y \neq 0$, $z = 0$ pre $y = 0$, $A = (0, 0)$.

271. $z = x \arcsin \sqrt{x/y}$, A je ľubovoľný bod z množiny M, na ktorej existujú uvedené derivácie.

272. $z = \operatorname{arctg} (y \operatorname{tg} x)$, A je ľubovoľný bod množiny M, na ktorej existujú uvedené derivácie.

V úlohách 273 až 281 vypočítajte:

273. $f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyy}, f'''_{yyy}$, ak $f(x, y) = x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 + 3xy^3 - y^4$.

274. u'''_{xyz}, ak $u = e^{xyz}$.

275. u'''_{xyz}, ak $u = \cos (xyz)$.

276. z'''_{xyy}, ak $z = y \ln (xy)$.

277. z''''_{xxyy}, ak $z = \ln (x^2 + y^2)$.

278. $z'''_{xxx}, z'''_{xxy}, z'''_{yyy}$, ak $z = \cos (\sin y + x)$.

279. $z^{(5)}_{xxxyy}, z^{(5)}_{yyxxx}$, ak $z = 3x^3y^3$. Ukážte, že $z^{(5)}_{xxxyy} = z^{(5)}_{yyxxx}$.

280. $z^{(5)}_{xxyxy}, z^{(7)}_{yxxxyxx}$, ak $z = 6x^3y^2 + 2xy^2 - 7x$.

281. $\dfrac{\partial^{m+n}z}{\partial x^m \partial y^n}$, ak $z = \dfrac{x + y}{x - y}$.

V úlohách 282 až 287 nájdite parciálne derivácie druhého rádu zložených funkcií:

282. z''_{xy}, ak $z = f(u, v)$, pričom $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

283. $x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy}$, ak $z = f(xy) + \sqrt{xy}\, g(y/x)$, kde f, g sú dvakrát diferencovateľné funkcie.

284. $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$, ak $z = f(xy, x/y)$.

285. $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, z''_{xu}, z''_{yu}, z''_{uu}$, ak $z = f(x/y, y/u)$.

286. z'', ak $z = f(t, t^2, t^3)$.

287. $u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}, u''_{xz}, u''_{zy}, u''_{zz}$, ak $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

288. Nájdite parciálne derivácie n-tého rádu funkcie $u = f(t)$, kde $t = ax + by + cz$.

289. Ukážte, že pre funkciu $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ platí

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

290. Dokážte, že funkcia $z = xy + \cos (x - y)$ vyhovuje rovniciam

$$z''_{xy} + z''_{xx} = 1, \qquad z''_{xy} + z''_{yy} = 1.$$

291. Dokážte, že funkcia $z = f(x - 2t) + g(x + 2t)$, kde f a g sú dvakrát diferencovateľné funkcie, vyhovuje rovnici

$$z''_{tt} - 4\, z''_{xx} = 0.$$

292. Dokážte, že funkcia $u = xf(x/y) + yg(x/y)$, kde f a g sú dvakrát diferencovateľné funkcie, vyhovuje rovnici

$$x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy} = 0.$$

293. Ukážte, že pre funkciu $u = r^m \cos m\varphi$ platí

$$u''_{rr} + (1/r)\, u'_r + (1/r^2)\; u''_{\varphi\varphi} = 0.$$

294. Ukážte, že funkcia $u = \left[1/(2a\sqrt{\pi t})\right] e^{-(x-b)^2/4a^2t}$ vyhovuje diferenciálnej rovnici pre vedenie tepla $u''_{xx} - (1/a^2)u_t = 0$.

295. Dokážte, že funkcia $f(x,\ y,\ z) = 1/r$, kde $r = \varrho(X,\ X_0)$, spĺňa Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0.$$

Funkciu f nazývame *Newtonovým potenciálom bodu* X_0.

296. Dokážte, že ak funkcia $u = f(x,\ y,\ z)$ vyhovuje Laplaceovej diferenciálnej rovnici $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$, tak aj funkcia $v = xu'_x + yu'_y + zu'_z$, pričom u je trikrát diferencovateľná funkcia, vyhovuje Laplaceovej diferenciálnej rovnici.

297. Ukážte, že pre funkciu $u = (A\, e^{-ar} + B\, e^{ar})/r$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a A, B sú konštanty, platí

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = a^2u.$$

298. Dokážte, že pre homogénne funkcie $f(x,\ y,\ z)$ n-tého rádu platí

$\left[x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}\right]^m f = n(n-1)\ \ldots\ (n - m + 1)f$, kde f je m-krát diferencovateľná funkcia (pozri úlohu 250).

V úlohách 299 až 302 nájdite $d^2f(A,\ X)$, ak:

299. $f(x,\ y) = e^{xy}$, $A = (0,\ 0)$.

300. $f(x,\ y) = xy + yz + xz$, $A = (1,\ -1,\ 2)$.

301. $f(x,\ y,\ z) = z/(x^2 + y^2)$, $A = (1,\ 1,\ 0)$.

302. $f(x,\ y) = x^2y^2$, $A = (1,\ 1)$.

V úlohách 303 až 309 vypočítajte d^2f.

303. $f(x,\ y) = y/x$.

304. $f(x,\ y) = x^2 + 2y^2 - xy + 3x - 5y + 7$.

305. $f(x,\ y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

306. $f(x,\ y) = e^{x-y^2} + \cos x$.

307. $f(x,\ y) = y \sin x + x \cos y$.

308. $f(x,\ y,\ z) = \sin\,(x + y + z)$.

309. $f(x,\ y) = x^y$, kde $x = uv$, $y = u + v$.

310. Vypočítajte d^2f, ak $f(x,\ y) = g(x^2 + y^2)$ a g je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine M.

311. Vypočítajte d^2f, ak $f(u, v)$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine M, pričom $u = ax + by + cz$, $v = mx + ny + pz$ a a, b, c, m, n, p sú čísla.

V úlohách 312 až 318 vypočítajte:

312. $d^3f(A, X)$, ak $f(X) = xyz$ a $A = (7, 11, -10)$.

313. $d^{10}f(A, X)$, ak $f(X) = \ln(x + y)$ a $A = (0, 1)$.

314. $d^nf(A, X)$, ak $f(X) = g(x + y + z)$, $A = (1, 0, -1)$ a g je n-krát diferencovateľná funkcia.

315. d^3f, ak $f(X) = \cos(x + 2y^2)$.

316. d^4u, ak $u = x^4 + y^4 + 4y^3z + 2xyz^2 - 3x^2yz$.

317. d^4u, ak $u = \ln(-x + 2y + 3z)$.

318. d^nz, ak $z = x^ny^n$.

1,8. Taylorova veta pre funkcie viac premenných

Veta. Nech funkcia $f(X)$ n premenných je $(n + 1)$-krát diferencovateľná na okolí $O(A)$ bodu A. Potom platí

$$f(X) = d^0f(A, X) + \frac{1}{1!} df(A, X) + \frac{1}{2!} d^2f(A, X) + \dots + \frac{1}{n!} d^nf(A, X) + \\ + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f[A + \Theta(X - A), X + \Theta(X - A)], \tag{1}$$

pričom je $0 < \Theta < 1$.*)

Výraz

$$T_n(f, A, X) = d^0f(A, X) + \frac{1}{1!} df(A, X) + \frac{1}{2!} df^2(A, X) + \dots + \frac{1}{n!} d^nf(A, X)$$

nazývame *n-tým Taylorovým polynómom funkcie f v bode A* a výraz

$$\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f[A + \Theta(X - A), X + \Theta(X - A)]$$

nazývame *Lagrangeovým tvarom zvyšku* po n-tom Taylorovom polynóme v bode A.

Ak za bod A berieme bod $O = (0, 0, \dots, 0)$ hovoríme o *Maclaurinovom polynóme* resp. o *Maclaurinovej vete*.

Príklad 1. Rozviňme podľa Taylorovej vety funkciu $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - 8y^2 + 10x - 13$ v bode $A = (2, -1)$, kde $n \geq 2$.

Riešenie. Vypočítame parciálne derivácie prvého a druhého rádu funkcie $f(x, y)$ v bode A, máme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A = (6x + 2y + 10)_A = 20, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A = (2x - 16y)_A = 20,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_A = 6, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_A = -16, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_A = 2.$$

Všetky derivácie tretieho a vyšších rádov sa rovnajú 0. Podľa vzorca (1) dostaneme

$$f(x, y) = 7 + \frac{1}{1!} 20[(x - 2) + (y + 1)] + \frac{1}{2} [6(x - 2)^2 + 4(x - 2)(y + 1) - 16(y + 1)^2] = \\ = 7 + 20(x - 2) + 20(y + 1) + 3(x - 2)^2 + 2(x - 2)(y + 1) - 8(y + 1)^2.$$

*) Označujeme $d^0f(A, X) = f(A)$.

Príklad 2. Aproximujme funkciu $F(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ v okolí bodu $A = (0, 0)$ polynómom druhého stupňa.

Riešenie. Hľadajme Maclaurinov polynóm druhého stupňa. Máme

$$F(A) = 1, \quad F'_x(A) = 0, \quad F'_y(A) = 0, \; F''_{xx}(A) = 1, \quad F''_{yy}(A) = 1, \quad F''_{xy}(A) = 0,$$

$$\text{a teda } T_2(F, A, X) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Podľa Taylorovej vety máme

$$F(x, y) = T_2(F, A, X) + \frac{1}{3!} \mathrm{d}^3F[A + \Theta(X - A), X + \Theta(X - A)].$$

Z toho vyplýva

$$\frac{\cos x}{\cos y} \doteq 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \text{ v istom okolí bodu } A.$$

V úlohách **319** až **321** rozviňte funkciu $f(X)$ podľa Taylorovej vety v bode A pre dané n.

319. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1,\ A = (1, 2),\ n = 2.$

320. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3 - 3xyz,\ A = (1, 0, 1),\ n = 3.$

321. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy,\ \ A = (1, 1),\ n = 3.$

V úlohách **322** až **325** napíšte Maclaurinovu vetu pre funkciu f a dané n.

322. $f(x, y) = 1/(1 - x - y + xy),\ n = 2.$

323. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2),\ n = 5.$

324. $f(x, y) = e^x \sin y,\ n = 3.$

325. $f(x, y) = \ln(1 - x) \,.\, \ln(1 - y),\ n = 3.$

V úlohách **326** a **327** nájdite n — tý Taylorov polynóm danej funkcie v bode A.

326. $f(x, y) = \sin x \,.\, \sin y,\ \ A = (\pi/4,\ \pi/4),\ n = 2.$

327. $f(x, y) = x^y,\ A = (1, 1),\ n = 3.$

328. Na základe úlohy 327 nájdite približne $1{,}1^{1{,}02}$.

329. Napíšte tretí Taylorov polynóm funkcie $f(x,\ y,\ z) = \sin x \,.\, \sin y \,.\, \sin z$ v bode $A = (\pi/4,\ \pi/4,\ \pi/4)$.

330. Nájdite $2n$-tý Taylorov polynóm a príslušný zvyšok v Lagrangeovom tvare funkcie $f(x, y, z) = \cos(2x + 4y + 3z)$ v bode $A = (\pi/2, 0, 0)$.

V úlohách **331** a **332** nájdite n-tý Taylorov polynóm a príslušný Lagrangeov zvyšok funkcie v bode A.

331. $f(x, y, z) = e^{x+y+z},\ A = (0, 0, 0).$

332. $f(x, y, z) = \ln(x + y + 3z),\ A = (1, 0, 0).$

1,9. Lokálne extrémy funkcie viac premenných

A. Lokálne maximum [minimum] funkcie

Funkcia $f(X)$ má v bode A lokálne *maximum* [*minimum*], ak existuje také okolie bodu A, že pre každý bod $X \neq A$ z tohto okolia platí $f(X) \leq f(A)$ [$f(X) \geq f(A)$]. Ak miesto $\leq$ [$\geq$] platí $<$ [$>$], hovoríme o *ostrom lokálnom maxime* [*minime*].

Veta 1. Ak má funkcia $f(X)$ v bode A lokálny extrém, potom všetky parciálne derivácie prvého rádu v bode A, ktoré existujú, rovnajú sa 0, alebo neexistuje v bode A nijaká parciálna derivácia.

Bod, v ktorom sa všetky parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(X)$ rovnajú 0, nazýva sa *stacionárny bod*.

Veta 2. Nech bod A je stacionárnym bodom funkcie $f(X)$ a nech v bode A je funkcia $f(X)$ dva razy diferencovateľná. Potom:

a) funkcia $f(X)$ má v bode A ostré lokálne minimum [maximum], ak druhý diferenciál $d^2f(A, X)$ pre každý bod $X \neq A$ je kladný [záporný],

b) funkcia $f(X)$ nemá v bode A lokálny extrém, ak existujú body X_1, X_2, že $d^2f(A, X_1)$ a $d^2f(A, X_2)$ majú rôzne znamienka.

Poznámka. Aby sme určili, či $d^2f(A, X) > 0$ alebo $d^2f(A, X) < 0$ pre každý bod $X \neq A$, používame vetu: Nutná a postačujúca podmienka, aby bolo $d^2f(A, X) > 0$ [$d^2f(A, X) < 0$] pre každý bod $X \neq A$ je

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \tag{1}$$

$$\left[a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \dots, \right] \tag{2}$$

pričom $a_{ik} = a_{ki} = \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i \partial x_k}$.

Veta 3. Nech bod A je stacionárnym bodom funkcie $f(x, y)$ a nech v bode A je funkcia $f(x, y)$ dva razy diferencovateľná. Nech $D(A) = f''_{xx}(A) f''_{yy}(A) - (f''_{xy}(A))^2$. Potom:

a) funkcia $f(x, y)$ má v bode A ostré lokálne maximum [minimum], ak $D(A) > 0$ a $f''_{xx}(A) < 0$ [$f''_{xx}(A) > 0$],

b) funkcia $f(x, y)$ nemá v bode A lokálny extrém, ak je $D(A) < 0$.*)

Príklad 1. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$z = xy(6 - x - y).$$

Riešenie. Daná funkcia má parciálne derivácie v každom bode priestoru E_2. Lokálne extrémy môžu teda byť len v stacionárnych bodoch, ktoré dostaneme podľa vety 1 riešením systému

$$f'_x = y(6 - 2x - y) = 0,$$

$$f'_y = x(6 - x - 2y) = 0.$$

Stacionárne body sú $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (6, 0)$, $A_3 = (0, 6)$, $A_4 = (2, 2)$. Vypočítajme parciálne derivácie druhého rádu:

$$f''_{xx} = -2y, \qquad f''_{yy} = -2x, \qquad f''_{xy} = 6 - 2x - 2y$$

a utvorme

$$D(x, y) = (-2y)(-2x) - (6 - 2x - 2y)^2.$$

Pre bod A_1 máme $D(0, 0) = -36 < 0$,
pre bod A_2 máme $D(6, 0) = -36 < 0$,
pre bod A_3 máme $D(0, 6) = -36 < 0$,
pre bod A_4 máme $D(2, 2) = 16 - 4 > 0$.
Podľa vety 3 daná funkcia má extrém v bode $A_4 = (2, 2)$. Keďže je $f''_{xx}(A_4) = -4 < 0$, v bode A_4 nastáva lokálne maximum, a to $z_{max} = 4(6 - 2 - 2) = 8$.

Príklad 2. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6.$$

Riešenie. Daná funkcia má parciálne derivácie v každom bode priestoru E_3. Lokálne extrémy môžu teda nastať len v stacionárnych bodoch, ktoré podľa vety 1 dostaneme riešením systému rovníc

*) Ak $D(A) = 0$, funkcia f môže, ale nemusí mať lokálny extrém v bode A.

$$f'_x = 2x - y - 2 = 0,$$
$$f'_y = -x + 2y + 3 = 0,$$
$$f'_z = 2z - 4 = 0.$$

Daný systém má jediné riešenie $(1/3, -4/3, 2)$ a hľadaný stacionárny bod je $A = (1/3, -4/3, 2)$. Aby sme rozhodli o existencii lokálneho extrému v stacionárnom bode podľa vety 2, nájdeme $d^2f(A, X)$. Počítame najprv druhé parciálne derivácie v bode A

$$f''_{xx}(A) = 2, \quad f''_{yy}(A) = 2, \quad f''_{zz}(A) = 2, \quad f''_{xy}(A) = -1, \quad f''_{xz}(A) = 0, \quad f''_{yz}(A) = 0.$$

Podľa poznámky za vetou 2 máme

$$a_{11} = 2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & -1, & 0 \\ -1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Teda je $d^2f(A, X) > 0$ pre všetky $X \neq A$ a v stacionárnom bode A nastáva minimum, a to $f(A) = -1/3$.

B. Viazané extrémy

Nech funkcia $z = f(x, y)$ je definovaná na množine M a množinu N nech tvoria všetky body z M, ktoré vyhovujú rovnici $g(x, y) = 0$.

Lokálne extrémy funkcie $f(x, y)$ na množine N nazývame *viazanými lokálnymi extrémami* a podmienku $g(x, y) = 0$, ktorá určuje množinu N, nazývame *väzbou*.

Pri hľadaní viazaných extrémov môžu nastať dva prípady:

a) Väzba $g(x, y) = 0$ určuje jedinú funkciu $y = \varphi(x)$. V tomto prípade viazaný extrém danej funkcie hľadáme ako lokálny extrém funkcie jednej premennej $z = F(x) = f[x, \varphi(x)]$.

b) Väzba $g(x, y) = 0$ neurčuje funkciu $y = \varphi(x)$. V tomto prípade postupujeme tzv. *Lagrangeovou metódou neurčitých koeficientov*.

Zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

a hľadáme lokálne extrémy tejto funkcie s väzbou $g(x, y) = 0$. Toto vedie k riešeniu systému rovníc

$$\begin{aligned} L'_x(x, y) &= f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0, \\ L'_y(x, y) &= f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0, \\ g(x, y) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

z ktorého určíme neznáme x, y, λ. Charakter extrému určíme podľa vety 3 odseku A.

Vo všeobecnosti, ak hľadáme viazané lokálne extrémy funkcie $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na množine N, ktorá je určená väzbami

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + \\ + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a hľadáme jej lokálne extrémy. Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ určíme z podmienky, aby systém rovníc

$$L'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

mal za riešenie takú n-ticu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorá by vyhovovala aj systému (4), t. j. riešime systém zostavený z rovníc (4) a (5), z ktorého potom určíme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ a n-ticu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Bod $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je stacionárnym bodom funkcie $L(X)$. Ak v ňom má funkcia L lokálny extrém, má v ňom viazaný lokálny extrém aj parciálna funkcia f na množine N.

Poznámka. Ak parciálna funkcia f na množine N má v bode A lokálny extrém, potom funkcia $L(X)$ nemusí mať v bode A lokálny extrém. To znamená, že uvedenou metódou nemusíme nájsť všetky viazané lokálne extrémy funkcie f na množine N.

Príklad 3. Na parabole $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ nájdite bod, ktorého vzdialenosť od priamky $9x - 7y + 16 = 0$ je minimálna.

Riešenie. Nech $X = (x, y)$ je ľubovoľný bod priamky a bod $U = (u, v)$ ľubovoľný bod paraboly. Pre vzdialenosť týchto dvoch bodov platí

$$\varrho(X, U) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}\,.$$

Kvôli zjednodušeniu výpočtu budeme hľadať extrém funkcie $\varrho^2(X, U) = f(x, y, u, v)$, a to za podmienky, že bod $X = (x, y)$ je bodom priamky a bod $U = (u, v)$ bodom paraboly. Hľadáme teda viazaný extrém funkcie

$$f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2 \tag{6}$$

s väzbami

$$\begin{aligned} 9x - 7y + 16 &= 0,\\ 2u^2 - 4uv + 2v^2 - u - v &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Zostrojme Lagrangeovu funkciu

$$\begin{aligned} L(x, y, u, v) = {} & (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda_1(9x - 7y + 16) + \\ & + \lambda_2(2u^2 - 4uv + 2v^2 - u - v). \end{aligned} \tag{8}$$

Hľadajme extrém funkcie L za podmienok (7). Stacionárne body dostaneme riešením systému

$$\begin{aligned} L'_x &= 2(x - u) + 9\lambda_1 &&= 0,\\ L'_y &= 2(y - v) - 7\lambda_1 &&= 0,\\ L'_u &= -2(x - u) + 4\lambda_2 u - 4\lambda_2 v - \lambda_2 &&= 0,\\ L'_v &= -2(y - v) - 4\lambda_2 u + 4\lambda_2 v - \lambda_2 &&= 0,\\ & 9x - 7y + 16 &&= 0,\\ & 2u^2 - 4uv + 2v^2 - u - v &&= 0. \end{aligned}$$

Riešením systému je $\lambda_1 = \lambda_2 = 8/65$, $x = 159/65$, $y = 353/65$, $u = 3$, $v = 5$. Teda stacionárnym bodom Lagrangeovej funkcie $L(x, y, u, v)$ pre $\lambda_1 = \lambda_2 = 8/65$ je štvorica $N = (159/65, 353/65, 3, 5)$. Existenciu a charakter extrému v stacionárnom bode zistíme podľa vety 2 a vzťahu (1). Počítajme druhé derivácie v stacionárnom bode N. Máme

$$L''_{xx}(N) = 2, \qquad L''_{yy}(N) = 2, \qquad L''_{uu}(N) = 2 + 4\lambda_2 = 162/65, \qquad L''_{vv}(N) = 2 + 4\lambda_2 = 162/65,$$

$$L_{xy}(N) = 0, \qquad L''_{xu}(N) = -2, \qquad L''_{xv}(N) = 0, \qquad L''_{yu}(N) = 0, \qquad L''_{yv}(N) = -2,$$

$$L_{uv}(N) = -4\lambda_2 = -32/65.$$

Utvorme determinanty

$$|2| > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2, & 0\\ 0, & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2, & 0, & -1\\ 0, & 2, & 0\\ -1, & 0, & 162/65 \end{vmatrix} = 518/65 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 0, & -1, & 0\\ 0, & 2, & 0, & -2\\ -1, & 0, & 162/65, & -32/65\\ 0, & -2, & -32/65, & 162/65 \end{vmatrix} = 192/65 > 0.$$

Keďže všetky determinanty sú kladné, podľa vzťahu (1) dostaneme, že v stacionárnom bode N nastáva lokálny extrém funkcie $L(x, y, u, v)$, a to minimum. Z toho vyplýva, že aj funkcia $\varrho^2(X, U)$ a teda aj $\varrho(X, U)$ má v stacionárnom bode N minimum. Z geometrického významu úlohy vyplýva, že bod $U = (u, v) = (3, 5)$ paraboly má najmenšiu vzdialenosť od danej priamky.

C. Absolútne extrémy

Funkcia $f(X)$ spojitá na uzavretej ohraničenej oblasti D nadobúda najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu, a to vo vnútri alebo na hranici oblasti D. Najmenšiu, najväčšiu hodnotu hľadáme tak, že skúmame: a) stacionárne body, b) body, v ktorých neexistujú parciálne derivácie, c) body na hranici oblasti D, t. j. *viazané extrémy*.

Príklad 8. Nájdime maximum a minimum funkcie

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

na oblasti danej nerovnosťou $x^2 + y^2 \leqq 25$.

Riešenie. Daná funkcia je diferencovateľná na celom priestore E_2. Lokálne extrémy môžu nastať len v stacionárnych bodoch. Riešme

$$f'_x = 2x - 12 = 0,$$

$$f'_y = 2y + 16 = 0.$$

Riešením tohto systému dostaneme stacionárny bod $(6, -8)$. Keďže tento bod neleží v danej oblasti, maximum resp. minimum funkcie bude na hranici oblasti. Hľadáme teda viazaný extrém danej funkcie, pričom väzba je daná rovnicou kružnice $x^2 + y^2 = 25$. Zostrojme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

a riešme systém

$$L'_x = 2x - 12 + 2\lambda x = 0,$$
$$L'_y = 2y + 16 + 2\lambda y = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

vzhľadom na neznáme λ, x, y. Dostaneme dve riešenia

$$\lambda_1 = 1, \quad x_1 = 3, \quad y_1 = -4 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = -3, \quad x_2 = -3, \quad y_2 = 4.$$

Keďže

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda, \quad L''_{yy} = 2 + 2\lambda \quad \text{a} \quad L''_{xy} = 0,$$

máme $D = (2 + 2\lambda)^2 > 0$. To znamená, že pre λ_1 a λ_2 má funkcia L extrém. Keďže pre $\lambda_1 = 1$ je $L''_{xx} = 2 + 2\lambda_1 = 4 > 0$, má funkcia $L(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + 1(x^2 + y^2 - 25)$ v bode $(3, -4)$ lokálne minimum, a to $L(3, -4) = -75$. Pre $\lambda_2 = -3$ je $L''_{xx} = 2 + 2\lambda_2 = -4 < 0$ a funkcia $L(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y - 3(x^2 + y^2 - 25)$ má v bode $(-3, 4)$ lokálne maximum, a to $L(-3, 4) = 125$.

Daná funkcia $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ má na oblasti $x^2 + y^2 \leqq 25$ maximum 125 v bode $(-3, 4)$ a minimum -75 v bode $(3, -4)$.

V úlohách 333 až 352 nájdite lokálne extrémy daných funkcií.

333. $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$.

334. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$.

335. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

336. $f(x, y) = 4 - (x - 2)^2 - (y + 3)^2$.

337. $f(z, t) = 5 + 6z - 4z^2 - 3t^2$.

338. $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - x + 3y + 2$.

339. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 3x + 5y - 1$.

340. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x - 2y$.

341. $f(x, y) = (y - x - 2)^2$.

342. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215$.

343. $f(x, y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$

344. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2$.

345. $f(x, y) = x^2y^3(12 - x - y)$.

346. $f(x, y) = 5xy + 25/x + 8/y, (x > 0, y > 0)$.

347. $f(x, y) = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}$.

348. $f(x, y) = (a + bx + cy) / \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

349. $f(x, y) = xy \ln (x^2 + y^2)$.

350. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} (2y^2 + x^2)$.

351. $f(x, y) = e^{x + y}(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)$.

352. $f(x, y) = x + y + 4\cos x \, . \cos y$.

V úlohách **353** až **359** nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x, y, z)$.

353. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + zy - z + y - 2x$.

354. $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$.

355. $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 15x + 14y + 4z + 17$.

356. $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$.

357. $f(x, y, z) = x/(y + z) + y/(x + z) + z/(x + y)$, kde $x > 0, y > 0, z > 0$.

358. $f(x, y, z) = (ax + by + cz) e^{-x^2-y^2-z^2}$

359. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2^2 \ldots x_n^n(1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n)$, kde $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$.

360. Nájdite takých n čísiel, aby ležali medzi kladnými číslami a, b $(a < b)$ a aby zlomok

$$u = \frac{x_1x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)}$$

bol najväčší (Hughyensova úloha).

V úlohách **361** až **372** nájdite viazané extrémy funkcie.

361. $z = xy - x + y - 1$, ak $x + y = 1$.

362. $z = x + y$, ak $1/x^2 + 1/y^2 = 1/a^2$.

363. $z = x^2 + y^2$, ak $x/p + y/q = 1$.

364. $z = x^n + y^n$, ak $x + y = 2a$, $a > 0$, $n > 1$.

365. $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, ak $x - y = \pi/4$.

366. $u = xyz$, ak $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

367. $u = x + y + z$, ak $a/x + b/y + c/z = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

368. $u = \cos x \, . \cos y \, . \cos z$, ak $x + y + z = -\pi$.

369. $u = x_1^m + x_2^m \ldots + x_n^m$, ak $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = na$, $a > 0$, $m < 1$.

370. $u = xyzt$, ak $x + y + z + t = 4a$, $x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$.

371. $u = xyz$, ak $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

372. $u = x^2 + y^2 + z^2$, ak $x + y - 3z + 7 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$.

V úlohách **373** až **380** nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie na danej uzavretej oblasti M.

373. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, oblasť M je daná nerovnosťami $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $y \leqq -x + 3$.

374. $f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$, oblasť M je ohraničená priamkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

375. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, oblasť M je obdĺžnik s vrcholmi $A = (0, -1)$, $B = (2, -1)$, $C = (2, 2)$, $D = (0, 2)$.

376. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, oblasť M je určená nerovnosťou $|x| + |y| \leqq 1$.

377. $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos (x + y)$, oblasť M je štvorec s vrcholmi $A = (0, 0)$, $B = (\pi, 0)$, $C = (\pi, \pi)$, $D = (0, \pi)$.

378. $f(x, y) = x^2 - y^2$, oblasť M je kruh $x^2 + y^2 \leqq 4$.

379. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2)$, oblasť M je kruh $x^2 + y^2 \leqq 4$.

380. $f(x, y, z) = x + y + z$, oblasť M je daná nerovnosťou $1 \geqq x \geqq y^2 + z^2$.

381. Nájdite najväčšiu hodnotu n-tej odmocniny zo súčinu n kladných čísiel x_1, $x_2, \ldots, x_n$, ak platí $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, kde $a > 0$.

382. Nájdite extrém kvadratickej formy

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

s väzbou

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

pričom pre čísla a_{ij} platí $a_{ij} = a_{ji}$.

383. Dokážte Hölderovu nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^l\right)^{1/l},$$

kde $a_i \geqq 0$, $x_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots n$; $k > 1$, $1/k + 1/l = 1$.

384. Dokážte Hadamardovu nerovnosť pre determinant $A = |a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$:

$$A^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

385. Nájdite taký a) trojuholník, b) obdĺžnik daného obvodu $2s$, aby rotačné teleso, ktoré vznikne rotáciou tohto útvaru okolo jeho jednej strany, malo najväčší objem.

386. Do polgule s polomerom R vpíšte pravouhlý rovnobežnosten najväčšieho objemu.

387. Do daného kužeľa vpíšte valec najväčšieho objemu.

388. Nájdite pravouhlý rovnobežnosten maximálneho objemu ak jeho povrch má plošný obsah $2a^2$.

389. Ako lokálny extrém nájdite vzdialenosť bodu $X = (x, y)$ od danej priamky $Ax + By + C = 0$.

390. Vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme sú dané body $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$, ktoré ležia v prvom kvadrante. Ako treba voliť bod $Q_1 = (x, 0)$, $x > 0$ a bod $Q_2 = (0, y)$, $y > 0$, aby dĺžka $L = \varrho(P_1, Q_1) + \varrho(Q_1, Q_2) + \varrho(Q_2, P_2)$ bola najmenšia.

391. Zo všetkých valcových nádob daného povrchu nájdite takú, ktorá má najväčší objem.

392. Bodom $A = (a, b, c)$ zostrojte takú rovinu, aby so súradnicovými rovinami vytvárala štvorsten maximálneho objemu.

393. V rovine je daných n bodov $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$ s hmotami $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Nájdite v rovine taký bod A, aby moment zotrvačnosti tohto systému vzhľadom na bod A bol minimálny.

394. Kanál, ktorým sa privádza k turbíne voda, má v priereze tvar rovnoramenného lichobežníka, ktorého plošný obsah je S. Určte hĺbku kanálu h a uhol sklonu α bočnej steny tak, aby obvod zmáčaný vodou bol čo najmenší.

395. Elektrickým obvodom, ktorý má odpor R, prechádza prúd I. Množstvo tepla, ktoré vzniká na odpore R za sekundu, je úmerné súčinu RI^2. Určte, ako treba rozvetviť prúd I na prúdy $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ do n vetiev s odpormi $R_1, R_2, \ldots, R_n$, aby množstvo tepla, ktoré v nich vznikne, bolo minimálne.

1,10. Implicitná funkcia

Nech $F(x, y)$ je spojitá funkcia dvoch premenných. Ak existuje spojitá funkcia $y = f(x)$ taká, že pre všetky x z oboru definície funkcie $y = f(x)$ platí

$$F[x, f(x)] = 0,$$

potom funkciu $f(x)$ nazývame funkciou určenou *implicitne* rovnicou $F(x, y) = 0$.

Veta 1. Majme funkciu $F(x, y)$ definovanú v okolí bodu $A = (x_0, y_0)$. Nech existuje také okolie $O(A)$ bodu A, že funkcia $F(x, y)$ je na okolí $O(A)$ spojitá a má tam spojité parciálne derivácie až do n-tého rádu. Nech v bode A je $F(x_0, y_0) = 0$ a $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, potom existujú kladné čísla ξ, η také, že:

1. rovnicou $F(x, y) = 0$, je na intervale $I = (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ určená jediná spojitá funkcia $y = f(x)$ taká, že pre každé $x \in I$ je $F[x, f(x)] = 0$, $f(x_0) = y_0$ a $f(x) \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$;
2. funkcia $f(x)$ má v intervale I spojité derivácie až do n-tého rádu.

Pre prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x)$ platí

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}, \tag{1}$$

$$f''(x) = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2}{F'_y}, \tag{2}$$

pričom $y = f(x)$, $y' = f'(x)$

Majme systém rovníc

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \; i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

kde $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú funkcie definované na istom okolí bodu $A = (x_1^0 \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ z E_{m+n}.

Veta 2. Nech na istom okolí $O(A)$ bodu A sú funkcie F_i a ich parciálne derivácie podľa y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ až do k-tého rádu spojité. Nech v bode A je $F_i(A) = 0$ a determinant

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1(A)}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_1(A)}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m(A)}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_m(A)}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existujú také čísla $\xi > 0$, $\eta > 0$, že systémom rovníc (3) je určený práve jeden systém spojitých funkcií $f_1(X), f_2(X), \ldots, f_m(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktoré sú definované na intervale $I = (x_1^0 - \xi, x_1^0 + \xi) \times \ldots \times (x_n^0 - \xi, x_n^0 + \xi)$ a majú tieto vlastnosti:

1. $f_k(X^0) = y_k^0$, $k = 1, \ldots, m$, kde $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

2. Pre každý bod $X \in I$ platí $F_i[x_1, \ldots, x_n, f_1(X), \ldots, f_m(X)] = 0$, pričom bod $[f_1(X), \ldots, f_m(X)]$ je z intervalu $K = (y_1^0 - \eta, y_1^0 + \eta) \times \ldots \times (y_m^0 - \eta, y_m^0 + \eta)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

3. Funkcie $f_i(X)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ majú na intervale I spojité parciálne derivácie až do k-tého rádu.

Poznámka 1. O funkcii $f(x)$, ktorej existenciu zaručuje veta 1, hovoríme, že je určená implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$ a bodom A, alebo že je to funkcia určená rovnicou $F(x, y) = 0$ a začiatočnou podmienkou $y_0 = f(x_0)$. Podobne o funkciách, ktorých existenciu zaručuje veta 2, hovoríme, že sú určené implicitne rovnicou (3) a bodom A.

Poznámka 2. Vzorce pre vyššie derivácie funkcie určenej implicitne sú zložité, preto tieto derivácie hľadáme priamo postupným derivovaním.

Príklad 1. Zistite, či je rovnicou $y^3 - 2xy + x^2 = 0$ a bodom $A = (1, 1)$ určená implicitne funkcia a nájdite jej prvú a druhú deriváciu.

Riešenie. Označme $F(x, y) = y^3 - 2xy + x^2$. Táto funkcia, ako aj jej parciálne derivácie ľubovoľného rádu sú spojité na celom priestore E_2, a teda aj na okolí bodu A. Ďalej $F(A) = 0$, $F'_y(A) = (3y^2 - 2x)_A = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$. Pretože sú splnené predpoklady vety 1 na istom okolí čísla 1, je implicitne určená danou rovnicou a bodom A práve jedna spojitá funkcia $y = f(x)$ a má tam deriváciu $f'(x)$, $f''(x)$.

Derivácie funkcie $y = f(x)$ vypočítame dvoma spôsobmi, podľa vzorca (1) a (2) a postupným derivovaním.

1. Vypočítajme najskôr parciálne derivácie prvého a druhého rádu funkcie $F(x, y)$. Máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2y + 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y.$$

Derivácia $f'(x)$ podľa vzorca (1) je

$$f'(x) = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}, \quad 3y^2 - 2x \neq 0, \text{ kde } y = f(x).$$

Druhá derivácia $f''(x)$ podľa vzorca (2) je

$$f''(x) = -\frac{2 - 4y' + 6yy'^2}{3y^2 - 2x}, \quad 3y^2 - 2x \neq 0,$$

kde $y' = \dfrac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}$ a $y = f(x)$.

2. Podľa vety 1 pre každú funkciu $f(x)$ určenú implicitne danou rovnicou a bodom platí

$$[f(x)]^3 - 2xf(x) + x^2 = 0. \tag{4}$$

Derivujme rovnosť (4) podľa x. Dostaneme

$$3[f(x)]^2 f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) + 2x = 0$$

alebo

$$3y^2y' - 2y - 2xy' + 2x = 0. \tag{5}$$

Po úprave máme

$$(3y^2 - 2x)y' = 2y - 2x.$$

Odtiaľ je

$$y' = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}, \quad 3y^2 - 2x \neq 0,$$

pričom $y = f(x)$.

Derivovaním rovnosti (5) podľa x, pričom považujeme y, y' za funkcie premennej x, určíme y''.

Máme
$$6yy'^2 + 3y^2y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' + 2 = 0.$$

Po úprave máme

$$6yy'^2 - 4y' + (3y^2 - 2x)\, y'' + 2 = 0.$$

Odtiaľ je

$$y'' = -\frac{2 - 4y' + 6yy'^2}{3y^2 - 2x}, \quad 3y^2 - 2x \neq 0,$$

kde treba položiť

$$y' = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}.$$

Príklad 2. Nájdime parciálne derivácie prvého rádu a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ funkcie $f(x, y)$ určenej implicitne rovnicou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4 = 0 \text{ a bodom } A = (0, 0, 2).$$

Riešenie. Nech $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4$. Táto funkcia je spojitá a má spojité parciálne derivácie každého rádu na celom priestore E_3. Ďalej je $F(0, 0, 2) = 0$, $F_z'(A) = (2z - 2xy)_A = 4 \neq 0$. Podľa vety 2 je danou rovnicou na istom okolí bodu $(0, 0)$ definovaná funkcia $z = f(x, y)$ a má na tomto okolí parciálne derivácie.

Aby sme našli z_x', z_y' derivujme rovnicu $F(x, y, z) = 0$ najprv podľa x, pričom y považujeme za konštantu, potom podľa y, pričom považujeme x za konštantu a z je funkciou dvoch premenných x, y. Máme

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2yz - 2xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 2xz - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Odtiaľ je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - x}{z - xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - y}{z - xy}, \qquad z - xy \neq 0, \tag{8}$$

kde $z = f(x, y)$.

Aby sme určili $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, derivujme rovnosť (7) podľa x. Máme

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2z - 2x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Odtiaľ je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{z - xy}, \quad z - xy \neq 0,$$

kde pre $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ platí (8) a $z = f(x, y)$.

Poznámka 3. Funkcie dané implicitne skúmame podobne ako funkcie jednej resp. viac premenných, pričom príslušné derivácie vypočítame prv uvedeným spôsobom.

Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$, danej implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$ v bode $A\ (x_0; y_0)$ je

$$y - y_0 = -\left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right)_A (x - x_0),$$

čiže

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A (y - y_0) = 0. \tag{9}$$

Rovnica dotykovej roviny ku grafu funkcie $z = f(x, y)$ danej implicitne rovnicou $F(x, y, z) = 0$ v bode $A = (x_0, y_0, z_0)$ je

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_A (z - z_0) = 0. \tag{10}$$

Príklad 8. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie danej implicitne rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$ v bode $A = (2, -6, -3)$.

Riešenie. Pretože funkcia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$ je spojitá a má spojité parciálne derivácie každého rádu v celom priestore E_3 a $F'_z(A) = (2z)_A = -6 \neq 0$, existuje podľa vety 2 funkcia daná implicitne touto rovnicou a bodom A. Graf tejto funkcie je časť guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ so stredom $S = (0, 0, 0)$ a polomerom $r = 7$. Pretože je

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A = (2x)_A = 4, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A = (2y)_A = -12,$$

pre dotykovú rovinu ku grafu funkcie v bode A dostaneme

$$4(x - 2) - 12(y + 6) - 6(z + 3) = 0$$

alebo

$$2x - 6y - 3z - 49 = 0.$$

396. Daná je rovnica $x^2 - y^2 - 1 = 0$. Nech $y = f(x)$, $x \in (1, \infty)$ je funkcia, ktorá vyhovuje tejto rovnici. Určte:

a) koľko je týchto funkcií,

b) koľko je takých spojitých funkcií,

c) funkciu f, ak $y(2) = 1$,

d) funkciu f, ak $y(1) = 0$.

397. Daná je rovnica $x^2 - y^2 = 0$. Nech $y = f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, je funkcia, ktorá vyhovuje tejto rovnici. Nájdite funkciu f, ak

a) $y(1) = 1$, b) $y(0) = 0$.

398. Zistite, prečo nie je rovnicou $y^2 - x = 0$ a bodom $A = (0, 0)$ určená jedna jediná implicitná funkcia. Nájdite všetky implicitné funkcie určené danou rovnicou a bodom.

V úlohách 399 a 400 vypočítajte y' a y'' v bode A, ak je funkcia určená implicitne rovnicou a bodom.

399. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$, $A = (1, 1)$.

400. $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$, $A = (0, 1)$.

V úlohách 401 a 402 vypočítajte y', y'', y''' v bode A, ak je funkcia y určená implicitne rovnicou a bodom.

401. $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$, $A = (1, 1)$.

402. $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y = 0$, $A = (2, 0)$.

403. Funkcia $f(x)$ je určená implicitne rovnicou $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ a bodom $A = (3, 3)$. Nájdite taký bod, v ktorom je $f'(x) = 0$.

V úlohách **404** až **407** nájdite deriváciu funkcie určenej implicitne rovnicou a bodom A.

404. $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0,\ a > 0, b > 0,\ A = (a, 0)$.

405. $y^3 - 4xy + x^2 = 0,\ A = (2 + \sqrt{3}, 1)$.

406. $2^y - x^2 = 0,\ A = (2, 1)$.

407. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0,\ A = (1, 0)$.

V úlohách **408** a **413** vypočítajte y' a y'' funkcie y určenej implicitne rovnicou a bodom A.

408. $x = y - 4 \sin y,\ A = (0, 0)$.

409. $x^2 - 2xy - y^2 - 16 = 0,\ A = (4, 0)$.

410. $x^y - y^x = 0,\ x > 0,\ y > 0,\ A = (1, 1)$.

411. $x - \ln y - y^2 = 0,\ A = (1, 1)$.

412. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}(y/x) = 0,\ A = (1, 0)$.

413. $\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg} y) = 0,\ A = (1 - \pi/4, 1)$.

414. Nájdite y', z', y'' a z'' v bode $A = (-2, 1, 1)$, keď sú funkcie y, z určené systémom rovníc $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 - z^3 - 10 = 0$ a bodom $A = (1, 1, -2)$.

415. Vypočítajte parciálne derivácie prvého rádu funkcie určenej implicitne rovnicou $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0$ a bodom $A = (\pi/3, \pi/2, \pi/6)$ v bode A.

416. Vypočítajte prvé a druhé parciálne derivácie funkcie určenej implicitne rovnicou $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ a bodom $A = (2, 0, 1)$ v bode A.

V úlohách **417** až **421** nájdite parciálne derivácie prvého rádu funkcie určenej implicitne rovnicou a bodom.

417. $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0,\ A = (1, 1, 1)$.

418. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0,\ A = (0, b, 0)$.

419. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a,\ A = (0, 0, a)$.

420. $e^z + x^2 y + z + 5 = 0,\ A = (1, -6, 0)$.

421. $xy + xz + yz - 1 = 0,\ A = (0, 1, 1)$.

V úlohách **422** až **424** vypočítajte prvú a druhú parciálnu deriváciu funkcie určenej implicitne rovnicou a bodom.

422. $x^2/4 + y^2/8 + z^2/16 - 1 = 0,\ A = (0, 0, 4)$.

423. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0,\ A = (0, 1, 1)$.

424. $3xyz - z^3 + 1 = 0,\ A = (0, 0, 1)$.

V úlohách **425** a **426** nájdite $\mathrm{d}f(A, X)$ a $\mathrm{d}^2 f(A, X)$, ak je funkcia $z = f(x, y)$ daná implicitne rovnicou a bodom A.

425. $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0,\ A = (6, 2, 3)$.

426. $x + y + z - \ln z - 1 = 0,\ A = (2, -e, e)$.

V úlohách **427** až **430** nájdite diferenciál funkcie určenej implicitne rovnicou a bodom.

427. $xyz - x - y - z = 0,\ A = (0, 0, 0)$.

428. $z - y e^{x/z} = 0,\ A = (0, 1, 1)$.

429. $x \sin z + y \cos z - e^z = 0$, $A = (0, 1, 0)$.

430. $x^5 + y^5 + z^5 - x - y - z = 0$, $A = (1, 1, 1)$.

V úlohách 431 a 432 vypočítajte dz, d^2z, ak je funkcia z určená implicitne rovnicou a bodom.

431. $xy + xz + yz - 1 = 0$, $A = (0, 1, 1)$.

432. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$, $A = (1, 0, 0)$.

V úlohách 433 a 434 vypočítajte z_x', z_y'.

433. $F(x - y, y - z, z - x) = 0$, kde F je diferencovateľná funkcia,

434. $F(xz, yz) = 0$, kde F je diferencovateľná funkcia

435. Nájdite $z'(x)$, $z''(x)$, ak $z = x^2 + y^2$ a funkcia $y = f(x)$ je daná implicitne rovnicou $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ a bodom $A = (1, 1)$.

V úlohách 436 až 438 nájdite lokálne extrémy funkcie určenej implicitne rovnicou a bodom A.

436. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, $A = (0, 0)$.

437. $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$, $A = (1, -1)$.

438. $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$, $A = (-1, 0)$.

439. Zistite, či funkcia určená implicitne rovnicou $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ a bodom $A = (1, 1)$ je v bode A konkávna alebo konvexná.

V úlohách 440 až 442 nájdite dotyčnicu a normálu v bode A ku grafu funkcie určenej implicitne rovnicou a bodom.

440. $xy + \ln y - 1 = 0$, $A = (1, 1)$.

441. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, $A = (1, 1)$.

442. $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, $A = (1, 2)$.

V úlohách 443 a 444 nájdite lokálne extrémy funkcie danej implicitne rovnicou a bodom.

443. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 10 = 0$, $A = (2, 0, 2 + \sqrt{6})$.

444. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 - z^2) = 0$, $A = (0, 1, -1)$.

V úlohách 445 až 448 nájdite rovnicu dotykovej roviny v bode A ku grafu funkcie, určenej rovnicou a bodom A.

445. $x^2 - y^2 + z^2 - 6 = 0$, $A = (1, 2, -3)$.

446. $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0$, $A = (1, -2, 4)$.

447. $z - y - \ln(x/z) = 0$, $A = (1, 1, 1)$.

448. $2^{x/z} + 2^{y/z} - 8 = 0$, $A = (2, 2, 1)$.

449. Nájdite dotykovú rovinu ku grafu funkcie danej implicitne rovnicou $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21 = 0$ a bodom $A = (2, 2, 1)$, ktorá je rovnobežná s rovinou $6x + 4y + z = 0$.

2. ZÁKLADY VEKTOROVEJ ANALÝZY

2,1. Vektorová funkcia skalára a vektorová funkcia viac premenných

Vektorová funkcia skalára. Nech je M množina reálnych čísiel. Funkciu $\boldsymbol{f}$, ktorá každému číslu t z množiny M priraďuje vektor $\boldsymbol{f}(t)$, nazývame *vektorovou funkciou jednej reálnej premennej* alebo *vektorovou funkciou skalára*. Množina M sa nazýva *oborom definície* funkcie $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{f}(t)$ *hodnotou* vektorovej funkcie skalára $\boldsymbol{f}$ v čísle t.

Množinu všetkých koncových bodov vektorov $\boldsymbol{f}(t)$, kde $t \in M$ a začiatočné body vektorov $\boldsymbol{f}(t)$ sú v začiatku daného súradnicového systému nazývame *grafom* alebo *hodografom* vektorovej funkcie skalára $\boldsymbol{f}$.

Ak obor definície M vektorovej funkcie skalára je množina všetkých prirodzených čísiel, tak vektorovú funkciu skalára nazývame postupnosťou vektorov a označujeme ju

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \ldots\} = \{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Vektor $\boldsymbol{a}$ je limitou postupnosti vektorov $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak platí

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| = 0.$$

Postupnosť vektorov, ktorá má limitu, nazýva sa *konvergentná*, postupnosť vektorov, ktorá nemá limitu, nazýva sa *divergentná*.

Poznámka 1. Pre postupnosti vektorov možno zaviesť analogické pojmy a dokázať analogické vety ako pre postupnosti čísiel. Napr. pojem vybranej postupnosti, ohraničenej postupnosti, vety o súčte, rozdiele, súčine atď.

Veta 1. Nech pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore $\boldsymbol{a}_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ pre $n = 1, 2, \ldots$ a $\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ vtedy a len vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Analogická veta platí aj pre postupnosť vektorov v rovine.

Príklad 1. Majme pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore postupnosť vektorov $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde je $\boldsymbol{a}_n = \left\{\dfrac{2n+1}{n}, \dfrac{1}{3^n}, \dfrac{n+1}{n}\right\}$, pre $n = 1, 2, \ldots$. Vypočítajme limitu danej postupnosti.

Riešenie. Pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

podľa vety 1 je limita danej postupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \{2, 0, 1\}$.

Limita a spojitosť vektorovej funkcie skalára. Nech $\boldsymbol{f}$ je vektorová funkcia skalára definovaná v okolí čísla t_0, pričom v čísle t_0 prípadne nemusí byť definovaná. Hovoríme, že vektor $\boldsymbol{a}$ je limitou vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}$ v čísle t_0, ak pre každú postupnosť $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ čísiel rôznych od t_0 z oboru definície funkcie $\boldsymbol{f}$, ktorá konvergujé k číslu t_0, platí

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(t_n) = \boldsymbol{a}.$$

Označujeme ju $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t)$ a platí $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{a}$.

Veta 2. Vektor $\boldsymbol{a}$ je limitou vektorovej funkcie skalára $\boldsymbol{f}$ v čísle t_0 vtedy a len vtedy, ak k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta(\varepsilon) > 0$ také, že pre každé t, pre ktoré platí $0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, je

$$|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

Vektorovú funkciu skalára $\boldsymbol{f}$ nazývame *spojitou* v čísle t_0, ak platí

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(t_0).$$

Ak je funkcia $\boldsymbol{f}$ spojitá v každom čísle množiny M, hovoríme, že je spojitá na množine M.

Deriváciou vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}$ v čísle t_0 nazývame limitu

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{t - t_0}.$$

Označujeme ju $\boldsymbol{f}'(t_0)$ alebo $\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}\right]_{t=t_0}$ a platí

$$\boldsymbol{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{t - t_0}.$$

Vyššie derivácie vektorovej funkcie skalára zavádzame podobne ako vyššie derivácie funkcie jednej premennej.

Vektorovú funkciu skalára $\boldsymbol{f}$ nazývame *diferencovateľnou* v čísle t_0, ak existuje taký vektor $\boldsymbol{a}$ a taká vektorová funkcia skalára $\boldsymbol{\omega}$ spojitá v t_0, pre ktorú $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{o}$, t. j. $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{o}$, že platí

$$\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0) = (t - t_0)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega}(t)(t - t_0).$$

Vektor $(t - t_0)\boldsymbol{a}$ nazývame *diferenciálom* vektorovej funkcie skalára $\boldsymbol{f}$ v čísle t_0 pre prírastok $t - t_0$. Označujeme ho $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t_0)$.

Veta 3. Funkcia $\boldsymbol{f}$ má v čísle t_0 diferenciál vtedy a len vtedy, keď má v čísle t_0 deriváciu a platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{f}'(t_0)(t - t_0) = \boldsymbol{f}'(t_0)\,\mathrm{d}t.$$

Diferenciály vyšších rádov zavádzame podobne ako diferenciály vyšších rádov funkcie jednej premennej.

Ak v priestore zvolíme pravouhlý súradnicový systém, potom pre vektorovú funkciu $\boldsymbol{f}$ platí

$$\boldsymbol{f}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},$$

čiže

$$\boldsymbol{f}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\},$$

kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory. Funkciu $x(t)$ nazývame *prvou zložkou*, funkciu $y(t)$ *druhou zložkou* a funkciu $z(t)$ *treťou zložkou* vektorovej funkcie skalára $\boldsymbol{f}$.

Podobne zavádzame zložky vektorovej funkcie skalára v rovine.

Veta 4. Nech pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme $\boldsymbol{f}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$, potom:

1. funkcia $\boldsymbol{f}$ má v čísle t_0 limitu vtedy a len vtedy, keď v čísle t_0 majú limity funkcie $x(t), y(t), z(t)$ a platí

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\,\boldsymbol{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\,\boldsymbol{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\,\boldsymbol{k},$$

2. funkcia $\boldsymbol{f}$ je na množine M spojitá vtedy a len vtedy, keď sú na množine M spojité funkcie $x(t), y(t), z(t)$;

3. funkcia $\boldsymbol{f}$ má v čísle t_0 deriváciu vtedy a len vtedy, keď majú v čísle t_0 deriváciu funkcie $x(t), y(t)$ a $z(t)$ a platí

$$\boldsymbol{f}'(t_0) = x'(t_0)\,\boldsymbol{i} + y'(t_0)\,\boldsymbol{j} + z'(t_0)\,\boldsymbol{k}.$$

Analogická veta platí aj pre vektorovú funkciu skalára v rovine.

Príklad 2. Nech pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme funkcia $\boldsymbol{f}(t) = t^2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$. Vypočítajme derivácie všetkých rádov danej funkcie.

Riešenie. Funkcie t^2, 5, e^t majú derivácie všetkých rádov. Platí:

$$(t^2)' = 2t,\ (t^2)'' = 2,\ (t^2)^{(n)} = 0 \text{ pre prirodzené číslo } n > 2,$$
$$(5)^{(n)} = 0, \text{ pre každé prirodzené číslo } n,$$
$$(e^t)^{(n)} = e^t, \text{ pre každé prirodzené číslo } n.$$

Podľa vety 4 platí:

$$f'(t) = 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{k},$$
$$f''(t) = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{k},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(t) = e^t\mathbf{k}, \text{ pre } n > 2.$$

Operácie s vektorovými funkciami skalára. Nech $\boldsymbol{f}$ je vektorová funkcia skalára s oborom definície M, $\boldsymbol{g}$ je vektorová funkcia skalára s oborom definície N a nech $P = M \cap N$. Absolútna hodnota funkcie $|\boldsymbol{f}|$, súčet funkcií $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$, rozdiel funkcií $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}$ zavádzame analogicky ako pri funkcii jednej premennej.

Súčinom $\alpha(t)\,\boldsymbol{f}$ funkcie $\alpha(t)$ definovanej na množine N' a funkcie $\boldsymbol{f}$ rozumieme takú vektorovú funkciu **skalára** $\boldsymbol{v}$ definovanú na $P' = M \cap N'$, že pre každé $t_0 \in P'$ platí: $\boldsymbol{v}(t_0) = \alpha(t_0)\,\boldsymbol{f}(t_0)$.

Skalárnym súčinom $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ funkcií $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ nazývame takú reálnu funkciu $h(t)$, definovanú na P, že pre každé $t_0 \in P$ platí:

$$h(t_0) = \boldsymbol{f}(t_0) \cdot \boldsymbol{g}(t_0).$$

Vektorovým súčinom $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ funkcií $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ rozumieme takú vektorovú funkciu $\boldsymbol{v}$, definovanú na P, že pre každé $t_0 \in P$ platí: $\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{f}(t_0) \times \boldsymbol{g}(t_0)$.

Podobne zavádzame zmiešaný súčin troch vektorových funkcií skalára.

Veta 5. Nech funkcie $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\alpha(t)$ majú v čísle t_0 limity. Potom aj funkcie $|\boldsymbol{f}|$, $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ a $\alpha(t)\,\boldsymbol{f}$ majú v čísle t_0 limity a platí:

$$\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{f}(t)| = |\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t)|,$$
$$\lim_{t\to t_0} [\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t)] = \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t) \pm \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{g}(t),$$
$$\lim_{t\to t_0} [\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t)] = \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t) \cdot \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{g}(t),$$
$$\lim_{t\to t_0} [\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t)] = \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t) \times \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{g}(t),$$
$$\lim_{t\to t_0} [\alpha(t)\,\boldsymbol{f}(t)] = [\lim_{t\to t_0} \alpha(t)]\,[\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t)].$$

Veta 6. Ak vektorové funkcie **skalára** $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ a $\alpha(t)$ sú spojité funkcie v čísle t_0, tak aj funkcie $|\boldsymbol{f}|$, $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ a $\alpha(t)\,\boldsymbol{f}$ sú spojité v čísle t_0.

Veta 7. Nech funkcie $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ a $\alpha(t)$ majú na množine M derivácie. Potom na množine M majú derivácie aj funkcie $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$, $\alpha(t)\,\boldsymbol{f}$ a platí:

$$[\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t)]' = \boldsymbol{f}'(t) \pm \boldsymbol{g}'(t),$$
$$[\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t)]' = \boldsymbol{f}'(t) \cdot \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}'(t),$$
$$[\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t)]' = \boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}'(t),$$
$$[\alpha(t)\,\boldsymbol{f}(t)]' = \alpha'(t)\,\boldsymbol{f}(t) + \alpha(t)\,\boldsymbol{f}'(t).$$

Veta 8. Nech $\varphi(u)$ má v čísle u_0 deriváciu. Nech vektorová funkcia skalára $\boldsymbol{f}(t)$ má v čísle $\varphi(u_0)$ deriváciu. Potom zložená vektorová funkcia skalára $\boldsymbol{f}[\varphi(u)]$ má v čísle u_0 deriváciu a platí

$$\boldsymbol{f}[\varphi(u)]' = \boldsymbol{f}'[\varphi(u_0)] \cdot \varphi'(u_0).$$

Príklad 8. Vypočítajme $[\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t)]'$ a $[\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t)]'$ v čísle $t_0 = 0$, ak pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme je $\boldsymbol{f}(t) = t^2\boldsymbol{i} + \sin 2t\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{g}(t) = (t^3 + 2)\,\boldsymbol{i} + e^{3t}\boldsymbol{j}$.

Riešenie. Pre $t = 0$ platí $\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{g}(0) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Počítajme $\boldsymbol{f}'(t)$, $\boldsymbol{g}'(t)$. Máme $\boldsymbol{f}'(t) = 2t\boldsymbol{i} + 2\cos 2t\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{g}'(t) = 3t^2\boldsymbol{i} + 3\,e^{3t}\boldsymbol{j}$. Pre $t = 0$ dostaneme: $\boldsymbol{f}'(0) = 2\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{g}'(0) = 3\boldsymbol{j}$. Podľa vety 7 platí:

$$[\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}]'_{t=0} = 2\boldsymbol{j} \cdot (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{o} \cdot 3\boldsymbol{j} = 2,$$
$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})'_{t=0} = 2\boldsymbol{j} \times (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{o} \times 3\boldsymbol{j} = -4\boldsymbol{k}.$$

Neurčitý a určitý integrál vektorovej funkcie skalárneho argumentu. Funkcia $F(t)$ sa nazýva *primitívna funkcia* k funkcii $f(t)$ v intervale (α,β), ak pre všetky $t \in (\alpha,\beta)$ je $F(t)' = f(t)$.

Ak je $\boldsymbol{F}(t)$ primitívna vektorová funkcia skalárneho argumentu k vektorovej funkcii skalárneho argumentu $\boldsymbol{f}(t)$ v intervale (α, β), potom každá primitívna funkcia k funkcii $\boldsymbol{f}(t)$ v intervale (α, β) je $\boldsymbol{F}(t) + \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{c}$ je ľubovoľný vektor.

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $\boldsymbol{f}$ v intervale (α, β) nazývame *neurčitým integrálom funkcie* $\boldsymbol{f}$ v intervale (α, β). Označujeme ho $\int \boldsymbol{f}(t)\, dt$ a platí

$$\int \boldsymbol{f}(t)\, dt = \boldsymbol{F}(t) + \boldsymbol{c}.$$

Veta 9. Nech v pravouhlom súradnicovom systéme funkcia $\boldsymbol{f}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$. Funkcia $\boldsymbol{f}$ má neurčitý integrál vtedy a len vtedy, ak existuje $\int x(t)\, dt$, $\int y(t)\, dt$, $\int z(t)\, dt$ a platí

$$\int \boldsymbol{f}(t)\, dt = \int x(t)\, dt\boldsymbol{i} + \int y(t)\, dt\boldsymbol{j} + \int z(t)\, dt\boldsymbol{k}.$$

Príklad 4. Vypočítajme integrál z vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}$, pre ktorú v intervale $(-\infty, \infty)$ platí

$$\boldsymbol{f}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \frac{1}{1+t^2}\boldsymbol{j} + 4t^3\boldsymbol{k}.$$

Riešenie. Pretože je

$$\int \cos t\, dt = \sin t + c_1, \quad \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg} t + c_2, \quad \int 4t^3\, dt = t^4 + c_3,$$

pre každé t a ľubovoľné konštanty c_1, c_2, c_3, podľa vety 9 platí

$$\int \left(\cos t\boldsymbol{i} + \frac{1}{1+t^2}\boldsymbol{j} + 4t^3\boldsymbol{k}\right) dt = \sin t\boldsymbol{i} + \operatorname{arctg} t\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c},$$

kde $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ a c_1, c_2, c_3, sú ľubovoľné čísla.

Podobne ako pre funkciu jednej reálnej premennej zavádzame pojem určitého integrálu z vektorovej funkcie skalára.

Veta 10. Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ má primitívnu funkciu $\boldsymbol{F}$ v intervale (α, β) a nech funkcia $\boldsymbol{F}$ je spojitá v intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom platí

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(t)\, dt = \boldsymbol{F}(\beta) - \boldsymbol{F}(\alpha).$$

450. Napíšte a znázornite prvých päť členov postupnosti $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorov, ak

a) $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{1}{n}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$,

b) $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{1}{2^n}\boldsymbol{i} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}\boldsymbol{j} + \dfrac{n}{n+1}\boldsymbol{k}$,

c) $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{1}{3n+1}\boldsymbol{i} + \sqrt[n]{n}\,\boldsymbol{j} + n^2\boldsymbol{k}$.

451. Z postupnosti vektorov $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ utvorte vybranú postupnosť vektorov pomocou postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

a) $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{i} + \dfrac{2-(-1)^n}{n}\boldsymbol{j}$, $b_n = 2n + 1$,

b) $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{1}{2+3/n}\boldsymbol{i} + \dfrac{4n+1}{3-2n}\boldsymbol{j} + \dfrac{2^n+3}{1-2\cdot 2^n}\boldsymbol{k}$, $b_n = 2^n$.

452. Dokážte, že vektor $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ je limitou postupnosti vektorov

$$\left\{\left(3 + \frac{1}{n}\right)\boldsymbol{i} + \frac{4n + 2}{3 - n}\boldsymbol{j} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\boldsymbol{k}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

453. Nájdite limitu postupnosti vektorov $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

a) $\boldsymbol{a}_n = \left(\dfrac{n + 1}{n}\right)^n \boldsymbol{i} + \dfrac{n}{n + 1}\boldsymbol{j}$,

b) $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{(n + 1)^2}{2n^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}\boldsymbol{j} + \dfrac{n + 1}{n}\boldsymbol{k}$,

c) $\boldsymbol{a}_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{4n + 3}\boldsymbol{i} + 3^{2 + 1/n}\boldsymbol{j} + \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}}\,\boldsymbol{k}$,

d) $\boldsymbol{a}_n = \sqrt[2n - 1]{9^{3n}}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{2 + (-1)^n}{n}\boldsymbol{j} + \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)\sqrt{\dfrac{n}{4n + 1}}\,\boldsymbol{k}$,

e) $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \dfrac{\boldsymbol{a}_{n-1}}{2}$, $n > 1$, kde $\boldsymbol{a} = \{1, 1, 1\}$ a $\boldsymbol{a}_1 = \{1/2, 1/2, 1/2\}$,

f) $\boldsymbol{a}_n = 2n\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{4}(1 + (-1)^n n]\boldsymbol{j}$.

454. Znázornite vektorovú funkciu skalárneho argumentu $\boldsymbol{f}$, ak
a) $\boldsymbol{f} = t\boldsymbol{i} + (3t + 5)\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$,
b) $\boldsymbol{f} = t\boldsymbol{i} + (3t + 5)\boldsymbol{j}$, $t \in (-\infty, \infty)$,
c) $\boldsymbol{f} = 2\cos t\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$,
d) $\boldsymbol{f} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, \infty)$,
e) $\boldsymbol{f} = (1 + t)\boldsymbol{i} + (-2 + 2t)\boldsymbol{j} + (3 + t)\boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0, \infty)$,
f) $\boldsymbol{f} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$, $t \in (-\infty, \infty)$.

455. Daná je vektorová funkcia skalára $\boldsymbol{f}$. Nájdite jej obor definície, ak
a) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{i}/(1 - t^2) + \boldsymbol{j}/t(1 - t) + \boldsymbol{k}/(1 + t^2)$,
b) $\boldsymbol{f} = \sqrt{5 + 2t}\,\boldsymbol{i} + \sqrt{-2t}\,\boldsymbol{j} + \sqrt{1 - |t|}\,\boldsymbol{k}$,
c) $\boldsymbol{f} = \arcsin(t - 2)\boldsymbol{i} + \ln(t^2 - 4)\boldsymbol{j}$,
d) $\boldsymbol{f} = \sqrt{t^2 - 4t + 3}\,\boldsymbol{i} + \arcsin\dfrac{t - 3}{2}\boldsymbol{j} - \ln(4 - t)\boldsymbol{k}$.

456. Funkcia $\boldsymbol{f}(t) = 2\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\,\boldsymbol{k}$ je definovaná v intervale $(0, \infty)$ a funkcia $\boldsymbol{g}(t) = (t^3 + 1)\boldsymbol{i} + (2 - t)\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\,t^2\boldsymbol{k}$ je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$. Vypočítajte:
a) $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ pre $t = 1$, $t = -1$,
b) $5\boldsymbol{g}$ pre $t = 0$,
c) $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ pre $t = 2$,
d) $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ pre $t = 4$,
e) $\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{f}$.

457. Vypočítajte absolútnu hodnotu funkcie $\boldsymbol{f}(t)$, ak pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme je:
a) $\boldsymbol{f}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j}$,
b) $\boldsymbol{f}(t) = (2 - t)\boldsymbol{i} + (t^2 - 3)\boldsymbol{j} + (3t - 2)\boldsymbol{k}$.

458. Nájdite limitu funkcie $\boldsymbol{f}(t)$ v danom bode t, ak:

a) $\boldsymbol{f}(t) = 3t\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{t-1}\boldsymbol{j} + \dfrac{\sin t}{t}\boldsymbol{k}, \quad t = 0,$

b) $\boldsymbol{f}(t) = 2\boldsymbol{i} + \left(1 - t\sin\dfrac{1}{t}\right)\boldsymbol{j}, \quad t = 0,$

c) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t}\boldsymbol{i} + (1 + t^{1/t})\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = -1,$

d) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{|t|}{t}\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + \sin\dfrac{1}{t}\boldsymbol{k}, \quad t = 0.$

459. Zistite, či funkcia $\boldsymbol{f}(t)$ je v bode $t = t_0$ spojitá, ak:

a) $\boldsymbol{f}(t) = (2 - t)\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t\sin t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 0,$

b) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{\sin t}{t}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 0,$

c) $\boldsymbol{f}(t) = e^{\frac{1}{t-2}}\boldsymbol{i} + (1 - t^2)\boldsymbol{j}, \quad t_0 = 2.$

460. Ako treba doplniť definíciu $\boldsymbol{f}(t)$, aby v čísle $t = 0$ bola spojitá, ak

$$\boldsymbol{f}(t) = 5t^2\boldsymbol{i} + 6\,e^t\boldsymbol{j} + \frac{\sin 2t}{t}\boldsymbol{k}.$$

461. Zistite, v ktorých bodoch nie je vektorová funkcia skalára spojitá:

a) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{t+2}{t-1}\boldsymbol{i} + e^{1/t}\boldsymbol{j},$

b) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{1}{t^2-2}\boldsymbol{i} + \sin 2t\,\boldsymbol{j} + 2^{-t}\boldsymbol{k}.$

V úlohách **462** a **463** vypočítajte $\boldsymbol{f}'(t)$.

462. a) $\boldsymbol{f}(t) = (3 - 2t)\boldsymbol{i} + (t^2 - 4)\boldsymbol{j} + (3t - 9)\boldsymbol{k},$

b) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{t-1}{t+1}\boldsymbol{i} + \dfrac{t}{1-t^2}\boldsymbol{j},$

c) $\boldsymbol{f}(t) = \sqrt{t}\,\boldsymbol{i} + \ln\,\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{k},$

d) $\boldsymbol{f}(t) = \sin^2 t\boldsymbol{i} + \mathrm{tg}\,t\boldsymbol{j}.$

463. a) $\boldsymbol{f}(t) = \sin^2 t\boldsymbol{i} + e^{\sqrt{t}}\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k},$

b) $\boldsymbol{f}(t) = \dfrac{t}{1-t^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{3}{\cos t}\boldsymbol{j} + \ln(1 - t)\boldsymbol{k},$

c) $\boldsymbol{f}(t) = \ln^2 t\boldsymbol{i} + \mathrm{arctg}\;2\,t\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{t}\boldsymbol{k},$

d) $\boldsymbol{f}(t) = 2^{2t}\boldsymbol{i} + 2^{-2t}\boldsymbol{j} + \sinh 2t\,\boldsymbol{k},$

e) $\boldsymbol{f}(t) = s^2\boldsymbol{i} + 2\cos s\,\boldsymbol{j} - 3\sin s\,\boldsymbol{k}$, pričom $s = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$

464. Dokážte, že pre diferencovateľné vektorové funkcie skaláru $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}.$$

465. Nech $\boldsymbol{f}(t) = \sin t\boldsymbol{i} - t^2\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{g}(t) = \ln t^2\,\boldsymbol{i} + 2^t\boldsymbol{j}$ pri zvolenom pravotočivom pravouhlom súradnicovom systéme. Vypočítajte:

a) $[\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)]'$, b) $[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]'$.

466. Dokážte, že $\left(\frac{1}{r}\right)' = -\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3}$, ak $\boldsymbol{r}(t)$ je diferencovateľná vektorová funkcia skalárneho argumentu.

467. Vypočítajte:

a) $\boldsymbol{f}'(t)$, ak $\boldsymbol{f}(t) = 3\cos t\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j}$,
b) $\boldsymbol{f}''(t)$, ak $\boldsymbol{f}(t) = \cos\omega t\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\omega t\sin\alpha\boldsymbol{j} + \sin\omega t\boldsymbol{k}$,
c) $\boldsymbol{f}'''(t)$, ak $\boldsymbol{f}(t) = \mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{j} + (4+t)\,\boldsymbol{k}$.

468. Vypočítajte:

a) $[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]''$, ak $\boldsymbol{f}(t) = t\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{g}(t) = -t\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j}$,
b) $[\boldsymbol{f}(t)\cdot(\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{h}(t))]''$, ak $\boldsymbol{f}(t) = \cos 3t\boldsymbol{i} - \sin 3t\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{g}(t) = \sin 3t\boldsymbol{i} + \cos 3t\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{h}(t) = 3t^4\boldsymbol{k}$.

469. Vypočítajte derivácie všetkých rádov vektorovej funkcie skalára $\boldsymbol{f}(t)$, ak:

a) $\boldsymbol{f}(t) = t^4\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$, c) $\boldsymbol{f}(t) = \frac{1+t}{1-t}\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\,\boldsymbol{j}$,

b) $\boldsymbol{f}(t) = \ln t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$, d) $\boldsymbol{f}(t) = \log_3 t\boldsymbol{i} + 2^t\boldsymbol{j} + \cos 2t\boldsymbol{k}$.

470. Vypočítajte diferenciál funkcie $\boldsymbol{f}(t)$ v bode t_0, ak:

a) $\boldsymbol{f}(t) = 2t^2\boldsymbol{i} + \sin^2\pi t\boldsymbol{j} + \mathrm{e}^{\sqrt{2t}}\,\boldsymbol{k}$, $t_0 = 2$,

b) $\boldsymbol{f}(t) = t^2\boldsymbol{i} + \frac{t+1}{t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{t+1}\boldsymbol{k}$, $t_0 = 1$,

c) $\boldsymbol{f}(t) = 2^t\boldsymbol{i} + \ln t^2\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{k}$, $t_0 = 3$.

471. Daná je diferencovateľná funkcia $\boldsymbol{r}(t)$. Nájdite derivácie funkcií:

a) $(\boldsymbol{r}^2)'$, b) $\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)'$,

c) $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)$, d) $\boldsymbol{r}(t)\cdot[\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)]$.

472. Dokážte: ak $|\boldsymbol{r}(t)| = \text{const}$, tak $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{r} = 0$. Zistite, či platí aj opačná implikácia; aký to má geometrický význam?

473. Pohyb hmotného bodu nech je daný rovnicou $\boldsymbol{r}(t) = r(\cos\omega t\boldsymbol{i} + \sin\omega t\boldsymbol{j})$. Nájdite veľkosť rýchlosti a zrýchlenia.

474. Pohyb hmotného bodu je daný rovnicou $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,e^{\omega t} + \boldsymbol{j}\,e^{-\omega t}$. Dokážte, že platí $\boldsymbol{r}'' - \omega^2\boldsymbol{r} = 0$. Vypočítajte jeho rýchlosť a zrýchlenie.

475. Vypočítajte:

a) $\int (2\sin t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\,dt$.

b) $\int \left[\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^5}\,\boldsymbol{k}\right] dt$.

c) $\int \left(\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\cos^2 t}\boldsymbol{j} + \frac{2}{1+t^2}\boldsymbol{k}\right) dt$.

d) $\int \left[\frac{1}{t-7}\boldsymbol{i} + \frac{1}{1+5t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{(3t+2)^2}\boldsymbol{k}\right] dt$.

476. Vypočítajte:

a) $\int_0^{\pi} (\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j})\,dt$,

b) $\int_0^{1} \boldsymbol{r}(t)\,dt$, kde $\boldsymbol{r}(t) = e^{2t}\boldsymbol{i} + e^{-2t}\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$.

2,2. Derivácia v smere. Gradient.

Derivácia v smere. Daná je funkcia viac premenných $f(X)$, kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a jednotkový vektor $\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$. Deriváciou funkcie $f(X)$ v bode A vo smere vektora $\boldsymbol{l}$ nazývame limitu

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(A + t\boldsymbol{l}) - f(A)}{t} \tag{1}$$

a označujeme $\frac{df(A)}{d\boldsymbol{l}}$.

Veta 1. Ak je f diferencovateľná funkcia dvoch premenných $f(x, y)$ v bode A a vektor $\boldsymbol{l}$ zviera v pravouhlom súradnicovom systéme v rovine s osou o_x uhol α, $\boldsymbol{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, potom

$$\frac{df(A)}{d\boldsymbol{l}} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\sin\alpha. \tag{2}$$

Veta 2. Ak je f diferencovateľná funkcia troch premenných $f(x, y, z)$ v bode A a pre vektor $\boldsymbol{l}$ v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore platí $\boldsymbol{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, potom

$$\frac{df(A)}{d\boldsymbol{l}} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(A)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{3}$$

Gradient. Ak je na množine M bodov priestoru definovaná reálna funkcia $f(X)$, hovoríme o skalárnom poli. Ak je na množine M bodov priestoru definovaná funkcia $\boldsymbol{f}(X)$, hovoríme o vektorovom poli*.)

Nech je $f(X)$ diferencovateľná funkcia v bode A priestoru. Gradientom funkcie $f(X)$ v bode A nazývame vektor grad $f(A)$, pre ktorý platí

$$\operatorname{grad} f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(A)}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

*) Ak je M množina bodov roviny, potom hovoríme o rovinnom skalárnom poli resp. rovinnom vektorovom poli.

Nech je funkcia diferencovateľná na množine M. Gradientom funkcie $f(X)$ alebo *gradientom skalárneho poľa* $f(X)$ nazývame vektorovú funkciu definovanú na množine M, pre ktorú platí

$$\operatorname{grad} f(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial x}\, \mathbf{i} + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\, \mathbf{j} + \frac{\partial f(X)}{\partial z}\, \mathbf{k} \tag{5}$$

v každom bode $X \in M$*).

Veta 3. Nech je funkcia $f(X)$ diferencovateľná v bode A priestoru [roviny]. Potom pre deriváciu funkcie $f(X)$ v bode A v smere určenom jednotkovým vektorom $\mathbf{l}$ platí

$$\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\mathbf{l}} = \operatorname{grad} f(A) \,.\, \mathbf{l}, \tag{6}$$

t. j. $\dfrac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\mathbf{l}}$ je priemet vektora $\operatorname{grad} f(A)$ do smeru vektora $\mathbf{l}$.

Veta 4. Derivácia funkcie $f(X)$ v bode A v smere určenom vektorom $\mathbf{l}_1 = (\operatorname{grad} f(A))^0$**) je najväčšia a platí $|\operatorname{grad} f(A)| = \dfrac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\mathbf{l}_1}$.

Množiny bodov v priestore [rovine], pre ktoré platí $f(X) = \text{const}$, nazývame *hladinami* skalárneho poľa $f(X)$.

Veta 5. Ak vektor $\operatorname{grad} f(A) \neq \mathbf{o}$, potom tento vektor leží v normále ku hladine $f(X) = f(A)$ v bode A (pozri 3,12).

Príklad 1. Nájdime deriváciu funkcie $F(x, y, z) = x^2 - 2xyz + 3z^2$ v bode $A = (1, 0, 2)$ v smere jednotkového vektora $\mathbf{l}$ určeného vektorom $B - A$, kde $B = (3, 2, 1)$.

Riešenie. Pre vektor $B - A$ máme $B - A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Jednotkový vektor $\mathbf{l}$ je $\mathbf{l} = 2\mathbf{i}/3 + 2\mathbf{j}/3 + \mathbf{k}/3$. Podľa vzťahu (4) máme

$$\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\mathbf{l}} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\frac{2}{3} + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\frac{2}{3} - \frac{\partial f(A)}{\partial z}\frac{1}{3} =$$

$$= (2x - 2yz)_A\, 2/3 + (-2xz)_A\, 2/3 - (6z - 2xy)_A\, 1/3 =$$

$$= 4/3 - 8/3 - 12/3 = -16/3.$$

Príklad 2. Nájdime gradient rovinného skalárneho poľa, ak $f(X) = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ a určme smer najväčšej derivácie $\dfrac{\mathrm{d}fA}{\mathrm{d}\mathbf{l}_1}$ v bode $A = (2, 1)$.

Riešenie. Keďže je

$$f'_x = 3x^2 - 3y \quad \text{a} \quad f'_y = 3y^2 - 3x,$$

podľa (5) je

$$\operatorname{grad} f(X) = 3(x^2 - y)\, \mathbf{i} + 3(y^2 - x)\, \mathbf{j}.$$

Najväčšia derivácia v smere je určená vektorom $[\operatorname{grad} f(A)]^0$. Počítajme preto $\operatorname{grad} f(A)$, dostaneme

$$\operatorname{grad} f(A) = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j}.$$

Z toho vyplýva

$$\mathbf{l}_1 = [\operatorname{grad} f(A)]^0 = \{3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}\}.$$

Derivácia $\dfrac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\mathbf{l}_1}$ je najväčšia v smere danom vektorom $\mathbf{l}_1 = \{3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}\}$ a jej hodnota je

$$\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}\mathbf{l}_1} = 9\,(3/\sqrt{10}) + (-3)(-1/\sqrt{10}) = 3\sqrt{10}.$$

*) Celkom podobne je definovaný $\operatorname{grad} f(A)$, kde A je bod roviny resp. gradient rovinného skalárneho poľa. Príslušné vzorce dostaneme zo (4) a (5) vypustením člena s vektorom $\mathbf{k}$.

**) $(\operatorname{grad} f(A))^0$ je jednotkový vektor vektora $\operatorname{grad} f(A)$.

V úlohách 477 až 482 vypočítajte deriváciu v smere, ak je dané:

477. $f(X) = 3x^4 - x^2y^3 + y^2$, $A = (1, -1)$ a uhol vektora $\boldsymbol{l}$ s osou o_x je $\pi/6$ a s osou o_y $\pi/3$.

478. $f(X) = 5x^2 - 6xy + 10y^3 - 7$, $A = (0,1)$ a $\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{i}$.

479. $f(X) = 3x^2 - 6xy^4 + 11y^5$, $A = (1, 1)$ a vektor $\boldsymbol{l}$ je určený vektorom $B - A$, kde $B = (4, 5)$.

480. $f(X) = x^3 + 2xy - y^2$, $A = O$, $\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})^0$.

481. $f(X) = xy^2 + z^3 - xyz$, $A = (1, 1, 2)$ a vektor $\boldsymbol{l}$ zviera so súradnicovými osami uhly $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/3$.

482. $f(X) = 3x^3 - 4y^3 + 2z^4$, $A = (2, 2, 1)$ a vektor $\boldsymbol{l}$ je určený vektorom $B - A$, kde $B = (5, 4, 6)$.

483. Nech $f(X) = 3x^2 - 6xy + y^2$. Nájdite deriváciu v bode $A = (-1/3, -1/2)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\boldsymbol{l}$. V akom smere je táto derivácia: a) najmenšia, b) najväčšia, c) nulová.

484. Zistite, či hodnota funkcie $f(x, y, z) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ v bode $A = (1, 1, 1)$ v smere vektora $8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ sa zväčšuje alebo zmenšuje.

485. Nech $f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$. Vypočítajte: a) deriváciu funkcie f v bode A v smere ľubovoľného jednotkového vektora, b) $\operatorname{grad} f(A)$, c) $|\operatorname{grad} f(A)|$, d) $[\operatorname{grad} f(A)]^0$, kde $A = \left(1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4}\right)$.

V úlohách 486 až 488 nájdite $\operatorname{grad} f(A)$.

486. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = (2, 3)$.

487. $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A = (1, 2)$.

488. $f(x, y, z) = x/(x^2 + y^2 + z^2)$, $A = (1, 2, 2)$.

489. Nájdite gradient funkcie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ v bode $A = (1, -1, 2)$. Určte body, v ktorých je $\operatorname{grad} f(A)$ kolmý na os o_x a body, v ktorých sa rovná $\boldsymbol{o}$.

490. V rovine nájdite body, v ktorých sa gradient funkcie $z = \ln[(1 + xy)/x]$ rovná $(-16/9)\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

491. V rovine nájdite body, v ktorých sa $|\operatorname{grad} f(A)|$ z funkcie $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ rovná 2.

492. Vypočítajte pomocou $\operatorname{grad} f(A)$ deriváciu funkcie $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ v bode $A = (1, 1, 1)$ v smere vektora $2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

493. Nájdite uhol gradientov funkcií $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ a $g(x, y, z) = \arcsin[x/(x + y)]$ v bode $A = \left(1, 1, \sqrt{7}\right)$.

V úlohách 494 až 504 nájdite gradienty daných skalárnych polí. Pritom $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu X a $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ konštantné vektory.

494. $f(x, y) = 10x^2y - 3x^3y^2 + y^5$.

495. $f(x, y, z) = \arcsin\left(z/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

496. $f(X) = \boldsymbol{r}^2$.

497. $f(X) = r^5$.

498. $f(X) = 1/r$.

499. $f(X) = 1/r^2$.

500. $f(X) = \ln r$.

501. $f(X) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}$.

502. $f(X) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})$.

503. $f(X) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})$.

504. $f(X) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})/(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r})$.

505. Dokážte, že platí:

a) $\operatorname{grad} [f(X) + g(X)] = \operatorname{grad} f(X) + \operatorname{grad} g(X)$,
b) $\operatorname{grad} [f(X) + C] = \operatorname{grad} f(X)$,
c) $\operatorname{grad} Cf(X) = C \operatorname{grad} f(X)$,
d) $\operatorname{grad} f(X)\, g(X) = f(X) \operatorname{grad} g(X) + g(X) \operatorname{grad} f(X)$,
e) $\operatorname{grad} [f(X)]^n = n[f(X)]^{n-1} \operatorname{grad} f(X)$,
f) $\operatorname{grad} f[g(X)] = f'[g(X)] \operatorname{grad} g(X)$,

kde f, g sú diferencovateľné funkcie na množine M a C je konštanta.

V úlohách **506** a **507** nájdite hladiny daného skalárneho poľa.

506. $f(x, y) = (2x - y + 1)/x^2$.

507. $f(X) = \varrho(A, X) + \varrho(B, X)$, kde A, B sú dané rôzne body priestoru.

2,3. Divergencia. Rotácia

Majme pri zvolenom pravotočivom pravouhlom súradnicovom systéme vektorovú funkciu troch premenných

$$\boldsymbol{f}(X) = f_1(X)\,\boldsymbol{i} + f_2(X)\,\boldsymbol{j} + f_3(X)\,\boldsymbol{k},$$

pričom funkcie $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$, $X = (x, y, z)$ majú parciálne derivácie na nejakej množine M priestoru E_3.

Divergenciou vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}(X)$ nazývame funkciu

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{1}$$

Rotáciou vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}(X)$ nazývame vektorovú funkciu

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

čo môžeme symbolicky v tvare determinantu napísať

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

Vo vektorovej analýze používa sa operátor nabla *(Hamiltonov operátor)*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Ak operátor ∇ považujeme za vektor so zložkami $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ a pod súčinom zložky s funkciou rozumieme deriváciu funkcie, napr. $\dfrac{\partial}{\partial x} \cdot f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, môžeme vyjadriť $\operatorname{grad} f(X)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(X)$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(X)$ takto

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla f,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{f},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial_x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \boldsymbol{k} = \nabla \times \boldsymbol{f}.$$

Okrem operátora nabla ∇ používa sa *Laplaceov operátor* delta

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Symbol $\Delta f(X)$ značí

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Laplaceov operátor možno formálne vyjadriť

$$\Delta = \nabla . \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Príklad. Nech $\boldsymbol{v}(X) = v_1(X)\,\boldsymbol{i} + v_2(X)\,\boldsymbol{j} + v_3(X)\,\boldsymbol{k}$, $X = (x, y, z)$ je vektorová funkcia troch premenných, ktorá má spojité druhé parciálne derivácie. Dokážme, že platí

$$\operatorname{div} [\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(X)] = 0.$$

Riešenie. Podľa (2) máme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(X) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}$$

a podľa (1)

$$\operatorname{div} [\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(X)] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} = 0.$$

Pritom sme použili vetu 2 a 3 z článku 1,7.

Poznámka. Formálne pomocou operátora ∇ možno tento príklad riešiť aj takto:

$$\operatorname{div} [\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(X)] = \nabla . (\nabla \times \boldsymbol{v}) = (\nabla \times \nabla) . \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} . \boldsymbol{v} = 0$$

508. Vypočítajte div $\boldsymbol{f}$ a rot $\boldsymbol{f}$ funkcie $\boldsymbol{f}(X)$ v bode A, ak:

a) $\boldsymbol{f}(X) = xy\,\boldsymbol{i} + (x^2 - z^2)\,\boldsymbol{j} + \dfrac{y}{(x + z)}\,\boldsymbol{k}$, $A = (1, 0, 2)$,

b) $\boldsymbol{f}(X) = \dfrac{x}{y}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{y}{z}\,\boldsymbol{j} + \dfrac{z}{x}\,\boldsymbol{k}$, $A = (1, 1, 1)$,

c) $\boldsymbol{f}(X) = e^{xyz}\,\boldsymbol{i} + \sin x . \sin y . \sin z\,\boldsymbol{j} + \ln (x + y + z)\,\boldsymbol{k}$, $A = (0, 2, -1)$.

509. Nájdite divergenciu a rotáciu vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}(X)$, ak:

a) $\boldsymbol{f}(X) = xy^2z^3(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$,

b) $\boldsymbol{f}(X) = (y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

V úlohách 510 až 529, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu X, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú konštantné vektory, α je číslo a f je diferencovateľná funkcia, vypočítajte:

510. div $\boldsymbol{r}$.

511. div $\alpha\boldsymbol{r}$.

512. div $(\boldsymbol{r}/r)$.

513. div $[f(r)\,\boldsymbol{r}]$.

514. div $[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b})]$.

515. div $[r(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})]$.

516. rot $\boldsymbol{r}$.

517. rot $[f(r)\,\boldsymbol{r}]$.

518. rot $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$.
519. rot $(\boldsymbol{a} \ln r)$.
520. rot $(\boldsymbol{a} r^n)$.
521. grad div $(r^n \boldsymbol{r})$.
522. grad div $(r^2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}))$.
523. grad div $(\boldsymbol{a} \ln r)$.
524. $\Delta \ln r$.
525. Δr^n.
526. $\Delta[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) r^n]$.*)
527. $\Delta(\boldsymbol{a} \ln r)$
528. $\Delta\Delta(\ln r)$.
529. $\Delta\Delta(r(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}))$.

Nech $\varphi(X)$, $\psi(X)$ sú funkcie a $\boldsymbol{f}(X)$, $\boldsymbol{g}(X)$ vektorové funkcie viac premenných. V úlohách **530** až **538** dokážte:

530. $\operatorname{div} (\varphi \boldsymbol{f}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{grad} \varphi$.
531. $\operatorname{div} (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{g}$.
532. $\operatorname{rot} (\varphi \boldsymbol{f}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \times \operatorname{grad} \varphi)$.
533. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{o}$.
534. $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$.
535. $\Delta \boldsymbol{f} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{f} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.
536. $\Delta(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \Delta \boldsymbol{f} + 2 \operatorname{div} \boldsymbol{f}$.
537. $\Delta(\varphi \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \Delta \varphi + 2 \operatorname{grad} \varphi$.
538. $\operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \varphi \Delta \psi$.

*) Ak vektorová funkcia $\boldsymbol{f}(X) = f_1(X)\,\boldsymbol{i} + f_2(X)\,\boldsymbol{j} + f_3(X)\,\boldsymbol{k}$, potom symbol $\Delta \boldsymbol{f}(X)$ značí

$$\Delta \boldsymbol{f}(X) = [\Delta f_1(X)]\,\boldsymbol{i} + [\Delta f_2(X)]\,\boldsymbol{j} + [\Delta f_3(X)]\,\boldsymbol{k}.$$

3. ZÁKLADY DIFERENCIÁLNEJ GEOMETRIE

3,1. Krivky a ich rovnice

Majme vektorovú funkciu skalára $r(t)$ spojitú a jedno jednoznačnú na intervale $I = \langle \alpha, \beta \rangle$. Množinu všetkých bodov $M = O + r(t)$ v rovine [v priestore], kde O je začiatok súradnicového systému, nazývame *jednoduchým oblúkom*.

Dva jednoduché oblúky nazývame *spojenými*, ak aspoň jeden koncový bod jedného oblúka sa zhoduje s koncovým bodom druhého oblúka.

Krivkou nazývame takú množinu K bodov v rovine [priestore], ktorá je alebo jednoduchým oblúkom, alebo sa skladá z konečného počtu, príp. z postupností jednoduchých oblúkov navzájom pospájaných. Ak množina K leží v rovine [priestore], potom hovoríme o krivke v rovine [priestore].

Krivka v rovine. Ak je rovinná krivka K daná pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine vektorovou funkciou skalára

$$r(t) = \varphi(t)\, i + \psi(t)\, j, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

ktorá je na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitá, potom rovnicu

$$u = r(t) \tag{1}$$

nazývame *parametrickou rovnicou krivky K*.

Nech $u = xi + yj$, potom v zložkách parametrické rovnice krivky K sú

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \tag{2}$$

kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ sú spojité funkcie na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Ak majú rovnice (2) tvar

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= f(t), \end{aligned}$$

kde f je spojitá funkcia na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$, potom je krivka K daná rovnicou

$$y = f(x). \tag{3}$$

Ak je krivka K v rovine daná pri zvolenom polárnom súradnicovom systéme vektorovou funkciou skalára

$$r(\varphi) = f(\varphi)\, e, \qquad \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

kde funkcia $f(\varphi)$ je na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitá, pričom polpriamka určená jednotkovým vektorom e so začiatkom v bode O zviera s polárnou osou uhol φ, potom rovnicu

$$\rho = r(\varphi) \tag{4}$$

nazývame *rovnicou krivky K v polárnom súradnicovom systéme:*

Ak $\rho = f(\varphi)\, e$, potom v zložkách rovnica krivky K v polárnom súradnicovom systéme je

$$\varrho = f(\varphi). \tag{5}$$

Poznámka 1. Parametrické rovnice krivky K danej v polárnom súradnicovom systéme rovnicou $\varrho = f(\varphi)$ sú v pravouhlom súradnicovom systéme

$$x = f(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y = f(\varphi) \sin \varphi, \tag{6}$$

$\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pričom súradnicové systémy majú spoločný začiatok, kladná časť osi o_x je určená polárnou osou a kladná časť osi o_y polpriamkou $\varphi = \pi/2$.

Nech má funkcia $F(x, y)$ spojité parciálne derivácie $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ na oblasti Ω a nech existuje bod $A = (x_0, y_0)$ z oblasti Ω, pre ktorý platí $F(x_0, y_0) = 0$, pričom aspoň jedna z parciálnych derivácií F'_x, F'_y v bode A je rôzna od nuly, potom množina K všetkých bodov $M = (x, y)$, ktorých súradnice sú riešením rovnice

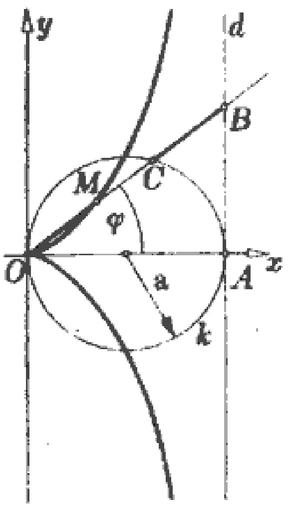
$$F(x, y) = 0, \tag{7}$$

je krivka. Rovnicu (7) nazývame *rovnicou implicitne danej krivky K*.

Príklad 1. V rovine je daná kružnica k s polomerom a a jeden jej bod A. V bode A zostrojme dotyčnicu d ku kružnici k. Nech bod $C \neq O$, kde O je druhý koncový bod priemeru kružnice k určeného bodom A, je ľubovoľný bod kružnice k. Na polpriamke OC zostrojme bod M, pre ktorý platí

$$\varrho(O, M) = \varrho(C, B),$$

kde B je priesečník tejto polpriamky s dotyčnicou d (*obr. 5*). Zistime, či množina všetkých bodov M takto zostrojených je krivka a nájdime jej parametrické rovnice.



Obr. 5

Riešenie. Nech $\mathbf{r} = M - O$. Z konštrukcie bodu M vyplýva $\mathbf{r} = B - C$. Z toho je

$$M = O + \mathbf{r} = O + (B - C).$$

Zvoľme pravouhlý súradnicový systém v rovine tak, ako je na *obr. 5* a nech $y_B = t$, kde t je ľubovoľné reálne číslo. Potom $A = (2a, 0)$ a $B = (2a, t)$. Body M a C ležia na polpriamke OB, ktorá má rovnicu

$$X = O + (B - O)\, u, \quad u \geqq 0,$$

čiže

$$X = O + (2a\mathbf{i} + t\mathbf{j})\, u.$$

Bod C leží na kružnici nad priemerom OA, preto $\sphericalangle\, OCA = 90°$ a vektory $C - O$, $C - A$ sú navzájom kolmé a platí

$$(C - A) \cdot (C - O) = 0,$$

Pretože platí

$$C = O + (2a\mathbf{i} + t\mathbf{j})\, u_C,$$

kde $u_C \neq 0$ je parameter bodu C, dostaneme

$$C - O = 2au_C\mathbf{i} + tu_C\mathbf{j}$$

a

$$C - A = (C - O) - (A - O) = 2au_C\mathbf{i} + tu_C\mathbf{j} - 2a\mathbf{i} =$$

$$= 2a(u_C - 1)\,\mathbf{i} + tu_C\mathbf{j}.$$

Z podmienky kolmosti

$$(C - A) \cdot (C - O) = 0$$

vyplýva

$$[2a(u_C - 1)\,\mathbf{i} + tu_C\mathbf{j}] \cdot (2au_C\mathbf{i} + tu_C\mathbf{j}) = 0,$$

$$4a^2(u_C - 1)\, u_C + t^2u_C^2 = 0.$$

Keďže $u_C \neq 0$, máme

$$u_C = \frac{4a^2}{4a^2 + t^2},$$

čiže

$$C = O + \frac{(2ai + tj)}{4a^2 + t^2}\, 4a^2.$$

Pre bod M platí

$$M = O + (B - C) = O + 2a\left(1 - \frac{4a^2}{4a^2 + t^2}\right) i + t\left(1 - \frac{4a^2}{4a^2 + t^2}\right) j$$

a

$$M = O + \left(\frac{2at^2}{4a^2 + t^2}\, i + \frac{t^3}{4a^2 + t^2}\, j\right), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Pretože vektorová funkcia $r(t) = \dfrac{t^2}{4a^2 + t^2}\,(2ai + tj)$ je spojitá a jednojednoznačná v intervale $(-\infty, \infty)$, množina K je krivka. Táto krivka sa nazýva *Dioklesova kisoida*. Jej parametrické rovnice sú

$$x = \frac{2at^2}{4a^2 + t^2}, \qquad y = \frac{t^3}{4a^2 + t^2}, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Vylúčime parameter t, dostaneme

a

$$xt - 2ay = 0$$

$$t = \frac{2ay}{x}, \quad x \neq 0.$$

Po dosadení do jednej z parametrických rovníc máme

$$x^3 - y^2(2a - x) = 0,$$

čo je rovnica Dioklesovej kisoidy v implicitnom tvare.

Polárne rovnice Dioklesovej kisoidy dostaneme najjednoduchšie vtedy, ak v polárnom súradnicovom systéme zvolíme za začiatok bod O a polárnu os v polpriamke OA. Položme $M = (\varrho, \varphi)$, potom z pravouhlých trojuholníkov OAB resp. OCA vyplýva

$$\varrho_B = \frac{2a}{\cos\varphi}, \quad \varrho_C = 2a\cos\varphi$$

a

$$\varrho = \varrho_B - \varrho_C = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = 2a \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi,$$

čiže

$$\varrho = 2a \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi,$$

kde $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Krivka v priestore. Ak je krivka K daná pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme vektorovou funkciou skalára

$$r(t) = \varphi(t)\, i + \psi(t)\, j + \chi(t)\, k, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

ktorá je na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitá, potom rovnicu

$$u = r(t) \tag{8}$$

nazývame *parametrickou rovnicou krivky* K.

Nech $u = xi + yj + zk$, potom v zložkách parametrické rovnice krivky K sú

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t), \end{aligned} \tag{9}$$

kde $\varphi(t)$, $\psi(t)$ a $\chi(t)$ sú spojité funkcie na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Ak pre každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t) + d = 0,$$

pričom aspoň jedno z čísiel a, b, c je rôzne od nuly a d je ľubovoľné číslo, potom krivku (9) nazývame *rovinnou krivkou*. Táto krivka leží v rovine $ax + by + cz + d = 0$. Ak krivka (9) nie je rovinná, nazývame ju *priestorovou*.

Nech funkcie $F(x, y, z)$ a $G(x, y, z)$ majú:

1. spojité všetky parciálne derivácie prvého rádu v oblasti Ω;
2. existuje aspoň jeden taký bod $A = (x_0, y_0, z_0)$ z oblasti Ω, pre ktorý platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ a matica

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F(A)}{\partial x}, & \dfrac{\partial F(A)}{\partial y}, & \dfrac{\partial F(A)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G(A)}{\partial x}, & \dfrac{\partial G(A)}{\partial y}, & \dfrac{\partial G(A)}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{10}$$

má hodnosť 2.

Potom množina všetkých bodov $M = (x, y, z)$, ktorých súradnice x, y, z sú riešením rovníc

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ G(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

je krivka K (daná ako prienik plôch). Rovnice (11) nazývame implicitné rovnice krivky K.

Príklad 2. Zistíme, či rovnice

$$\begin{aligned} y^2 &= x, \\ z^2 &= y, \end{aligned} \tag{12}$$

sú rovnicami krivky a nájdime jej parametrické rovnice.

Riešenie. Parciálne derivácie funkcií $F(x, y, z) = y^2 - x$, $G(x, y, z) = z^2 - y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z$$

sú spojité v celom priestore E_3. Keďže bod $A = (1, 1, 1)$ je riešením rovníc $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ a matica

$$\begin{pmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & 2 \end{pmatrix}$$

má hodnosť 2, rovnice (12) určujú krivku K.

Prvá z rovníc (12) je rovnicou parabolickej valcovej plochy, ktorej os je rovnobežná s osou o_z a jej priemet do roviny R_{xy} je parabola $y^2 = x$. Druhá rovnica je rovnicou parabolickej valcovej plochy, ktorej os je rovnobežná s osou o_x a jej priemet do roviny R_{yz} je parabola $z^2 = y$. Krivka K je prienikom týchto valcových plôch.

Parametrické rovnice tejto krivky môžeme nájsť napr. tak, že položíme $z = t$, pričom dostaneme $y = t^2$, $x = (t^2)^2 = t^4$. Parametrické rovnice krivky K sú

$$\begin{aligned} x &= t^4, \\ y &= t^2, \\ z &= t, \end{aligned}$$

kde t je ľubovoľné reálne číslo.

Krivka K je priestorová krivka, pretože neexistuje nijaká trojica čísiel (a, b, c), z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, a také číslo d, pre ktoré platí

$$at^4 + bt^2 + ct + d = 0$$

pre všetky reálne čísla t.

V úlohách 539 až 547 znázornite krivky v rovine:

539. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t \in (-\infty, \infty)$.

540. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

541. $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\,\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\,\mathbf{j},\ t \in \langle 0, \infty)$.

542. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 < a < b,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

543. $x = \dfrac{2at^2}{1+t^2},\quad y = \dfrac{at(t^2-1)}{1+t^2},\quad a > 0,\quad t \in (-\infty, \infty)$ *(strofoida)*.

544. $\varrho = a\varphi,\ a > 0$ *(Archimedova špirála)*.

545. $\varrho = ca^{\varphi},\ a > 0$ *(logaritmická špirála)*.

546. $\varrho = 2a(1 - \cos\varphi),\ a > 0$ *(kardioida)*.

547. $3(y - c)^2 - 2(x - c)^3 = 0$ *(semikubická parabola)*.

548. Nech $F(\varrho, \varphi)$ je polynóm premenných ϱ a φ. Krivka, ktorá má v polárnom súradnicovom systéme rovnicu $F(\varrho, \varphi) = 0$, nazýva sa *algebraická špirála*. Narysujte tieto algebraické špirály:

a) $\varrho = a/\varphi$ *(hyperbolická špirála)*,
b) $\varrho = a\varphi^2 - b,\ b \geqq 0$ *(Galileiho špirála)*,
c) $\varrho = a/\varphi^2$,
d) $\varrho = a\sqrt{\varphi}$ *(Fermatova špirála)*,
e) $\varrho = a\sqrt{\varphi} + b,\ b > 0$ *(parabolická špirála)*,
f) $\varrho = a/\sqrt{\varphi}$.

V úlohách 549 až 552 vylúčením parametra zistite, aké krivky sú dané parametrickými rovnicami.

549. $x = t^2 + t + 1,\ y = t^2 - t + 1,\ t \in (-\infty, \infty)$.

550. $x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1,\ t \in \langle 1, \infty)$.

551. $x = a\sin^2 t,\ y = b\cos^2 t,\ t \in \langle 0, 2\pi)$.

552. $x = a\cosh t,\ y = b\sinh t,\ t \in (-\infty, \infty)$.

553. Nájdite implicitnú rovnicu krivky

$$x = a\ln \operatorname{tg}(t/2) + a\cos t,\qquad y = a\sin t,\qquad t \in (0, \pi)\ \textit{(traktrisa)}.$$

Narysujte ju!

554. Vyjadrite kružnicu $x^2 + y^2 = a^2$ v parametrickom tvare, takže za parameter vezmete smernicu tetivy prechádzajúcej bodom $A = (-a, 0)$.

555. Nájdite parametrické vyjadrenie Descartesovho listu $x^3 + y^3 = 3axy$, takže položíte $y = tx$.

556. Dokážte, že tri rôzne body Descartesovho listu ležia na jednej priamke vtedy a len vtedy, keď pre ich hodnoty parametrov t_1, t_2, t_3 platí $t_1t_2t_3 = -1$.

557. Nájdite parametrické vyjadrenie:

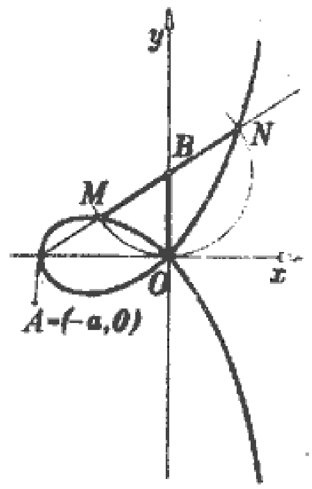
a) lemniskáty $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$,
b) Lamého krivky $(x/a)^m + (y/b)^m = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ m$ je prirodzené číslo.

558. Dokážte, že kardioidu $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$ možno vyjadriť v parametrickom tvare rovnicami

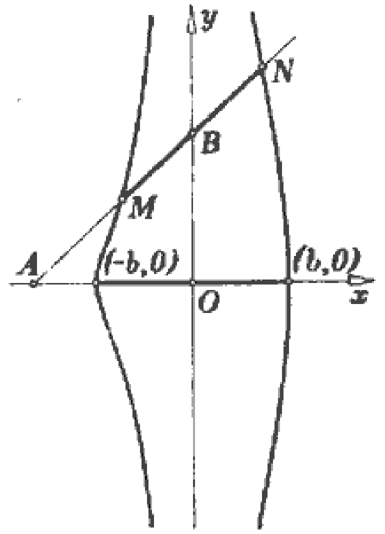
$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2},\ y = \frac{4at}{(1+t^2)^2},\ t \in (-\infty, \infty)\ .$$

559. Daná je parabola o rovnici $y^2 = 2px$. Nájdite množinu všetkých bodov súmerných k vrcholu paraboly vzhľadom na jej dotyčnice. Zistite, či táto množina je krivka a nájdite jej rovnice v pravouhlom a polárnom súradnicovom systéme.

560. Z bodu $A = (-a, 0)$, $a > 0$ zostrojte polpriamku AB, kde B je ľubovoľný bod osi o_y *(obr. 6)*. Z bodu B na obe strany tejto polpriamky zostrojte úsečky BM a BN, pričom $\varrho(B, M) = \varrho(B, N) = \varrho(O, B)$. Množina všetkých bodov M, N v rovine takto zostrojených je krivka, ktorú nazývame *strofoidou*. Nájdite jej rovnicu v pravouhlom a v polárnom súradnicovom systéme.



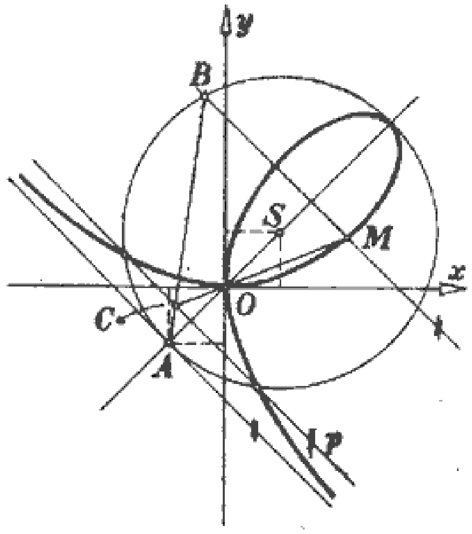
Obr. 6



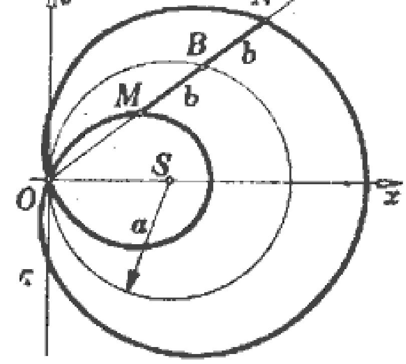
Obr. 7

561. Z bodu $A = (-a, 0)$, kde $a > 0$ zostrojte polpriamku určenú bodmi A, B, kde bod B je ľubovoľný bod osi o_y. Z bodu B na obe strany tejto polpriamky zostrojte úseky BM a BN, pričom $\varrho(B, M) = \varrho(B, N) = b$, kde b je dané kladné číslo *(obr. 7)*. Množina všetkých bodov M, N v rovine takto zostrojených je krivka, ktorú nazývame ***konchoidou***. Nájdite jej rovnicu v pravouhlom a polárnom súradnicovom systéme.

562. Daná je kružnica $(x - a/2)^2 + (y - a/2)^2 = 2a^2$ a priamka $x + y + (3 - \sqrt{3})\, a/2 = 0$. V ľubovoľnom bode kružnice $B \neq A = (-a/2, -a/2)$ zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom A a pretína danú priamku v bode C. Bodom B veďte rovnobežku s danou priamkou a bodom C priamku, ktorá prechádza začiatkom. Nech priesečník týchto priamok je M (pozri *obr. 8*). Množina všetkých bodov M takto zostrojených je krivka — ***Descartesov list***. Nájdite jej rovnicu.



Obr. 8



Obr. 9

563. Zo začiatku O pravouhlého súradnicového systému zostrojte polpriamku, ktorá pretína danú kružnicu $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$ v jej ľubovoľnom bode $B \neq O$ *(obr. 9)*. Na polpriamke zostrojte body M, N, ktorých vzdialenosť od bodu B je konštantná, $\varrho(M, B) = \varrho(N, B) = b$. Množina všetkých bodov M, N takto zostrojených je Pascalova závitnica. Nájdite jej rovnicu.

564. Nájdite množinu všetkých bodov M v rovine, ktoré majú konštantný súčin a^2 vzdialeností od daných bodov $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$. Táto množina je krivka, ktorú nazývame *Cassiniho oválom*. Nájdite jej rovnice a narysujte prípady $a > c$, $a < c$, $a = c$.

565. Nájdite množinu všetkých bodov M v rovine, ktoré majú od dvoch daných bodov $F_1 = (m, 0)$ a $F_2 = (-m, 0)$ vzdialenosti $\varrho(M, F_1)$, $\varrho(M, F_2)$, pre ktoré platí
$\varrho^2(M, F_1)\, \varrho^2(M, F_2) = c\varrho^2(0, M) + d$,

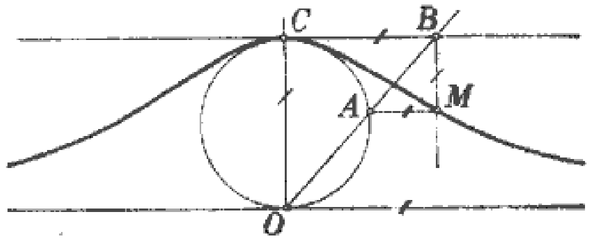
kde c, d sú dané čísla. Ukážte, že táto množina je krivka *(Perseova krivka)*. Ukážte, že pre $c = 0$ dostávame Cassiniho ovály, pre $c = 0$, $d = m^4$ lemniskátu a pre $d = m^4$ Boothovu lemniskátu.

566. Nájdite množinu všetkých bodov M v rovine, ktoré majú od dvoch daných pevných bodov — ohnísk F_1, F_2 vzdialenosti $\varrho(M, F_1)$, $\varrho(M, F_2)$, pre ktoré platí

$$a\varrho(M, F_1) + b\varrho(M, F_2) = c,$$

kde a, b, c sú dané čísla rôzne od nuly. Táto množina je krivka, ktorú nazývame *Descartesovým oválom*. Nájdite jej rovnice. Ukážte, že Pascalova závitnica je osobitný prípad Descartesovho oválu.

567. Na kružnici s polomerom a zvoľte bod O. V druhom koncovom bode C priemeru OC tejto kružnice zostrojte dotyčnicu. Z bodu O veďte ľubovoľnú polpriamku. Táto pretína kružnicu v bode A a dotyčnicu v bode B. Bodom A veďte rovnobežku s dotyčnicou a bodom B rovnobežku s priemerom OC. Priesečníkom týchto priamok je bod M *(obr. 10)*. Množina všetkých takýchto bodov M je krivka — *verziera*. Napíšte jej rovnicu.

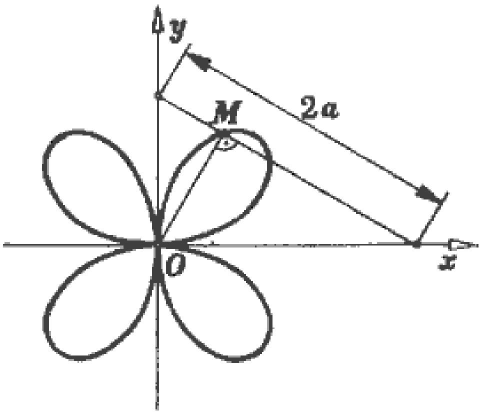


Obr. 10

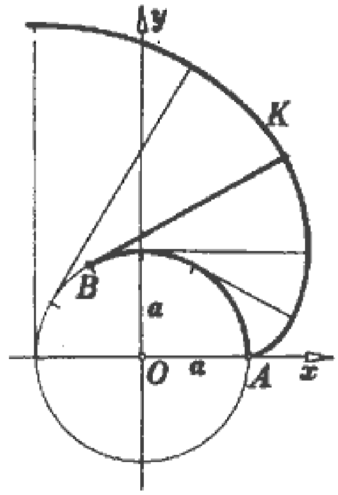
568. Nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktoré sú dotykovými bodmi dotyčníc zostrojených zo začiatku ku kružniciam s polomerom a, pričom ich stredy ležia na osi o_x. Táto množina bodov je krivka, ktorú nazývame *kappa*. Nájdite jej rovnicu.

569. Úsečka dĺžky $2a$ sa pohybuje tak, že jej konce sú nachádzajú na súradnicových osiach o_x, o_y. Nájdite rovnice trajektórie päty M kolmice spustenej zo začiatku O na úsečku *(obr. 11)*. Trajektória je krivka, ktorú nazývame *štvorlístková ružica*.

570. Niť je namotaná na cievke tvaru kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Nájdite parametrické rovnice trajektórie opísanej koncom nite, ak sa niť odmotáva tak, že od bodu B (*obr. 12*), kde sa niť oddeľuje od kružnice, zostáva v dotyčnici ku kružnici a koniec nite na začiatku pohybu bol v bode $A = (a, 0)$, $a > 0$. Trajektória je evolventa kružnice.



Obr. 11



Obr. 12

571. Kružnica s polomerom a sa kotúľa po osi o_x. Nájdite rovnicu trajektórie daného bodu M kružnice, ak na začiatku pohybu bol bod M v začiatku súradnicového systému. Trajektória bodu M je cykloida. Napíšte jej rovnice v parametrickom a implicitnom tvare.

572. Nájdite množinu všetkých bodov M v rovine, ktoré opíše daný bod M kružnice k_1 s polomerom r pri jej kotúľaní sa zvonku (znútra) po pevnej kružnici k_2 s polomerom r. Preskúmajte a narysujte osobitné prípady:

1. epicykloida, $r = a/2$,
2. epicykloida — kardioida, $r = a$,
3. hypocykloida — Steinerova krivka, $r = a/3$,
4. hypocykloida — asteroida, $r = a/4$.

573. Polpriamka, ktorá má začiatočný bod v začiatku O pravouhlého súradnicového systému, rovnomerne sa otáča okolo začiatku O s uhlovou rýchlosťou ω. Nájdite rovnice trajektórie bodu M, ktorý sa z bodu O pohybuje po danej polpriamke rovnomerne rýchlosťou c (*Archimedova špirála*).

574. Polpriamka p vychádzajúca zo začiatku O sa otáča v rovine okolo O s konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. Bod P sa pohybuje po polpriamke p rýchlosťou úmernou vzdialenosti $\varrho(O, P)$. Ukážte, že trajektória bodu P je krivka — logaritmická špirála a nájdite jej rovnicu.

V úlohách 575 až 580 zistite, či dané rovnice sú rovnicami krivky a nájdite jej parametrické rovnice.

575. $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x + 2z^2 - 1 = 0$.

576. $xy - 1 = 0$, $yz + y - z = 0$.

577. $xy - 1 = 0$, $x + y - z = 0$.

578. $x^3 - x + y = 0$, $x^2 + z - 1 = 0$.

579. $2x^2 + 2y^2 - z = 0$, $z = 2 \operatorname{arctg} (y/x)$.

580. $3x^2 + 3y^2 - z = 0$, $\ln z - 3 \operatorname{arctg} (y/x) = 0$.

581. Nájdite, akú podmienku musia spĺňať koeficienty $a_1, b_1, \ldots, a_3, b_3, c_3$, aby krivka

$$x = a_1\varphi(t) + b_1\psi(t) + c_1\chi(t) + d_1,$$
$$y = a_2\varphi(t) + b_2\psi(t) + c_2\chi(t) + d_2,$$
$$z = a_3\varphi(t) + b_3\psi(t) + c_3\chi(t) + d_3$$

ležala v rovine.

582. Nájdite $f(t)$ tak, aby priamka $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = f(t)$ bola rovinná krivka.

583. Dokážte, že krivka

a) $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2\cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$,

b) $x = t/(1 + t^2 + t^4)$, $y = t^2/(1 + t^2 + t^4)$, $z = t^3/(1 + t^2 + t^4)$, $t \in (-\infty, \infty)$

leží na guľovej ploche.

584. Nájdite parametrické rovnice krivky K, ktorá je priesečnicou guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ a kužeľovej plochy $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z > 0$. Ukážte, že táto krivka je rovinná kružnica v priestore.

585. Nájdite parametrické rovnice krivky, ktorá je určená prienikom valcovej plochy $(x - c)^2 + y^2 = r^2$, $c > 0$ a guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, pričom $c + r \leq a$. Preskúmajte osobitný prípad $c = r = a/2$ — *Vivianiho krivka* — a zostrojte ju.

586. Dokážte, že kolmý priemet Vivianiho krivky z predošlého príkladu do roviny R_{xz} je časť paraboly.

587. Nájdite krivku, ktorá je priesečnicou rotačnej valcovej plochy $x^2 + y^2 = ax$, $a \neq 0$ a kužeľovej plochy $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2\delta = 0$, kde $2\delta \neq 0$ je vrcholový uhol kužeľovej plochy (Vivianiho krivka na kužeľovej ploche). Ukážte, že pre $\delta = \pi/4$ je totožná s Vivianiho krivkou na guľovej ploche.

588. Nájdite parametrické rovnice krivky, ktorá leží na rotačnom paraboloide $z = x^2 + y^2$ a jej priemet do roviny R_{xy} je Archimedova špirála.

589. Nájdite parametrické rovnice krivky, ktorá je priesečníkom:

a) plôch $y = x^2$, $z = e^x$,

b) hyperbolického paraboloidu $z = x^2 - y^2$ a rotačného valca $x^2 + y^2 = a^2$,

c) parabolických valcov $z^2 = a - x$, $y^2 = x$.

590. Ukážte, že priesečnica parabolického valca $z^2 = 4 - 2y$ s rotačným valcom, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ leží na guľovej ploche. Nájdite parametrické rovnice tejto krivky.

591. Nájdite parametrické rovnice hyperbolickej skrutkovice, ktorá je priesečnicou hyperbolického valca $x^2 - y^2 = a$ a plochy $z = a\ln[(x + y)/(x - y)]$, $a \neq 0$.

592. Dané sú valcové plochy $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$, $a > b > 0$. Nájdite parametrické rovnice krivky *(bicylindriky)*, ktorá je ich prienikom.

593. Nájdite rovnicu krivky, ktorú opíše bod pri svojom pohybe na rotačnom valci $x^2 + y^2 = a^2$, vtedy ak je jeho pohyb zložený z rovnomerného pohybu po kružnici s uhlovou rýchlosťou ω a z priamočiareho pohybu v osi o_z, pričom:

a) tento pohyb je rovnomerný,

b) tento pohyb je rovnomerne zrýchlený,

c) rýchlosť tohto pohybu je priamo úmerná prejdenej dráhe.

594. Nájdite rovnicu kužeľovej skrutkovice, ak viete, že ju opíše bod M pri rovnomernom pohybe po danej povrchovej priamke rotačného kužeľa, ktorý sa rovnomerne otáča okolo svojej osi uhlovou rýchlosťou ω.

595. Krivka je daná ako priesečnica kužeľovej plochy $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \delta = 0$, kde 2δ je vrcholový uhol tejto plochy a valcovej plochy vytvorenej logaritmickou špirálou $\varrho = a \sin \delta\, e^{k\varphi}$, ktorej os je rovnobežná s osou o_z. Nájdite parametrické rovnice tejto krivky — kužeľovej špirály.

596. Nájdite parametrické rovnice loxodrómy, pre ktorú v sférickom súradnicovom systéme platí

$$\varphi = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

Dokážte, že leží na guľovej ploche $\varrho = a$ a priemet jej časti ležiacej na jednej polguli pri stereografickej projekcii je logaritmická špirála.

3.2. Dĺžka krivky a prirodzené parametrické vyjadrenie krivky

Nech K je krivka, ktorej parametrická rovnica je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. O krivke K predpokladajme, že pre ňu neexistujú dva disjunktné čiastočné intervaly $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ také, že im zodpovedajúce časti krivky K splývajú.

Nech D je delenie intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Číslam delenia D zodpovedajú na krivke K body $A = D_0 = O + \boldsymbol{r}(t_0)$, $P_1 = O + \boldsymbol{r}(t_1), \ldots$, $P_{n-1} = O + \boldsymbol{r}(t_{n-1})$, $B = P_n = O + \boldsymbol{r}(t_n)$. Súčet dĺžok úsečiek $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ označme $S(D)$. Platí

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} \varrho(P_{i-1}, P_i).$$

Krivka K je *rektifikácie schopná*, alebo *má dĺžku*, ak je množina všetkých čísiel $S(D)$ pre všetky delenia D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ ohraničená.

Číslo sup $S(D)$ nazývame *dĺžkou krivky* K a označujeme ho $s(K)$.

Veta 1. Ak krivka K v rovine má pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme parametrickú rovnicu

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j}, \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

pričom funkcie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ majú na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivácie, potom krivka K má dĺžku a platí

$$s(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt. \tag{1}$$

Veta 2. Ak krivka K v rovine má pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme rovnicu $y = f(x)$, pričom $x \in \langle a, b \rangle$ a $f(x)$ má spojitú deriváciu $f'(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$, tak krivka K má dĺžku a platí

$$s(K) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{2}$$

Veta 3. Ak krivka K v rovine má pri zvolenom polárnom súradnicovom systéme rovnicu $\varrho = f(\varphi)$, pričom $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ a $f(\varphi)$ má spojitú deriváciu $f'(\varphi)$ na intervale $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, tak krivka K má dĺžku

$$s(K) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{3}$$

Veta 4. Nech krivka K v priestore pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme má rovnicu $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pričom funkcia $\mathbf{r}(t)$ má na intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$ spojitú deriváciu. Potom krivka K má dĺžku a platí

$$s(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta |\mathbf{r}'(t)|\, dt. \tag{4}$$

Prirodzené parametrické vyjadrenie krivky. Majme krivku K, ktorá má parametrickú rovnicu $\mathbf{u} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a rýdzo monotónnu funkciu $t = \varphi(\tau)$ definovanú v intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$. Potom rovnica $\mathbf{u} = \mathbf{r}[\varphi(\tau)]$, $\tau \in \langle a, b\rangle$, je opäť parametrická rovnica krivky K s novým parametrom τ.

Nech krivka K má dĺžku. Zvoľme na krivke bod $C = O + \mathbf{r}(t_0)$, kde $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Uvažujme funkciu, pre ktorú platí

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(t)|\, dt, \quad t \in \langle\alpha, \beta\rangle.$$

Táto funkcia je rýdzo monotónna, preto k nej existuje inverzná funkcia $t = \varphi(s)$, ktorá je tak isto rýdzo monotónna v intervale $\langle -s_0, s_1\rangle$.

Rovnicu

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}[\varphi(s)]$$

nazývame prirodzeným parametrickým vyjadrením krivky K.

Príklad 1. Vypočítajme dĺžku krivky K, ktorej rovnica je $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln \sin t\mathbf{k}$, $\in \langle\pi/2, 2\pi/3\rangle$. Nájdime jej prirodzené parametrické vyjadrenie.

Riešenie. Pretože $\mathbf{r}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \operatorname{cotg} t\mathbf{k}$ je na intervale $\langle\pi/2, 2\pi/3\rangle$ spojitá funkcia, pre každé $\alpha, \beta \in \langle\pi/2, 2\pi/3\rangle$, $\alpha < \beta$ platí

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\cos^2\tau + \sin^2\tau + \operatorname{cotg}^2\tau}\, d\tau = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta (1/\sin\tau)\, d\tau = [\ln \operatorname{tg}\,(\tau/2)]_\alpha^\beta = \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Dĺžku krivky K dostaneme pre $\alpha = \pi/2$ a $\beta = 2\pi/3$. Máme

$$s(K) = \ln \frac{\operatorname{tg}(\pi/3)}{\operatorname{tg}(\pi/4)} = \ln \operatorname{tg}(\pi/3) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Hľadajme prirodzené parametrické vyjadrenie krivky K. Za bod C zvoľme bod $C = O + \mathbf{r}(\pi/2) = (1, 0, 0)$. Počítajme

$$s(t) = \int_{\pi/2}^{t} \sqrt{\cos^2\tau + \sin^2\tau + \operatorname{cotg}^2\tau}\, d\tau = \ln \operatorname{tg}(t/2), \text{ pre každé } t \in \langle\pi/2, 2\pi/3\rangle.$$ Táto funkcia je rýdzo monotónna. K nej inverzná funkcia je $t = 2 \operatorname{arctg} e^s$, pre každé $s \in \langle 0, (\ln 3)/2\rangle$. Prirodzené parametrické vyjadrenie krivky K je

$$\mathbf{u} = \sin(2\operatorname{arctg} e^s)\,\mathbf{i} + \cos(2\operatorname{arctg} e^s)\,\mathbf{j} + \ln\sin(2\operatorname{arctg} e^s)\,\mathbf{k},$$

po úprave

$$\mathbf{u} = \frac{2e^s}{1 + e^{2s}}\,\mathbf{i} + \frac{1 - e^{2s}}{1 + e^{2s}}\,\mathbf{j} + \ln \frac{2e^s}{1 + e^{2s}}\,\mathbf{k}.$$

597. Nájdite dĺžku krivky $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.*)

598. Nájdite dĺžku oblúka Dioklesovej kisoidy $(2a - x)\, y^2 = x^3$ v intervale $\langle 0, x_0 \rangle$, kde $x_0 < 2a$.

599. Nájdite dĺžku časti traktrisy $x = a \ln \dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$ ohraničenej bodmi $A = (0, a)$, $B = \left(a \ln \left(2 - \sqrt{3}\right) + a\sqrt{3}/2\right)$.

600. Vypočítajte dĺžku krivky $\varrho = a\, e^{\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, \alpha \rangle$.

V úlohách **601** až **607** nájdite prirodzené parametrické vyjadrenie krivky v rovine, ak je daný bod C, od ktorého počítame dĺžku krivky a krivku.

601. Semikubická parabola $y^2 = x^3$, $C = (0, 0)$.

602. Reťazovka $y = a \cosh (x/a)$, $C = (0, a)$.

603. Traktrisa $x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$, $C = (0, a)$.

604. Evolventa kružnice

$$x = a(\cos t + t \sin t),$$
$$y = a(\sin t - t \cos t), \quad C = (a, 0).$$

605. Kardioida

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t),$$
$$y = a(2 \sin t - \sin 2t), \quad C = (a, 0).$$

606. Archimedova špirála $\varrho = a\varphi$, $C = (0, 0)$.

607. Logaritmická špirála $\varrho = a\, e^{k\varphi}$, $C = (a, 0)$.

V úlohách **608** až **613** nájdite dĺžku priestorovej krivky.

608. $x = 4t$, $y = 6t^2$, $z = 6t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

609. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, k \rangle$.

610. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

611. $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

612. $x = ct$, $y = c\sqrt{2} \ln t$, $z = c/t$, $t \in \langle 1, 10 \rangle$.

613. Nájdite dĺžku časti krivky medzi dvoma jej za sebou idúcimi priesečníkmi s rovinou R_{xy}, ak krivka má rovnice

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos (t/2).$$

V úlohách **614** až **620** nájdite dĺžku krivky v priestore, ak je krivka daná rovnicami a koncové body krivky sú A, B.

614. $x = 72z^3$, $y = 18z^2$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (72, 18, 1)$.

615. $y^2 - 3z = 0$, $2yz - 9x = 0$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 3, 3)$.

616. $4x = (x + z)^2$, $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$, $A = (0, 0, 0)$, $B = \left(3, 0, 2\sqrt{3}\right)$.

617. $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (2a, 8a/3, 2a)$.

618. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a \ln [2a/(2a - x)]$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (x, y, z)$.

619. $x^2 + y^2 - az = 0$, $y = x \operatorname{tg} (z/a)$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (a\pi/8, a\pi/8, a\pi/4)$.

---

*) Úlohy na výpočet dĺžky krivky v rovine pozri aj úlohy 1267–1291 z 5,5/II.

620. $y = \arcsin (x/a)$, $z = (a/4) \ln [(a + x)/(a - x)]$, $A = (0, 0, 0)$, $B = [x_0, a \arcsin (x_0/a), (a/4) \ln [(a + x_0)/(a - x_0)]$.

V úlohách 621 až 624 nájdite prirodzené parametrické vyjadrenie krivky.

621. Skrutkovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ct$.

622. Hyperbolickej skrutkovice $x = a \cosh t$, $y = a \sinh t$, $z = at$.

623. Kónickej špirály $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.

624. $\boldsymbol{r}(t) = ct\boldsymbol{i} + c\sqrt{2} \ln t\boldsymbol{j} + ct^{-1}\boldsymbol{k}$.

3,3. Dotyčnica a normála ku krivke v rovine

Nech krivka K v rovine má parametrickú rovnicu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Bod $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$, kde $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je regulárny bod krivky K, ak existuje derivácia $\boldsymbol{r}'(t_0)$, pričom $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{o}$. Ak bod P nie je regulárny, hovoríme, že je singulárny bod krivky K.

Krivka v rovine s rovnicou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t)$ je v intervale $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ hladká, ak derivácia $\boldsymbol{r}'(t)$ je spojitá na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ a pre každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{o}$.

Nech $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$, $Q = O + \boldsymbol{r}(t)$, $t \neq t_0$ sú body krivky K, pričom bod P je regulárny bod. *Dotyčnicou* krivky K v dotykovom bode $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ nazývame limitnú polohu sečnice PQ pre $t \to t_0$.

Normálou krivky K v bode P nazývame priamku kolmú na dotyčnicu v bode P, ktorá prechádza týmto bodom.

Vektorom dotyčnice krivky K v bode $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ nazývame vektor $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}'(t_0)/|\boldsymbol{r}'(t_0)|$ a vektorom normály krivky K v bode P vektor $\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{\tau}}$.*)

1. Ak krivka K má rovnicu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t)$ a bod $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ je jej regulárny bod, potom rovnica dotyčnice je

$$X = P + t\boldsymbol{r}'(t_0) \tag{1}$$

a rovnica normály je

$$X = P + t\overline{\boldsymbol{r}'(t_0)}. \tag{2}$$

2. Nech pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme platí $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j}$, $P = (x_0, y_0)$, kde $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$ a $x_0' = \varphi'(t_0)$, $y_0' = \psi'(t_0)$. Nech bod P je regulárny bod, t. j. aspoň jedno z čísiel x_0', y_0' je rôzne od nuly. Potom rovnice dotyčnice ku krivke K v bode P sú

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_0't, \\ y &= y_0 + y_0't \end{aligned} \tag{3}$$

a rovnica normály ku krivke K v bode P je

$$\begin{aligned} x &= x_0 - y_0't, \\ y &= y_0 + x_0't. \end{aligned} \tag{4}$$

Vylúčením parametra t z rovníc (1), (2), (3), (4) dostávame rovnicu dotyčnice

$$(X - P) \,.\, \overline{\boldsymbol{r}'(t_0)} = 0 \tag{5}$$

alebo

$$(x - x_0)\, y_0' - (y - y_0)\, x_0' = 0 \tag{6}$$

a rovnicu normály ku krivke K v bode P

$$(X - P) \,.\, \boldsymbol{r}'(t_0) = 0, \tag{7}$$

čiže

$$(x - x_0)\, x_0' + (y - y_0)\, y_0' = 0. \tag{8}$$

*) V ďalšom texte budeme znakom $\overline{\boldsymbol{a}}$ označovať vektor, ktorý je kolmý na daný vektor $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}$ a platí preň $\overline{\boldsymbol{a}} = \{-a_2, a_1\}$.

Ak krivka K má rovnicu $y = f(x)$, potom bod $P = (x_0, y_0)$, kde $y_0 = f(x_0)$, je regulárny vtedy, ak existuje derivácia $f'(x_0)$. Rovnice dotyčnice resp. normály dostaneme z rovníc (3), (6) resp. (4), (8), ak položíme $x'_0 = 1$ a $y'_0 = f'(x_0)$ (pozri 3,2/II).

3. Ak rovnica krivky K je $F(x, y) = 0$, potom bod P je jej regulárny bod, ak aspoň jedna z derivácií $F'_x(P)$, $F'_y(P)$ je rôzna od nuly, t. j. grad $F(P) \neq \mathbf{o}$.
Rovnica dotyčnice krivky K v jej regulárnom bode P je

$$X = P + \overline{\operatorname{grad} F(P)}\, t \tag{9}$$

a rovnica normály je

$$X = P + \operatorname{grad} F(P)\, t. \tag{10}$$

Vylúčením parametra t dostávame rovnicu dotyčnice

$$(X - P) \,.\, \operatorname{grad} F(P) = 0, \tag{11}$$

čiže

$$(x - x_0)\, F'_x(P) + (y - y_0)\, F'_y(P) = 0 \tag{12}$$

a rovnicu normály ku krivke K v bode P

$$(X - P) \,.\, \overline{\operatorname{grad} F(P)} = 0, \tag{13}$$

čiže

$$(x - x_0)\, F'_y(P) - (y - y_0)\, F'_x(P) = 0. \tag{14}$$

4. Ak krivka K má rovnicu $\varrho = f(\varphi)$, resp. $\mathbf{r}(\varphi) = f(\varphi)\, \mathbf{e}(\varphi)$, potom bod $P = (\varrho_0, \varphi_0)$ je regulárny vtedy, ak aspoň jedno z čísiel $\varrho_0 = f(\varphi_0)$, $\varrho'_0 = f'(\varphi_0)$ je rôzne od nuly, čiže $\mathbf{r}'(\varphi_0) = \varrho_0 \mathbf{e}'_0 + \varrho'_0 \mathbf{e}_0 \neq \mathbf{o}$. Nech je $\mathbf{r}'(\varphi_0) = -\varrho_0 \mathbf{e}_0 + \varrho'_0 \mathbf{e}'_0$, $(\mathbf{e} \,.\, \mathbf{e}' = 0)$.
Rovnica dotyčnice ku krivke K v bode P je

$$(X - P) \,.\, \overline{\mathbf{r}'(\varphi_0)} = 0, \tag{15}$$

čiže

$$\varrho(\varrho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \varrho'_0 \sin(\varphi - \varphi_0)) = \varrho_0^2. \tag{16}$$

Rovnica normály ku krivke K v bode P je

$$(X - P) \,.\, \mathbf{r}'(\varphi_0) = 0, \tag{17}$$

čiže

$$\varrho(\varrho'_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \varrho_0 \sin(\varphi - \varphi_0)) = \varrho_0 \varrho'_0. \tag{18}$$

Nech δ je uhol nenulových vektorov $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\varphi_0)$, $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(\varphi_0)$ v bode P. Potom platí

$$\cos\delta = \frac{\mathbf{r}_0 \,.\, \mathbf{r}'_0}{|\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{r}'_0|} = \frac{\varrho'_0}{\varrho_0 \sqrt{\varrho_0^2 + \varrho_0'^2}}, \quad \sin\delta = \frac{\mathbf{r}_0 \,.\, \overline{\mathbf{r}'_0}}{|\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{r}'_0|} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0^2 + \varrho_0'^2}}$$

a pre $\varrho'_0 \neq 0$ je

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\varrho_0}{\varrho'_0}. \tag{19}$$

5. Dĺžku dotyčnice t, normály n, subnormály s_n a subtangenty s_t ku krivke K v jej regulárnom bode P zavádzame podobne ako pre graf funkcie (pozri 3,2/II). Ak parametrické rovnice krivky K sú $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a v bode $P = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ je $x'_0 = \varphi'(t_0) \neq 0$, $y'_0 = \psi'(t_0) \neq 0$, potom platí

$$t = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right| \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}, \qquad n = \left|\frac{y_0}{x'_0}\right| \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}, \qquad s_t = \left|\frac{y_0 x'_0}{y'_0}\right|, \qquad s_n = \left|\frac{y_0 y'_0}{x'_0}\right|. \tag{20}$$

Ak krivka K má rovnicu $\mathbf{r}(\varphi) = \varrho(\varphi)\, \mathbf{e}$, potom dĺžka dotyčnice t v regulárnom bode $P = (\varrho_0, \varphi_0)$, kde $\varrho_0 = \varrho(\varphi_0) \neq 0$ je $\varrho(P, T)$, (pozri *obr. 13*), dĺžka normály n v bode P je $\varrho(P, N)$, dĺžka subtangenty s_t je $\varrho(O, T)$ a dĺžka subnormály s_n je $\varrho(O, N)$ kde T, N sú priesečníky priamky kolmej na vektor $P - O$ s dotyčnicou resp. normálou.
Nech $\varrho'(\varphi_0) = \varrho'_0 \neq 0$, potom platí

$$t = \left|\frac{\varrho_0}{\varrho'_0}\right| \sqrt{\varrho_0^2 + \varrho_0'^2}, \qquad n = \sqrt{\varrho_0^2 + \varrho_0'^2}, \qquad s_t = \frac{\varrho_0^2}{|\varrho'_0|}, \qquad s_n = |\varrho'_0|. \tag{21}$$

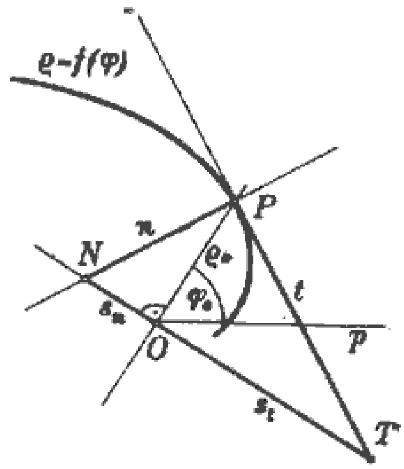
Príklad 1. Nájdime rovnice dotyčnice a normály ku krivke s rovnicou $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\,\mathbf{j}$ v bode $P = O + \mathbf{r}(2)$.

Riešenie. Počítajme $\mathbf{r}'(2)$, máme

$$\mathbf{r}'(2) = [2t\,\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j}]_{t=2} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} \neq \mathbf{o}.$$

Preto je bod P regulárny bod krivky. Podľa (1), (3) resp. (6) rovnica dotyčnice v bode $P = (0, 0) + \{4, 4\} = (4, 4)$ je

$$X = (4, 4) + \{4, 10\}\,t, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$



Obr. 13

resp.

$$x = 4 + 4t, \quad y = 4 + 10t, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

resp.

$$(x - 4)\,10 - (y - 4)\,4 = 0,$$

čiže

$$5x - 2y - 12 = 0.$$

Rovnicu normály určíme zo vzťahov (2), (4) resp. (8). Máme

$$X = (4, 4) + \{-10, 4\}\,t, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

alebo

$$x = 4 - 10t, \quad y = 4 + 4t, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

resp.

$$(x - 4)\,4 + (y - 4)\,10 = 0,$$

čiže

$$2x + 5y - 28 = 0.$$

Príklad 2. Nájdime rovnicu dotyčnice a normály k Descartesovmu listu $x^3 + y^3 - 4{,}5xy = 0$ v bode $P = (1, 2)$.

Riešenie. Nech $F(x, y) = x^3 + y^3 - 4{,}5xy$. Počítajme parciálne derivácie $F'_x(P)$ a $F'_y(P)$, máme

$$F'_x(P) = (3x^2 - 4{,}5y)_P = -6,$$
$$F'_y(P) = (3y^2 - 4{,}5x)_P = 7{,}5.$$

Z toho vyplýva, že bod P je regulárny. Rovnica dotyčnice ku krivke v bode P podľa (12) je

$$(x - 1)\,(-6) + (y - 2)\,7{,}5 = 0,$$

čiže

$$4x - 5y + 6 = 0.$$

Rovnicu normály nájdeme zo vzťahu (14)

$$(x - 1)\,7{,}5 - (y - 2)\,(-6) = 0,$$

čiže

$$5x + 4y - 13 = 0.$$

Príklad 3. Nájdime rovnice dotyčnice a normály Archimedovej špirály $\varrho = 2\varphi$ v bode $P = (2\pi, \pi)$. Vypočítajme dĺžku dotyčnice, normály, subtangenty a subnormály v bode P.

Riešenie. Bod $P = (2\pi, \pi)$ je regulárny bod, pretože $\varrho_0 = 2\pi \neq 0$. Počítajme ϱ'_0, máme $\varrho' = 2$ pre $\varphi \in (0, \infty)$. Rovnicu dotyčnice k Archimedovej špirále v bode P určíme zo vzťahu (16), máme

$$\varrho[2\pi \cos(\varphi - \pi) - 2 \sin(\varphi - \pi)] = 4\pi^2,$$

čiže

$$\varrho\,(\sin\varphi - \pi\cos\varphi) = 2\,\pi^2.$$

V príslušnom pravouhlom súradnicovom systéme je rovnica tejto dotyčnice

$$\pi x - y + 2\pi^2 = 0.$$

Pre rovnicu normály k Archimedovej špirále v bode P podľa (18) platí

$$\varrho[2\cos(\varphi - \pi) + 2\pi \sin(\varphi - \pi)] = 4\pi,$$

čiže

$$\varrho(-\pi \sin\varphi - \cos\varphi) = 2\pi,$$

alebo v príslušnom pravouhlom súradnicovom systéme

$$x + \pi y + 2\pi = 0.$$

Pre dĺžku dotyčnice, normály, subtangenty a subnormály podľa (21) platí

$$t = 2\pi\sqrt{1 + \pi^2}, \qquad n = 2\sqrt{1 + \pi^2},$$
$$s_t = 2\pi^2, \qquad s_n = 2.$$

V úlohách **625** až **633** nájdite rovnicu dotyčnice a normály k danej krivke v jej bode $P = O + \mathbf{r}(t_0)$.

625. $\mathbf{r} = \dfrac{3at}{1 + t^3}(\mathbf{i} + t\mathbf{j})$ *(Descartov list)*, $t_0 = 2$.

626. $\mathbf{r} = \dfrac{2a}{t^2 + 1}\left(\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}\right)$ *(Dioklova kisoida)*, $t_0 = 1$.

627. $\mathbf{r} = \dfrac{2a}{\pi} t(\mathbf{i} + \mathbf{j} \operatorname{cotg} t)$, $t_0 = \pi/4$ *(Dinostratova kvadratisa)*.

628. $x = 4t - 5$, $y = t^2 - 4$, $t_0 = 4$.

629. $x = 2\cos t + 3\sin t$, $y = \cos t + 2\sin t$, $t_0 = \pi/2$.

630. $x^2 + y^3 + 2y - 6 = 0$, $P = (3, ?)$.

631. $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$, $P = (-2, 3)$.

632. $(x^2 + y^2)(y - 1)^2 - 5y^2 = 0$ *(Nikomédova konchoida)*, $P = (4, 2)$.

633. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 2(x^2 + y^2) + 4 = 0$ *(Descartesov ovál)*, $P = (1, 1)$.

634. Daná je elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Nájdite v jej ľubovoľnom bode $P = (x_0, y_0)$ rovnicu dotyčnice a normály. Vypočítajte v jej ľubovoľnom bode dĺžku subtangenty a subnormály.

V úlohách **635** až **639** nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku krivke K v jej danom bode P. Vypočítajte dĺžku dotyčnice, normály, subtangenty, subnormály a uhol, ktorý zviera dotyčnica so sprievodičom dotykového bodu P.

635. $\varrho = 2(1 - \cos\varphi)$ *(kardioida)*, $P = (1, \pi/3)$.

636. $\varrho = a \sin 2\varphi$ *(štvorlístková ružica)*, $P = (a, \pi/4)$.

637. $\varrho = 2\varphi^2 - 1$ *(Galileiho špirála)*, $P = (1, 1)$.

638. $\varrho = a\sqrt{\varphi} + 2a$ *(parabolická špirála)*, $P = (3a, 1)$.

639. $\varrho = 2/\varphi + 3$ *(konchoida hyperbolickej špirály)*, $P = (4, 2)$.

640. Nájdite normálu ku krivke $x^2y = a^2(a - y)$ [verziera] rovnobežnú s priamkou $y = 2x$.

641. Nájdite dotyčnicu ku astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ktorá má najväčšiu vzdialenosť od začiatku.

642. Nájdite rovnicu dotyčnice v ľubovoľnom bode Cassiniho oválu a určte počet bodov oválu, v ktorých je dotyčnica rovnobežná s osou o_x resp. osou o_y.

643. Nájdite normálu ku kardioide $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, ktorá zviera s polárnou osou uhol $\pi/4$.

644. Dokážte, že všetky normály ku krivke $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ sú rovnako vzdialené od začiatku.

645. Dokážte, že dotyčnica k cykloide v jej ľubovoľnom bode prechádza „najvyšším" bodom a normála „najnižším" bodom vytvárajúcej kružnice. Na základe tohto poznatku opíšte konštrukciu dotyčnice a normály k cykloide.

646. Dokážte, že dĺžka úsečky, ktorú vytína dotyčnica v ľubovoľnom bode astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ medzi súradnicovými osami, rovná sa a.

647. Dokážte, že dotyčnice ku kardioide $\varrho = 2a(1 - \cos \varphi)$ s dotykovými bodmi M, N, pričom úsečka MN prechádza začiatkom O, sú navzájom kolmé.

V úlohách 648 až 661 ukážte, že dané krivky sa pretínajú pod pravým uhlom.

648. $x^2 - y^2 = a^2$, $xy = b^2$.

649. $(2a - y)x^2 = y^3$, $(x^2 + y^2)^2 = b^2(2y^2 - x^2)$.

650. $\varrho = a\,e^{\varphi}$, $\varrho = b\,e^{-\varphi}$.

651. $\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varrho = b\sqrt{\sin 2\varphi}$, $a \neq b$.

652. Ku krivke $\varrho = f(\varphi)$ nájdite v jej ľubovoľnom bode P dĺžku dotyčnice, normály, subtangenty a subnormály, ak:

a) $\varrho = a^{\varphi}$, $a > 0$ (logaritmická špirála),

b) $\varrho = a/\varphi$, $a > 0$ (hyperbolická špirála).

653. Dokážte, že logaritmická špirála s rovnicou $\varrho = e^{a\varphi}$ pretína polpriamky idúce zo začiatku pod rovnakým uhlom.

654. Nájdite uhol dotyčnice s polárnou osou a uhol normály so sprievodičom lemniskáty $\varrho = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$. Na základe týchto výsledkov opíšte konštrukciu dotyčnice a normály k lemniskáte.

655. Dokážte, že uhol dotyčnice so sprievodičom ľubovoľného bodu P krivky $\varrho = a\sqrt[n]{\cos n\varphi}$ (sinusoidálnej špirály) je $n\varphi + \pi/2$, kde $P = (\varrho, \varphi)$.

Úpätnicou krivky K vzhľadom na daný bod A sa nazýva množina všetkých piat kolmíc spustených z bodu A na dotyčnice krivky K.

V úlohách 656 až 662 nájdite úpätnicu krivky K.

656. Paraboly $y^2 = 2px$ vzhľadom na jej vrchol.

657. Paraboly $y^2 = -2p(x + 3p/2)$ vzhľadom na taký bod jej osi, rôzny od ohniska, ktorého vzdialenosť od direkčnej priamky je p.

658. Kružnice vzhľadom na ľubovoľný bod roviny.

659. Epicykloidy vzhľadom na stred pevnej kružnice.

660. Rovnoosovej hyperboly vzhľadom na jej stred.

661. Evolventy kružnice vzhľadom na stred tejto kružnice.

662. Logaritmickej špirály $\varrho = a^{\varphi}$ vzhľadom na počiatok.

3,4. Asymptoty krivky

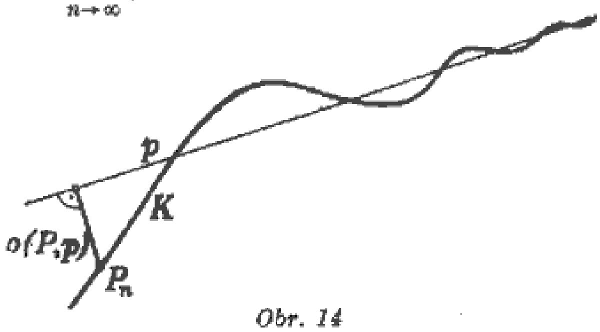
Majme krivku K, ktorá je neohraničená, t. j. pre každé číslo $C > 0$ existuje bod P na krivke K, že $\varrho(O, P) > C$.

Asymptotou krivky K nazývame takú priamku p, pre ktorú existuje taký neohraničený oblúk K_1 na krivke K, $K_1 \subset K$, že postupnosť $\{\varrho(P_n, p)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(P_n, p) = 0 \tag{1}$$

pre každú takú postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov oblúka K_1, pre ktorú je

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(O, P_n) = \infty \qquad \text{(pozri } \textit{obr. 14}\text{)}.$$



Obr. 14

1. Nech neohraničená krivka K má rovnicu $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$, $t \in J$, kde J je interval (a, t_0) $[(t_0, b)$, $(-\infty, b)$, $(a, \infty)]$. Nech je $\lim_{t\to t_0+} |\mathbf{r}(t)| = \infty$ $[\lim_{t\to t_0-} |\mathbf{r}(t)| = \infty$, $\lim_{t\to -\infty} |\mathbf{r}(t)| = \infty$, $\lim_{t\to\infty} |\mathbf{r}(t)| = \infty]$. Potom priamka s rovnicou $X = A + \mathbf{a}^0 t$ je asymptotou krivky K v rovine vtedy a len vtedy, ak existujú limity

$$\lim_{t\to t_0+} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = \mathbf{a}^0, \qquad \lim_{t\to t_0+} \mathbf{r}(t) \cdot \overline{\mathbf{a}^0} = (A - O) \cdot \overline{\mathbf{a}^0}. \tag{2}$$

Priamka s rovnicou $X = A + \mathbf{a}^0 t$ je asymptotou krivky K v priestore vtedy a len vtedy, ak existujú limity

$$\lim_{t\to t_0+} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = \mathbf{a}^0, \qquad \lim_{t\to t_0+} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}^0 = (A - O) \times \mathbf{a}^0. \tag{3}$$

Podobne je to pre prípady $t \to t_{0-}$, $t \to -\infty$, $t \to \infty$.

2. Ak má neohraničená krivka parametrické rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ a niektorá z limít $\lim_{t\to t_0+} \varphi(t)$, $\lim_{t\to t_0-} \psi(t)$ je nevlastná, potom priamka:

a) $x = a$ je asymptotou vtedy a len vtedy, ak $\lim_{t\to t_0+} \psi(t)$ je nevlastná a $\lim_{t\to t_0+} \varphi(t) = a$

b) $y = b$ je asymptotou vtedy a len vtedy, ak $\lim_{t\to t_0+} \varphi(t)$ je nevlastná a $\lim_{t\to t_0+} \psi(t) = b$

c) $y = kx + q$ je asymptotou vtedy a len vtedy, ak existujú limity

$$\lim_{t\to t_0+} [\psi(t)/\varphi(t)] = k, \qquad \lim_{t\to t_0+} (\psi(t) - k\varphi(t)) = q.$$

Podobne je to pre prípady $t \to t_{0-}$, $t \to -\infty$, $t \to \infty$.

3. Ak neohraničená krivka má rovnicu $y = f(x)$, o asymptote pozri článok 3,12/II.

4. Ak neohraničená krivka má rovnicu $F(x, y) = 0$, potom priamka $ax + by + c = 0$ je asymptotou vtedy a len vtedy, ak platí

$$F(x, y) = ax + by + c + G(x, y), \tag{4}$$

pričom

$$\lim G(x, y) = 0$$

pre $x \to \pm\infty$, $y \to b$, resp. $x \to a$, $y \to \pm\infty$, resp. $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$.

Ak krivka K je algebraická, t. j. $F(x, y)$ je polynóm vzhľadom na premenné x a y, asymptoty krivky K nájdeme tak, že:

a) usporiadame polynóm $F(x, y)$ podľa klesajúcich mocnín x a koeficient $\varphi(y)$ pri najvyššej mocnine x položíme rovným nule. Ak $\varphi(b) = 0$, potom priamka $y = b$ je asymptótou;

b) usporiadame polynóm $F(x, y)$ podľa klesajúcich mocnín y a koeficient $\psi(x)$ pri najvyššej mocnine y položíme rovným nule. Ak $\psi(a) = 0$, potom priamka $x = a$ je asymptotou;

c) do rovnice $F(x, y) = 0$ dosadíme $y = kx$ a polynóm $F(x, kx)$ usporiadame podľa klesajúcich mocnín x. Koeficient $\Phi(k)$ pri najvyššej mocnine x položíme rovným nule a vypočítame čísla k. Potom dosadíme $y = kx + q$ do rovnice $F(x, y) = 0$ a rovnakým postupom ako predtým vypočítame k jednotlivým číslam k čísla q. Priamky $y = kx + q$ sú asymptoty krivky K.

5. Ak má neohraničená krivka K rovnicu $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in J$, pričom J je jeden z intervalov (α, β), (γ, α), potom priamka $\varrho \cos(\varphi - \alpha) = d$ je jej asymptotou vtedy a len vtedy, ak

$$\lim_{\varphi \to \alpha+} |f(\varphi)| = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{\varphi \to \alpha+} \frac{f^2(\varphi)}{|f'(\varphi)|} = d. \tag{5}$$

Podobne je to pre prípad $\varphi \to \alpha-$.

Ak ku krivke K s rovnicou $\mathbf{u} = \mathbf{r}(t)$, $t \in J$, pričom J je nekonečný interval, existuje taký bod A, že $\lim_{t \to \pm\infty} \varrho(A, P) = 0$, $P = O + \mathbf{r}(t)$, potom bod A nazývame *asymptotickým bodom krivky* K.

Príklad 1. Nájdime asymptoty krivky

$$x^2 - 2y^2 - z^2 = 1,$$
$$xy = 1, \qquad x > 0.$$

Riešenie. Daná krivka je priesečnica dvojdielneho hyperboloidu a hyperbolického valca. Jej parametrické rovnice dostaneme napríklad tak, keď položíme $x = t$, máme

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 1/t, \qquad\qquad t \in \langle \sqrt{2}, \infty) \\ z &= \pm \sqrt{t^2 - 2/t^2 - 1}, \end{aligned}$$

čiže

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1/t)\,\mathbf{j} \pm \sqrt{t^2 - 2/t^2 - 1}\;\mathbf{k},$$

kde $t \in \langle \sqrt{2}, \infty)$. Uvažujme o $z = \sqrt{t^2 - 2/t^2 - 1}$ a počítajme limity (3), dostávame

$$\mathbf{a}^0 = \lim_{t \to \infty} \frac{t\mathbf{i} + (1/t)\,\mathbf{j} + \sqrt{t^2 - 2/t^2 - 1}\,\mathbf{k}}{\sqrt{t^2 + 1/t^2 + t^2 - 2/t^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\mathbf{i} + (1/t^2)\,\mathbf{j} + \sqrt{1 - 2/t^4 - 1/t^2}\,\mathbf{k}}{\sqrt{2 - 1/t^4 - 1/t^2}} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}.$$

$$(A - O) \times \mathbf{a}^0 = \lim_{t \to \infty} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}^0 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{t}\,\mathbf{i} + \left(\sqrt{t^2 - \frac{2}{t^2} - 1} - t \right) \mathbf{j} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t}\,\mathbf{k} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} \lim_{t \to \infty} \left(\sqrt{t^2 - \frac{2}{t^2} - 1} - t \right) = \mathbf{o}.$$

Položme $A = (a, b, c)$, potom z posledného vzťahu máme

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \times [(\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}] = 0$$

a

$$b\mathbf{i} + (c - a)\,\mathbf{j} - b\mathbf{k} = 0.$$

Z toho vyplýva $b = 0$ a $a = c$. Jedno z čísiel a, b, c môžeme zvoliť ľubovoľne. Zvoľme $a = 0$, potom $A = (0, 0, 0)$ a hľadaná asymptota je

$$X = O + \{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\}\,t.$$

Podobne zistíme pre $z = -\sqrt{t^2 - 2/t^2 - 1}$, že krivka má druhú asymptotu

$$X = O + \{1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2}\}\, t.$$

Príklad 2. Nájdime asymptoty krivky

$$(x^2 - y^2)^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0. \tag{6}$$

Riešenie. Rovnica (6) je rovnicou algebraickej krivky. Usporiadajme ľavú stranu rovnice (6) podľa klesajúcich mocnín x resp. y. Dostaneme

$$x^4 - x^2(2 + 2y^2) + y^4 - 2y^2 = 0$$

a

$$y^4 - y^2(2 + 2x^2) + x^4 - 2x^2 = 0.$$

Koeficienty pri najvyšších mocninách x, resp. y sú $\varphi(y) = 1$, $\psi(x) = 1$. Z toho vyplýva, že krivka nemá asymptoty rovnobežné so súradnicovými osami.

Položme $y = kx$ a dosaďme do rovnice (6). Po usporiadaní ľavej strany tejto rovnice podľa klesajúcich mocnín x dostávame

$$x^4(1 - k^2)^2 - x^2(1 + k^2) = 0.$$

Položme koeficient pri x^4 rovným nule, máme

$$(1 - k^2)^2 = 0,$$

odkiaľ

$$k_{1,2} = 1, \qquad k_{3,4} = -1.$$

Hľadajme preto asymptoty danej krivky v tvare $y = x + q$, resp. $y = -x + q$. Dosadením za y do rovnice (6) dostávame

$$(x^2 - x^2 - 2qx - q^2)^2 - 2x^2 - 2(x^2 + 2qx + q^2) = 0,$$

čiže

$$4x^2(q^2 - 1) + 4qx(q^2 - 1) + q^4 - 2q^2 = 0.$$

Položme koeficient pri x^2 rovným nule, dostaneme

$$4(q^2 - 1) = 0,$$

odkiaľ

$$q_{1,2} = \pm 1.$$

Podobne pre $y = -x + q$ by sme dostali $q_{3,4} = \pm 1$. Daná krivka má štyri asymptoty $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$, $y = -x - 1$ (pozri *obr. 15*).

Príklad 3. Nájdime asymptoty trisektrisy $\varrho = a/\cos 3\varphi$.

Riešenie. Pre $\alpha = (2k - 1)\, \pi/6$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ je $\cos 3\alpha = 0$ a limita z ϱ pre $\varphi \to \pi/6 -$ $[\varphi \to \pi/2 +, \varphi \to 5\pi/6 -, \varphi \to 7\pi/6 +, \varphi \to 3\pi/2 -, \varphi \to 11\pi/6 +]$ je ∞. Počítajme limitu

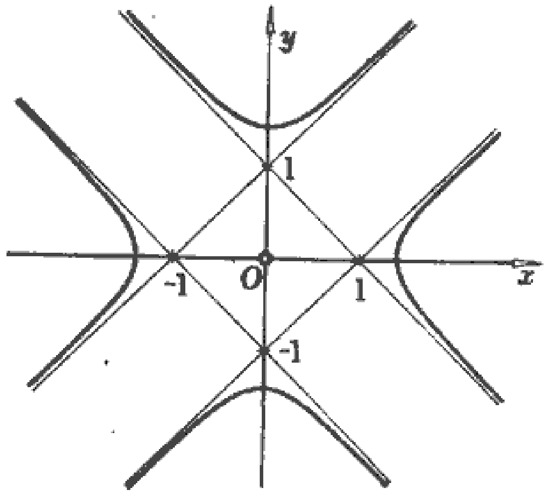
$$d = \lim_{\varphi \to \alpha} \frac{\varrho^2}{|\varrho'|} = \lim_{\varphi \to \alpha} \frac{a^2/\cos^2 3\varphi}{|\cos^{-2} 3\varphi\, (-3a \sin 3\varphi)|} = \frac{a}{3} \lim_{\varphi \to \alpha} \frac{1}{|\sin 3\varphi|} =$$

$$= \frac{a}{3\,|\sin 3\alpha|} = \frac{a}{3\,|\sin[(2k - 1)\, \pi/2]|} = \frac{a}{3}.$$

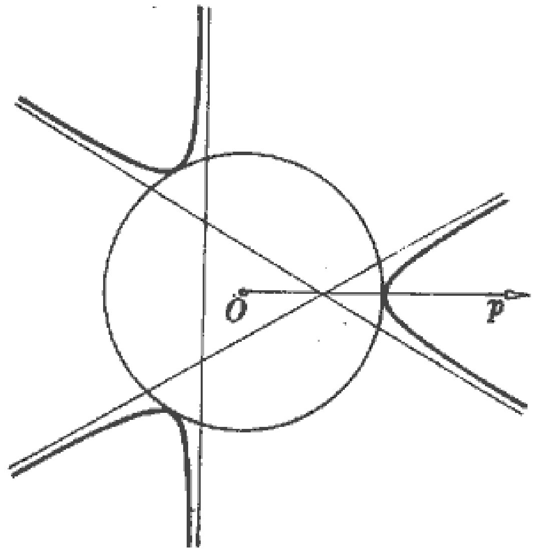
Z toho vyplýva, že všetky asymptoty majú rovnakú vzdialenosť od začiatku. Pretože vždy dve asymptoty splývajú (pre $\alpha = \pi/6$ a $\alpha = 7\pi/6$, atď. ...), namiesto šiestich asymptot dostaneme iba tri, pričom ich rovnice sú

$$\varrho \cos(\varphi - \pi/6) = a/3,$$
$$\varrho \cos(\varphi - \pi/2) = a/3,$$
$$\varrho \cos(\varphi - 5\pi/6) = a/3$$

(pozri *obr. 16*).



Obr. 15



Obr. 16

V úlohách **663** až **691** nájdite asymptoty kriviek:

663. $x = 1/t,\ y = t/(t + 1)$.

664. $x = 3t^3/(1 - 4t^2),\ y = (t - 8t^3)/(1 - 4t^2)$.

665. $x = 3at/(1 + t^3),\ y = 3at^2/(1 + t^3)$.

666. $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t}$.

667. $x = a \cosh t,\ y = b \sinh t$.

668. $x = a \sin t,\ y = a[\cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2)]$.

669. $\mathbf{r} = [t^2/(t - 1)]\,\mathbf{i} + [t/(t^2 - 1)]\,\mathbf{j}$.

670. $\mathbf{r} = [t/(1 - t^2)]\,\mathbf{i} + [t(1 - 2t^2)/(1 - t^2)]\,\mathbf{j}$.

671. $x^2 + y^2 = x^2y^2$.

672. $x^2y + xy^2 = a^2$.

673. $x^3 + y^3 - x^2 = 0$.

674. $y^3 - x^3 = x^2 + y^2$.

675. $x^3 + y^3 - 12xy = 0$.

676. $x^3 + x^2 + y^2x - 1 = 0$.

677. $x^4 + y^4 + x^2 + 2y^2 = 0$.

678. $x^4 - x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 - 1 = 0$.

679. $\varrho\varphi = a$.

680. $\varrho = a/\sqrt{\varphi}$.

681. $\varrho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

682. $\varrho = a/\varphi + b,\ b > 0$.

683. $\varrho = a \operatorname{cotg} 2\varphi$.

684. $\varrho = a/\sin \varphi + b,\ b > 0$.

685. $\varrho = 2a\,(\sin^2\varphi)/\cos\varphi$.

686. $x = 2t/(1 - t^2),\ y = t^2/(1 - t^2),\ z = (1 + t^2)/(1 - t^2)$.

687. $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = \operatorname{tgh} t$.

688. $x = 1/(2t),\ y = t/(t + 1),\ z = t/(t^2 - 1)$.

689. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ xyz = 1$.

690. $xy = 1,\ \ yz = 1$.

691. $x^3 + y^3 - 3axy = 0,\ z = x^2 + y^2$.

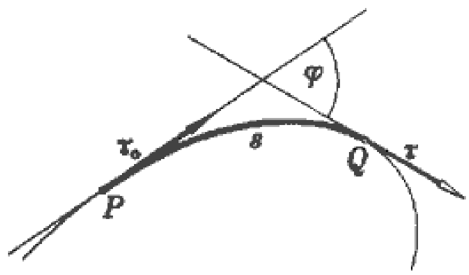
3,5. Krivosť rovinnej krivky. Inflexný bod

Nech krivka K v rovine má parametrickú rovnicu $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j},\ t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a nech je hladká v okolí $O(t_0)$ čísla $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

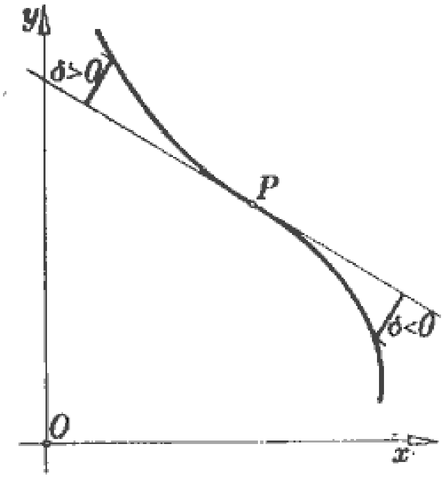
Krivosťou $k(P)$ krivky K v rovine v bode $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ nazývame číslo $k(P)$, ktorého absolútna hodnota je

$$|k(P)| = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{s(t)},^{*)}$$

kde $\varphi(t)$ je uhol $\sphericalangle[\boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\tau}(t_0)]$ vektorov**) dotyčníc v bodoch P a $Q = O + \boldsymbol{r}(t)$, $t \in O(t_0)$ a $s(t)$ je dĺžka časti krivky zodpovedajúcej intervalu $\langle t_0, t\rangle$ resp. $\langle t, t_0\rangle$ (*obr. 17*). Krivosť $k(P)$ krivky K je kladná [záporná], ak vektor $\boldsymbol{n}$ normály a krivka K v okolí bodu P ležia v jednej polrovine [dvoch polrovinách] určenej dotyčnicou krivky K v bode P.



Obr. 17



Obr. 18

Polomerom krivosti $r(P)$ krivky K v bode P nazývame číslo

$$r(P) = \frac{1}{|k(P)|}. \tag{1}$$

Nech krivka K má v každom bode $P = O + \boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ krivosť $k(P) = k(t)$. Bod $M = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ sa nazýva *vrcholom krivky* K, ak v čísle t_0 je $k'(t_0) = 0$ alebo $k'(t_0)$ neexistuje.

Inflexným bodom krivky K nazývame taký jej regulárny bod P, že v jeho ľubovoľnom okolí existujú body krivky, ktorých odchýlky od dotyčnice***) v bode P majú rôzne znamienka (*obr. 18*).

Veta 1. Nech krivka K má parametrickú rovnicu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Nech $\boldsymbol{r}'(t)$ a $\boldsymbol{r}''(t)$ sú v okolí čísla $t_0 \in (\alpha, \beta)$ spojité funkcie. Potom pre krivosť $k(P_0)$ krivky K v bode $P_0 = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ platí

$$k(P_0) = \frac{\overline{\boldsymbol{r}'(t_0)} \cdot \boldsymbol{r}''(t_0)}{|\boldsymbol{r}'(t_0)|^3}. \dagger) \tag{2}$$

Veta 2. Nech krivka K má parametrické rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, nech je hladká v okolí $O(t_0)$ čísla $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a nech funkcie $\varphi''(t)$ a $\psi''(t)$ sú tam spojité. Potom pre krivosť $k(P_0)$ krivky K v bode $P_0 = (x_0, y_0)$, kde $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, platí

$$k(P_0) = \frac{x_0' y_0'' - x_0'' y_0'}{\sqrt{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}}. \tag{3}$$

Veta 3. Ak krivka K v rovine má rovnicu $y = f(x)$ a $f''(x)$ je v čísle x_0 spojitá, potom pre krivosť $k(P)$ krivky K v bode $P_0 = (x_0, y_0)$ platí

$$k(P_0) = \frac{y_0''}{\sqrt{(1 + y_0'^2)^3}}. \tag{4}$$

*) Niekedy sa definuje krivosť $k(P)$ krivky K ako $k(P) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{s(t)}$

**) O uhle dvoch vektorov pozri 4,6/I.

***) O odchýlke bodu od priamky pozri 4,8/I.

†) Vektor $\overline{\boldsymbol{r}} = \{-y, x\}$, ak vektor $\boldsymbol{r} = \{x, y\}$ (pozri článok 3,3).

Veta 4. Ak krivka K v rovine je daná rovnicou $F(x, y) = 0$, bod $P = (x_0, y_0)$ je jej regulárny bod a druhé parciálne derivácie $F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ sú v bode P spojité, potom pre krivosť $k(P)$ krivky v bode P platí

$$k(P) = \frac{1}{\sqrt{(F'^2_x + F'^2_y)^3}} \begin{vmatrix} F''_{xx}, & F''_{xy}, & F'_x \\ F''_{yx}, & F''_{yy}, & F'_y \\ F'_x, & F'_y, & 0 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Veta 5. Ak krivka K je daná v polárnom súradnicovom systéme rovnicou $\varrho = f(\varphi)$ a ak $f''(\varphi)$ je spojitá funkcia v čísle φ_0, potom pre krivosť $k(P)$ krivky K v bode $P = (\varrho_0, \varphi_0)$ platí

$$k(P) = \frac{\varrho_0^2 + 2\varrho_0'^2 - \varrho_0\varrho_0''}{\sqrt{(\varrho_0^2 + \varrho_0'^2)^3}}. \tag{6}$$

Veta 6. Aby křivka K mala v bode $P = O + \mathbf{r}(t_0)$ inflexný bod, je nevyhnutné, aby krivosť $k(P) = 0$, alebo aby neexistovala.

Veta 7. Ak krivka K má v bode $P = O + \mathbf{r}(t_0)$ krivosť $k(P) = 0$ a existuje také okolie čísla t_0, že pre $t < t_0$ je $k(P) < 0$ [$k(P) > 0$] a pre $t > t_0$ je $k(P) > 0$ [$k(P) < 0$], potom bod P je inflexný bod krivky K.

Nech krivka K s rovnicou $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s)$, $s \in \langle a, b\rangle$ má v každom jej bode P krivosť $k(P)$ a polomer krivosti $r = r(P)$, pričom $k(P)$ [$r(P)$] je spojitá funkcia prirodzeného parametra s. Potom rovnicu

$$k = \Phi(s), \qquad [r = \Psi(s)] \tag{7}$$

nazývame *prirodzenou rovnicou krivky*.

Príklad 1. Nájdime krivosť cykloidy

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}, \qquad a > 0$$

v bode $P = O + \mathbf{r}(\pi)$.

Riešenie. Vypočítajme derivácie:

$$\mathbf{r}'(\pi) = a[(1 - \cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}]_{t=\pi} = 2a\mathbf{i},$$
$$\mathbf{r}''(\pi) = a\,[\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}]_{t=\pi} = -a\mathbf{j}.$$

Pretože $|\mathbf{r}'(\pi)| = 2a$ a $\overline{\mathbf{r}}'(\pi) = -0\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}$, podľa (2) máme

$$k(P) = \frac{2a\mathbf{j}\,.\,(-a\mathbf{j})}{(2a)^3} = -\frac{1}{4a}.$$

Príklad 2. Nájdime inflexné body krivky $xy^2 + x + y = 0$.

Riešenie. Počítajme parciálne derivácie funkcie $F(x, y) = xy^2 + x + y$. Máme

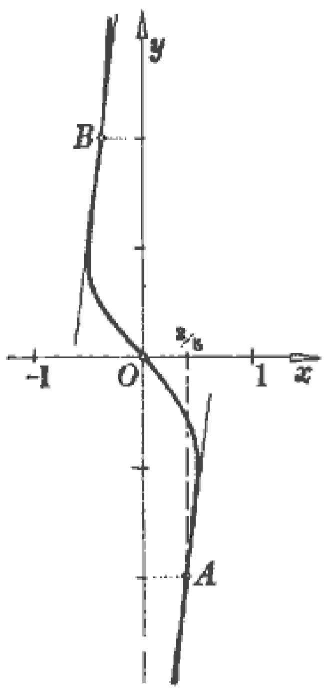
$$F'_x = y^2 + 1, \qquad F'_y = 2xy + 1,$$
$$F''_{xx} = 0, \qquad F''_{xy} = 2y, \qquad F''_{yy} = 2x.$$

Pretože pre každý bod $P = (x, y)$ roviny je $F'_x \neq 0$, všetky body krivky sú regulárne. Pre krivosť tejto krivky v jej ľubovoľnom bode $P = (x, y)$ platí

$$k(P) = \frac{1}{\sqrt{[(y^2 + 1)^2 + (2xy + 1)^2]^3}} \begin{vmatrix} 0, & 2y, & y^2 + 1 \\ 2y, & 2x, & 2xy + 1 \\ y^2 + 1, & 2xy + 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

Položme $k(P) = 0$, dostávame

$$2(y^2 + 1)(3xy^2 - x + 2y) = 0.$$



Obr. 19

Hľadané inflexné body nájdeme riešením systému

$$xy^2 + x + y = 0,$$
$$(y^2 + 1)(3xy^2 - x + 2y) = 0$$

alebo

$$xy^2 + x + y = 0,$$
$$3xy^2 - x + 2y = 0,$$

keďže $y^2 + 1 \neq 0$.

Násobením prvej rovnice -3 a pripočítaním k druhej máme

$$-4x - y = 0.$$

Z toho

$$y = -4x$$

a po dosadení do prvej rovnice systému dostaneme

$$16x^3 - 3x = 0.$$

Riešením tejto rovnice sú čísla $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}/4$, $x_3 = -\sqrt{3}/4$. Riešením daného systému sú dvojice: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}/4, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}/4, \sqrt{3})$. Nájdime dotyčnicu v bode $O = (0, 0)$, máme $y - 0 = -1(x - 0)$, čiže $y = -x$.

Pre $x > 0$ je $y = -x > -x - xy^3$ a body krivky sú pod dotyčnicou, pre $x < 0$ je $y = -x < -x - xy^2$ a body krivky sú nad dotyčnicou. Bod $O = (0, 0)$ je inflexný bod krivky. Podobne, možno ukázať, že aj body $A = (\sqrt{3}/4, -\sqrt{3})$, $B = (-\sqrt{3}/4, \sqrt{3})$ sú inflexné body krivky (pozri *obr. 19*).

V úlohách 692 až 699 nájdite krivosť k krivky v danom bode A.

692. $y = x^2 - x$, $A = (1, 0)$.

693. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $A = (1, 0)$.

694. $y = \ln x$, $A = (e, 1)$.

695. $y = \sin x$, $A = (\pi/2, ?)$.

696. $x = t^4 + 2t$, $y = 3t^3 - 2$, A má parameter $t_0 = 1$.

697. $(x - y)^2 = x^5 + 1$, $A = (0,1)$.

698. $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\sin^3 t\mathbf{j}$, A má parameter $t_0 = \pi/4$.

699. $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi$, $A = (0, a)$.

V úlohách 700 až 702 nájdite polomer krivosti ku krivke v danom bode.

700. $y = x^2$, $A = (2, 4)$.

701. $x^2 = 4py$, $A = (2p, p)$.

702. $y = \cos x$, $A = (\pi/4, \sqrt{2}/2)$.

V úlohách 703 až 718 nájdite krivosť krivky K v jej ľubovoľnom bode.

703. $y = a/x$.

704. $y = a\ln\cos(x/a)$.

705. Elipsy $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

706. $\mathbf{r}(t) = a(\ln \operatorname{tg} t/2 + \cos t)\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$.

707. Hyperboly $x = a\cosh t$, $y = b\sinh t$.

708. Evolventy kružnice $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

709. Cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

710. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

711. Epicykloidy resp. hypocykloidy $x = a(1 + m)\cos mt - am\cos(1 + m)t$, $y = a(1 + m)\sin mt - am\sin(1 + m)t$.

712. Semikubickej paraboly $3ay^2 = 2x^3$.

713. Konchoidy $xy^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2$.

714. Asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

715. Archimedovej špirály $\varrho = a\varphi$.

716. Logaritmickej špirály $\varrho = ae^{b\varphi}$.

717. Kardioidy $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$.

718. Lemniskáty $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

V úlohách 719 až 723 nájdite vrcholy krivky K a minimálny resp. maximálny polomer krivosti.

719. $y = x^2 - x$.

720. $y = \ln x$.

721. $x = at - b\sin t$,
$y = a - b\cos t$, $a > 0$, $b > 0$.

722. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$.

723. $\varrho = a\sin^3(\varphi/3)$.

724. Dokážte, že polomer krivosti reťazovky $y = a\cosh(x/a)$ v danom bode
a) je úmerný štvorcu y-ovej súradnice tohto bodu,
b) rovná sa dĺžke normály v tomto bode

725. Dokážte, že polomer krivosti cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ v ľubovoľnom jej bode rovná sa dvojnásobku dĺžky normály v tom istom bode.

726. Dokážte, že polomer krivosti logaritmickej špirály $\varrho = ca^{\varphi}$ v jej ľubovoľnom bode rovná sa dĺžke normály v tom bode.

V úlohách 727 až 734 nájdite všetky inflexné body daných kriviek.

727. $\boldsymbol{r} = (t^4 + 4t^3)\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$.

728. Skrátenej cykloidy (trochoidy) $x = at - b\sin t$, $y = a - b\cos t$, $a > b > 0$.

729. $x^3 + y^3 - x^2 = 0$.

730. $x^3 + y^3 + 6axy + a^3 = 0$.

731. $\varrho = a/\sqrt{\varphi}$.

732. $\varrho = 2a\cos\varphi + b$.

733. $\varrho\cos^3\varphi - 1 = 0$.

734. $\varrho + a(1 - \operatorname{tg}\varphi) = 0$.

735. Dokážte, že všetky inflexné body skrátenej cykloidy $x = at - b\sin t$, $y = a - b\cos t$, $a > b > 0$ ležia na jednej priamke.

736. Dokážte, že inflexné body všetkých konchoid $\varrho = a/\sin\varphi + l$, kde a je číslo a l je kladné číslo, ležia na Neilovej parabole $y^3 = 2ax^2$.

V úlohách 737 až 745 nájdite prirodzené rovnice krivky.

737. Reťazovky $y = a\cosh(x/a)$.

738. Semikubickej paraboly $y^2 = x^3$.

739. $y = -a\ln\cos(x/a)$.

740. Cykloidy $\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\boldsymbol{j}$.

741. Traktrisy $x = a\ln\operatorname{tg}(t/2) + a\cos t$, $y = a\sin t$.

742. Steinerovej krivky $x = 2a\cos t + a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

743. Logaritmickej špirály $\varrho = a^{\varphi}$.

744. Kardioidy $\varrho = 2a(1 - \cos\varphi)$.

745. Krivka K je daná prirodzenou rovnicou $r = f(s)$. Ukážte, že parametrická rovnica krivky je $\boldsymbol{r} = \int \cos \alpha(s)\,\mathrm{d}s\boldsymbol{i} + \int \sin \alpha(s)\,\mathrm{d}s\boldsymbol{j}$, kde $\alpha(s) = \int 1/r\,\mathrm{d}s$ je uhol dotyčnice krivky K s osou o_x.

V úlohách **746** až **748** je daná prirodzená rovnica krivky K, nájdite jej parametrické rovnice.

746. $r = ms$. **747.** $r = a + s^2/a^2$.

748. $r^2 + s^2 = 16a^2$.

3,6. Kružnica krivosti krivky. Evolúta, evolventa

Kružnicou krivosti krivky K v bode P budeme nazývať kružnicu, ktorú dostaneme ako limitnú polohu kružnice prechádzajúcej troma bodmi P, P_1, P_2, ktoré neležia na jednej priamke, ak P_1 a P_2 konvergujú k bodu P.

Kružnica krivosti krivky K v jej bode P:

1. má s krivkou K v bode P spoločnú dotyčnicu,
2. má v bode P krivosť rovnajúcu sa krivosti krivky K v bode P.

Stred S kružnice krivosti nazývame *stredom krivosti* a jej polomer je polomerom krivosti krivky v danom bode (pozri článok 3,5).

Ak je krivka K daná parametricky $\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, kde $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a v regulárnom bode $P = (x_0, y_0) = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ je krivosť $k(P) \neq 0$, potom pre stred krivosti $S = (m, n)$ a polomer krivosti r platí

$$m = x_0 - \frac{y_0'(x_0'^2 + y_0'^2)}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'},$$
$$n = y_0 + \frac{x_0'(x_0'^2 + y_0'^2)}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'}, \qquad (1)$$
$$r = \frac{1}{k(P)} = \frac{\sqrt{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}}{|x_0'y_0'' - x_0''y_0'|}.$$

Ak je krivka daná rovnicou $y = f(x)$, tak pre stred $S = (m, n)$ a polomer kružnice krivosti v bode $P = (x_0, y_0)$ platí

$$m = x_0 - \frac{y_0'(1 + y_0'^2)}{y_0''},$$
$$n = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \qquad (2)$$
$$r = \frac{\sqrt{(1 + y_0'^2)^3}}{|y_0''|}.$$

Poznámka. O strede krivosti pre krivku danú implicitne alebo v polárnych súradniciach pozri v úlohách **755** a **756**.

Príklad 1. Nájdime kružnicu krivosti krivky $y = \ln x$ v bode $P = (1, 0)$.

Riešenie. Keďže $y' = 1/x$ a $y'' = -1/x^2$, pre stred $S = (m, n)$ a polomer r kružnice krivosti podľa (2) dostaneme

$$m = 1 - \frac{1 + 1}{-1} = 3,$$
$$n = 0 + \frac{1 + 1}{-1} = -2,$$
$$r = \frac{\sqrt{(1 + 1)^3}}{|-1|} = 2\sqrt{2}.$$

Rovnica hľadanej kružnice krivosti je $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

Evolúta. Evolventa. Množinu všetkých stredov krivosti danej krivky K nazývame *evolútou krivky* K. Ak je krivka K daná parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, potom pre evolútu platí

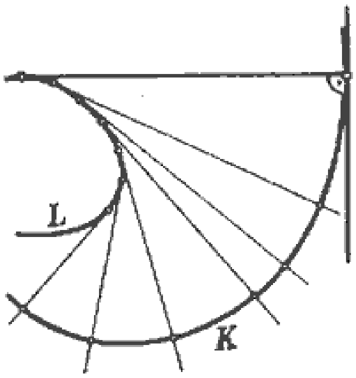
$$x = \varphi(t) - \frac{\psi'(t)[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]}{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}, \tag{3}$$
$$y = \psi(t) + \frac{\varphi'(t)\,[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]}{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}.$$

Poznámka. O rovnici evolúty krivky danej ináč ako parametricky pozri v úlohách 774 a 779.

Ak krivka L je evolútou krivky K, tak krivku K nazývame *evolventou krivky* L *(obr. 20)*.

Veta 1. Dotyčnica evolúty je normálou evolventy.

Veta 2. Ak oblúk K_1 evolventy neobsahuje vrcholy, tak dĺžka príslušného oblúka L_1 evolúty sa rovná rozdielu polomerov krivosti v koncových bodoch oblúka K_1 evolventy.



Obr. 20

Príklad 2. Nájdime rovnice evolúty krivky danej parametricky

$$x = t, \qquad y = t^2/2, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Riešenie. Počítajme deriváciе

$$\varphi'(t) = 1, \qquad \psi'(t) = t, \qquad \varphi''(t) = 0, \qquad \psi''(t) = 1.$$

Parametrické rovnice evolúty podľa (3) sú

$$x = t - \frac{t(1+t^2)}{1-0} = -t^3,$$
$$y = \frac{t^2}{2} + \frac{1(1+t^2)}{1-0} = \frac{3t^2}{2} + 1.$$

Vylúčením parametra t dostaneme rovnicu hľadanej evolúty v tvare

$$27x^2 = 8(y-1)^3.$$

V úlohách 749 až 754 nájdite kružnicu krivosti krivky K v bode P.

749. $x = t^2$, $P = (1, 1)$,
$y = t^3$.

750. $x = 2(t - \sin t)$, $P = (2\pi, 4)$,
$y = 2(1 - \cos t)$.

751. $x = \cos t + t \sin t$, $P = (\pi/2, 1)$,
$y = \sin t - t \cos t$.

752. $y = \sqrt{x}$, $P = (1, 1)$.

753. $y = e^x$, $P = (0, 1)$.

754. $y = \ln^2 x$, $P = (1, 0)$.

755. Dokážte, že pre stred krivosti $S = (m, n)$ krivky danej implicitne $F(x, y) = 0$ v jej regulárnom bode $P = (x_0, y_0)$, v ktorom $k(P) \neq 0$, platí

$$m = x_0 - \left[\frac{F'_x(F'^2_x + F'^2_y)}{F'^2_y F''_{xx} - 2F'_x F'_y F''_{xy} + F'^2_x F''_{yy}}\right]_{\substack{x = x_0\\ y = y_0}},$$
$$n = y_0 - \left[\frac{F'_y(F'^2_x + F'^2_y)}{F'^2_y F''_{xx} - 2F'_x F'_y F''_{xy} + F'^2_x F''_{yy}}\right]_{\substack{x = x_0\\ y = y_0}}$$

756. Dokážte, že pre stred S krivosti krivky, ktorá má rovnicu v polárnych súradniciach $\varrho = f(\varphi)$ a v regulárnom bode $P = (\varrho_0\ \varphi_0)$ má krivosť $k(P) \neq 0$, platí

$$S = O + \frac{\varrho_0(\varrho_0'^2 - \varrho_0\varrho_0'')}{\varrho_0^2 + 2\varrho_0'^2 - \varrho_0\varrho_0''}\,\mathbf{e}(\varphi_0) + \frac{\varrho_0'(\varrho_0^2 + \varrho_0'^2)}{\varrho_0^2 + 2\varrho_0'^2 - \varrho_0\varrho_0''}\,\bar{\mathbf{e}}(\varphi_0).$$

V úlohách 757 až 760 nájdite stred krivosti krivky K v bode P.

757. $xy = a^2$, $P = (a, a)$.

758. $y^2 = x^2 \dfrac{a + x}{a - x}$, $P = (-a, 0)$.

759. $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$, $P = (\pi/2, a)$.

760. $\varrho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $P = (\pi/3, a/8)$.

V úlohách 761 až 765 nájdite kružnicu krivosti danej krivky v jej bode P.

761. Descartesov list $x^3 + y^3 - 6xy = 0$, $P = (3, 3)$.

762. Lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$, bod P je jej vrchol.

763. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $P = (a/4, a/4)$.

764. Archimedova špirála $\varrho = a\varphi$, $P = (0, 0)$.

765. Logaritmická špirála $\varrho = c\,e^{a\varphi}$, $P = (\pi/2, c\,e^{a\pi/2})$.

V úlohách 766 až 773 nájdite evolúty daných kriviek.

766. Elipsa $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

767. Hyperbola $x = a\cosh t$, $y = b\sinh t$.

768. Cykloida $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

769. Evolventa kružnice $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

770. $y = x^5$. **771.** $y = \ln x$.

772. $y = \sin x$. **773.** $y = a\cosh(x/a)$.

774. Nájdite rovnicu evolúty krivky K v rovine, ak jej rovnica je $F(x, y) = 0$.

V úlohách 775 až 778 nájdite evolútu danej krivky:

775. Paraboly $y^2 = 2px$.

776. Asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

777. Dioklovej kissoidy $x^3 - y^2(2a - x) = 0$.

778. Traktrisy $x = a\ln[(a + \sqrt{a^2 - y^2})/y] - \sqrt{a^2 - y^2}$.

779. Nájdite rovnicu evolúty krivky v rovine, ktorá má rovnicu $\boldsymbol{r} = f(\varphi)\,\boldsymbol{e}(\varphi)$.

V úlohách 780 až 783 nájdite evolútu danej krivky:

780. Archimedovej špirály $\varrho = a\varphi$.

781. Logaritmickej špirály $\varrho = a\,e^{m\varphi}$

782. Kardioidy $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$.

783. Nájdite evolútu kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

784. Akú podmienku musí spĺňať parameter a logaritmickej špirály $\varrho = ca^{\varphi}$, aby jej evolúta bola tá istá špirála.

785. Dokážte, že evolúta epicykloidy (hypocykloidy) je opäť epicykloida (hypocykloida) podobná danej krivke s koeficientom podobnosti $1/(1 + 2m)$ a otočená vzhľadom na danú krivku o uhol $m\pi$. (Pre hypocykloidu je $m < 0$.)

3,7. Singulárne body kriviek

A. Nech krivka K má parametrickú rovnicu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Bod $P = O + \boldsymbol{r}(t_0)$ nazývame *singulárnym bodom* krivky K, ak $\boldsymbol{r}'(t_0) = \boldsymbol{o}$ alebo $\boldsymbol{r}'(t_0)$ neexistuje.

Ak v bode P je $\boldsymbol{r}'(t_0) = \boldsymbol{r}''(t_0) = \ldots = \boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0) = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0) \neq \boldsymbol{o}$, potom bod P sa nazýva *nepodstatne singulárnym bodom*.

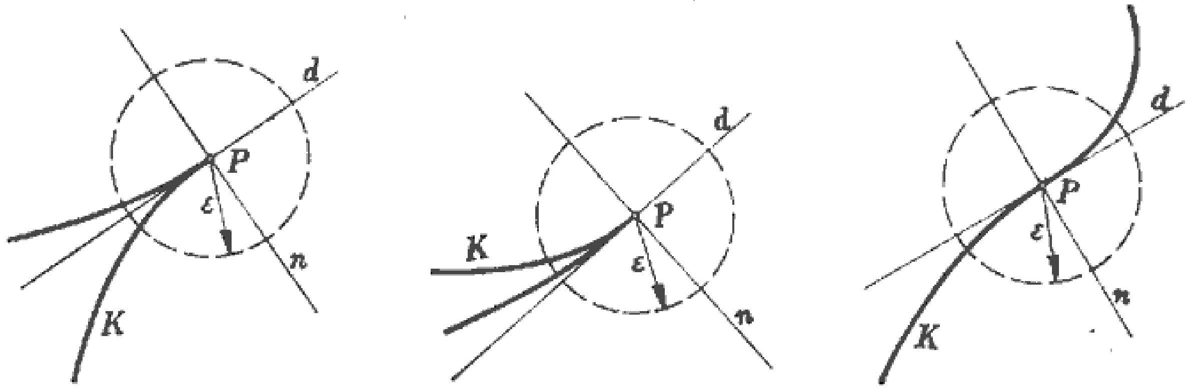
Rovnica dotyčnice ku krivke K v nepodstatne singulárnom bode P je

$$X = P + \bar{\mathbf{r}}^{(n)}(t_0)\, t^{*})\tag{1}$$

Rovnica normály ku krivke K v rovine v nepodstatne singulárnom bode P je

$$X = P + \mathbf{r}^{(n)}(t_0)\, t, \quad t \in (-\infty, \infty).\tag{2}$$

Nepodstatne singulárny bod P krivky K v rovine je *bodom vratu* prvého [druhého] druhu, ak v každom dostatočne malom okolí $O_\varepsilon(P)$ bodu P ležia body krivky K po oboch stranách [po jednej strane] dotyčnice**) a po jednej strane normály ku krivke K v bode P *(obr. 21a, 21b)*.



Obr. 21

Nepodstatne singulárny bod krivky K v rovine je *inflexným* [obyčajným] *bodom* krivky K, ak v každom dostatočne malom okolí $O_\varepsilon(P)$ bodu P, ležia body krivky K po oboch stranách [po jednej strane] dotyčnice a po oboch stranách normály ku krivke K v bode P *(obr. 21c)*.

Veta 1. Nech n je rád prvej nenulovej derivácie $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$ a p je rád prvej z derivácií $\mathbf{r}^{(p)}(t_0)$, $p > n$, pre ktorú je $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \cdot \mathbf{r}^{(p)}(t_0) \neq 0$ v bode $P = O + \mathbf{r}(t_0)$ krivky K. Ak n je párne číslo, potom pre p nepárne [párne] je bod P bodom vratu prvého [druhého] druhu. Ak n je nepárne číslo, potom pre p nepárne [párne] je bod P inflexný [obyčajný] bod krivky K.

Príklad 1. Nájdime a preskúmajme singulárne body krivky K s rovnicou $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + (t^4 + t^5)\,\mathbf{j}$.

Riešenie. Hľadajme singulárne body krivky K. Keďže derivácia $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (4t^3 + 5t^4)\,\mathbf{j}$ existuje pre každé číslo $t \in (-\infty, \infty)$, krivka K môže mať iba nepodstatné singulárne body. Položme $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{o}$, čiže

$$2t\mathbf{i} + (4t^3 + 5t^4)\,\mathbf{j} = \mathbf{o}.$$

Z toho máme jediné riešenie $t_0 = 0$. Počítajme vyššie derivácie funkcie $\mathbf{r}$, dostaneme $\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + (12t^2 + 20t^3)\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'''(t) = (24t + 60t^2)\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}^{(4)}(t) = (24 + 120t)\,\mathbf{j}$. V bode $P = O + \mathbf{r}(0)$ je $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{r}''(0) = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{r}'''(0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{r}^{(4)}(0) = 24\mathbf{j}$. Ďalej je $\mathbf{r}''(0) \cdot \overline{\mathbf{r}'''(0)} = 0$, $\mathbf{r}''(0) \cdot \overline{\mathbf{r}^{(4)}(0)} = 2\mathbf{i}$ $(-24\mathbf{i}) = -48$, čiže $n = 2$ a $p = 4$.

Krivka K má jediný singulárny bod $P = (0, 0)$, ktorý je bodom vratu druhého druhu.

B. Nech krivka K v rovine je daná rovnicou $F(x, y) = 0$.

Bod $M = (x_0, y_0)$, pre ktorý platí

$$F(M) = 0, \quad \frac{\partial F(M)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(M)}{\partial y} = 0,\tag{3}$$

pričom v istom okolí bodu M je aspoň jedna z týchto derivácií rôzna od nuly, nazývame *singulárnym bodom implicitne danej krivky K*.

Nech v singulárnom bode $M = (x_0, y_0)$ krivky K s rovnicou $F(x, y) = 0$ existujú parciálne derivácie n-tého rádu funkcie $F(x, y)$, pričom všetky parciálne derivácie nižších rádov ako n

*) O vektore $\bar{\mathbf{r}}$ pozri článok 3,5.

**) Kvôli jednoduchosti hovoríme o stranách dotyčnice resp. normály, pričom pod tým rozumieme polroviny určené dotyčnicou resp. normálou.

sa v bode M rovnajú nule a aspoň jedna z n-tých parciálnych derivácií v bode M je rôzna od nuly. Potom bod M nazývame *n-násobným bodom krivky K.*

Nech v ľubovoľnom okolí n-násobného bodu M krivky K ležia body krivky K. *Dotyčnicou* krivky K v bode M nazývame priamku, ktorá prechádza bodom M a pre jej uhol α s osou o_x platí

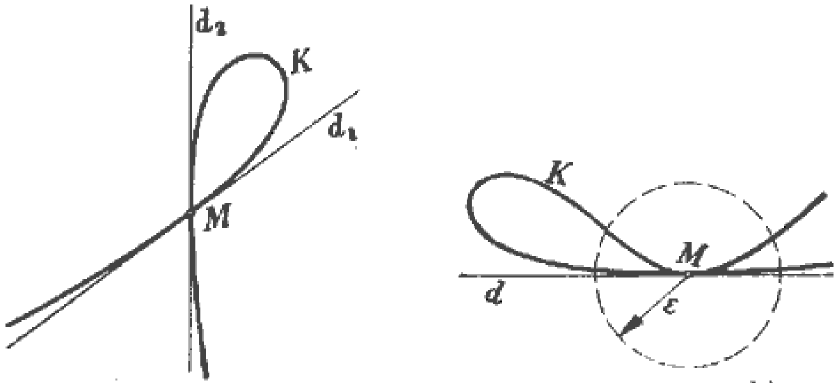
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right]^n F(M) = 0.^{*)} \tag{4}$$

Priamku kolmú na dotyčnicu krivky K v n-násobnom bode M nazývame *normálou krivky K* v n-násobnom bode M.

Nech krivka K má v dvojnásobnom bode M dve rôzne dotyčnice, potom bod M nazývame *uzlom* [*uzlovým bodom*] (*obr. 22a*). Ak krivka K nemá v dvojnásobnom bode M dotyčnicu, nazývame bod M *izolovaným bodom*. Nech krivka K má v dvojnásobnom bode M jedinú dotyčnicu, potom bod M nazývame:

a) *bodom vratu prvého* [*druhého*] *druhu*, ak v každom dostatočne malom okolí $O_\varepsilon(M)$ bodu M ležia body krivky K po oboch stranách dotyčnice [po jednej strane dotyčnice] a po jednej strane normály v bode M;

b) *bodom samodotyku*, ak v každom dostatočne malom okolí $O_\varepsilon(M)$ bodu M ležia body krivky po jednej alebo oboch stranách dotyčnice a po oboch stranách normály v bode M (*obr. 22b*).



a) *Obr. 22* *b)*

Veta 2. Nech krivka K s rovnicou $F(x, y) = 0$ má v bode M dvojnásobný bod. Ak je $\Delta = F''_{xx}(M) \cdot F''_{yy}(M) - F''^{2}_{xy}(M)$ záporné, bod M je uzol. Ak je Δ kladné, bod M je izolovaný bod. Ak $\Delta = 0$, bod M môže byť bodom vratu prvého alebo druhého druhu, ďalej bodom samodotyku alebo izolovaným bodom krivky K.

Ak krivka K s rovnicou $F(x, y) = 0$ je algebrická krivka, ktorá má v začiatku O súradnicového systému regulárny bod, potom rovnicu dotyčnice v bode O ku krivke K dostaneme z rovnice $F(x, y) = 0$ vypustením všetkých členov, ktorých stupeň je vyšší ako 1. Ak najnižší stupeň n-členov polynómu $F(x, y)$ je vyšší ako 1, potom je začiatok O súradnicového systému n-násobným bodom krivky K. Rovnice dotyčníc v bode O, ktorý je n-násobným bodom krivky K, dostaneme z rovnice $F(x, y) = 0$ vypustením všetkých členov stupňa vyššieho ako n.

Príklad 2. Nájdime singulárne body krivky s rovnicou

$$x^3 + 6x^2 - y^2 + 9x + 8y - 12 = 0. \tag{5}$$

Riešenie. Pre singulárne body danej krivky musí podľa (3) platiť

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= x^3 + 6x^2 - y^2 + 9x + 8y - 12 = 0,\\ F'_x(x, y) &= 3x^2 + 12x + 9 = 0,\\ F'_y(x, y) &= -2y + 8 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

*) Význam uvedeného symbolu pozri v článku 1,7

Riešením posledných dvoch rovníc systému (6) je $x_1 = -1$, $y_1 = 4$ a $x_2 = -3$, $y_2 = 4$. Dosadením do prvej rovnice systému (6) zistíme, že iba dvojica $(-1, 4)$ je riešením systému (6), totiž

$$F(-1, 4) = -1 + 6 - 16 - 9 + 32 - 12 = 0,$$
$$F(-3, 4) = -27 + 54 - 16 - 27 + 32 - 12 = 4 \neq 0.$$

Singulárny bod danej krivky K je teda bod $M = (-1, 4)$. Zistime, o aký singulárny bod ide. Počítajme preto druhé parciálne derivácie funkcie $F(x, y)$ v bode M, máme

$$F''_{xx} = 6x + 12, \qquad F''_{xy} = 0, \qquad F''_{yy} = -2$$

a

$$F''_{xx}(M) = 6, \qquad F''_{xy}(M) = 0, \qquad F''_{yy}(M) = -2.$$

Keďže $\Delta = 6(-2) - 0^2 = -12 < 0$, singulárny bod M je uzol. Nájdime ešte dotyčnice v tomto bode M. Podľa (4) máme

$$6 \cos^2 \alpha + 2 \,.\, 0 \,.\, \cos \alpha \sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0$$

alebo

$$3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0.$$

Z tejto rovnice vyplýva, že $\alpha \neq (2k + 1)\,\pi/2$, kde k je celé číslo. Pre smernicu dotyčnice $k = \operatorname{tg} \alpha$, v bode M platí

$$3 - k^2 = 0,$$

odtiaľ

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{3}.$$

Rovnice dotyčníc v uzle M sú

$$\sqrt{3}\,x - y + \sqrt{3} + 4 = 0,$$
$$\sqrt{3}\,x + y + \sqrt{3} - 4 = 0.$$

Príklad 8. Nájdime singulárne body trojlístka s rovnicou $(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0$.

Riešenie. Daná krivka je algebraická krivka a prechádza začiatkom O pravouhlého súradnicového systému. Najnižší stupeň členov polynómu na ľavej strane rovnice je 3, preto začiatok O je trojnásobným bodom danej krivky. Dotyčnice v tomto bode nájdeme z podmienky

$$ax(x^2 - y^2) = 0.$$

Z toho dostaneme

$$x = 0, \qquad x - y = 0, \qquad x + y = 0.$$

Daná krivka má v začiatku tri vetvy, ktorých dotyčnice v začiatku O majú uvedené rovnice. Ľahko môžeme zistiť z podmienok (3), že iné singulárne body krivka nemá.

V úlohách **786** až **792** nájdite singulárne body daných kriviek.

786. $\boldsymbol{r} = (3t^3 - t^5)\,\boldsymbol{i} + (t^4 + t^3)\,\boldsymbol{j}$.

787. $\boldsymbol{r} = [4t(t - 1)]\,\boldsymbol{i} + [16t^3(t - 1)^2]\,\boldsymbol{j}$.

788. $\boldsymbol{r} = [t^5 + t^6]\,\boldsymbol{i} + [t^5 + 2t^3]\,\boldsymbol{j}$.

789. $\boldsymbol{r} = [5t^2/(1 + t^5)]\boldsymbol{i} + [5t^3/(1 + t^5)]\,\boldsymbol{j}$.

790. $\boldsymbol{r} = \sin t\boldsymbol{i} + \sin^2 t \cos t\,\boldsymbol{j}$.

791. $\boldsymbol{r} = [t^2/(1 - 2t)]\,\boldsymbol{i} + [t^3/(1 - 2t)]\,\boldsymbol{j}$.

792. $\boldsymbol{r} = [(t + 1)^2/t^2]\,\boldsymbol{i} + [(t + 1)^4/t^3]\,\boldsymbol{j}$.

V úlohách **793** až **795** nájdite singulárne body danej krivky a nájdite rovnice dotyčníc v týchto bodoch.

793. $\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\,\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j}$ (cykloida).

794. $\boldsymbol{r} = a[(2 \cos t + \cos 2t)\,\boldsymbol{i} + (2 \sin t - \sin 2t)\,\boldsymbol{j}]$ (Steinerova krivka).

795. $\boldsymbol{r} = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)\,\boldsymbol{i} + a \sin t\boldsymbol{j}$ (traktrisa).

V úlohách 796 až 809 nájdite singulárne body implicitne daných kriviek.

796. $y^2 = x^3$.

797. $y^2 = x(x-1)^2$.

798. $y^2 = bx^3 + ax^2$.

799. $x^3 + y^3 - xy = 0$.

800. $4x^2(x^2 - 4) + y^4 = 0$.

801. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

802. $2xy^3 - y^4 - x(y - x)^2 = 0$.

803. $x^4 - 2ax^2y + 2ay^3 + a^2y^2 = 0$.

804. $(y^2 - x^2)^2 - x^5 = 0$.

805. $(x^2 + y^2)^3 - a^2x^4 = 0$.

806. $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2$.

807. $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2 - a^4x^2 = 0$.

808. $x^x = y^y$

809. $x^y = y^x$.

810. Pre aké hodnoty a, b má krivka $y^2 = x^3 + ax + b$ dvojnásobný bod?

V úlohách 811 až 815 nájdite dvojnásobné body daných kriviek a určte charakter týchto bodov, ako aj dotyčnice v týchto bodoch.

811. $x^3 - 2x^2 + x - y^2 = 0$.

812. $x^3 + 2y^2 - y^3 - 3x - y + 2 = 0$.

813. $y^2 + x^4 - x^6 = 0$.

814. $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ *(Bernoulliho lemniskáta)*.

815. $y^2 - x^2(x + m)^2 = 0$.

816. Nájdite singulárne body Pascalovej závitnice, ktorá má v pravouhlom súradnicovom systéme rovnicu

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Preskúmajte jej singulárne body pre $b > 2a$, $b = 2a$, $b < 2a$ a narysujte túto krivku.

3,8. Obálka systému kriviek

Hovoríme, že dve krivky sa navzájom dotýkajú v bode P, ak majú v tomto bode spoločnú dotyčnicu.

Nech funkcia $F(x, y, \alpha)$ je definovaná pre každý bod (x, y) z dvojrozmernej oblasti D a pre každé číslo α z množiny M.

Nech ku každej hodnote $\alpha \in M$ je priradená rovinná [priestorová] krivka K_α, ktorej rovnica je $F(x, y, \alpha) = 0$ [rovnice sú $F(x, y, z, \alpha) = 0$, $G(x, y, z, \alpha) = 0$]. Množinu $S\{K_\alpha\}$ všetkých kriviek, $\alpha \in M$, nazývame *jednoparametrickým systémom kriviek*. Číslo α nazývame *parametrom* a rovnicu $F(x, y, \alpha) = 0$ [rovnice $F(x, y, z, \alpha) = 0$, $G(x, y, z, \alpha) = 0$] rovnicou [rovnicami] *jednoparametrického systému kriviek*.

Krivku K nazývame *obálkou* jednoparametrického systému kriviek $S\{K_\alpha\}$, ak:

1. pre každý bod krivky K existuje krivka $K_\alpha \in S\{K_\alpha\}$, ktorá sa dotýka krivky K v tomto bode,

2. pre každú krivku $K_\alpha \in S\{K_\alpha\}$ existuje na krivke K bod, v ktorom sa krivka K_α dotýka krivky K,

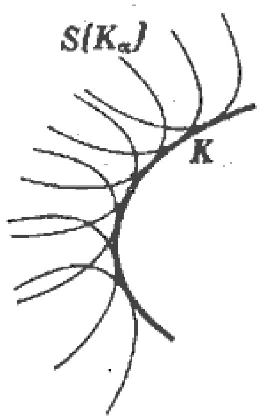
3. pre ľubovoľné okolie $O_\delta(P)$ dotykového bodu P krivky K a K_{α_0}, $K_{\alpha_0} \neq K$ existuje také okolie $O(\alpha_0)$, že každá krivka K_α, $\alpha \in O(\alpha_0)$ má dotykový bod s krivkou K v okolí $O_\varepsilon(P)$ *(obr. 23)*.

Veta 1. Nech funkcia $F(x, y, \alpha)$ má spojité parciálne derivácie F'_x, F'_y, F'_α na trojrozmernej oblasti Ω, pričom $(x, y, \alpha) \in \Omega$, ak $(x, y) \in D$ a $\alpha \in M$. Ak systém kriviek $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in M$ má obálku K, ktorej rovnice sú $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, $\alpha \in M$, pričom $\varphi'(\alpha)$ a $\psi'(\alpha)$ sú spojité funkcie na množine M, tak funkcie $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, kde $\alpha \in M$ vyhovujú rovniciam

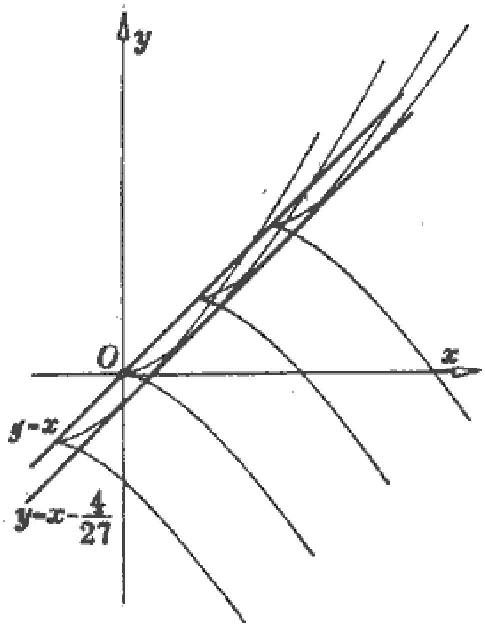
$$F(x, y, \alpha) = 0,$$
$$F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{1}$$

Veta 2. Ak systém rovníc (1) nemá riešenie tvaru $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, $\alpha \in M$, potom jednoparametrický systém kriviek o rovnici $F(x, y, \alpha) = 0$ nemá obálku.

Veta 3. Nech funkcia $F(x, y, \alpha)$ spĺňa predpoklady z vety 1 a žiadna z kriviek $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in M$ nemá singulárne body. Nech v rovniciach $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, $\alpha \in N \subset M$ určených rovnicami (1) majú funkcie $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ spojité derivácie na množine N. Ak krivka K_1 určená týmito rovnicami nemá singulárne body na množine N, tak je obálkou systému $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in N$.



Obr. 23



Obr. 24

Poznámka 1. Množinu všetkých bodov určenú rovnicami (1) nazývame *diskriminantnou krivkou* systému $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in M$. Táto množina môže byť: 1. obálkou; 2. množinou singulárnych bodov systému kriviek $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in M$; 3. čiastočne obálkou a čiastočne množinou singulárnych bodov systému kriviek $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in M$.

Poznámka 2. Implicitný tvar rovnice obálky systému kriviek $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in M$ možno dostať vylúčením parametra α zo systému rovníc (1).

Príklad 1. Nájdime obálku jednoparametrického systému parabol

$$y = \alpha(x - \alpha)^2, \qquad -\infty < \alpha < \infty. \tag{2}$$

Riešenie. Položme $F(x, y, \alpha) = y - \alpha(x - \alpha)^2$. Funkcia $F(x, y, \alpha)$ troch premenných x, y, α je spojitá na celom priestore E_3 a má tam spojité parciálne derivácie

$$F'_x = -2\alpha(x - \alpha), \qquad F'_y = 1, \qquad F'_\alpha = -(x - \alpha)^2 + 2\alpha(x - \alpha).$$

Rovnicu obálky systému parabol (2) dostaneme podľa vety 1 vylúčením parametra α z rovníc

$$y - \alpha(x - \alpha)^2 = 0, \tag{3}$$
$$(x - \alpha)^2 - 2\alpha(x - \alpha) = 0. \tag{4}$$

Z rovnice (4) dostaneme

$$x = \alpha, \qquad x = 3\alpha.$$

Po dosadení do rovnice (3) máme

$$y = 0, \qquad y = 4\alpha^3.$$

Riešením systému rovníc (3), (4) je

$$x = \alpha, \qquad y = 0$$

a

$$x = 3\alpha, \qquad y = 4\alpha^3, \qquad \alpha \in (-\infty, \infty).$$

Vylúčením parametra α dostaneme rovnicu priamky $y = 0$ a rovnicu kubickej paraboly $y = 4x^3/27$.

Keďže $F'_y = 1 \neq 0$, pre každý bod oboch kriviek, krivky nemajú singulárne body. Podľa vety (3) je priamka $y = 0$ a kubická parabola $y = 4x^3/27$ obálkou daného jednoparametrického systému parabol.

Príklad 2. Nájdime obálku jednoparametrickej sústavy semikubických parabol

$$(y - \alpha)^2 = (x - \alpha)^3, \qquad -\infty < \alpha < \infty. \tag{5}$$

Riešenie. Položme $F(x, y, \alpha) = (y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3$. Funkcia $F(x, y, \alpha)$ je spojitá na celom priestore E_3 a má tam spojité parciálne derivácie $F'_x = -3(x - \alpha)^2$, $F'_y = 2(y - \alpha)$ a $F'_\alpha = -2(y - \alpha) + 3(x - \alpha)^2$.

Rovnicu obálky systému kriviek (5) nájdeme z rovníc

$$\begin{aligned} (y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3 &= 0, \\ -2(y - \alpha) + 3(x - \alpha)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Odtiaľ je $x - \alpha = 0$, $y - \alpha = 0$ a $x - \alpha = 4/9$, $y - \alpha = 8/27$. Vylúčením parametra α dostaneme

$$y = x, \qquad y = x - 4/27.$$

V každom bode priamky $y = x$ je $F'_x(x, y, \alpha) = -3(x - \alpha) = 0$, $F'_y(x, y, \alpha) = 2(y - \alpha) = 0$. Preto priamka $y = x$ je množina singulárnych bodov systému (5).

V každom bode priamky $y = x - 4/27$ je $F'_x(x, y, \alpha) = -3(x - \alpha)^2 = -16/27 \neq 0$, preto priamka $y = x - 4/27$ je obálkou systému parabol (5). (Pozri *obr. 24*.)

V úlohách 817 až 823 nájdite obálku jednoparametrického systému kriviek.

817. $bx + ay = ab$, kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré platí $a + b = c$, $c = \text{const}$.

818. $bx + ay = ab$, kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$, $c = \text{const}$.

819. $(x - a)^2 + y^2 = a^2/2$, $a \in (-\infty, \infty)$.

820. $(x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = 0$, $r > 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

821. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, kde $a > 0$, $b > 0$ sú reálne čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = 1$.

822. $y = \alpha^2(x - \alpha)^2$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

823. $y - (x - \alpha)^3 = 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

824. Nájdite obálku jednoparametrického systému priamok $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, ak p je diferencovateľnou funkciou parametra α.

V úlohách 825 až 828 nájdite obálku množiny všetkých kružníc, ktorých stredy ležia na danej krivke K a prechádzajú bodom P.

825. $y^2 = 2px$, $P = (0, 0)$

826. $x^2 + y^2 = a^2$, $P = (a, 0)$.

827. $x^2 - y^2 = a^2$, $P = (0, 0)$.

828. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $P = (0, 0)$.

829. Nájdite obálku systému kružníc, ktoré majú stred na hyperbole $xy = a^2$ a dotýkajú sa osi o_x.

830. Daná je elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Nájdite obálku jednoparametrickej sústavy kružníc, ktorých priemermi sú všetky tetivy elipsy rovnobežné s osou o_y.

831. Nájdite obálku množiny všetkých súosových elíps, ktoré majú konštantný súčet dĺžok polosí.

832. Nájdite obálku všetkých priamok, ktoré spolu so súradnicovými osami vytvárajú trojuholník s plošným obsahom P.

833. Nájdite obálku množiny všetkých polôh priamky, ktorá sa rovnomerne otáča s uhlovou rýchlosťou ω okolo bodu $P = (x, 0)$, pričom tento bod sa pohybuje rovnomerne po osi o_x rýchlosťou c.

V úlohách **834** až **837** nájdite diskriminantné krivky jednoparametrického systému kriviek a preskúmajte ich charakter.

834. Kubických parabol $y = (x - c)^3$, $c \in (-\infty, \infty)$.

835. Asteroid $(x - c)^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a = \text{const}$, $c \in (-\infty, \infty)$.

836. Strofoid $(x + a)(y - c)^2 = x^2(a - x)$, $a = \text{const}$, $c \in (-\infty, \infty)$.

837. Steinerových kriviek $(x^2 + y^2)^2 + 8a(x \cos c - y \sin c)[x^2(3 \sin^2 c - 1) - 3xy \sin 2c + 3y^2 \cos^2 c] + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0$, $c \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

838. Ukážte, že evolúta krivky je obálkou systému jej normál. Na základe tohto nájdite evolútu paraboly $y^2 = 2px$.

839. Nech funkcie $\varphi(t, \alpha)$, $\psi(t, \alpha)$ majú spojité prvé parciálne derivácie na oblasti Ω určenej nerovnosťami $a \leqq t \leqq b$, $c \leqq \alpha \leqq d$. Potom $\boldsymbol{r} = \varphi(t, \alpha)\,\boldsymbol{i} + \psi(t, \alpha)\,\boldsymbol{j}$ je rovnica jednoparametrického systému kriviek. Ukážte, že pre obálku systému platí $\boldsymbol{r} = \varphi(t, \alpha)\,\boldsymbol{i} + \psi(t, \alpha)\,\boldsymbol{j}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = 0$.

V úlohách **840** až **843** nájdite obálky nasledujúcich jednoparametrických systémov kriviek.

840. $\boldsymbol{r} = (2 \cos t + 3 \cos \alpha)\,\boldsymbol{i} + (2 \sin t + 3 \sin \alpha)\,\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

841. Steinerových kriviek $\boldsymbol{r} = [2a \cos (t + \alpha) + a \cos (2t - \alpha)]\,\boldsymbol{i} + [2a \sin (t + \alpha) - a \sin (2t - \alpha)]\,\boldsymbol{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

842. Elíps $\boldsymbol{r} = \alpha \cos t\,\boldsymbol{i} + (a - \alpha) \sin t\,\boldsymbol{j}$.

843. Semikubických parabol $\boldsymbol{r} = (t^2 + \alpha)\,\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$.

Katakaustikou krivky K nazývame obálku všetkých odrazených lúčov, ktoré dopadajú rovnobežne na danú krivku K.

V úlohách **844** až **847** nájdite katakaustiku krivky K, ak sú dopadajúce lúče rovnobežné s osou o_x.

844. $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqq 0$.

845. $x^2 = 2py$, $x \geqq 0$.

846. $y = a \ln (x/a)$.

847. $x = 2a \cos t + a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ (Steinerova krivka).

Diakaustikou krivky K nazývame obálku všetkých lomených lúčov, ktoré dopadajú z daného bodu P na krivku K.

848. Nájdite dikaustiku krivky K, ak dopadajúce lúče vychádzajú z bodu $P = (a, 0)$ a krivka K je os o_y s rovnicou $x = 0$.

849. Nájdite obálku dráh striel vystrelených začiatočnou rýchlosťou v_0 pod rôznymi elevačnými uhlami z daného miesta.

3,9. Sprievodný trojhran

Nech krivka K má parametrické vyjadrenie $u = r(t)$ a bod $P = (x_0, y_0, z_0) = O + r(t_0)$ je jej regulárny bod, t. j. $r'_0 = r'(t_0) = x'_0 i + y'_0 j + z'_0 k \neq o$. Nech ďalej platí $r''_0 = r''(t_0) = x''_0 i + y''_0 j + z''_0 k \neq o$ a $r'(t_0) \times r''(t_0) \neq o$.

Rovnica dotyčnice*) krivky K v bode P je

$$X = P + t r'_0, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

alebo

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}, \tag{2}$$

kde $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod dotyčnice.

Každú priamku, ktorá prechádza bodom P a je kolmá na dotyčnicu krivky v bode P, nazývame *normálou* krivky v bode P.

Normálová rovina krivky K v bode P je rovina, ktorá je kolmá na dotyčnicu krivky K v bode P a prechádza bodom P. Jej rovnica je

$$(X - P) \cdot r'_0 = 0 \tag{3}$$

alebo

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0, \tag{4}$$

kde $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod normálovej roviny.

Nech dva rôzne body $P_1 = O + r(t_1)$, $P_2 = O + r(t_2)$, $t_1 \neq t_0$, $t_2 \neq t_0$ sú z okolia bodu P a nech body P, P_1, P_2 určujú rovinu. *Oskulačnou rovinou* krivky K v bode P nazývame limitnú polohu roviny $\sigma(P, P_1, P_2)$ pre $P_1 \to P$, $P_2 \to P$. Jej rovnica je

$$(X - P) \cdot (r'_0 \times r''_0) = 0 \tag{5}$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ x'_0, & y'_0, & z'_0 \\ x''_0, & y''_0, & z''_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

kde $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod oskulačnej roviny.

Binormálou krivky K v bode P nazývame tú normálu krivky K v bode P, ktorá je kolmá na oskulačnú rovinu. Jej rovnica je

$$X = P + t(r'_0 \times r''_0), \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{7}$$

alebo

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'_0, & z'_0 \\ y''_0, & z''_0 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z'_0, & x'_0 \\ z''_0, & x''_0 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'_0, & y'_0 \\ x''_0, & y''_0 \end{vmatrix}}, \tag{8}$$

kde $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod binormály krivky K v bode P.

Hlavná normála krivky K v bode P je tá normála krivky K v bode P, ktorá leží v oskulačnej rovine krivky K v bode P. Jej rovnica je

$$X = P + t[r'_0 \times (r'_0 \times r''_0)], \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{9}$$

alebo

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'_0 & z'_0 \\ z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0, & x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z'_0, & x'_0 \\ x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0, & y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0 \end{vmatrix}} = \tag{10}$$

$$= \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'_0, & y'_0 \\ y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0, & z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0 \end{vmatrix}},$$

kde $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod hlavnej normály krivky K v bode P.

*) O dotyčnici krivky pozri článok 3,3.

Rektifikačnou rovinou krivky K v bode P nazývame rovinu, ktorá prechádza bodom P a je kolmá na hlavnú normálu krivky K v bode P. Jej rovnica je

$$(X - P) \cdot [\boldsymbol{r}'_0 \times (\boldsymbol{r}'_0 \times \boldsymbol{r}''_0)] = 0 \tag{11}$$

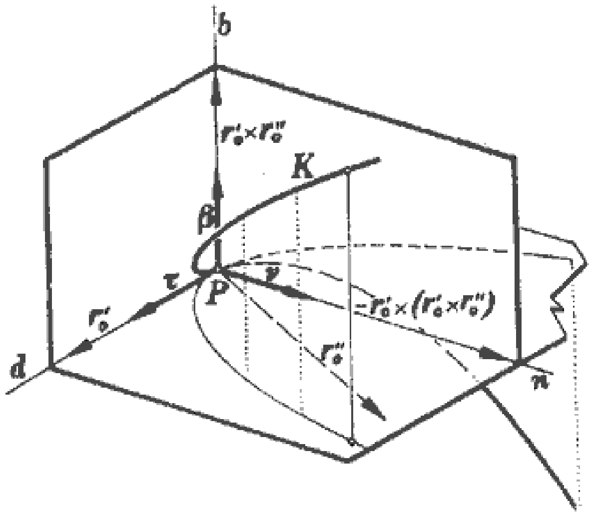
alebo

$$\begin{vmatrix} y'_0, & z'_0 \\ z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0, & x'_0 y''_0 - x''_0 y_0 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} z'_0, & x'_0 \\ x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0, & y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0 \end{vmatrix} (y - y_0) +$$
$$+ \begin{vmatrix} x'_0, & y'_0 \\ y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0, & z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0, \tag{12}$$

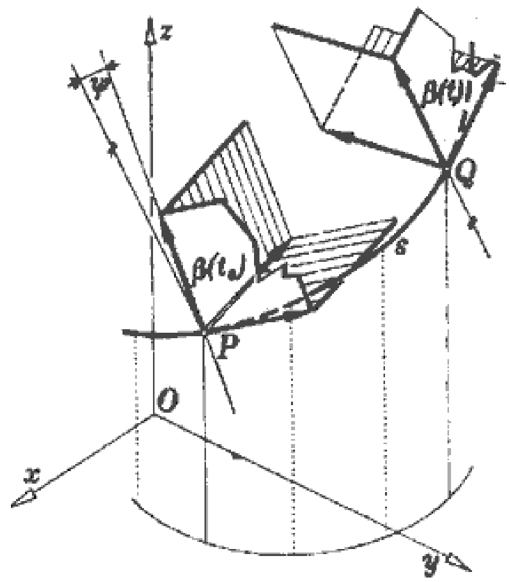
kde $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod rektifikačnej roviny.

Regulárny bod P krivky K nazývame *rektifikačným bodom*, ak platí $\boldsymbol{r}'_0 \times \boldsymbol{r}''_0 = \boldsymbol{o}$.

Dotyčnica, hlavná normála a binormála definujú v každom bode P, ktorý nie je rektifikačným bodom krivky K, pravouhlý trojhran s vrcholom v bode P. Tento trojhran nazývame *sprievodným trojhranom* (pozri *obr. 25*).



Obr. 25



Obr. 26

Jednotkové vektory $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r}')^0$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^0$, $\boldsymbol{\nu} = [(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}']^0$ nazývame *jednotkovými vektormi dotyčnice, binormály* a *hlavnej normály*. Pre ne platí

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta},$$

t. j. tvoria pravouhlú pravotočivú trojicu vektorov (pozri *obr. 26*).

Poznámka. Ak krivka K má prirodzené parametrické vyjadrenie $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(s)$, potom $|\boldsymbol{r}'(s)| = 1$ a $(\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)) \times \boldsymbol{r}'(s) = \boldsymbol{r}''(s)$. Rovnica hlavnej normály a rektifikačnej roviny krivky K v bode $P = O + \boldsymbol{r}(s_0)$ sú

$$X = P + \boldsymbol{r}''(s_0)\, t, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$
$$(X - P) \cdot \boldsymbol{r}''(s_0) = 0.$$

Príklad 1. Nájdime rovnicu dotyčnice, hlavnej normály, binormály, normálovej roviny, oskulačnej roviny a rektifikačnej roviny krivky K, ktorá má parametrickú rovnicu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t) = (t^2 - t)\,\boldsymbol{i} + t^3 \boldsymbol{j} + (3t^4 - 2t)\,\boldsymbol{k}$ v bode P, ktorý dostaneme pre $t_0 = 1$.

Riešenie. Najprv vypočítame rovnice hrán sprievodného trojhranu v bode P. Rovnice stien, t. j. rovnice normálovej, oskulačnej a rektifikačnej roviny nájdeme ako rovnicu roviny kolmej na dotyčnicu, binormálu a hlavnú normálu v bode P.

Bod P dostaneme pre hodnotu $t_0 = 1$, $P = (0, 1, 1)$. Vypočítajme $\mathbf{r}'(t)$ a $\mathbf{r}''(t)$. Máme

$$\mathbf{r}'(t) = (2t - 1)\,\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + (12t^3 - 2)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 36t^2\mathbf{k}.$$

Pre $t_0 = 1$ je

$$\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

a

$$\mathbf{r}''(1) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 36\mathbf{k}.$$

Kedže je $\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) = 48\mathbf{i} - 16\mathbf{j} \neq \mathbf{o}$, regulárny bod P nie je rektifikačný bod krivky K.

Rovnica dotyčnice podľa (1) je

$$X = (0, 1, 1) + (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k})\,t,$$

kde $t \in (-\infty, \infty)$ alebo

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 1}{10}.$$

Z toho pre rovnicu normálovej roviny dostaneme

$$1(x - 0) + 3(y - 1) + 10(z - 1) = 0,$$

čiže

$$x + 3y + 10z - 13 = 0.$$

Rovnica binormály danej krivky v bode $P = (0, 1, 1)$ podľa (7) je

$$X = (0, 1, 1) + (48\mathbf{i} - 16\mathbf{j})\,t, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

alebo, ak položíme $16t = u$, dostaneme

$$x = 3u$$
$$y = 1 - u,$$
$$z = 1, \qquad u \in (-\infty, \infty).$$

Z toho pre rovnicu oskulačnej roviny krivky K v bode P dostaneme

$$3(x - 0) - 1(y - 1) + 0(z - 1) = 0,$$

čiže

$$3x - y + 1 = 0.$$

Rovnica hlavnej normály krivky K v bode P podľa (9) je

$$X = (0, 1, 1) + [(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) \times (48\mathbf{i} - 16\mathbf{j})]\,t, \ t \in (-\infty, \infty).$$

Po úprave dostaneme

$$X = (0, 1, 1) + 160(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})\,t, \ t \in (-\infty, \infty),$$

čiže

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Z toho rovnica rektifikačnej roviny je

$$1(x - 0) + 3(y - 1) - 1(z - 1) = 0,$$

čiže

$$x + 3y - z - 2 = 0.$$

V úlohách 850 až 852 nájdite rovnicu dotyčnice krivky K v bode P.

850. $\mathbf{r} = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \sin t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(0)$.

851. $\mathbf{r} = a(t - \sin t)\,\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\,\mathbf{j} + 4a \sin(t/2)\,\mathbf{k}$, $a > 0$, $P = O + \mathbf{r}\,(\pi/2)$.

852. $\mathbf{r} = \frac{t^4}{4}\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(t_0)$, $t_0 \neq 0$.

V úlohách 853 až 855 nájdite rovnicu dotyčnice a normálovej roviny krivky K v jej regulárnom bode P.

853. $\mathbf{r} = (t^3 - t^2 - 5)\,\mathbf{i} + (3t^2 + 1)\,\mathbf{j} + (2t^3 - 16)\,\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(2)$.

854. $\mathbf{r} = (t^4 + t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (4t^3 + 5t + 2)\,\mathbf{j} + (t^4 - t)\,\mathbf{k}$, $P = (3, -7, 2)$.

855. Vivianiho krivky $\mathbf{r} = r\cos^2 t\mathbf{i} + r\sin t\cos t\mathbf{j} + r\sin t\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(t_0)$.

Singulárny bod $P = O + \mathbf{r}(t_0)$, v ktorom je $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}''(t_0) = \ldots = \mathbf{r}^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{r}^{(k)}(t_0) \neq \mathbf{o}$, nazývame nepodstatne singulárnym bodom krivky K a priamku $X = P + \mathbf{r}^{(k)}(t_0)\,t$ dotyčnicou krivky K v tomto bode (pozri aj čl. 3,7).

856. Nájdite dotyčnice kriviek z úloh 852, 853, 854 v ich nepodstatne singulárnych bodoch.

857. Na krivke $\mathbf{r} = (-t\cos t + \sin t)\,\mathbf{i} + (t\sin t + \cos t)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}$, nájdite body, v ktorých je dotyčnica rovnobežná s rovinami R_{yz} a R_{xz}.

858. Nájdite rovnice dotyčníc krivky $\mathbf{r} = t^4\mathbf{i}/4 + t^3\mathbf{j}/3 + t^2\mathbf{k}/2$, ktoré sú rovnobežné s rovinou $x + 3y + 2z - 10 = 0$.

859. Dokážte, že normálové roviny krivky $\mathbf{r} = a\sin^2 t\mathbf{i} + a\sin t\cos t\mathbf{j} + a\cos t\mathbf{k}$, $a > 0$, prechádzajú začiatkom pravouhlého súradnicového systému.

Sférickou indikatrixou dotyčníc krivky K s rovnicou $\mathbf{u} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ nazývame krivku $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{r}^\circ(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, t. j. množinu koncových bodov jednotkových vektorov všetkých dotyčníc, ak ich začiatočné body sú v bode O.

V úlohách 860 a 861 nájdite sférickú indikatrixu krivky K.

860. Skrutkovice $\mathbf{r} = a(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + bt\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $t \in (-\infty, \infty)$.

861. $\mathbf{r} = (2t - \sin t)\,\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 4\sin t\mathbf{k}$.

V úlohách 862 až 866 nájdite rovnicu oskulačnej roviny krivky K v bode P.

862. $\mathbf{r} = t\cos t\mathbf{i} - t\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $P = (0, 0, 0)$.

863. $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $P = (a, 0, 1)$.

864. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(a)$.

865. $\mathbf{r} = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(a)$.

866. Vivianiho krivky $\mathbf{r} = a\cos^2 t\mathbf{i} + a\sin t\cos t\mathbf{j} + a\sin t\mathbf{k}$, $a > 0$, $P = O + \mathbf{r}(\alpha)$.

V úlohách 867 až 870 nájdite rovnicu hlavnej normály a binormály krivky K v bode P.

867. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i}/2 + 2t^3\mathbf{j}/3 + t^4\mathbf{k}/2$, $P = (1/2, 2/3, 1/2)$.

868. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $P = (0, 0, 1)$.

869. $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $P = (x_0, y_0, z_0)$.

870. $x = y^2$, $z = x^2$, $P = (1, 1, 1)$.

871. Napíšte rovnicu rektifikačnej roviny krivky $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t^3 - 20)\mathbf{k}$ v bode $A = (9, 3, 7)$.

872. Na binormálach skrutkovice $\mathbf{r} = \cos\alpha(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + \sin\alpha t\mathbf{k}$ sú zostrojené vektory $\boldsymbol{\beta}$ binormál tak, že ich začiatočné body sú v dotykovom bode P. Koncové body týchto vektorov určujú krivku K_1. Nájdite rovnicu oskulačnej roviny krivky K_1 v jej ľubovoľnom bode.

873. Daná je krivka $\mathbf{r} = t\cos(a\ln t)\,\mathbf{i} + t\sin(a\ln t)\,\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$.

Dokážte, že:

a) leží na rotačnom kuželi $b^2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$,
b) jej dotyčnice zvierajú konštantný uhol s osou o_z,
c) jej dotyčnice zvierajú konštantný uhol s povrchovými priamkami uvedeného kužeľa,
d) jej binormály zvierajú konštantný uhol s osou o_z,
e) jej hlavné normály zvierajú konštantný uhol s osou o_z.
Vypočítajte tieto uhly.

V úlohách 874 až 878 nájdite rovnice hrán a stien sprievodného trojhranu krivky K v bode P.

874. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}/2$, $P = (2, -2, 2)$.

875. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $P = (1, 1, 1)$.

876. $\mathbf{r} = (1 - \cos t)\,\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P = (1, 1, \pi/2)$.

877. $\mathbf{r} = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $b > 0$, $P = (0, 0, 0)$.

878. $\mathbf{r} = \dfrac{a}{2}(1 + \cos t)\,\mathbf{i} + \dfrac{a}{2}\sin t\mathbf{j} + a\sin\dfrac{t}{2}\,\mathbf{k}$, $a > 0$, $P = (a, 0, 0)$.

V úlohách 879 až 881 nájdite jednotkové vektory dotyčnice, hlavnej normály a binormály krivky K v bode P.

879. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $P = (0, 0, 0)$.

880. $\mathbf{r} = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$, $P = O + \mathbf{r}(t)$.

881. $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, $P = (x, y, z)$.

882. Ukážte, že rovnice dotyčnice krivky $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ v jej regulárnom bode $P = (x_0, y_0, z_0)$, $[\operatorname{grad}\varphi(P) \times \operatorname{grad}\psi(P) \neq 0]$ je $X = P + [\operatorname{grad}\varphi(P) \times \operatorname{grad}\psi(P)]\,t$.

V úlohách 883 až 886 nájdite rovnicu dotyčnice a normálovej roviny ku krivke K v bode P.

883. $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $P = (1, 1, 2)$.

884. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$, $P = (2, 2\sqrt{3}, 3)$.

885. $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$, $P = (1, 3, 4)$.

886. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $P = (x_0, y_0, z_0)$.

887. Dokážte, že rovnica oskulačnej roviny krivky $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ v jej regulárnom bode P, v ktorom vektor $\mathbf{T} \times (\mathbf{T}\,.\operatorname{grad}\mathbf{T}) \neq \mathbf{O}$,*) je

$$(X - P)\,.\,[\mathbf{T} \times (\mathbf{T}\,.\operatorname{grad}\mathbf{T})] = 0,$$

kde $\mathbf{T} = \operatorname{grad}\varphi(P) \times \operatorname{grad}\psi(P)$.

V úlohách 888 až 890 nájdite rovnicu oskulačnej roviny a binormály krivky K v bode P.

888. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$, $P = (2, 1, 2)$.

889. $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$, $P = (6, 9, 9)$.

890. $y^2 = 12x$, $x^2 + z^2 = 25$, $P = (3, 6, 4)$.

V úlohách 891 až 893 nájdite rovnice stien a hrán sprievodného trojhranu krivky K v bode P.

---

*) $\mathbf{T}\,.\operatorname{grad}\mathbf{T} = T_x\dfrac{\partial\mathbf{T}}{\partial x} + T_y\dfrac{\partial\mathbf{T}}{\partial y} + T_z\dfrac{\partial\mathbf{T}}{\partial z}$.

891. $y = x^2, \; z = 2x, \; P = (2, 4, 4)$.
892. $x^2 + y^2 + z^2 = 6, \; x^2 - y^2 + z^2 = 4, \; P = (1, 1, 2)$.
893. $y^2 = x, \; x^2 = z, \; P = (1, 1, 1)$.

3,10. Krivosť a torzia priestorovej krivky

Nech krivka K v priestore má parametrickú rovnicu $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{i} + \psi(t)\,\mathbf{j} + \chi(t)\,\mathbf{k}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a nech je hladká v okolí $O(t_0)$ čísla $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

Krivosťou $k(P)$ krivky K v bode $P = O + \mathbf{r}(t)$ nazývame číslo

$$k(P) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{s(t)}, \tag{1}$$

kde $\varphi(t)$ je uhol $\sphericalangle\,[\boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\tau}(t_0)]$ vektorov*) dotyčníc v bode P a $Q = O + \mathbf{r}(t)$, $t \in O(t_0)$ a $s(t)$ je dĺžka časti krivky zodpovedajúcej intervalu $\langle t_0, t \rangle$ resp. $\langle t, t_0 \rangle$ (pozri *obr. 17*).

Polomerom krivosti $r(P)$ krivky K v bode P nazývame číslo

$$r(P) = \frac{1}{k(P)}. \tag{2}$$

Torzia $\varkappa(P)$ krivky K v bode $P = O + \mathbf{r}(t_0)$. Nech krivka K v každom bode $Q = O + \mathbf{r}(t)$, kde $t \in O(t_0)$ má binormálu. Nech $\psi(t)$ je uhol $\sphericalangle\,[\boldsymbol{\beta}(t), \boldsymbol{\beta}(t_0)]$ vektorov binormál v bodoch P a Q, pričom existuje $\boldsymbol{\beta}'(t_0)$. Nech $s(t)$ je dĺžka časti krivky zodpovedajúcej intervalu $\langle t_0, t \rangle$ resp. $\langle t, t_0 \rangle$. Potom pre absolútnu hodnotu torzie $\varkappa(P)$ krivky K v bode P platí *(obr. 26)*

$$|\varkappa(P)| = \lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{s(t)}. \tag{3}$$

Torzia $\varkappa(P)$ je kladná [záporná] vtedy, ak trojica vektorov $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}'$ v bode t_0 tvorí pravotočivú [ľavotočivú] trojicu vektorov, t. j. ak platí $\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}') > 0$ [$\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}') < 0$].

Polomerom torzie $\varrho(P)$ krivky K v bode P nazývame číslo

$$\varrho(P) = \frac{1}{|\varkappa(P)|}$$

Veta 1. Nech krivka K má parametrickú rovnicu $\mathbf{u} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Nech $\mathbf{r}'(t)$ a $\mathbf{r}''(t)$ sú v okolí čísla $t_0 \in (\alpha, \beta)$ spojité funkcie. Potom pre krivosť $k(P)$ v bode $P = O + \mathbf{r}(t_0)$ platí

$$k(P) = \frac{|\mathbf{r}_0' \times \mathbf{r}_0''|}{|\mathbf{r}_0'|^3}. \tag{4}$$

Ak $\mathbf{r}'''(t)$ je spojitá funkcia v bode P, potom pre torziu $\varkappa(P)$ platí

$$\varkappa(P) = \frac{(\mathbf{r}_0' \times \mathbf{r}_0'') \cdot \mathbf{r}_0'''}{|\mathbf{r}_0' \times \mathbf{r}_0''|^2}, \tag{5}$$

kde $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{r}_0'' = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{r}_0''' = \mathbf{r}'''(t_0)$.

Poznámka. Ak je krivka K vo vete 1 daná v prirodzenom parametrickom vyjadrení $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s)$, potom platí

$$k(P) = |\mathbf{r}'(s_0)| \tag{4a}$$

$$\varkappa(P) = \frac{[\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)] \cdot \mathbf{r}'''(s_0)}{k(P)}. \tag{5a}$$

*) O uhle dvoch vektorov pozri článok 4,5/I.

Veta 2. Ak má krivka K vo vete 1 parametrické rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ a bod $P = (x_0, y_0, z_0)$, potom pre krivosť $k(P)$ platí

$$k(P) = \frac{\sqrt{(y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)^2 + (z'_0 x''_0 - x'_0 z''_0)^2 + (x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0)^2}}{(x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0)^{3/2}} \tag{6}$$

a pre torziu $\varkappa(P)$ platí

$$\varkappa(P) = \frac{\begin{vmatrix} x'_0, & y'_0, & z'_0 \\ x''_0, & y''_0, & z''_0 \\ x'''_0, & y'''_0, & z'''_0 \end{vmatrix}}{(y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)^2 + (z'_0 x''_0 - x'_0 z''_0)^2 + (x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0)^2}. \tag{7}$$

Veta 3. *(Frenetove—Serretove vzorce.)* Nech krivka K má prirodzené parametrické vyjadrenie $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(s)$ a $P = O + \boldsymbol{r}(s_0)$. Nech $\boldsymbol{r}'(s_0) \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}''(s_0) \neq \boldsymbol{0}$ a existuje $\boldsymbol{r}'''(s_0)$. Potom pre jednotkové vektory $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ sprievodného trojhranu v bode P platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= k\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{\beta}' &= -\varkappa\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \tag{8}$$

pričom k je krivosť krivky K v bode P a $\varkappa$ je torzia krivky K v bode P.

Kružnicou krivosti priestorovej krivky K v bode P nazývame kružnicu, ktorú dostaneme ako limitnú polohu kružnice prechádzajúcej troma bodmi krivky P, P_1, P_2, neležiacimi na priamke, ak P_1 a P_2 konvergujú k bodu P.

Kružnica krivosti leží v oskulačnej rovine krivky K v bode P, jej polomer sa rovná polomeru $r(P)$ krivosti krivky v bode P a jej stred je

$$S = P + r(P)\,\boldsymbol{\nu}. \tag{9}$$

Evolútou krivky K nazývame takú krivku L, ktorej dotyčnice sú normálami danej krivky K.

Rovnica evolúty L je

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(t) + r(P)\,\boldsymbol{\nu} + r(P)\,\mathrm{tg}\,\Theta\,.\,\boldsymbol{\beta}, \tag{10}$$

kde $r(P)$ je polomer krivosti krivky K v bode P, $\boldsymbol{\nu}$ a $\boldsymbol{\beta}$ sú jednotkové vektory hlavnej normály a binormály a Θ spĺňuje rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s} = -\varkappa \quad \text{resp.} \quad \Theta = -\int_{s_0}^{s} \varkappa\,\mathrm{d}s. \tag{11}$$

Keďže pri určení Θ možno konštantu s_0 ľubovoľne voliť, preto krivka K má nekonečne veľa evolút.

Spádovou krivkou nazývame krivku, pre ktorú platí

$$\frac{\varkappa(P)}{k(P)} = c \neq 0, \tag{12}$$

kde $k(P)$ je krivosť a $\varkappa(P)$ torzia krivky v bode P a c je konštanta.

Dotykový vektor $\boldsymbol{\tau}$ v každom bode spádovej krivky zviera so smerom určeným vektorom $\boldsymbol{m} = \cos\alpha\boldsymbol{\tau} + \sin\alpha\boldsymbol{\beta}$ konštantný uhol α.

Spádová krivka leží na valcovej ploche s povrchovými priamkami rovnobežnými s vektorom $\boldsymbol{m}$ a pri rozvinutí tejto valcovej plochy do roviny prejde spádová krivka v priamku.

Príklad 1. Nájdime krivosť a torziu hyperbolickej špirály $\boldsymbol{r} = a\cosh t\boldsymbol{i} + a\sinh t\boldsymbol{j} + at\boldsymbol{k}$, $a > 0$, v bode $P = (a, 0, 0)$.

Riešenie. Bod P dostaneme pre $t = 0$. Vypočítajme $\boldsymbol{r}'(0)$, $\boldsymbol{r}''(0)$, $\boldsymbol{r}'''(0)$, máme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_0 &= \boldsymbol{r}'(0) = [a\sinh t\boldsymbol{i} + a\cosh t\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k}]_{t=0} = a\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{r}''_0 &= \boldsymbol{r}''(0) = [a\cosh t\boldsymbol{i} + a\sinh t\boldsymbol{j}]_{t=0} = a\boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{r}'''_0 &= \boldsymbol{r}'''(0) = [a\sinh t\boldsymbol{i} + a\cosh t\boldsymbol{j}]_{t=0} = a\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Podľa (4) máme

$$k(P) = \frac{|(a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times a\mathbf{i}|}{|a\mathbf{j} + a\mathbf{k}|^3} = \frac{|-a^2\mathbf{k} + a^2\mathbf{j}|}{a^3\, 2\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a^3\, 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2a}.$$

Podľa (5) máme

$$\varkappa(P) = \frac{[(a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times a\mathbf{i}] \,.\, a\mathbf{j}}{|(a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times a\mathbf{i}|^2} = \frac{a^2(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \,.\, a\mathbf{j}}{|a^2(\mathbf{j} - \mathbf{k})|^2} = \frac{a^3}{(a^2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2a}.$$

Príklad 2. Nájdime stred a polomer kružnice krivosti hyperbolickej špirály z príkladu 1 v bode $P = (a, 0, 0)$.

Riešenie. Podľa (9) pre stred kružnice krivosti platí $S = P + r(P)\,\mathbf{v}$ a podľa článku 3,10 je

$$\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)] \times \mathbf{r}'(t_0)}{|[\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)] \times \mathbf{r}'(t_0)|}.$$

Bod P dostaneme pre $t_0 = 0$. V príklade 1 sme vypočítali

$$\mathbf{r}'(t_0) = a\mathbf{j} + a\mathbf{k},\ \mathbf{r}''(t_0) = a\mathbf{i},\ \mathbf{r}'''(t_0) = a\mathbf{j}.$$

Preto

$$\mathbf{v} = \frac{[(a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times a\mathbf{i}] \times (a\mathbf{j} + a\mathbf{k})}{|[(a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times a\mathbf{i}] \times (a\mathbf{j} + a\mathbf{k})|} = \frac{(a^2\mathbf{j} - a^2\mathbf{k}) \times (a\mathbf{j} + a\mathbf{k})}{|(a^2\mathbf{j} - a^2\mathbf{k}) \times (a\mathbf{j} + a\mathbf{k})|} = \frac{2a^3\mathbf{i}}{|2a^3\mathbf{i}|} = \mathbf{i}.$$

Polomer krivosti je $r(P) = 1/k(P)$. Teda z príkladu 1 máme

$$r(P) = \frac{1}{1/2a} = 2a.$$

Pre stred S kružnice krivosti platí

$$S = (a, 0, 0) + 2a\{1, 0, 0\} = (3a, 0, 0).$$

Kružnica krivosti leží v oskulačnej rovine, ktorej rovnica je

$$(X - P) \,.\, (\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0) = 0.$$

Pretože

$$(\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0) = a^2\mathbf{j} - a^2\mathbf{k},$$

rovnica oskulačnej roviny je

$$\{x - a, y, z\} \,.\, a^2\{0, 1, -1\} = 0,$$

čiže

$$y - z = 0.$$

Rovnice oskulačnej kružnice sú

$$(x - 3a)^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,$$
$$y - z = 0.$$

V úlohách 894 až 898 nájdite krivosť danej krivky v bode P.

894. $\mathbf{r} = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j} + at\mathbf{k}$, $P = (0, 0, 0)$.

895. $\mathbf{r} = a\cosh t\cos t\,\mathbf{i} + a\cosh t\sin t\,\mathbf{j} + at\mathbf{k}$, $P = (a, 0, 0)$, $a > 0$.

896. $\mathbf{r} = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\sin t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$, $P = (1, 0, 1)$.

897. $\mathbf{r} = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,t\mathbf{k}$, $P = (e, 1/e, \sqrt{2})$.

898. $y^2 = x$, $x^2 = z$, $P = (1, 1, 1)$.

V úlohách 899 a 900 nájdite torziu krivky v bode P.

899. $\mathbf{r} = t\sin t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j} + t\,e^t\,\mathbf{k}$, $P = (0, 0, 0)$.

900. $y^2 = x$, $x^2 = z$, $P = (1, 1, 1)$.

V úlohách 901 až 906 nájdite krivosť a torziu v ľubovoľnom bode P krivky.

901. $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\ln t\boldsymbol{j} + t^{-1}\boldsymbol{k}$.

902. $\boldsymbol{r} = a(\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}) + c\boldsymbol{k}$.

903. $\boldsymbol{r} = a(\cosh t\boldsymbol{i} + \sinh t\boldsymbol{j}) + at\boldsymbol{k}$.

904. $\boldsymbol{r} = \cos^3 t\boldsymbol{i} + \sin^3 t\boldsymbol{j} + \cos 2t\boldsymbol{k}$.

905. $\boldsymbol{r} = a[(t - \sin t)\,\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\,\boldsymbol{j} + 4\cos(t/2)\,\boldsymbol{k}]$.

906. $y = x^2/2a,\ z = x^3/6a^2$.

907. Dokážte, že krivosť a torzia v ľubovoľnom bode krivky

a) $\boldsymbol{r} = (3t - t^3)\,\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\,\boldsymbol{k}$ sa rovnajú,

b) $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + \ln t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$ sa odlišujú znamienkom.

908. Dokážte, že podiel krivosti a torzie kužeľovej skrutkovice $\boldsymbol{r} = t\cos t\boldsymbol{i} + t\sin t\boldsymbol{j} + at\boldsymbol{k}$ je konštantný.

909. Dokážte, že pre krivosť a torziu krivky K danej rovnicami

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$g(x, y, z) = 0$$

v jej regulárnom bode P platí

$$k(P) = \frac{|\boldsymbol{T} \times (\boldsymbol{T}\,.\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{T})|}{|\boldsymbol{T}|^3},^{*)}$$

$$\varkappa(P) = \frac{(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{U})\,.\,(\boldsymbol{T}\,.\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{U})}{|\boldsymbol{U}|^2},\ \boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{o},$$

kde $\boldsymbol{T} = \mathrm{grad}\,f(P) \times \mathrm{grad}\,g(P)$ a $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}\,.\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{T}$.

V úlohách 910 až 912 vypočítajte krivosť krivky K v bode P.

910. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ \ 2x + 2y - z - 1 = 0,\ P = (0, 1, 1)$.

911. $x^2 = 2az,\qquad y^2 = 2bz,\ P = (x_0, y_0, z_0)$.

912. $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ \ y^2 - 2x + z = 0,\ P = (1, 1, 1)$.

913. Vypočítajte krivosť a torziu Vivianiho krivky $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - ax = 0$ v bodoch $P_1 = (a, 0, 0)$ a $P_2 = (0, 0, a)$.

V úlohách 914 až 916 nájdite vektory $\boldsymbol{\tau}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\nu}'$ krivky K v bode P.

914. $\boldsymbol{r} = \cos 2s\boldsymbol{i}/4 + \sin 2s\boldsymbol{j}/4 + 3s\boldsymbol{k}/2$, $P = O + \boldsymbol{r}(\pi/4)$, kde s je dĺžka oblúka krivky.

915. $\boldsymbol{r} = 2\cosh t\boldsymbol{i} + 4\sinh t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, $P = O + \boldsymbol{r}(-1)$.

916. $\boldsymbol{r} = 3t^2\boldsymbol{i} + (2t + 3)\,\boldsymbol{j} + 3t^3\,\boldsymbol{k}$, $P = (12, -1, -24)$.

917. Ukážte, že každý z vektorov $\boldsymbol{\tau}'$, $\boldsymbol{\nu}'$, $\boldsymbol{\beta}'$ možno vyjadriť pomocou istého vektora $\boldsymbol{\omega}$ (Darbouxov vektor) takto: $\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta}$. Nájdite vektor $\boldsymbol{\omega}$ a vysvetlite jeho kinematický význam.

918. Pomocou Frenetových vzorcov dokážte, že ak všetky oskulačné roviny krivky K prechádzajú jediným bodom A, potom krivka K je rovinná.

919. Dokážte, že ak krivka K má v každom bode hlavnú normálu, tak všetky tieto normály nemôžu byť navzájom rovnobežné.

920. Pomocou Frenetových vzorcov vypočítajte $\boldsymbol{r}'''(t)$, $\boldsymbol{r}^{(4)}(t)$.

---

*) $\boldsymbol{a}\,.\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{b} = a_x \dfrac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x} + a_y \dfrac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial y} + a_z \dfrac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z}$.

Nech krivka K s rovnicou $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s)$ má v každom svojom bode P krivosť $k(P)$ a torziu $\varkappa(P)$, pričom funkcie

$$k(P) = \Phi(s), \quad \varkappa(P) = \Psi(s) \tag{12}$$

sú spojité funkcie *prirodzeného parametra s*, potom rovnice (12) nazývame prirodzenými rovnicami krivky K.

V úlohách 921 až 923 nájdite prirodzené rovnice danej krivky K.

921. $\mathbf{r} = at\mathbf{i} + a\sqrt{2}\ln t\mathbf{j} + at^{-1}\mathbf{k}$.

922. $\mathbf{r} = a(\cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j}) + a\mathbf{k}$.

923. $$\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}\sin\left(\sqrt{2}s+s\right) - \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\sin\left(\sqrt{2}s-s\right)\right]\mathbf{i} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\cos\left(\sqrt{2}s+s\right) + \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\cos\left(\sqrt{2}s+s\right)\right]\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\mathbf{k}.$$

924. Nájdite evolútu skrutkovice $\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$.

Ortogonálna trajektória jednoparametrického systému S kriviek je krivka, ktorá pretína kolmo všetky krivky systému S.

Evolúta krivky K je ortogonálnou trajektóriou všetkých dotyčníc krivky K.

925. Dokážte, že krivka K s rovnicou $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s)$ má evolventu, ktorej rovnica je

$$X = P + (s_0 - s)\boldsymbol{\tau},$$

kde $P = O + \mathbf{r}(s)$ a $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor dotyčníc krivky K.

926. Nájdite rovnice evolvent skrutkovice $\mathbf{r} = a(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + bt\mathbf{k}$.

927. Nájdite rovnicu spádovej krivky K, ak rovnica vytvárajúcej krivky K_1 príslušnej valcovej plochy je $\mathbf{r} = \varphi(s)\,\mathbf{i} + \psi(s)\,\mathbf{j}$. Nájdite dĺžku jej oblúka.

928. Napíšte rovnicu spádovej krivky na valcovej ploche, ak jej vytvárajúca krivka je:

a) kružnica $x^2 + y^2 = a^2$,

b) logaritmická špirála $\mathbf{r} = a\,e^{m\varphi}(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j})$.

929. Nájdite prirodzené rovnice spádovej krivky na valci, ktorý má vytvárajúcu krivku reťazovku $y = \cosh(x/a)$, $z = 0$.

930. Nájdite prirodzené rovnice spádovej krivky, ktorá leží na guľovej ploche s polomerom R.

931. Dokážte, že krivka K s rovnicou $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s)$, $s \in \langle a, b\rangle$, je spádovou krivkou vtedy a len vtedy, ak

$$[\mathbf{r}''(s) \times \mathbf{r}'''(s)]\,.\,\mathbf{r}^{(4)}(s) = 0, \quad s \in \langle a, b\rangle.$$

932. Dokážte, že evolventa spádovej krivky $\mathbf{u} = \mathbf{r}(s)$ $(s_0 = 0)$ je rovinná krivka.

933. Ukážte, že ak krivky K, K_1 majú spoločné hlavné normály, t. j. krivka K kolmo pretína normály krivky K_1, potom pre ich krivosť a torziu platí

$$a\varkappa + bk + C = 0,$$

kde a, b, c sú čísla. (Bertrandove krivky.)

V úlohách 934 až 938 nájdite rovnicu oskulačnej kružnice krivky K v bode P.

934. $\mathbf{r} = t^{-1}\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2 - t^3)\,\mathbf{k}$, $P = (1, -1, 1)$.

935. $\boldsymbol{r} = \cos^3 t\boldsymbol{i} + \sin^3 t\boldsymbol{j} + \cos 2t\boldsymbol{k}$, $P = (1/2\sqrt{2},\ 1/2\sqrt{2}, 0)$.

936. $\boldsymbol{r} = \cos^2 t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + \sin t\boldsymbol{k}$, $P = (1/2, 1, 1/\sqrt{2})$.

937. Ukážte, že množina všetkých stredov krivosti skrutkovice $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$ je opäť skrutkovica. Pre aké a, b leží táto skrutkovica na pôvodnom valci.

938. Dokážte, že priesečnica oskulačnej roviny Vivianiho krivky

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - x &= 0 \end{aligned}$$

v bode $P = (0, 0, 1)$ s guľovou plochou je práve oskulačná kružnica Vivianiho krivky v bode P.

3,11. Plocha a jej rovnice

Majme vektorovú funkciu dvoch premenných $\boldsymbol{r}(u, v)$ spojitú a jednojednoznačnú na uzavretej oblasti Ω ohraničenej jednoduchou uzavretou krivkou K. Množinu všetkých bodov $P = O + \boldsymbol{r}(u, v)$, kde O je začiatok súradnicového systému, nazývame *jednoduchou plochou*.

Množinu všetkých bodov $P = O + \boldsymbol{r}(u, v)$, pričom $(u, v) \in K$ nazývame *hraničnými bodmi* jednoduchej plochy alebo *okrajom plochy*.

Dve jednoduché plochy nazývame *spojenými*, ak ich hranice majú spoločné časti.

Plochou nazývame takú množinu S bodov v priestore, ktorá je buď jednoduchou plochou, buď sa skladá z konečného počtu alebo z postupnosti jednoduchých plôch navzájom pospájaných.

Každú podmnožinu S_1 množiny S bodov v priestore, ktorá je plochou, nazývame *podplochou* S_1 plochy S.

Ak plocha S je daná pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore vektorovou funkciou dvoch premenných $\boldsymbol{r}(u, v) = \varphi(u, v)\,\boldsymbol{i} + \psi(u, v)\,\boldsymbol{j} + \chi(u, v)\,\boldsymbol{k}$, spojitou a jednojednoznačnou na oblasti Ω, potom rovnicu

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{1}$$

nazývame *parametrickou rovnicou plochy* S.

Nech $\boldsymbol{w} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, potom parametrické rovnice v zložkách sú

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \\ z &= \chi(u, v), \end{aligned} \tag{2}$$

kde $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ sú spojité funkcie na oblasti Ω.

Ak rovnice (2) majú tvar

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= f(u, v), \end{aligned} \tag{3}$$

kde f je spojitá funkcia na oblasti Ω, potom rovnicu

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

nazývame *explicitným tvarom* rovnice plochy.

Nech funkcia $F(X)$, kde $X = (x, y, z)$ má spojité parciálne derivácie $F'_x(X)$, $F'_y(X)$, $F'_z(X)$ na oblasti Ω_1 a nech existuje bod $A = (x_0, y_0, z_0)$ z oblasti Ω_1, pre ktorý platí $F(A) = 0$, pričom aspoň jedna z parciálnych derivácií $F'_x(A)$, $F'_y(A)$, $F'_z(A)$ je rôzna od nuly. Potom množina S všetkých bodov X, ktoré sú riešením rovnice

$$F(X) = 0, \tag{5}$$

je plocha. Rovnicu (5) nazývame *implicitným tvarom* rovnice plochy.

Ak množina všetkých bodov plochy S s rovnicou $\mathbf{w} = \mathbf{r}(u, v)$, pre ktoré platí $u = u_0$ [$v = v_0$], je krivka s rovnicou $\mathbf{w} = \mathbf{r}(u_0, t)$ [$\mathbf{w} = \mathbf{r}(t, v_0)$], pričom $(u_0, t) \in \Omega$ [$(t, v_0) \in \Omega$], potom túto krivku nazývame *parametrickou* u-krivkou [v-krivkou].

Ak pre všetky $u_0 \in \langle a, b\rangle$ [$v_0 \in \langle c, d\rangle$] je $\mathbf{w} = \mathbf{r}(u_0, t)$ [$\mathbf{w} = \mathbf{r}(t, v_0)$] rovnicou jednoparametrického systému kriviek, potom tieto u-krivky [v-krivky] nazývame *súradnicovými krivkami*.

Nech v oblasti $\Omega_1 \subset \Omega$ súradnicové u-krivky, v-krivky majú tieto vlastnosti:

1. Nijaké dve u-krivky [v-krivky] sa nepretínajú.
2. Každým bodom plochy prechádza práve jedna u-krivka a práve jedna v-krivka.

Potom parametre u, v, pričom $(u, v) \in \Omega_1$ nazývame *krivočiarymi súradnicami* bodu $M = O + \mathbf{r}(u, v)$ na ploche S (pozri *obr. 27*).

Príklad 1. Nájdime rovnice plochy, ktorá vznikne rotáciou kružnice $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$, $a > r > 0$, okolo osi o_z.

Riešenie. Pri rotácii tejto kružnice k okolo osi o_z jej stred opisuje kružnicu so stredom v začiatku a s polomerom a, ktorej parametrické rovnice sú

$$x = a \cos v,\ y = a \sin v,\ z = 0,$$

kde $v \in \langle 0, 2\pi)$, alebo vektorove

$$S = O + a\boldsymbol{\tau},$$

kde pre jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}$ platí $\boldsymbol{\tau} = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j}$.

Nech v je ľubovoľné číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Hľadajme rovnicu vytvárajúcej kružnice, ak jej stred je $S = (a \cos v, a \sin v, 0)$. Pre ľubovoľný bod X tejto kružnice platí

$$X = S + r\,\mathbf{e}^0,$$

kde $\mathbf{e}^0$ je jednotkový vektor, ktorý leží v rovine tejto kružnice. Keďže v tejto rovine ležia kolmé vektory $\boldsymbol{\tau}$ a $\mathbf{k}$, možno jednotkový vektor $\mathbf{e}^0$ napísať v tvare

$$\mathbf{e}^0 = \cos u\boldsymbol{\tau} + \sin u\mathbf{k}, \quad u \in \langle 0, 2\pi).$$

Pre ľubovoľný bod X kružnice teda platí

$$X = S + r\,\mathbf{e}^0 = O + a\boldsymbol{\tau} + r(\cos u\boldsymbol{\tau} + \sin u\mathbf{k}),$$

čiže

$$X = O + (a + r\cos u)\,\boldsymbol{\tau} + r\sin u\mathbf{k}.$$

Z toho potom je $X = O + \mathbf{r}(u, v)$, kde

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + r\cos u)(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j}) + r\sin u\mathbf{k} \tag{6}$$

a oblasť Ω je určená nerovnosťami: $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$. Pretože číslo v bolo ľubovoľné číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi)$, rovnica (6) určuje každý bod, ktorý kružnica pri svojom pohybe zaujme. Pretože $\mathbf{r}(u, v)$ je jednoznačná a spojitá funkcia na oblasti Ω, rovnica (6) je vektorovou rovnicou plochy. Túto plochu nazývame *anuloid*.

Parametrické rovnice anuloidu v zložkách sú:

$$\begin{aligned} x &= (a + r\cos u)\cos v,\\ y &= (a + r\cos u)\sin v,\\ z &= r\sin u, \end{aligned} \tag{7}$$

kde $(u, v) \in \Omega$.

Vylúčením parametra u, v z týchto rovníc dostaneme:

$$x^2 + y^2 = (a + r\cos u)^2. \tag{8}$$

Z toho potom je

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2ar\cos u + r^2,$$

čiže

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2 = 2a(a + r\cos u),$$

Ak umocníme túto rovnicu na druhú a dosadíme z rovnice (8), dostaneme

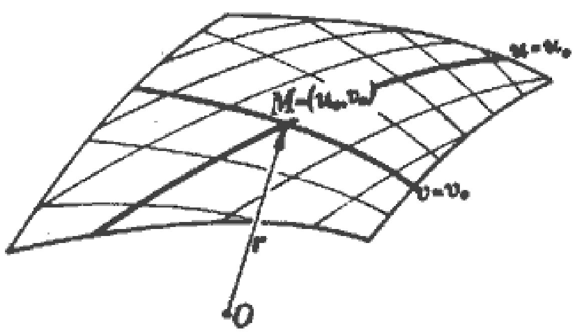
$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

čo je implicitný tvar rovnice anuloidu.

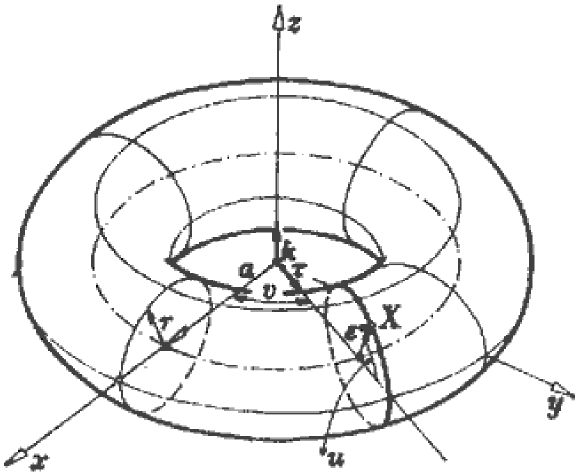
Hľadajme súradnicové krivky na anuloide daného parametrickými rovnicami (7). Pre u-krivky, $u = \alpha$, dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= (a + r\cos\alpha)\cos t, \\ y &= (a + r\sin\alpha)\sin t, \\ z &= r\sin\alpha, \end{aligned}$$

kde $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ a $t \in \langle 0, 2\pi)$.



Obr. 27



Obr. 28

Teda u-krivka je kružnica, ktorá má stred $S = (0, 0, r\sin\alpha)$ a polomer $\varrho = a + r\cos\alpha$. Pre v-krivky $v = \beta$, máme

$$\begin{aligned} x &= (a + r\cos t)\cos\beta, \\ y &= (a + r\sin t)\sin\beta, \\ z &= r\sin t, \end{aligned}$$

kde $(t, \beta) \in \Omega$.

Teda v-krivka je kružnica, ktorej stred je $S = (a\cos\beta, a\sin\beta, 0)$ a je priesečnicou roviny

$$x\sin\beta - y\cos\beta = 0$$

a gule

$$(x - a\cos\beta)^2 + (y - a\sin\beta)^2 + z^2 = r^2.$$

(Pozri *obr. 28.*)

Tieto krivky udávajú krivočiare súradnice bodu na ploche.

939. Nájdite parametrické rovnice rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $\boldsymbol{r} = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{k}$ okolo osi o_z.

V úlohách **940** až **947** nájdite parametrické rovnice rotačnej plochy, ak o_z je osou rotácie:

940. Guľovej plochy.

941. Rotačného elipsoidu.

942. Rotačného dvojdielneho hyperboloidu.

943. Rotačného jednodielneho hyperboloidu.

944. Rotačného paraboloidu.

945. Rotačného kužeľa.

946. Katenoidu, ktorý vznikne rotáciou reťazovky $x = b\cosh\dfrac{u}{b}$, $z = u$, $y = 0$

947. Pseudosféry, ktorá vznikne rotáciou traktrisy $x = a \sin u$, $z = a \ln \operatorname{tg} (u/2) + a \cos u$, $y = 0$.

948. Nájdite implicitný tvar rotačnej plochy s osou rotácie:
a) v osi o_x,
b) v osi o_y,
c) v osi o_z,
d) v priamke $x/a = y/b = z/c$.

V úlohách 949 až 952 nájdite rovnicu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky okolo danej osi.

949. Elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ okolo osi o_x.

950. Hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ okolo osi o_y.

951. Paraboly $y^2 = 2px$ okolo osi o_x.

952. Paraboly $z = 2px^2$ okolo osi o_z.

V úlohách 953 a 954 nájdite súradnicové krivky plochy S, ktorá má rovnicu $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

953. $\boldsymbol{w} = \sin u \cos v\, \boldsymbol{i} + \sin u \sin v\, \boldsymbol{j} + u\, \boldsymbol{k}$.

954. $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{u + v} [a(u - v)\, \boldsymbol{i} + b(uv + 1)\, \boldsymbol{j} + c(uv - 1)\, \boldsymbol{k}]$.

955. Nájdite parametrické rovnice trojosového elipsoidu tak, aby jeho súradnicové krivky ležali v rovinách rovnobežných s rovinou R_{xy} alebo v rovinách idúcich osou o_z.

956. Nájdite parametrické rovnice rotačného valca tak, aby súradnicové krivky boli:
a) skrutkovice a kružnice,
b) skrutkovice a priamky,
c) skrutkovice,
d) priamky a kružnice.

V úlohách 957 až 959 vylúčením parametrov u a v najdite rovnicu plochy.

957. $x = a \cos^4 u \cos^4 v$, $y = a \cos^4 u \sin^4 v$, $z = a \sin^4 u$.

958. $x = a \cos^3 u \cos^3 v$, $y = a \cos^3 u \sin^3 v$, $z = a \sin^3 u$.

959. $x = a \dfrac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$, $y = b \dfrac{2u}{u^2 + v^2 + 1}$, $z = c \dfrac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$.

V úlohách 960 až 962 nájdite parametrické rovnice danej plochy.

960. $x^2 z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

961. $z = x^2 - y^2$.

962. $z = b \operatorname{arctg} (y/x)$.

963. Nájdite parametrické rovnice valcovej plochy, ktorej povrchové priamky sú rovnobežné s vektorom $\boldsymbol{k}$, ak vytvárajúca krivka má rovnicu $\boldsymbol{r} = \varphi(u)\, \boldsymbol{i} + \psi(u)\, \boldsymbol{j}$.

964. Nájdite rovnice kužeľovej plochy vytvorenej všetkými priamkami, ktoré prechádzajú daným bodom — vrcholom $V = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 \neq 0$ a danou vytvárajúcou krivkou K s rovnicou $\boldsymbol{r} = \varphi(u)\, \boldsymbol{i} + \psi(u)\, \boldsymbol{j}$.

965. Nájdite parametrický a implicitný tvar kužeľovej plochy, ktorej vrchol je v bode $A = (0, 0, 1)$ a vytvárajúca krivka je asteroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

966. Nájdite rovnicu skrutkovej plochy, ktorá vznikne rovnomerným otáčaním rovinnej krivky K okolo osi ležiacej v jej rovine a rovnomerným priamočiarym pohybom krivky K pozdĺž tejto osi.

967. Nájdite rovnice helikoidu — priamkovej plochy vytvorenej hlavnými normálami skrutkovice $\boldsymbol{r} = a(\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}) + ct\boldsymbol{k}$.

968. Plochu, ktorú vytvoria všetky priamky prechádzajúce danou krivkou kolmo na danú priamku, nazývame priamym konoidom. Nájdite jej rovnice.

V úlohách 969 a 970 nájdite priame konoidy určené osou o_z a krivkou.

969. $\boldsymbol{r} = (at + p)\,\boldsymbol{i} + (bt + q)\,\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$.

970. $\boldsymbol{r} = a \cos t\boldsymbol{i} + a \sin t\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$.

971. Kružnica s polomerom a sa pohybuje tak, že jej stred sa pohybuje po krivke $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(s)$ a rovina, v ktorej sa nachádza, je normálovou rovinou danej krivky. Túto plochu nazývame kanálovou plochou. Nájdite jej rovnicu.

3,12. Dotyková rovina a normála k ploche

Singulárne body plochy. 1. Majme plochu S s rovnicou $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$. Nech má funkcia $\boldsymbol{r}(u, v)$ v bode $M = O + \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ spojité parciálne derivácie $\boldsymbol{r}'_u(M) = (x'_u\boldsymbol{i} + y'_u\boldsymbol{j} + z'_u\boldsymbol{k})_M$, $\boldsymbol{r}'_v(M) = (x'_v\boldsymbol{i} + y'_v\boldsymbol{j} + z'_v\boldsymbol{k})_M$ a matica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x'_u, & y'_u, & z'_u \\ x'_v, & y'_v, & z'_v \end{pmatrix} \tag{1}$$

nech má hodnosť h.

Bod $M = O + \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ plochy S nazývame *regulárnym bodom plochy S*, ak hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ je $h(\boldsymbol{A}) = 2$.

Ak bod M nie je regulárny bod plochy S, potom ho nazývame *singulárnym bodom plochy S*.

Bod M plochy S je regulárny bod vtedy a len vtedy, ak je vektor $(\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)_M \neq \boldsymbol{o}$.

2. Nech má plocha S rovnicu $F(x, y, z) = 0$ a nech v bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ je grad $F(M) = \boldsymbol{o}$, t.j.

$$\frac{\partial F(M)}{\partial x} = \frac{\partial F(M)}{\partial y} = \frac{\partial F(M)}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Potom bod M plochy S nazývame *singulárnym bodom plochy* $F(x, y, z) = 0$. Ak aspoň jedna z parciálnych derivácií $F'_x(M)$, $F'_y(M)$, $F'_z(M)$ je rôzna od nuly, t. j. grad $F(M) \neq \boldsymbol{o}$, potom bod M je regulárny bod plochy S.

Ak v singulárnom bode M plochy S existujú n-té parciálne derivácie funkcie $F(X)$, pričom všetky parciálne derivácie funkcie $F(X)$ rádov nižších ako n sa v tomto bode rovnajú nule a aspoň jedna z n-tých parciálnych derivácií je rôzna od nuly, potom bod M nazývame *kónickým bodom n-tého rádu plochy S*.

Pre body všetkých kriviek na ploche S, ktoré prechádzajú kónickým bodom $M = (m, n, p)$ druhého rádu plochy S s rovnicou $F(x, y, z) = 0$, platí

$$\begin{aligned} &F''_{xx}(M)\,(x - m)^2 + F''_{yy}(M)\,(y - n)^2 + F''_{zz}(M)\,(z - p)^2 + \\ &+ 2F''_{xy}(M)\,(x - m)\,(y - n) + 2F''_{yz}(M)\,(y - n)\,(z - p) + \\ &+ 2F''_{xz}(M)\,(x - m)\,(z - p) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Rovnica (3) môže byť: 1. rovnicou bodu M, bod M je izolovaný bod plochy S, 2. rovnicou kvadratickej kužeľovej plochy, ktorá je opísaná ploche S v bode M, 3. rovnicou dvoch rovín, singulárny bod M je bodom priesečnice plochy S s ňou samou.

Nech regulárne zobrazenie na okolí $O_\delta(M)$ bodu M má rovnice

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \varphi(u, v), \\ \bar{v} &= \psi(u, v), \end{aligned} \tag{4}$$

$(u, v) \in O_\delta(M)$, kde funkcie φ, ψ majú spojité parciálne derivácie a Jacobiho funkcionálny determinant

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u, & \varphi'_v \\ \psi'_u, & \psi'_v \end{vmatrix} \tag{5}$$

je rôzny od nuly pre všetky $(u, v) \in O_\delta(M)$.

Ak obrazom singulárneho bodu $M = O + \boldsymbol{r}(u, v)$ plochy S s rovnicou $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$ je bod $\overline{M} = O + \boldsymbol{r}(\overline{u}, \overline{v})$, pričom bod $\overline{M}$ nie je v nových krivočiarych súradniciach $(\overline{u}, \overline{v})$ singulárny bod, potom bod M nazývame *nepodstatne singulárnym bodom (polóm)* plochy S. Každý iný singulárny bod plochy S nazývame *podstatne singulárnym bodom plochy S*.

Krivka na ploche. Nech je daná plocha S s rovnicou $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$ a nech funkcie

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t), \quad t \in J \tag{6}$$

sú spojité funkcie na intervale J. Nech obe funkcie nie sú zároveň konštanty a pre všetky $t \in J$ je $(\varphi(t), \psi(t)) \in \Omega$. Potom množina bodov plochy S určených rovnicami (6) je krivka K na ploche S. Rovnice (6) nazývame potom *parametrickými rovnicami krivky K* na ploche S.

Ak rovnice (6) majú tvar $u = t$, $v = \psi(t)$, potom rovnicu

$$v = \psi(u) \tag{7}$$

nazývame tiež rovnicou krivky K na ploche S.

Rovnice (6) resp. (7) sú rovnice krivky K v krivočiarych súradniciach plochy S, zatiaľ čo rovnica $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}[\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in J$ je rovnica krivky K v pravouhlých súradniciach.

Majme krivku K na ploche S s rovnicou $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$, pričom rovnice krivky K sú $u = \varphi(t)$, $= \psi(t)$, $t \in J$. Pre dĺžku oblúka krivky K na ploche S platí

$$s(K) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, \mathrm{d}t \tag{8}$$

a pre diferenciál dĺžky oblúka platí

$$\mathrm{d}s^2 = E\, \mathrm{d}u^2 + 2F\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + G\, \mathrm{d}v^2, \tag{9}$$

kde $E = \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_u$, $F = \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v$, $G = \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_v$, čiže v zložkách $E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$, $G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$. Pravú stranu rovnice (9) nazývame *prvou kvadratickou formou* plochy S alebo aj *lineárnym elementom plochy S*. Absolútnu hodnotu vektora $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ v bode M plochy S nazývame *diskriminantom plochy S* v bode M a platí $D = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2} > 0$.

Dotyková rovina a normála k ploche S. Nech bod M je regulárny bod plochy S a všetky krivky na ploche S, ktoré prechádzajú týmto bodom M, majú v bode M regulárny bod. Potom dotyčnice všetkých týchto kriviek v bode M ležia v jednej rovine, ktorú nazývame *dotykovou rovinou* plochy S v jej regulárnom bode M. Bod M nazývame *dotykovým bodom*. Priamka, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na dotykovú rovinu plochy S v bode M, nazýva sa *normálou plochy S* v bode M.

Rovnica dotykovej roviny plochy S s rovnicou $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\, \boldsymbol{i} + y(u, v)\, \boldsymbol{j} + z(u, v)\, \boldsymbol{k}$, $(u, v) \in \Omega$, v regulárnom bode $M = O + \boldsymbol{r}_0 = O + \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ je

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_0) \cdot (\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)_M = 0 \tag{10}$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ x'_u(M), & y'_u(M), & z'_u(M) \\ x'_v(M), & y'_v(M), & z'_v(M) \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Ak plocha S má rovnicu $F(x, y, z) = 0$, potom v regulárnom bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ má dotykovú rovinu s rovnicou

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \operatorname{grad} F(M) = 0 \tag{12}$$

alebo

$$F'_x(M)\,(X - x_0) + F'_y(M)\,(Y - y_0) + F'_z(M)\,(Z - z_0) = 0, \tag{13}$$

kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor bodu M.

Ak plocha S má rovnicu $z = f(x, y)$, potom v jej regulárnom bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ má dotykovú rovinu a jej rovnica je

$$z'_x(M)\,(X - x_0) + z'_y(M)\,(Y - y_0) - (Z - z_0) = 0. \tag{14}$$

Vektorom normály $\boldsymbol{n}(M)$ plochy S s rovnicou $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$ v jej regulárnom bode $M = (u_0, v_0)$ nazývame jednotkový vektor ležiaci v normále k ploche S v bode M a orientovaný tak, že vektory $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}'_u$, $\boldsymbol{r}'_v$, v bode M tvoria pravotočivú trojicu vektorov, t. j.

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v) > 0.$$

Pre jednotkový vektor $n(M)$ normály k ploche S v regulárnom bode M platí

$$n = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|} = \frac{r'_u \times r'_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{15}$$

Rovnica normály k ploche S s rovnicou $w = r(u, v)$ v jej regulárnom bode $M = (u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ je

$$X = M + (r'_u \times r'_v)_M t, \tag{16}$$

čiže

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} y'_u(M), & z'_u(M) \\ y'_v(M), & z'_v(M) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} z'_u(M), & x'_u(M) \\ z'_v(M), & x'_v(M) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} x'_u(M), & y'_u(M) \\ x'_v(M), & y'_v(M) \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

Rovnica normály k ploche S s rovnicou $F(x, y, z) = 0$ v jej regulárnom bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ je

$$X = M + \operatorname{grad} F(M)\, t, \tag{18}$$

čiže

$$\frac{X - x_0}{F'_x(M)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{Z - z_0}{F'_z(M)}. \tag{19}$$

Rovnica normály k ploche S s rovnicou $z = f(x, y)$ v jej regulárnom bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{X - x_0}{z'_x(M)} = \frac{Y - y_0}{z'_y(M)} = \frac{Z - z_0}{-1}. \tag{20}$$

Príklad 1. Nájdite singulárne body plochy $x^2 + y^2 - \cos^2 z = 0$.

Riešenie. Funkcia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \cos^2 z$ je diferencovateľná v celom priestore E_3. Preto pre všetky singulárne body plochy S platí

$$F'_x = 2x = 0, \quad F'_y = 2y = 0, \quad F'_z = 2 \sin z \cos z = 0$$

a

$$x^2 + y^2 - \cos^2 z = 0.$$

Z prvých dvoch rovníc máme $x_0 = y_0 = 0$, z poslednej rovnice vyplýva, že $z_0 = (2k + 1)\,\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Daná plocha má nekonečne mnoho singulárnych bodov $M_k = [0, 0, (2k + 1)\,\pi/2]$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Preskúmajme ešte charakter týchto bodov. Počítajme preto druhé parciálne derivácie funkcie F, dostaneme

$$F''_{xx} = 2, \quad F''_{yy} = 2, \quad F''_{zz} = 2 \cos 2z, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{xz} = 0,$$
$$F''_{yz} = 0$$

pre ľubovoľný bod z E_3. Keďže derivácie $F''_{xx} = 2$ a $F''_{yy} = 2$ sú rôzne od nuly v každom bode plochy S, a teda aj v jej singulárnych bodoch, body M_k sú kónické body plochy S druhého rádu.

Rovnica opísaného kužeľa v singulárnom bode M_k, kde k je celé číslo, je

$$2X^2 + 2Y^2 + 2[\cos (2k + 1)\,\pi]\,[Z - (2k + 1)\,\pi/2]^2 = 0,$$

čiže

$$X^2 + Y^2 - [Z - (2k + 1)\,\pi/2]^2 = 0.$$

To je rovnica rotačného kužeľa s vrcholom v bode M_k a s osou v osi o_z, ktorého povrchové priamky zvierajú s osou o_z uhol $\pi/4$. Daná plocha je tiež rotačná a vznikne rotáciou krivky $x = \cos z$, $y = 0$ okolo osi o_z (pozri *obr. 29*).

Príklad 2. Nájdime dotykovú rovinu a normálu skrutkovej plochy $r = u \cos v\,i + u \sin v\,j + (2v/\pi)\,k$ v bode $M = (0, 1, 1)$. Nájdime súradnicové krivky, ktoré prechádzajú týmto bodom M, a uhol δ, ktorý zvierajú.

Riešenie. Krivočiare súradnice bodu M nájdeme zo vzťahov $u \cos v = 0$, $u \sin v = 1$, $2v/\pi = 1$. Z toho vyplýva $u_0 = 1$, $v_0 = \pi/2$, čiže $M = (1, \pi/2)$.

Zistime, či bod M je regulárny. Počítajme vektor

$$(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)_M = [(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j}) \times (-u \sin v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + (2/\pi)\,\mathbf{k})]_M = \mathbf{j} \times [-\mathbf{i} + (2/\pi)\,\mathbf{k}] = (2/\pi)\,\mathbf{i} + \mathbf{k} \neq \mathbf{o}.$$

Bod M je regulárny bod danej plochy a rovnica dotykovej roviny k danej ploche S v bode M je

$$[X - (0, 1, 1)] \,.\, \{2/\pi, 0, 1\} = 0,$$

čiže

$$2X/\pi + Z - 1 = 0.$$

Rovnica normály k danej ploche v bode M je

$$X : (Y - 1) : (Z - 1) = 2/\pi : 0 : 1.$$

Súradnicovú u-krivku, ktorá prechádza bodom M, dostaneme z rovnice plochy tak, že položíme $u_0 = 1$:

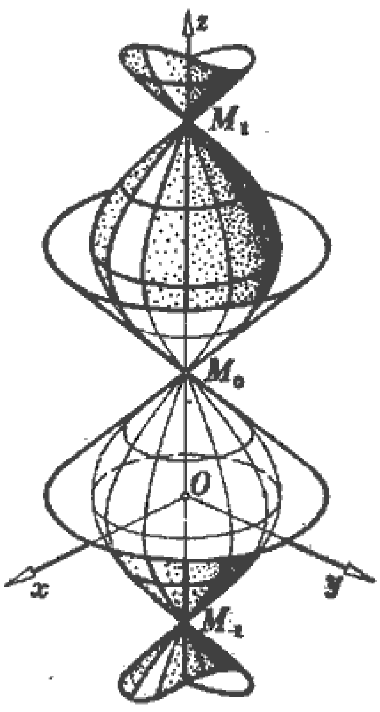
$$\mathbf{r} = \cos v\mathbf{i} + \text{vin } s\mathbf{j} + (2v/\pi)\,\mathbf{k},$$

čo je rovnica skrutkovice na valci $x^2 + y^2 = 1$ so stúpaním $2/\pi$.

Súradnicovú v-krivku dostaneme pre $v_0 = \pi/2$:

$$\mathbf{r} = u\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

čo je rovnica priamky $x : y : (z - 1) = 0 : 1 : 0$, ktorá kolmo pretína os o_z.



Obr. 29

Uhol δ týchto súradnicových u a v kriviek nájdeme ako uhol vektorov dotyčníc týchto kriviek v bode M

$$\cos \delta = \left[\frac{\mathbf{r}'_u \,.\, \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u|\,|\mathbf{r}'_v|}\right]_M = \frac{\mathbf{j} \,.\, [-\mathbf{i} + (2/\pi)\,\mathbf{k}]}{1 \,.\, \sqrt{1 + 4/\pi^2}} = 0,$$

čiže $\delta = \pi/2$. Súradnicové u, v-krivky v bode M sú navzájom kolmé.

V úlohách 972 až 977 nájdite singulárne body danej plochy S a preskúmajte ich charakter.

972. $x = u^2,\ y = v^3,\ z = (u^6 + v^6)^{1/3}$

973. $x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,\ z = u^5.$

974. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 8x - 16z = 0.$

975. $x^3 - 2y - 3x^2 + 2yz^2 + 3x - 2z - y = 0.$

976. $(x^2 + y^2 + z^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0.$

977. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(z^2 - x^2 - y^2) = 0.$

978. Ukážte, že bod $M = (2, 2, 2)$ je nepodstatne singulárny bod plochy S $\mathbf{r} = (u + v)\,\mathbf{i} + (u^2 + v^2)\,\mathbf{j} + (u^3 + v^3)\,\mathbf{k}.$

V úlohách 979 až 983 vypočítajte prvú kvadratickú formu plochy S:

979. Guľovej plochy $\mathbf{r} = a \cos u \cos v\mathbf{i} + a \cos u \sin v\mathbf{j} + a \sin u\mathbf{k}.$

980. Rotačného valca $\mathbf{r} = a \cos v\mathbf{i} + a \sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}.$

981. Rotačného kužeľa $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + cu\mathbf{k}.$

982. Rotačnej plochy $\mathbf{r} = v \cos u\mathbf{i} + v \sin u\mathbf{j} + f(v)\,\mathbf{k}$, kde f je diferencovateľná funkcia.

983. Plochy s rovnicou $z = f(x, y)$, kde f je diferencovateľná funkcia.

984. Nájdite dĺžku krivky K na ploche S, ak rovnica krivky je $u = v$ a prvá kvadratická forma plochy S je $ds^2 = du^2 + \sinh^2 u \, dv^2$.

985. Dokážte, že pre uhol δ súradnicových u-, v-kriviek, ktoré prechádzajú regulárnym bodom plochy S, platí $\cos \delta = F/\sqrt{EG}$. Na základe tohto výsledku dokážte, že súradnicové u-, v-krivky tvoria pravouhlú sieť vtedy a len vtedy, ak $F = 0$.

986. Nájdite uhol, ktorý zvierajú krivky $v = a\, e^{bu}$, kde a, b sú čísla, s povrchovými priamkami rotačnej kužeľovej plochy $\boldsymbol{w} = u \cos v \boldsymbol{i} + u \sin v \boldsymbol{j} + cu\boldsymbol{k}$.

V úlohách 987 až 990 nájdite rovnicu dotykovej roviny k danej ploche S v bode M.

987. $\boldsymbol{r} = (u + v)\, \boldsymbol{i} + (u^2 + v^2)\, \boldsymbol{j} + (u^3 + v^3)\, \boldsymbol{k}$, $M = (1, 1)$.

988. $\boldsymbol{r} = \cos u \cos v \boldsymbol{i} + \cos u \sin v \boldsymbol{j} + \sin u \boldsymbol{k}$, (guľová plocha) $M = (\pi/4, 3\pi/4)$.

989. $\boldsymbol{r} = u \cos v \boldsymbol{i} + u \sin v \boldsymbol{j} + 5u\boldsymbol{k}$, (rotačná valcová plocha) $M = (1, \pi/2)$.

990. $\boldsymbol{r} = \cosh u \cos v \boldsymbol{i} + \cosh u \sin v \boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$, (katenoid), $M = (1, \pi/2)$.

V úlohách 991 až 996 nájdite rovnicu normály a dotykovej roviny plochy S v jej regulárnom bode M.

991. $xyz = 27$, $M = (-1, 3, -9)$.

992. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 27 = 0$, $M = (2, 3, 4)$.

993. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 - y^2 + z^2)$, $M = (1, 0, 1)$.

994. $z = xy$, $M = (1, 1, 1)$.

995. $z = 2x^2 + y^2$, $M = (1, 1, 2)$.

996. $z = 2 \operatorname{arctg} (y/x)$ (skrutková plocha), $M = (1, 1, \pi/2)$.

V úlohách 997 až 1003 nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály k ploche S v jej ľubovoľnom regulárnom bode M.

997. Guľovej plochy $\boldsymbol{r} = a\, [\cos u \cos v \boldsymbol{i} + \cos u \sin v \boldsymbol{j} + \sin u \boldsymbol{k}]$.

998. Rotačnej valcovej plochy $\boldsymbol{r} = a \cos u \boldsymbol{i} + a \sin u \boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$.

999. Rotačnej kužeľovej plochy $\boldsymbol{r} = v \cos u \cos \chi \boldsymbol{i} + v \sin u \cos \chi \boldsymbol{j} + v \sin \chi \boldsymbol{k}$.

1000. Anuloidu $\boldsymbol{r} = (a + b \cos u)\, (\cos v \boldsymbol{i} + \sin v \boldsymbol{j}) + b \sin u \boldsymbol{k}$.

1001. Rotačnej plochy $\boldsymbol{r} = u \cos v \boldsymbol{i} + u \sin v \boldsymbol{j} + f(u)\, \boldsymbol{k}$, kde f je diferencovateľná funkcia.

1002. Hyperbolického paraboloidu $\boldsymbol{r} = a(u + v)\, \boldsymbol{i} + b(u - v)\, \boldsymbol{j} + uv\boldsymbol{k}$.

1003. Skrutkovej plochy $\boldsymbol{r} = u \cos v \boldsymbol{i} + u \sin v \boldsymbol{j} + av\boldsymbol{k}$.

1004. Nájdite rovnicu dotykovej roviny plochy $xyz = 1$, ktorá je rovnobežná s rovinou $x + y + z - 8 = 0$.

1005. Nájdite rovnice dotykových rovín k paraboloidu $4z = x^2 + y^2$ v priesečníkoch s priamkou $x = y = z$.

1006. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $M = (4, 8, 1)$ a bodom $P = (2, 2, 2)$, ktorý leží na ploche $xyz = 8$, kolmo na túto plochu.

1007. Dokážte, že plochy $2x + y - \ln z + 4 = 0$ a $y^2 - xy - 8y + z + 5 = 0$ sa navzájom dotýkajú, t. j. majú spoločnú dotykovú rovinu v bode $M = (-3, 2, 1)$.

1008. Nájdite rovnice kriviek, v ktorých dotyková rovina plochy $xy - az = 0$ v bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ pretína túto plochu.

1009. Nájdite rovnicu plochy, ktorú tvorí množina všetkých normál k ploche $y = x \operatorname{tg} z$ v bodoch priamky $y = x$, $z = \pi/4$.

1010. Dokážte, že všetky normály k rotačnej ploche $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ pretínajú rotačnú os.

1011. Dokážte, že normála k rotačnej ploche je zároveň hlavnou normálou príslušného meridiánu rotačnej plochy.

1012. Krivka $\boldsymbol{r} = a \cosh t \cos t\boldsymbol{i} + a \cosh t \sin t\boldsymbol{j} + at\boldsymbol{k}$ leží na rotačnej ploche $x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(z/a)$, ktorú nazývame *katenoidom*. Dokážte, že v každom bode krivky binormála sa zhoduje s normálou v príslušnom bode katenoidu.

1013. Dokážte, že dotykové roviny k ploche $xyz = a^3$, $a > 0$ tvoria so súradnicovými rovinami štvorsten konštantného objemu $V = 9a^3/2$.

1014. Dokážte, že dotyková rovina v ľubovoľnom bode plochy $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ vytína na súradnicových osiach úseky, ktorých súčet je konštantný.

V úlohách **1015** až **1018** dokážte, že dané plochy (v ich rovniciach a, b, c sú čísla) sú navzájom ortogonálne.*)

1015. $x^2 + y^2 + z^2 = ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = by$.

1016. $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $z^2 + 2x^2 = cz^2 + 2y^2$.

1017. $xy = az$, $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = b$, $\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = c$.

1018. $x^2 + y^2 + z^2 = ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = by$, $x^2 + y^2 + z^2 = cz$.

Valcová plocha, ktorá má povrchové priamky rovnobežné s vektorom $\boldsymbol{n} = \{a, b, c\}$ a dotýka sa danej plochy S pozdĺž krivky K, nazýva sa *opísaná valcová plocha* plochy S. Krivka K sa nazýva *obrys* plochy S pre vektor $\boldsymbol{n}$.

V úlohách **1019** až **1021** nájdite rovnicu opísanej valcovej plochy danej plochy S pre vektor $\boldsymbol{n}$:

1019. Guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ak $\boldsymbol{n} = \{k, l, m\}$.

1020. Elipsoidu $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, ak $\boldsymbol{n} = \{1, 1, 1\}$.

1021. Eliptického paraboloidu $2z = x^2/p + y^2/q$, ak $\boldsymbol{n} = \{\sqrt{p}, \sqrt{q}, 1\}$.

Daná je plocha S, ktorá je v každom bode regulárna. Plocha, ktorá je vytvorená pätami všetkých kolmíc spustených z daného bodu A na dotykové roviny plochy S, nazýva sa *úpätnicová plocha*.

V úlohách **1022** až **1025** nájdite rovnicu upätnicovej plochy k danej ploche S vzhľadom na bod A.

1022. Elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ a A je stred elipsoidu.

1023. Hyperboloidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ a A je jeho stred.

1024. Skrutkovej plochy $z = k \operatorname{arctg}(y/x)$ pre bod $A = (0, 0, 0)$.

1025. Plochy $xyz = a^3$ pre bod $A = (0, 0, 0)$.

3,13. Krivosť krivky na ploche. Krivosť plochy

Nech má plocha S rovnicu $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}(u, v)$ a nech $P = O + \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ je jej regulárny bod, v ktorom funkcia má druhý diferenciál. Nech K je krivka na ploche S, ktorá prechádza bodom P a má v tomto bode krivosť $k(P)$.

Vektor

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k(P)\,\boldsymbol{\nu},$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\nu}$ sú jednotkové vektory dotyčnice a hlavnej normály krivky K v bode P nazývame *vektorom krivosti* krivky K v bode P.

*) Hovoríme, že dve plochy S_1 a S_2 sú v svojom priesečníku ortogonálne vtedy, ak priesečník M je ich regulárny bod a vektory normál $\boldsymbol{n}_1(M)$, $\boldsymbol{n}_2(M)$ sú navzájom kolmé.

Normálovou krivosťou k_n krivky K na ploche S v bode P nazývame priemet vektora krivosti $k(P)\boldsymbol{\nu}$ do normálového vektora $\boldsymbol{n}(P)$ plochy S v bode P, t. j.

$$k_n = k(P)\,\boldsymbol{\nu}\,.\,\boldsymbol{n}(P). \tag{1}$$

Tangenciálnou alebo *geodetickou krivosťou* k_g krivky K na ploche S v bode P nazývame priemet vektora krivosti do vektora $\boldsymbol{n}(P) \times \boldsymbol{\tau}$, ktorý leží v dotykovej rovine plochy S v bode P.

Veta 1. Ak je krivka K na ploche S daná prirodzeným parametrickým vyjadrením $\boldsymbol{r}[u(s), v(s)]$, pričom bod $P = O + \boldsymbol{r}[u(s_0), v(s_0)]$ a existujú derivácie $u'_0 = u'(s_0)$, $v'_0 = v'(s_0)$, potom v bode P plochy S platí

$$k_n = Lu_0'^2 + 2Mu_0'v_0' + Nv_0'^2, \tag{2}$$

$$\text{kde } L = \frac{\partial^2\boldsymbol{r}(P)}{\partial u^2}\,.\,\boldsymbol{n}(P),\; M = \frac{\partial^2\boldsymbol{r}(P)}{\partial u\partial v}\,.\,\boldsymbol{n}(P),\; N = \frac{\partial^2\boldsymbol{r}(P)}{\partial v^2}\,.\,\boldsymbol{n}(P).$$

Výraz

$$\mathrm{II} = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 \tag{3}$$

nazývame druhou kvadratickou formou plochy S.

Za predpokladov uvedených na začiatku tohto článku platí

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}\,. \tag{4}$$

Veta 2. *(Meusnierova veta).* Všetky krivky K na ploche S, ktoré prechádzajú bodom P a majú v ňom spoločnú dotyčnicu, majú v bode P rovnakú normálovú krivosť.

Veta 3. Všetky krivky K na ploche S, ktoré prechádzajú bodom P a majú v bode P spoločnú dotyčnicu a oskulačnú rovinu, majú v bode P rovnakú krivosť.

Normálovým rezom plochy S v bode P budeme nazývať takú rovinnú krivku na ploche S, ktorej hlavná normála v bode P sa zhoduje s normálou plochy S v bode P.

Veta 4. Krivosť $k(P)$ normálového rezu sa rovná absolútnej hodnote normálovej krivosti.

Hlavnými krivosťami plochy S v bode P nazývame extrémne hodnoty normálovej krivosti. Dostaneme ich riešením kvadratickej rovnice

$$(EG - F^2)\,k_n^2 - (EN - 2FM + GL)\,k_n + (LN - M^2) = 0, \tag{5}$$

kde $E = \boldsymbol{r}'_u(P)\,.\,\boldsymbol{r}'_u(P)$, $F = \boldsymbol{r}'_u(P)\,.\,\boldsymbol{r}'_v(P)$, $G = \boldsymbol{r}'_v(P)\,.\,\boldsymbol{r}'_v(P)$ a L, M, N majú význam ako vo vete 1.

Rovnicu (5) nazývame *rovnicou pre hlavné krivosti.*

Hlavnými smermi plochy S v bode P nazývame smerové vektory dotyčníc normálových rezov, ktorých normálová krivosť je extrémna. Dostaneme ich riešením rovnice

$$(LF - ME)\,u'^2 + (LG - NE)\,u'v' + (MG - NF)\,v'^2 = 0, \tag{6}$$

Ak u', v' je riešením rovnice (6), potom hlavný smer je daný vektorom

$$u'\boldsymbol{r}'_u + v'\boldsymbol{r}'_v. \tag{7}$$

Ak rovnica (5) má v danom bode P plochy S dvojnásobný koreň, potom rovnica (6) má nekonečne veľa riešení a hlavné smery nie sú definované. Bod P v tomto prípade sa nazýva *kruhový bod*.

Veta 5. Ak rovnica (6) má dve rôzne riešenia, t. j. plocha S má dva lineárne nezávislé hlavné smery, potom tieto smery sú navzájom kolmé.

Veta 6. *(Eulerova veta.)* Pre normálovú krivosť plochy S v jej regulárnom bode P platí

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta,$$

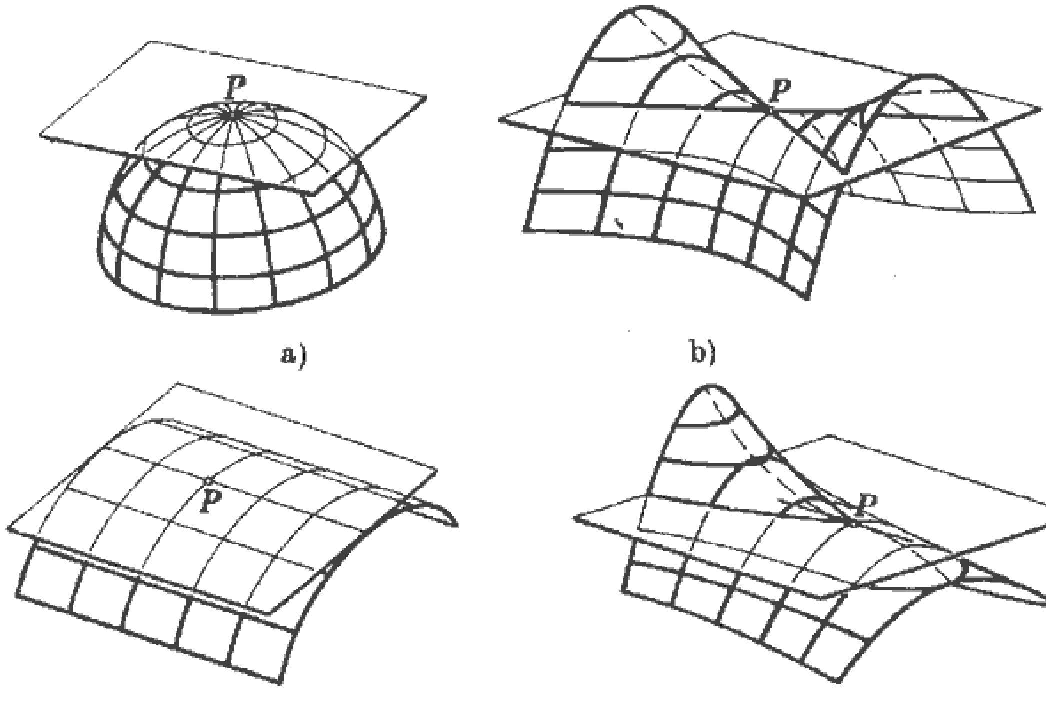
kde k_1, k_2 sú hlavné krivosti a θ je uhol, ktorý zviera rovina normálového rezu s rovinou prvého hlavného rezu.

Klasifikácia bodov plochy. Ak v regulárnom bode P plochy S je:

a) $LN - M^2 > 0$, majú hlavné krivosti k_1, k_2 rôzne znamienka. Bod P nazývame ***eliptickým bodom*** a plocha je v okolí bodu P v jednom polpriestore vzhľadom na dotykovú rovinu v bode P;

b) $LN - M^2 < 0$, majú hlavné krivosti k_1, k_2 rôzne znamienka. Bod P nazývame ***hyperbolickým bodom*** a plocha je v okolí bodu P po oboch stranách dotykovej roviny plochy v bode P a má charakter *„sedla“ (obr. 30b)*;

c) $LN - M^2 = 0$, tak k_1 alebo k_2 rovná sa nule. Bod P nazývame ***parabolickým bodom.*** Jeden hlavný normálový rez má v bode P inflexný bod, alebo je priamkou *(obr. 30c, d)*.



Obr. 30

Úplnou krivosťou (Gaussovou mierou krivosti) plochy S v bode P nazývame súčin

$$k_t = k_1 k_2$$

hlavných krivostí plochy S v bode P.

Strednou krivosťou plochy S v bode P nazývame aritmetický priemer

$$k_s = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

hlavných krivostí plochy S v bode P.

Ak rovnica (5) pre hlavné krivosti má dvojnásobný koreň, potom $k_t = k_1^2$ a $k_s = k_1$.

Veta 7. Nech k_t je úplná a k_s stredná krivosť plochy S v bode P. Potom platí

$$k_t = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{8}$$

$$k_s = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{9}$$

Poznámka. Ak plocha S má rovnicu $z = f(x, y)$ a funkcia f má v bode $A = (x_0, y_0)$ spojité parciálne derivácie prvého a druhého rádu

$$p = f'_x(A), \qquad q = f'_y(A), \qquad r = f''_{xx}(A), \qquad s = f''_{xy}(A), \qquad t = f''_{yy}(A),$$

potom rovnica pre hlavné krivosti je

$$(1 + p^2 + q^2)^2 k_n^2 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[2pqs - (1 + p^2)\,t - (1 + q^2)\,r]\,k_n + (rt - s^2) = 0. \qquad (10)$$

Hlavný smer je v tomto prípade daný vektorom

$$x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + (px' + qy')\,\boldsymbol{k},$$

pričom x', y' je riešením rovnice

$$[tpq - s(1 + q^2)]\,y'^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]\,x'y' + [s(1 + p^2) - rpq]\,x'^2 = 0. \qquad (11)$$

Pre úplnú a strednú krivosť platí

$$k_t = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad k_s = \frac{r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

Príklad. Nájdime hlavné krivosti, úplnú krivosť, strednú krivosť a hlavné smery skrutkovej plochy

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u \cos v\boldsymbol{i} + u \sin v\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$$

v bode $P = O + \boldsymbol{r}(1, \pi/2)$.

Riešenie. Vypočítajme najprv prvé a druhé derivácie funkcie $\boldsymbol{r}(u, v)$ v bode P. Máme

$$\boldsymbol{r}_u'(P) = [\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}]_P = \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}_v'(P) = [-u \sin v\boldsymbol{i} + u \cos v\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]_P = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_{uu}''(P) = 0, \quad \boldsymbol{r}_{uv}''(P) = [-\sin v\boldsymbol{i} + \cos v\boldsymbol{j}]_P = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_{vv}''(P) = [-u \cos v\boldsymbol{i} - u \sin v\boldsymbol{j}]_P = -\boldsymbol{j}.$$

Ďalej máme

$$\boldsymbol{n}(P) = \frac{\boldsymbol{j} \times (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{j} \times (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})|} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}).$$

Vypočítajme ešte E, F, G, L, M, N. Máme

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 2, \quad L = 0, \quad M = -\sqrt{2}/2, \quad N = 0.$$

Rovnica pre hlavné krivosti podľa (5) je

$$(2 - 0)\,k^2 - (0 - 2\,.\,0 + 0)\,k - 1/2 = 0,$$

čiže

$$2k^2 - 1/2 = 0.$$

Z toho potom je $k_1 = 1/2$, $k_2 = -1/2$.

Hlavné smery dostaneme podľa (6) riešením rovnice

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,u'^2 - \sqrt{2}\,v'^2 = 0.$$

Z toho $u' = \pm\sqrt{2}v'$. Ak za v' zvolíme 1, dostaneme podľa (7) hlavné smery $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \sqrt{2}\,v'\boldsymbol{j} + v'(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{v}_2 = -\sqrt{2}\,v'\boldsymbol{j} + v'(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Úplná krivosť k_t je

$$k_t = k_1\,.\,k_2 = -1/4.$$

Stredná krivosť k_s je

$$k_s = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

V úlohách **1026** až **1029** nájdite normálové a geodetické krivosti krivky K na ploche S v bode P, ak sú dané rovnice krivky K, plochy S a bod P.

1026. $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + \cosh t\boldsymbol{k}$, $x^2 + y^2 = 1$, $P = (1, 0, 1)$.

1027. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $P = (1, 0, 1)$.

1028. $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}/12 + 2\boldsymbol{k}/t$, $x^3 = 12y$, $P = (2, 2/3, 1)$.

1029. $\left.\begin{array}{l}(x-1)^2 + (z+1/2)^2 = 9/4\\ y^2 - 2x + 2 = 0,\end{array}\right\}$ $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $P = (1, 1, 1)$.

1030. Nájdite geodetickú krivosť kružnice polomeru r na guľovej ploche polomeru R.

1031. Nájdite krivosť normálového rezu rotačného valca, ak rovina rezu zviera s osou valca uhol $45°$.

1032. V bode P plochy S je zostrojených n normálových rezov, pričom uhol dvoch po sebe idúcich normálových rovín je $2\pi/n$. Dokážte, že aritmetický priemer normálových krivostí nezávisí ani od počtu n rezov ani od smeru prvého rezu.

V úlohách **1033** až **1038** nájdite druhú základnú kvadratickú formu plochy S.

1033. Guľovej plochy $\boldsymbol{r} = a(\cos u \cos v\boldsymbol{i} + \cos u \sin v\boldsymbol{j} + \sin u\boldsymbol{k})$.

1034. Skrutkovej plochy $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$.

1035. Pseudosféry $\boldsymbol{r} = a \sin u(\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + [a \ln \operatorname{tg}(u/2) + a \cos u]\,\boldsymbol{k}$.

1036. Rotačnej plochy $\boldsymbol{r} = f(u)(\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + g(u)\,\boldsymbol{k}$.

1037. Plochy $z = f(x, y)$.

1038. Hyperbolického paraboloidu $z = mxy$.

V úlohách **1039** až **1045** nájdite hlavné krivosti a hlavné smery plochy S v danom bode P.

1039. $\boldsymbol{r} = u \cos v\boldsymbol{i} + u \sin v\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$, $P = (0, 2, \pi/2)$.

1040. $4xyz = 1$, $P = (1, 1/2, 1/2)$.

1041. $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$, $P = (0, 0, 4)$.

1042. $x = y^2/4 + z^2/6$, $P = (0, 0, 0)$.

1043. $z = x^2 - y^2$, $P = (1, 1, 0)$.

1044. $z = x^4/2p(x^2 + y^2)$, $P = (0, 0, 0)$.

1045. $x = yz/a$, $P = (x_0, y_0, z_0)$.

1046. Dokážte, že jeden z hlavných polomerov krivosti rotačnej plochy S sa rovná dĺžke úsečky na normále k ploche S v bode P určenej bodom P a priesečníkom normály s rotačnou plochou.

V úlohách **1047** až **1050** nájdite strednú a úplnú krivosť plochy S v bode P.

1047. $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + (u^2 - 2v)\,\boldsymbol{j} + (u^3 - 3uv)\,\boldsymbol{k}$, $P = (2, 2, 2)$.

1048. $x^2 + y^2 - 2 \sin^2 z = 0$, $P = (1, 1, \pi/2)$.

1049. $z(x^2 + y^2) - 2xy = 0$, $P = (1, 1, 1)$.

1050. $z = x^2 + xy + y^3$, $P = (1, 1, 3)$.

V úlohách **1051** až **1056** nájdite hlavné krivosti, strednú a úplnú krivosť danej plochy S v jej ľubovoľnom bode P.

1051. Guľovej plochy $\boldsymbol{r} = a(\cos u \cos v\boldsymbol{i} + \cos u \sin v\boldsymbol{j} + \sin u\boldsymbol{k})$.

1052. Kužeľovej plochy $\boldsymbol{r} = u \cos v\boldsymbol{i} + u \sin v\boldsymbol{j} + cu\boldsymbol{k}$.

1053. Katenoidu $\boldsymbol{r} = b \cosh \dfrac{u}{b}(\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + u\boldsymbol{k}$.

1054. Pseudosféry $\boldsymbol{r} = a \sin u(\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + [a \ln \operatorname{tg}(u/2) + a \cos u]\,\boldsymbol{k}$.

1055. Rotačnej plochy $z = f(x^2 + y^2)$.

1056. Skrutkovej plochy $\boldsymbol{r} = u(\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j}) + av\boldsymbol{k}$.

V úlohách 1057 až 1059 nájdite strednú a úplnú krivosť danej plochy v jej ľubovoľnom bode P.

1057. Elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

1058 Hyperbolického paraboloidu $2z = x^2 - y^2$

1059. Hyperboloidu $z = axy$.

1060. Dokážte, že stredná krivosť plochy $z = \ln\cos x - \ln\cos y$ rovná sa nule.

1061. Vyjadrite úplnú krivosť krivky pomocou jej normálovej a geodetickej krivosti.

1062. Preskúmajte charakter bodov nasledujúcich kvadratických plôch:

a) guľovej plochy,
b) elipsoidu,
c) jednodielneho hyperboloidu,
d) dvojdielneho hyperboloidu,
e) eliptického paraboloidu,
f) hyperbolického paraboloidu,
g) eliptického valca.

V úlohách 1063 až 1067 preskúmajte charakter bodov rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky K okolo danej osí.

1063. $y = \cos x$, $z = 0$, okolo osi o_x.

1064. $y = \cos x$, $z = 0$, okolo osi o_y.

1065. $y = e^x$, $z = 0$, okolo osi o_x.

1066. $y = e^x$, $z = 0$, okolo osi o_y.

1067. $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, $a < b$, okolo osi o_z.

V úlohách 1068 až 1070 nájdite kruhové body plochy S, ak plocha S je daná rovnicou:

1068. $2z = x^2/p + y^2/q$, $p > q > 0$.

1069. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

1070. $z^2 + y^2 = \sin^2 x$.

4. DIFERENCIÁLNE ROVNICE

4,1. Základné pojmy a úlohy vedúce na diferenciálne rovnice

Nech F je funkcia $n + 2$ premenných*) definovaná na množine M. Nech $C^n(I)$ je množina všetkých funkcií $y = f(x)$, ktoré sú na intervale I n-krát diferencovateľné a pre každé $x_0 \in I$ je $(x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)) \in M$. Potom rovnicu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazývame *obyčajnou diferenciálnou rovnicou* n-tého rádu.**) Číslo n nazývame *rádom* diferenciálnej rovnice (1).

Každú funkciu $y = \varphi(x)$ z množiny $C^n(I)$, pre ktorú platí

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = 0$$

pre každé $x \in I$, nazývame *riešením diferenciálnej rovnice* (1) na intervale I. Funkcia $y = \varphi(x)$ môže byť určená aj parametricky $x = \psi_1(t)$, $y = \psi_2(t)$ alebo implicitne $\Phi(x, y) = 0$.

Graf riešenia $y = \varphi(x)$ diferenciálnej rovnice (1) nazývame integrálnou krivkou diferenciálnej rovnice (1). Ak je riešenie diferenciálnej rovnice (1) dané implicitne $\Phi(x, y) = 0$, potom ho nazývame *integrálom diferenciálnej rovnice* (1).

Nech pre riešenie $y = \varphi(x)$, $x \in I$, diferenciálnej rovnice (1) v čísle $a \in I$ platí

$$y(a) = b_0, \qquad y'(a) = b_1, \dots, \qquad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}, \tag{2}$$

pričom $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$ sú ľubovoľné čísla, avšak také, že $(a, b_0, b_1, \dots b_{n-1}, x_{n+2})$ je z množiny M. Potom podmienky (2) nazývame *Cauchyovskými začiatočnými podmienkami*.

Ak diferenciálna rovnica (1) a diferenciálna rovnica

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

majú rovnaké množiny riešení na tých istých intervaloch, potom diferenciálne rovnice (1) a (3) nazývame *ekvivalentnými*. Úpravy, ktorými možno prejsť od diferenciálnej rovnice (1) k diferenciálnej rovnici (3), nazývame *ekvivalentnými úpravami*.

Príklad 1. Nájdime diferenciálnu rovnicu krivky s rovnicou $y = f(x)$, ktorej krivosť v každom jej bode P je úmerná kosínusu uhla α jej dotyčnice s osou o_x v bode P. Nájdime aj začiatočné podmienky, ak táto krivka prechádza bodom $A = (1, 1)$ a v tomto bode má dotyčnicu $2x + y + 3 = 0$.

Riešenie. Ak krivka K s rovnicou $y = f(x)$ má v bode P krivosť, potom platí

$$k(P) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Keďže vektor dotyčnice v regulárnom bode krivky K je

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}, \tag{5}$$

pre uhol α platí

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}. \tag{6}$$

---

*) O funkcii $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ predpokladáme, že parciálna funkcia $F(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, x_{n+2})$ nie je konštantnou funkciou jednej premennej x_{n+2}.

**) Všade v ďalšom texte hovoríme namiesto obyčajná diferenciálna rovnica len diferenciálna rovnica.

Hľadaná krivka v každom bode P spĺňa podmienku

$$k(P) = a \cos \alpha,$$

kde a je konštanta úmernosti. Odtiaľ a z rovníc (4) a (6) dostaneme v ľubovoľnom bode P krivky K

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{a}{(1 + y'^2)^{1/2}},$$

alebo

$$y'' - ay'^2 - a = 0.$$

To je diferenciálna rovnica druhého rádu pre hľadanú krivku. Keďže táto krivka má prechádzať bodom A a v tomto bode sa má dotýkať priamky $2x + y + 3 = 0$, musí platiť $y(1) = 1$ $y'(1) = -2$, čo sú začiatočné podmienky.

Príklad 2. Teleso s hmotou m padá z výšky h so začiatočnou rýchlosťou v_0 zvisle nadol. Odpor vzduchu je priamo úmerný štvorcu rýchlosti padajúceho telesa. Nájdite diferenciálnu rovnicu pohybu padajúceho telesa a začiatočné podmienky.

Riešenie. Na priamke, po ktorej sa teleso pohybuje, zvoľme súradnicový systém tak, aby začiatok O bol na zemskom povrchu a kladná časť osi o_x bola nad zemským povrchom. Nech $x = f(t)$ udáva polohu telesa v čase t. Potom v čase t rýchlosť telesa je $\mathbf{v} = x'\mathbf{i} = f'(t)\,\mathbf{i}$ a jeho zrýchlenie je $\mathbf{a} = x''\mathbf{i} = f''(t)\,\mathbf{i}$.

Na padajúce teleso pôsobí v každom čase t tiaž a odpor vzduchu, pričom $t < T$, kde T je doba padania.

Podľa II. Newtonovho zákona platí

$$mx''\mathbf{i} = (-mg + kx'^2)\,\mathbf{i},$$

kde g je zrýchlenie voľného pádu a k je koeficient odporu prostredia. Z toho dostávame hľadanú diferenciálnu rovnicu pre padanie telesa

$$x'' - (k/m)x'^2 + g = 0.$$

Začiatočné podmienky sú určené začiatočnou výškou $x(0) = h$ a začiatočnou rýchlosťou $x'(0) = v(0) = v_0$.

Príklad 3. Máme nájsť diferenciálnu rovnicu jednoparametrického systému konfokálnych parabol, ktorých os je v osi o_y a ohnisko v začiatku pravouhlého súradnicového systému.

Riešenie. Rovnica tohto jednoparametrického systému parabol je

$$x^2 - 4\alpha(y - \alpha) = 0, \qquad \alpha \neq 0, \tag{7}$$

kde parameter daného systému je druhá súradnica vrcholu $V = (0, \alpha)$ paraboly.

Diferenciálnu rovnicu k-parametrického systému kriviek $F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0$ hľadáme tak, že vylúčime z rovníc

$$F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\mathrm{d}^{(k-1)}F}{\mathrm{d}x^{k-1}} = 0$$

parametre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, ak je to možné.

V danom príklade ide o jednoparametrický systém, preto stačí vypočítať iba prvú deriváciu funkcie F podľa x. Derivovaním z rovnice (7) dostaneme

$$2x - 4\alpha y' = 0. \tag{8}$$

Vylúčme parameter α z rovníc (7) a (8). Nech $y' \neq 0$, potom $\alpha = x/2y'$ a po dosadení do rovnice (7) a úprave máme

$$x^2 - \frac{2x}{y'}\left(y - \frac{x}{2y'}\right) = 0,$$

čiže

$$x^2y'^2 - 2xyy' + x^2 = 0. \tag{9}$$

Ak $y' = 0$, potom z rovnice (8) vyplýva $x = 0$ a z rovnice (7) vyplýva $y = \alpha$. Teda diferenciálna rovnica (9) platí aj pre $y' = 0$.

Preto je rovnica (9) diferenciálna rovnica daného jednoparametrického systému konfokálnych parabol.

1071. Zistite, ktoré z daných funkcií sú riešením diferenciálnej rovnice $yy''' - y'y'' = 0$, ak:

a) $y = e^{-x}$,
b) $y = \cos x$,
c) $y = \ln x$,
d) $y = 2x + 5$,
e) $y = x + \cos x$,
f) $y = \sin 2x + \cos 2x$.

V úlohách **1072** až **1079** dokážte, že dané funkcie sú riešeniami diferenciálnych rovníc:

1072. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$, $yy' = x - 2x^3$.

1073. $y = 12/\cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $y' - y \operatorname{tg} x = 0$.

1074. $x = t\,e^t$, $y = e^{-t}$, $t \in (-1, \infty)$, $(1 + xy)\,y' + y^2 = 0$.

1075. $x = \ln t + \sin t$, $y = t(1 + \sin t) + \cos t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1076. $x = \ln y' + \sin y'$ $x = t + \arcsin t$, $y = t^2/2 - \sqrt{1 - t^2}$,
$t \in (-1, 1)$, $x = y' + \arcsin y'$.

1077. $y = x + e^y$, $(x - y + 1)\,y' = 1$.

1078. $x^3 e^y - y - 2 = 0$, $x^3 e^y y' + 3x^2 e^y - y' = 0$.

1079. $y + \ln y - x - 3 = 0$, $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$.

V úlohách **1080** až **1084** nájdite diferenciálne rovnice, ktorých riešeniami sú nasledujúce funkcie:

1080. $y = cx + c^2$, c je ľubovoľná konštanta

1081. $y = x - c/x$, $x \neq 0$, c je ľubovoľná konštanta.

1082. $y = c_1 x + c_2$, c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty.

1083. $y = c_1 x + c_2 e^x$, c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty.

1084. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$, c_1, c_2, c_3 sú ľubovoľné konštanty.

V úlohách **1085** až **1092** nájdite diferenciálnu rovnicu daného k-parametrického systému kriviek s rovnicou $F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sú parametre.

1085. $y = \alpha\, e^{x/\alpha}$, α je ľubovoľné reálne číslo rôzne od nuly.

1086. $y = \alpha(x - \alpha)^2$, α je ľubovoľné číslo.

1087. $y = \alpha x - \sqrt{1 + \alpha^2}$, α je ľubovoľné číslo.

1088. $x = \alpha(t - \sin t)$, $y = \alpha(1 - \cos t)$, α je ľubovoľné číslo.

1089. $x^2 + y^2 = \alpha^2$, α je ľubovoľné kladné číslo.

1090. $y = A \sin(x + \varphi)$, A, φ sú ľubovoľné čísla.

1091. $ax^2 + by^2 = 1$, a, b, sú čísla, pre ktoré platí buď $a > 0$, buď $b > 0$.

1092. $y = (ax^2 + bx + c)\, e^{-x}$, a, b, c sú ľubovoľné čísla.

1093. Nájdite diferenciálnu rovnicu všetkých parabol, ktorých os je rovnobežná s osou o_y a ktoré prechádzajú začiatkom pravouhlého súradnicového systému.

1094. Nájdite diferenciálnu rovnicu všetkých kružníc v rovine.

1095. Dokážte, že $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ je riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + y = 0$ na intervale $(-\infty, \infty)$.

1096. Na základe úlohy **1095** nájdite, ak je to možné, jedno riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + y = 0$, ktoré spĺňa podmienky:

a) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = -1$.
b) $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$.
c) $y(0) = y(\pi) = 0$.
d) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$.

1097. Nájdite diferenciálnu rovnicu pre pohyb telesa s hmotou m, ktoré sa priamočiaro pohybuje v prostredí, ktorého odpor proti pohybu telesa je priamo úmerný druhej mocnine rýchlosti telesa.

1098. Nájdite diferenciálnu rovnicu ohybu vodorovného nosníka voľne položeného na oboch koncoch.

1099. Teleso s hmotou m a merným teplom c má v čase t_0 teplotu T_0. Teplota T_1 okolného prostredia je konštantná, pričom $T_1 < T_0$. Nájdite diferenciálnu rovnicu ochladzovania sa telesa, ak množstvo tepla, ktoré pri ochladzovaní prejde z telesa do okolného prostredia, je úmerné rozdielu teplôt telesa a prostredia a dĺžke času ochladzovania sa tohto telesa.

1100. Na plyn pôsobí žiarenie s konštantnou intenzitou, v dôsledku čoho sa plyn ionizuje, a to tak, že za jednu sekundu vznikne q kladných a q záporných iónov v danom objeme plynu. Keďže kladné a záporné ióny sa znova zlučujú (rekombinácia iónov), ich celkový počet sa zmenší. Za predpokladu, že z celkového počtu n kladných iónov sa rekombinuje počet iónov úmerný druhej mocnine ich celkového počtu, nájdite závislosť počtu iónov od času t.

1101. Nájdite diferenciálnu rovnicu elektrických kmitov v okruhu, pozostávajúcom z kondenzátora s kapacitou C, cievky s indukčnosťou L a ohmickým odporom R, ak v okruhu pôsobí elektromotorická sila $e = E \sin \omega t$.

4,2. Diferenciálna rovnica prvého rádu

Diferenciálna rovnica prvého rádu (pozri čl. 4.1) je diferenciálna rovnica tvaru

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Majme diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorú možno vyjadriť v tvare

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na oblasti $\Omega = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, kde a, b sú kladné čísla.*)

Budeme hovoriť, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa na oblasti Ω *Lipschitzovu podmienku* vzhľadom na y s konštantou L, ak pre každé dva body (x, y) a $(x, \bar{y})$ z Ω platí

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq L\,|\bar{y} - y|. \tag{3}$$

Ak funkcia $f(x, y)$ má na oblasti Ω ohraničenú parciálnu deriváciu podľa y, tak na oblasti Ω spĺňa Lipschitzovu podmienku.

Veta 1. Nech funkcia $f(x, y)$ na oblasti Ω:

1. je spojitá,
2. je ohraničená, t. j. existuje konštanta K, že pre každý bod $(x, y) \in \Omega$ je $|f(x, y)| \leq K$,
3. spĺňa Lipschitzovu podmienku.

Potom diferenciálna rovnica (2) má práve jedno riešenie $y = \varphi(x)$, ktoré prechádza bodom $A = (x_0, y_0)$, t. j. $y_0 = \varphi(x_0)$, a to na intervale $(x_0 - c, x_0 + c)$, kde $c = \min\{a, b/K\}$.

*) Namiesto uvedeného konečného intervalu možno uvažovať aj nekonečné intervaly.

Poznámka. Riešenie $y = \varphi(x)$ z vety 1 dostaneme ako limitu postupnosti funkcií $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Funkciu $y_n(x)$ nazývame *n-tou Picardovou aproximáciou*.

Ak je funkcia $f(x, y)$ definovaná na oblasti $G \subset E_2$, kde sme zvolili pravouhlý súradnicový systém, tak diferenciálnou rovnicou $y' = f(x, y)$ je každému bodu $(x, y) \in G$ priradená smernica y' dotyčnice integrálnej krivky v bode (x, y).

Oblasť G, ktorej každému bodu je uvedeným spôsobom priradená smernica, budeme nazývať *smerovým poľom* diferenciálnej rovnice $y' = f(x, y)$.

Množinu všetkých bodov oblasti G, ktorým je priradený ten istý smer, budeme nazývať *izoklinou* a rovnicu

$$f(x, y) = c, \tag{5}$$

kde c je dané číslo, budeme nazývať *rovnicou izokliny*.

Príklad 1. Zistime oblasť existencie a jednoznačnosti riešenia diferenciálnej rovnice $y' = x + y$. Nájdime Picardove aproximácie danej diferenciálnej rovnice pre začiatočnú podmienku $y(0) = 0$ a ich limitu.

Riešenie. Nech $J = \langle x_0 - a, x_0 + a\rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle$, kde $A = (x_0, y_0)$ je ľubovoľný bod z E_2. Položme $f(x, y) = x + y$. Funkcie $f(x, y) = x + y$ a $f'_y(x, y) = 1$ sú spojité na celom priestore E_2, a teda aj na intervale J. Keďže J je uzavretý interval, potom funkcie f a f'_y sú na tomto intervale aj ohraničené, a teda sú spojité a ohraničené aj na oblasti $\Omega = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \subset J$. Na oblasti Ω sú splnené podmienky vety 1, a teda bodom A prechádza práve jedno riešenie danej diferenciálnej rovnice.

Hľadajme Picardove aproximácie danej diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou $y(0) = 0$. Teda $y_0 = 0$ a podľa (4) dostaneme

$$y_1 = 0 + \int_0^x (t + 0)\,dt = x^2/2!,$$

$$y_2 = 0 + \int_0^x (t + t^2/2)\,dt = x^2/2! + x^3/3!,$$

$$y_3 = 0 + \int_0^x (t + t^2/2 + t^3/3)\,dt = x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!.$$

Úplnou indukciou možno ľahko dokázať, že n-tá Picardova aproximácia je

$$y_n = x^2/2! + x^3/3! + \ldots + x^{n+1}/(n + 1)!.$$

Limita postupnosti Picardových aproximácií je

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = e^x - 1 - x. \tag{6}$$

Hľadajme interval, v ktorom je táto limita riešením danej diferenciálnej rovnice. Pre ľubovoľný bod oblasti platí $|x + y| \leq a + b = K$. Nech $c = \min\{a, b/K\} = \min\{a, b/(a + b)\}$, potom limita (6) je riešením danej diferenciálnej rovnice na intervale $(-c, c)$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 0$.

Príklad 2. Majme diferenciálnu rovnicu $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Zistime, či bodom $A = (1, 0)$ prechádza jediné riešenie danej diferenciálnej rovnice.

Riešenie. Funkcia $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ je definovaná a spojitá v celom priestore E_2. Zvoľme za oblasť Ω interval $J = (1 - a, 1 + a) \times (-b, b)$, kde a, b sú ľubovoľné kladné čísla. Funkcia $f(x, y)$

je na uzavretej oblasti $\Omega' = \langle 1 - a, 1 + a \rangle \times \langle -b, b)$ spojitá a ohraničená, preto aj na oblasti Ω je spojitá a ohraničená.

Ukážme nepriamo, že funkcia $f(x, y)$ nesplňa na oblasti Ω Lipschitzovu podmienku. Predpokladajme, že existuje taká konštanta $L > 0$, že pre každé dva body $(x, \bar{y})$, (x, y) z oblasti Ω platí

$$3 \left| \sqrt[3]{\bar{y}^2} - \sqrt[3]{y^2} \right| \leq L \left| \bar{y} - y \right|. \tag{7}$$

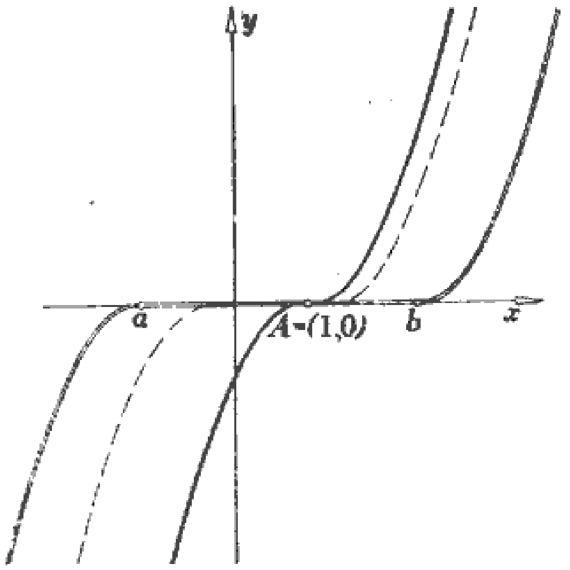
Nech $(x, y) = (1, 0)$ a $(x, \bar{y}) = (1, c)$, kde $c = \min \{1/L^3, b\}$. Po dosadení do nerovnosti (7) máme $3 \sqrt[3]{c^2} \leq Lc$. Z toho potom $27c^2 \leq L^3c^3$, čiže $c \geq 27/L^3 > \min \{1/L^3, b\} = c$, čo je spor. Teda v okolí bodu $A = (1, 0)$ nie je splnená Lipschitzova podmienka a nie je tam zaručená jednoznačnosť riešenia.

Dosadením do danej diferenciálnej rovnice ľahko zistíme, že funkcie $y = 0$ a $y = (x - 1)^3$, ktoré prechádzajú bodom A, sú jej riešenia na intervale $(-\infty, \infty)$. Teda bodom A neprechádza len jediné riešenie danej diferenciálnej rovnice.

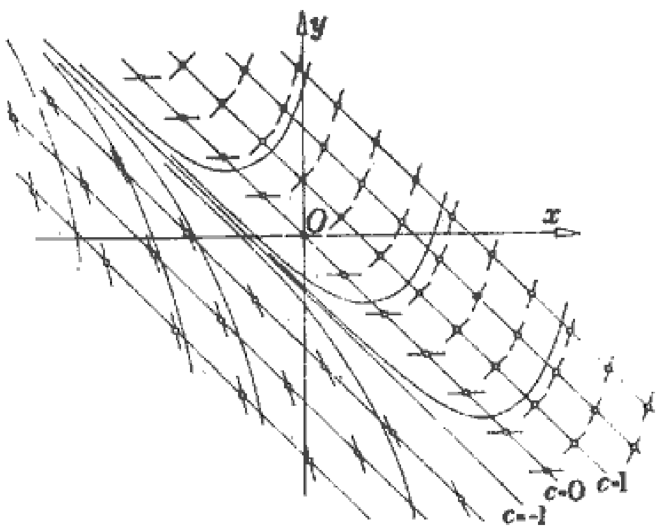
Ľahko zistíme, že bodom $A = (1, 0)$ prechádza nekonečne veľa riešení danej diferenciálnej rovnice na intervale $(-\infty, \infty)$, a to

$$y = \begin{cases} (x - a)^3 & \text{ak } x \leq a, \\ 0 & \text{ak } a < x < b, \\ (x - b)^3 & \text{ak } b \leq x, \end{cases}$$

kde a, b sú ľubovoľné čísla, pre ktoré platí $a \leq 1 \leq b$ *(obr. 31)*.



Obr. 31



Obr. 32

Príklad 3. Znázornime smerové pole diferenciálnej rovnice $y' = x + y$.

Riešenie. Funkcia $f(x, y) = x + y$ je definovaná v každom bode priestoru E_2, teda možno zostrojiť smerové pole v celom priestore E_2. Smerové pole znázorníme pomocou izoklín. Rovnica izokliny je

$$x + y = c,$$

kde c je ľubovoľné číslo. V každom bode (x_0, y_0) tejto izokliny dotyčnica k integrálnej krivke má podľa diferenciálnej rovnice $y' = x + y$ smernicu $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = c$. Napr. pre izoklinu $x + y = 0$ je uhol $\alpha = 0$, pre izoklinu $x + y = 1$ je $\alpha = 45°$ atď. *(obr. 32)*.

V úlohách **1102** až **1111** znázornite pomocou izoklín smerové pole danej diferenciálnej rovnice a zostrojte približne jej integrálne krivky.

1102. $y' = -x$.
1103. $yy' + x = 0$.
1104. $xy' = 2y$.
1105. $y' = (x + y)/(x - y)$.
1106. $y' = x^2 + y^2$.
1107. $(x^2 + y^2)\, y' = 4x$.
1108. $y' = \cos x - y$.
1109. $y' = x^2 - y^2$.
1110. $y' = (1 - x^2)(y - x)/y$.
1111. $y' = 3xy$.

V úlohách **1112** až **1115** znázornite približne integrálne krivky diferenciálnych rovníc

1112. $y' = \sin(x + y)$.
1113. $y' = xy/|xy|$.
1114. $y' = |x + y|/(x + y)$.
1115. $y' = e^{1/x}$.

V úlohách **1116** až **1122** nájdite oblasť existencie a jednoznačnosti riešenia diferenciálnej rovnice

1116. $y' = y/x$.
1117. $y' = y \cos x$.
1118. $y' - xy - e^{-y} = 0$.
1119. $y' = \sqrt{x - y}$.
1120. $y' = x(1 - y^2)/y(x^2 - 1)$.
1121. $y' = |y|$.
1122. $y' = 2\sqrt{|y|}$.

V úlohách **1123** až **1127** nájdite niekoľko Picardových aproximácií riešenia danej diferenciálnej rovnice spĺňujúceho začiatočnú podmienku.

1123. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.
1124. $y' = y^2 - x^2$, $y(0) = 0$.
1125. $y' = y^2 - x^2$, $y(0) = 1$.
1126. $y' = x^4 + y^4/4$, $y(0) = 0$.
1127. $y' = x^2 y$, $y(0) = 1$.

1128. Pomocou vety 1 odhadnite existenčnú oblasť riešení diferenciálnej rovnice $y' = x^2 + y^2$, $\Omega = \langle -2, 2 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$ so začiatočnou podmienkou $y(0) = 0$.

4,3. Diferenciálna rovnica so separovanými a separovateľnými premennými

A. Diferenciálna rovnica prvého rádu so separovanými premennými

Diferenciálnu rovnicu

$$p(x) + q(y)\, y' = 0, \tag{1}$$

kde $p(x)$ a $q(y)$ sú funkcie, nazývame *diferenciálnou rovnicou prvého rádu so separovanými premennými*.

Diferenciálna rovnica (1) sa často píše v tvare

$$p(x)\, dx + q(y)\, dy = 0.$$

Veta 1. Nech je funkcia $p(x)$ spojitá na intervale I a funkcia $q(y)$ spojitá na intervale K. Potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (1) na intervale $I_1 \subset I$ má tvar

$$\int p(x)\, dx + \int q(y)\, dy = c, \tag{2}$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Každá diferencovateľná funkcia na intervale $I_1 \subset I$, ktorá je implicitne určená vzťahom (2), je riešením diferenciálnej rovnice (1) na intervale I_1.

Veta 2. Nech $p(x)$ je spojitá funkcia na intervale (a, b) a $q(y)$ je spojitá na intervale (c, d), pričom $q(y) \neq 0$, pre každé $y \in (c, d)$. Potom každým bodom oblasti $D = (a, b) \times (c, d)$ prechádza práve jedna integrálna krivka diferenciálnej rovnice (1).

Poznámka. Osobitným prípadom diferenciálnej rovnice (1) je diferenciálna rovnica tvaru

$$y' = f(x), \quad x \in I. \tag{3}$$

Každé riešenie diferenciálnej rovnice (3) na intervale I je

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

Ak je funkcia f spojitá na intervale I, potom podľa vety 1 a vety 2 každým bodom (x_0, y_0), kde $x_0 \in I$ a y_0 je ľubovoľné reálne číslo, prechádza jediné riešenie diferenciálnej rovnice (3) tvaru

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Príklad 1. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}, \tag{5}$$

pre ktoré platí

$$y(2/\pi) = 2.$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (5) je tvaru (3). Funkcia $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ je spojitá na množine $M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Každým bodom množiny M prechádza práve jedno riešenie diferenciálnej rovnice (5). Každé jej riešenie má tvar

$$y = \int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + c,$$

čiže

$$y = -\sin(1/x) + c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta.
Ak chceme nájsť riešenie, ktoré prechádza bodom $A = (2/\pi, 2)$, tak konštantu c určíme z rovnosti

$$2 = -\sin(\pi/2) + c.$$

Z toho potom

$$c = 3$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (5), pre ktoré platí $y(2/\pi) = 2$, je

$$y = 3 - \sin(1/x).$$

Toto riešenie môžeme dostať priamo podľa vzorca (4). Máme

$$y = 2 + \int_{2/\pi}^{x} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2 + \left[-\sin\frac{1}{x}\right]_{2/\pi}^{x},$$

čiže

$$y = 3 - \sin(1/x).$$

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{y}\,y' = 0. \tag{6}$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (6) je tvaru (1). Funkcia $p(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá pre všetky reálne čísla $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo. Funkcia $q(y) = 1/y$ je spojitá na množine $I_1 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Uvažujme jednu z oblastí $\left[(2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right] \times (0, \infty)$ resp. $\left[(2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k + {}\right.$ $\left.{}+ \dfrac{\pi}{2}\right] \times (-\infty, 0)$, kde k je celé číslo. V každej takejto oblasti riešenia diferenciálnej rovnice (6) majú tvar

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x + \int \frac{y}{1}\,\mathrm{d}y = c_1,$$

kde c_1 je ľubovoľné reálne číslo. Z toho potom

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1.$$

Nech $c_1 = \ln c$, kde $c > 0$. Potom máme

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln c,$$

čiže

$$\ln|y| = \ln(c|\cos x|).$$

Z toho

$$|y| = c|\cos x|.$$

Ak v danej oblasti je $y > 0$, potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (6) v tejto oblasti je

$$y = c|\cos x|, \qquad c > 0.$$

Ak v danej oblasti je $y < 0$, potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (6) v tejto oblasti je

$$y = -c|\cos x|,$$

kde c je kladné číslo.

Pretože funkcie $p(x)$ a $q(y)$ sú spojité v každej z uvedených oblastí, každým bodom takejto oblasti prechádza jediné riešenie diferenciálnej rovnice (6).

B. Separovateľná diferenciálna rovnica prvého rádu

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$p_1(x)\,p_2(y) + q_1(x)\,q_2(y)\,y' = 0, \tag{7}$$

kde $p_1(x)$, $q_1(x)$ sú spojité funkcie na intervale (a, b) a $p_2(y)$, $q_2(y)$ sú spojité funkcie na intervale (c, d), nazývame *separovateľnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu*.

Diferenciálnu rovnicu (7) možno písať aj v tvare

$$p_1(x)\,p_2(y)\,\mathrm{d}x + q_1(x)\,q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Ak $q_1(x)\,p_2(y) \neq 0$ na intervale $I = (a, b) \times (c, d)$, dá sa diferenciálna rovnica (7) upraviť na diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{q_2(y)}{p_2(y)}\,y' = 0, \qquad (x, y) \in I. \tag{8}$$

Ak $q_1(x)\,p_2(y) = 0$, v bode $(x, y) \in I$, potom diferenciálna rovnica (8) nie je ekvivalentná s diferenciálnou rovnicou (7).

Nech $I' = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset I$ je taký interval, že:

1. pre každý bod $(x, y) \in I'$ je $q_1(x)\,p_2(y) \neq 0$,
2. každý hraničný bod (x, y) intervalu I' je buď hraničný bod intervalu I, buď v ňom platí $q_1(x)\,p_2(y) = 0$.

Na každom takomto intervale sú diferenciálne rovnice (7) a (8) ekvivalentné. Pri riešení diferenciálnej rovnice (7) postupujeme takto:

a) nájdeme všetky riešenia diferenciálnej rovnice (8) na každom intervale I';

b) z týchto riešení na všetkých intervaloch I' utvoríme, ak je to možné, diferencovateľné funkcie definované na intervale (a, b), pre ktoré sú uvedené riešenia parciálnymi funkciami na príslušných intervaloch I' a zistíme, či tieto funkcie sú riešeniami diferenciálnej rovnice (7) aj v číslach, pre ktoré platí $q_1(x) = 0$, $x \in (a, b)$;

c) ak číslo ν je riešením rovnice $p_2(y) = 0$, $y \in (c, d)$, potom každá funkcia $y = \nu$, definovaná na intervale (a, b), je riešením diferenciálnej rovnice (7).

Príklad 8. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y + xy' = 0. \tag{9}$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (9) je tvaru (7), kde $p_1(x) = 1$, $q_1(x) = x$, $p_2(y) = y$, $q_2(y) = 1$. Funkcie $p_1(x)$, $q_1(x)$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$. Funkcie $p_2(y)$ a $q_2(y)$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$. Interval $I = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$.

Rovnica $q_1(x) = 0$, čiže $x = 0$ má jediné riešenie $x = 0$.
Rovnica $p_2(y) = 0$, čiže $y = 0$ má jediné riešenie $y = 0$.

Priamky $x = 0$, $y = 0$ rozdeľujú interval I na štyri oblasti: $I_1' = (0, \infty) \times (0, \infty)$, $I_2' = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$, $I_3' = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$ a $I_4' = (0, \infty) \times (-\infty, 0)$. V každom I_i', $i = 1, 2, 3, 4$ je $q_1(x)\, p_2(y) = xy \neq 0$, a preto diferenciálna rovnica (9) je na nich ekvivalentná s rovnicou

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\, y' = 0. \tag{10}$$

Toto je diferenciálna rovnica so separovanými premennými, pričom funkcie $p(x) = 1/x$ a $q(y) = 1/y$ sú na intervaloch I_i', $i = 1, 2, 3, 4$, spojité. Každé jej riešenie v intervale I_i' má tvar

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = c_1,$$

kde c_1 je konštanta.
Z toho potom

$$\ln |x| + \ln |y| = c_1,$$

čiže

$$\ln |xy| = \ln \mathrm{e}^{c_1}$$

alebo

$$|xy| = c_2, \qquad \text{kde } c_2 = \mathrm{e}^{c_1} > 0.$$

Keďže v intervaloch I_1', I_3', je $xy > 0$, potom $|xy| = xy$. Riešenie v týchto intervaloch má tvar

$$xy = c_2, \qquad c_2 > 0.$$

Keďže v intervaloch I_2', I_4' je $xy < 0$, potom $|xy| = -xy$. Riešenie v týchto intervaloch má tvar

$$xy = -c_2, \qquad c_2 > 0.$$

Obidva tieto prípady môžeme vyjadriť jedinou rovnicou

$$y = c/x,$$

kde c je ľubovoľné reálne číslo rôzne od nuly. Táto funkcia je riešením diferenciálnej rovnice (9) na intervale $(-\infty, 0)$ alebo $(0, \infty)$.

Keďže $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{c}{x}$ neexistuje pre nijaké $c \neq 0$, tieto riešenia v intervaloch $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ nemožno rozšíriť tak, aby sme z nich dostali riešenie diferenciálnej rovnice (9) v intervale $(-\infty, \infty)$.

Pri riešení diferenciálnej rovnice (9) zostáva ešte prípad $y = 0$. Dosadením do diferenciálnej rovnice (9) ľahko zistíme, že funkcia $y = 0$ v intervale $(-\infty, \infty)$ je riešením diferenciálnej rovnice (9).

Všetky riešenia diferenciálnej rovnice (9) sú

$$y = c/x, \qquad c \neq 0,$$

kde $x \in (0, \infty)$ alebo $x \in (-\infty, 0)$ a

$$y = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Integrálne krivky sú os o_x a vetvy rovnoosových hyperbol, ktorých asymptoty sú súradnicové osi pravouhlého súradnicového systému.

Každým bodom (x, y), $x \neq 0$ z intervalu I prechádza jediná integrálna krivka. Nijakým bodom $(0, y)$, $y \neq 0$ neprechádza integrálna krivka. Začiatkom prechádza jediná integrálna krivka $y = 0$ (pozri *obr. 33*).

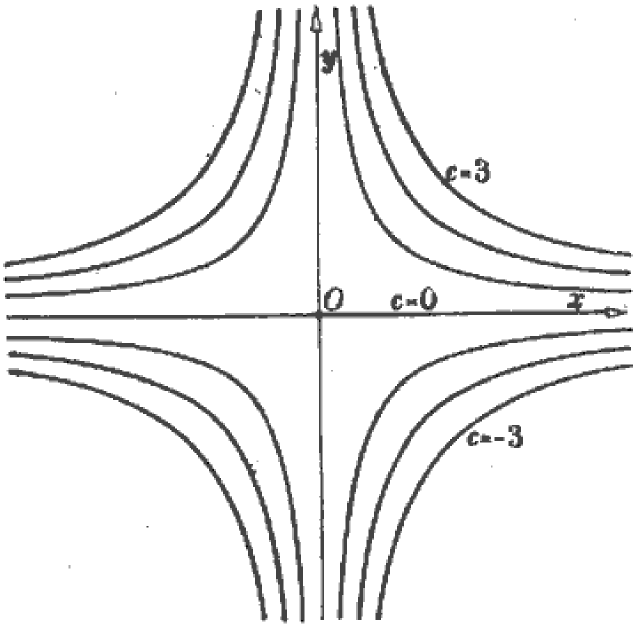
Príklad 4. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y \cos x - (\sin x)\, y' = 0. \tag{11}$$

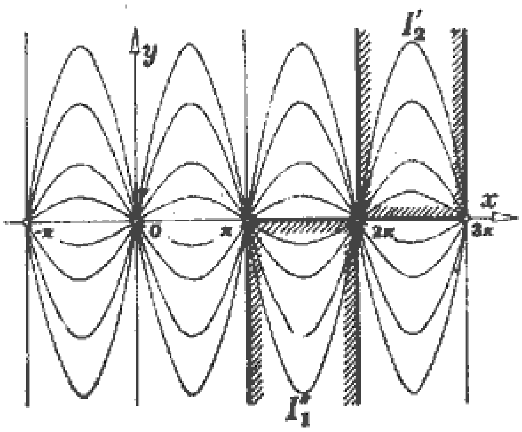
Riešenie. Diferenciálna rovnica (11) je separovateľná diferenciálna rovnica, pričom $p_1(x) = \cos x$, $p_2(y) = y$, $q_1(x) = -\sin x$, $q_2(y) = 1$. Funkcie $p_1(x)$, $q_1(x)$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$ a funkcie $p_2(y)$, $q_2(y)$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$. Interval I je celá rovina, t. j. $I =$

$= (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Rovnica $p_2(y) = y = 0$ má jediný koreň $y = 0$. Rovnica $q_1(x) = -\sin x = 0$ má nekonečne mnoho riešení $x = k\pi$, kde k je celé číslo. Priamky $y = 0$ a $x = k\pi$, kde k je celé číslo, rozdeľujú celú rovinu na nekonečne mnoho čiastočných intervalov tvaru

$$I'_k = [k\pi, (k+1)\pi] \times (0, \infty)$$



Obr. 33



Obr. 34

alebo

$$I''_k = [k\pi, (k+1)\pi] \times (-\infty, 0),$$

kde k je celé číslo (pozri *obr. 34*).

Na týchto čiastočných intervaloch je $q_1(x)\, p_2(y) = -y \sin x \neq 0$ a daná diferenciálna rovnica je ekvivalentná s diferenciálnou rovnicou

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{y} y' = 0. \tag{12}$$

To je diferenciálna rovnica so separovanými premennými, kde $p(x) = \cos x/\sin x$, $q(y) = -1/y$. Všetky jej riešenia majú tvar

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx - \int \frac{1}{y}\, dy = c_1, \tag{13}$$

kde c_1 je ľubovoľná konštanta.

Zo vzťahu (13) vyplýva

$$\ln|\sin x| - \ln|y| = c_1,$$

čiže

$$\ln\left|\frac{\sin x}{y}\right| = \ln e^{c_1}.$$

Z toho potom

$$\left|\frac{\sin x}{y}\right| = e^{c_1}.$$

Položme $e^{c_1} = \dfrac{1}{c_2} > 0$, máme

$$|y| = c_2 |\sin x|.$$

Pre interval I'_k dostaneme riešenie diferenciálnej rovnice (12) v tvare

$$y = c_2 |\sin x|, \qquad c_2 > 0. \tag{14}$$

Pre interval I_2^* máme

$$y = -c_2 \mid \sin x \mid, \qquad c_2 > 0. \tag{15}$$

Keďže $\lim\limits_{x \to k\pi \pm} y = 0$, $\lim\limits_{x \to k\pi \pm} y' = \pm c_2$, pre každé $c_2 > 0$ môžeme uvedené riešenia rozšíriť, a to tak, aby v bodoch $k\pi$, kde k je celé číslo, mali deriváciu $\pm c_2$ a $y(k\pi) = 0$.

Uvažujme o funkcii $y = c \sin x$, kde $c \neq 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. Táto spĺňa uvedené podmienky a zároveň je aj riešením diferenciálnej rovnice (11). Riešením rovnice (11) je aj funkcia $y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Všetky riešenia diferenciálnej rovnice (11) sú

$$y = c \sin x, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

kde c je ľubovoľné reálne číslo (pozri *obr. 34*).

Každým bodom (x_0, y_0), $x_0 \neq k\pi$, kde k je celé číslo intervalu I, prechádza jediné riešenie diferenciálnej rovnice (11). Bodmi $(k\pi, 0)$, kde k je celé číslo, prechádza nekonečne mnoho riešení diferenciálnej rovnice (11). Bodmi $(k\pi, y_0)$, $y_0 \neq 0$, k je celé číslo, neprechádza ani jedno riešenie diferenciálnej rovnice (11). (Pozri *obr. 34.*)

V úlohách **1129** až **1133** riešte diferenciálne rovnice prvého rádu so separovanými premennými.

1129. $yy' + x - 1/x = 0$. **1130.** $1/(1 + x^2) + y'/(1 + y^2) = 0$.

1131. $10^x - 10^{-y}y' = 0$. **1132.** $1 - 2x - y^2y' = 0$.

1133. $x/\sqrt{1 + x^2} + yy'/\sqrt{1 + y^2} = 0$.

1134. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice so separovanými premennými $x/\sqrt{1 - x^2} + yy'/\sqrt{1 - y^2} = 0$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = \sqrt{3}/2$.

V úlohách **1135** až **1152** riešte separovateľné diferenciálne rovnice prvého rádu.

1135. $y' = 3y$. **1136.** $(y - 1)(y - 2) - y' = 0$.

1137. $2y - x^3y' = 0$. **1138.** $y - y^2 + xy' = 0$.

1139. $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$. **1140.** $1 + y^2 + xyy' = 0$.

1141. $xy = (a + x)(b + y)y'$, a, b sú konštanty.

1142. $y' = xy + ax + by + ab$, a, b sú konštanty.

1143. $y' = 1 + 1/x - 1/(y^2 + 2) - 1/x(y^2 + 2)$.

1144. $2x\sqrt{ax - x^2}\, y' = a^2 + y^2$, a je konštanta.

1145. $y' = ax^b(y^2 + 1)$, a, b sú ľubovoľné čísla, pričom $a \neq 0$.

1146. $-y - a + (\operatorname{tg} x)\, y' = 0$, a je konštanta.

1147. $\sin x \cos y + y' \operatorname{tg} y \cos x = 0$.

1148. $\sin \dfrac{x + y}{2} - \sin \dfrac{x - y}{2} + y' = 0$.

1149. $-1 + e^{-y}(1 + y') = 0$. **1150.** $e^{x + y} - y' = 0$.

1151. $(1 + e^x)\, yy' = e^x$. **1152.** $3\, e^x \operatorname{tg} y + (2 - e^x) \sec^2 y y' = 0$.

V úlohách **1153** až **1157** nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.

1153. $(x + 1)\, y' + xy = 0$, $y(0) = 1$.

1154. $x/(1 + y) - yy'/(1 + x) = 0$, $y(0) = 1$.

1155. $\dfrac{1 + y^2}{1 + x^2} - y' = 0$, $y(0) = 1$.

1156. $y\sqrt{1 + x^2} - xy + (1 + x^2)\, y' = 0$, $y(0) = 1$.

1157. $y \ln y + xy' = 0$, $y(1) = 1$.

V úlohách **1158** až **1160**. nájdite riešenie separovateľnej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa danú podmienku.

1158. $x^2y' - \cos 2y = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 9\pi/4$.

1159. $x^2(\cos y)\, y' + 1 = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 16\pi/3$.

1160. $2(1 + x^2)\, y' - \cos^2 2y = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 7\pi/2$.

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, pričom $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ možno zámenou premenných $z = a_1x + b_1y$ resp. $z = a_1x + b_1y + c$ previesť na separovateľnú rovnicu prvého rádu.*)

V úlohách **1161** až **1164** riešte diferenciálne rovnice tým, že vhodnou zámenou ich upravíte na separovanú diferenciálnu rovnicu.

1161. $y' = 1/(x - y) + 1$.

1162. $y' = \cos(y - x)$.

1163. $(2x + 3y - 1) + (4x + 6y - 5)\, y' = 0$.

1164. $y' = \sqrt{4x + 2y + 1}$.

1165. Riešte diferenciálne rovnice a znázornite grafy ich riešení:

$$\text{a) } y' = \frac{xy}{|xy|}, \quad \text{b) } y' = \frac{|x + y|}{x + y}, \quad \text{c) } y' = -\frac{x + |x|}{y + |y|},$$

1166. Riešte diferenciálne rovnice:

a) $y' = |x + y|$, b) $y' = |xy|$.

1167. Nájdite krivky, ktoré majú v každom bode konštantnú dĺžku subtangenty rovnajúcu sa $a > 0$.

1168. Nájdite krivky, pre ktoré dĺžka subnormály v každom ich bode sa rovná konštante $p > 0$.

1169. Nájdite krivky, ktorých dĺžka normály v každom bode je konštantná a rovná sa $a > 0$.

1170. Nájdite krivky, ktorých dotyčnice v každom bode $P = (x_0, y_0)$ majú priesečník s osou o_x, $Q = (x_0/2, 0)$.

1171. Nájdite krivky, pre ktoré súčet dĺžky ich subnormály a subtangenty v ich ľubovoľnom bode sa rovná $2a$, $a > 0$.

1172. Nájdite krivky, pre ktoré dotykový bod v ich ľubovoľnom bode delí úsek dotyčnice medzi súradnicovými osami v pomere $m : n$.

1173. Nájdite krivky, ktorých dotyčnice v ľubovoľnom bode zvierajú so sprievodičom a s polárnou súradnicovou osou rovnaké uhly.

1174. Teleso sa pohybuje priamočiare rýchlosťou v, ktorá je priamo úmerná druhej mocnine času. Nájdite dráhu $s(t)$ telesa ako funkciu času, ak pri $t = 0$, $s(0) = s_0$.

1175. Parašutista vyskočil z lietadla vo výške 1 500 m. Padák sa mu otvoril vo výške 500 m. Určte, ako dlho padal bez otvoreného padáka, ak maximálna rýchlosť padania človeka vo vzduchu s normálnou hustotou je 50 m s^{-1} a odpor vzduchu je úmerný druhej mocnine jeho rýchlosti. Zmenu hustoty vzduchu s výškou zanedbajte a predpokladajte, že smer pohybu je zvislý.

*) Ak $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, riešenie danej diferenciálnej rovnice pozri v čl. 4,4.

1176. Pri vypnutí prijímača sa povrch elektrónky ochladil za 3 min zo 120 °C na 45 °C. Teplota vzduchu je pri ochladzovaní konštantná a rovná sa 20 °C. Za aký čas sa povrch elektrónky ochladí na 25 °C.

1177. Za aký čas sa vyprázdni cisternový vozeň naplnený naftou, dĺžka cisterny je $l = 12$ m a jej priemer je $d = 2{,}6$ m, cez krátke vyústenie s priemerom $q = 100$ cm² v dolnej časti cisterny (koeficient kontrakcie je $\mu = 0{,}6$).

1178. Nádoba obsahuje M m³ roztoku. Do tejto nádoby priteká q m³ vody za sekundu, ktorá sa hneď rozmiešava. Z nádoby vyteká q m³/s roztoku. Dokážte, že množstvo m rozpustenej látky možno vyjadriť rovnicou $m = m_0 e^{-qt/M}$, kde m_0 je začiatočné množstvo látky a t je čas v sekundách.

1179. Množstvo svetla, ktoré pohltí tenká vrstva vody, je úmerné množstvu dopadajúceho svetla a hrúbke vrstvy. Pri prechode vrstvou vody s hrúbkou 35 cm sa zmenší intenzita dopadajúceho svetla na hladinu vody na polovicu. Aká bude intenzita svetla pri prechode vrstvou s hrúbkou 2 m.

1180. Vzorka horniny obsahuje 100 mg uránu a 14 mg olova, ktoré vzniklo rozpadom uránu. Kedy vznikla táto hornina, ak je známe, že polčas rozpadu uránu je $4{,}5 \cdot 10^9$ rokov a pri úplnom rozpade 236 g uránu vznikne 206 g olova. Pri riešení úlohy predpokladajte, že hornina pôvodne neobsahovala nijaké olovo a nijaké medziprodukty uránového rozpadu, ktoré sa rýchlejšie rozpadajú ako urán.

4,4. Homogénna diferenciálna rovnica 1. rádu

Nech pre neprázdnu množinu $M \in E_n$ platí: Ak bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$, potom aj bod $Y = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in M$, pričom t je ľubovoľné kladné číslo.

Funkciu viac premenných $F(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazývame *homogénnou funkciou* k – teho stupňa na množine M, ak platí

$$F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

pre každé číslo $t > 0$ a pre každý bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$.

Každú homogénnu funkciu dvoch premenných nultého stupňa definovanú na množine bodov $X = (x, y)$, $x \neq 0$ možno vyjadriť v tvare

$$f(x, y) = f(1, y/x) = \varphi(y/x). \tag{2}$$

Diferenciálnu rovnicu

$$p(x, y) + q(x, y)\, y' = 0 \tag{3}$$

kde $p(x, y)$, $q(x, y)$ sú homogénne funkcie dvoch premenných rovnakého stupňa s oborom definície Ω, nazývame *homogénnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu.*

Ak $q(x, y) \neq 0$ pre každé $(x, y) \in \Omega$ a $x \neq 0$, potom diferenciálnu rovnicu (3) možno napísať v tvare

$$y' = \varphi(y/x). \tag{4}$$

Zámenou premenných $y = xu$ dostaneme z diferenciálnej rovnice (3) separovateľnú diferenciálnu rovnicu

$$p(1, u) + q(1, u)\, u + xq(1, u)\, u' = 0. \tag{5}$$

Veta 1. Nech $u = g(x)$ je ľubovoľné riešenie diferenciálnej rovnice (5) na intervale J, potom každá funkcia tvaru

$$y = xg(x), \qquad x \in J, \tag{5a}$$

je riešením diferenciálnej rovnice (3) na intervale J. Naopak, ku každému riešeniu diferenciálnej rovnice (3) existuje také riešenie $u = g(x)$ diferenciálnej rovnice (5), pre ktoré platí (5a).

Veta 2. Ak funkcia $\varphi(u)$ je spojitá na intervale (a, b) a pre každé $u \in (a, b)$ platí $\varphi(u) \neq u$ tak cez každý bod $A = (x_0, y_0)$ oblasti Ω, určenej nerovnosťou $a < y/x < b$, prechádza jediná integrálna krivka diferenciálnej rovnice (4).

Majme diferenciálnu rovnicu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{6}$$

kde $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ a funkcia f je spojitá na intervale J. Zámenou premenných

$$x = u + \alpha,$$
$$y = v + \beta,$$

kde dvojica čísiel (α, β) je riešením lineárneho systému rovníc

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

možno previesť diferenciálnu rovnicu (6) na homogénnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu.

$$y' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right). \tag{7}$$

Veta 3. Každé riešenie diferenciálnej rovnice (6) na intervale (a, b) má tvar $y = \beta + \varphi(x - \alpha)$, kde funkcia $v = \varphi(u)$ je isté riešenie diferenciálnej rovnice (7) na intervale $(a - \alpha, b - \alpha)$.

Poznámka. Ak v diferenciálnej rovnici $y' = f[(a_1x + b_1y + c_1)/(a_2x + b_2y + c_2)]$ je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, potom zámenou premenných $z = a_1x + b_1y$, resp. $z = a_1x + b_1y + c_1$ možno previesť túto diferenciálnu rovnicu na diferenciálnu rovnicu 1. rádu so separovanými premennými.

Príklad 1. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$(x^2 + y^2)\, y' = 2xy. \tag{8}$$

Riešenie. Funkcie $p(x, y) = x^2 + y^2$, $q(x, y) = 2xy$, $(x, y) \in E_2$ sú homogénne funkcie rovnakého stupňa, $(k = 2)$, a preto diferenciálna rovnica (8) je homogénna diferenciálna rovnica prvého rádu.

Položme preto $y = xu$, $x \neq 0$, potom je $y' = xu' + u$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (8) dostaneme

$$x^2(1 + u^2)\,(xu' + u) = 2x^2u,$$

čiže

$$x(1 + u^2)\,u' + u^3 - u = 0, \qquad x \neq 0. \tag{9}$$

To je separovateľná diferenciálna rovnica 1. rádu. Rovnica $x = 0$ má jediný koreň $x_1 = 0$ a rovnica $u^3 - u = 0$ má tri korene $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$. Uvažujme intervaly $J_1 = (-\infty, 0) \times (-\infty, -1)$, $J_2 = (-\infty, 0) \times (-1, 0)$, $J_3 = (-\infty, 0) \times (0, 1)$, $J_4 = (-\infty, 0) \times (1, \infty)$, $J_5 = (0, \infty) \times (-\infty, -1)$, $J_6 = (0, \infty) \times (-1, 0)$, $J_7 = (0, \infty) \times (0, 1)$, $J_8 = (0, \infty) \times (1, \infty)$. Funkcie $p_1(x) = x$, $q_1(x) = 1$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$ a funkcie $p_2(u) = 1 + u^2$, $q_2(u) = u^3 - u$ sú spojité na intervale $(-\infty, \infty)$, pričom na každom intervale J_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$ je $p_1(x)\, q_2(u) \neq 0$. Preto diferenciálna rovnica 1. rádu

$$\frac{1 + u^2}{u^3 - u}\,u' + \frac{1}{x} = 0$$

so separovanými premennými je v intervaloch $J_1, J_2, \ldots, J_8$ ekvivalentná s diferenciálnou rovnicou (9). Jej riešením dostaneme

$$\int \frac{1 + u^2}{u^3 - u}\,\mathrm{d}u + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = C_1,$$

čiže

$$\ln\left|\frac{u^2 - 1}{u}\right| + \ln|x| = \ln C_2,$$

kde $C_2 = e^{C_1}$, $C_2 > 0$. Z toho po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\left| \frac{(u^2 - 1)\,x}{u} \right| = C_2$$

alebo

$$x^2 \,|\, u^2 - 1 \,|\, = C_2 \,|\, ux \,|$$

pre každé $(x, u) \in J_i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$.
V intervaloch J_1, J_3, J_6, J_8 je

$$x^2u^2 - x^2 = C_2ux, \qquad C_2 > 0$$

a v intervaloch J_2, J_4, J_5, J_7 je

$$x^2u^2 - x^2 = -C_2ux, \qquad C_2 > 0.$$

Každé riešenie diferenciálnej rovnice (9) má v intervaloch J_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$ tvar

$$x^2u^2 - x^2 = Cux,$$

kde $C \neq 0$.

Z diferenciálnej rovnice (9) vyplýva, že funkcie $u = -1$, $u = 0$, $u = 1$ sú na intervale $(-\infty, 0)$ alebo $(0, \infty)$ jej riešeniami. Preto riešenia diferenciálnej rovnice (8) sú

$$y^2 - x^2 = Cy, \qquad C \neq 0, \tag{10}$$

kde $x \in (-\infty, 0)$ alebo $x \in (0, \infty)$ a

$$y = x,$$
$$y = -x,$$
$$y = 0.$$

Keďže vždy dve z riešení (10) možno spojiť tak, aby nové riešenie bolo definované na intervale $(-\infty, \infty)$ a v čísle 0 bolo diferencovateľné, sú všetky riešenia diferenciálnej rovnice (8)

$$y^2 - x^2 = Cy,$$
$$y = 0,$$

kde $x \in (-\infty, \infty)$ a C je ľubovoľné číslo.

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y' = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}. \tag{11}$$

Riešenie. Daná diferenciálna rovnica je diferenciálna rovnica (6), kde $a_1x + b_1y + c_1 = 2x - 4y + 6$, $a_2x + b_2y + c_2 = x + y - 3$, pričom $a_1b_2 - a_2b_1 = 6 \neq 0$.
Položme preto $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, kde dvojica (α, β) je riešením systému lineárnych rovníc

$$2x - 4y + 6 = 0,$$
$$x + y - 3 = 0.$$

Z toho dostávame $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Zámena premenných má tvar

$$x = u + 1,$$
$$y = v + 2. \tag{12}$$

Po dosadení z rovníc (12) do diferenciálnej rovnice (11) dostaneme homogénnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$(2u - 4v) + (u + v)\,v' = 0, \tag{13}$$

pričom $v' = \dfrac{dv}{du}$ a o diferenciálnych rovniciach (11) a (13) platí veta 3.

Zámenou premenných $v = zu$ a úpravou dostaneme separovateľnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$(2 - 3z + z^2) + u(1 + z)\,z' = 0, \qquad u \neq 0. \tag{14}$$

Funkcie $p_1(u) = 1$, $q_1(u) = u$, $u \in (-\infty, 0)$ alebo $u \in (0, \infty)$ a funkcie $p_2(z) = 2 - 3z + z^2$, $q_2(z) = 1 + z$, $z \in (-\infty, \infty)$ sú v uvedených intervaloch spojité. Rovnica $z^2 - 3z + 2 = 0$ má dve riešenia $z_1 = 1$ a $z_2 = 2$. Uvažujme intervaly $J_1 = (-\infty, 0) \times (-\infty, 1)$, $J_2 = (-\infty, 0) \times (1, 2)$, $J_3 = (-\infty, 0) \times (2, \infty)$, $J_4 = (0, \infty) \times (-\infty, 1)$, $J_5 = (0, \infty) \times (1, 2)$ a $J_6 = (0, \infty) \times (2, \infty)$. V týchto intervaloch je $p_2(z)\, q_1(u) \neq 0$, a preto diferenciálna rovnica 1. rádu (14) je v týchto intervaloch ekvivalentná s rovnicou

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u + \int \left(\frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1}\right)\mathrm{d}z = C_1, \tag{15}$$

kde C_1 je ľubovoľná konštanta.

Z toho dostávame

$$\ln |u| + 3 \ln |z-2| - 2 \ln |z-1| = \ln C_2, \quad C_2 = e^{C_1} > 0,$$

čiže

$$\frac{|z-2|^3 \, |u|}{|z-1|^2} = C_2.$$

V intervaloch J_1, J_2, J_6 riešením je

$$(z-2)^3 u = C_2(z-1)^2, \qquad C_2 > 0,$$

a v intervaloch J_3, J_4, J_5 riešením je

$$(z-2)^3 u = -C_2(z-1)^2, \qquad C_2 > 0.$$

Každé riešenie v intervaloch J_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ má tvar

$$(z-2)^3 u = C(z-1)^2, \quad \text{kde} \qquad C \neq 0.$$

Z diferenciálnej rovnice (14) vyplýva, že aj funkcie $z = 1$, $z = 2$, kde $u \in (-\infty, 0)$ alebo $u \in (0, \infty)$ sú jej riešenia.

Preto riešenia diferenciálnej rovnice (13) sú

$$(v - 2u)^3 = C(v-u)^2$$
$$v = u,$$
$$v = 2u,$$

kde $C \neq 0$ a $u \in (-\infty, 0)$ alebo $u \in (0, \infty)$.

Riešenia diferenciálnej rovnice (11) sú

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2, \qquad C \neq 0$$

v oblasti, ktorá neobsahuje bod $A = (1, 2)$ a

$$y = x + 1,$$
$$y = 2x,$$

v intervale $(-\infty, \infty)$.

1181. Zistite stupeň homogénnej funkcie:

a) $f(x, y) = \dfrac{2x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$, d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

b) $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, e) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + x^2y + y^3}$,

c) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{y} + y^2 \ln \dfrac{x}{y}$, f) $f(x, y) = xy \sin \dfrac{x+y}{x-y}$.

V úlohách 1182 až 1197 riešte homogénne diferenciálne rovnice 1. rádu.

1182. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$. **1183.** $xy' = x + y$.

1184. $(x + y)\,y' + y = 0$. 1185. $(x + y)\,y' - y = 0$.

1186. $x + yy' = 2y$. 1187. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

1188. $x^2y' = x^2 + xy + y^2$. 1189. $(x^2 - y^2)\,y' - 2xy = 0$.

1190. $3(x^2 + 2xy + y^2) + (2x^2 + 3xy)\,y' = 0$.

1191. $\dfrac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2} + y' = 0$.

1192. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$. 1193. $xy' - y = x\,e^{y/x}$.

1194. $xy' = y \cos \ln (y/x)$. 1195. $xy' = y \ln (x/y)$.

1196. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin \dfrac{y - x}{x}$. 1197. $x - y \cos \dfrac{y}{x} + x\left(\cos \dfrac{y}{x}\right) y' = 0$.

V úlohách **1198** až **1203** upravte dané diferenciálne rovnice na homogénne diferenciálne rovnice 1. rádu a riešte ich.

1198. $\dfrac{2x + 3y}{3x + 2y + 1} + y' = 0$. 1199. $\dfrac{3x - 3y + 2}{2x - 2y + 1} + y' = 0$.

1200. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\,y'$.

1201. $y' = \dfrac{x + 7y + 2}{3x + 5y + 6}$ 1202. $y' = \dfrac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \dfrac{y - 2x}{x + 1}$.

1203. $(y' + 1) \ln \dfrac{y + x}{x + 3} = \dfrac{y + x}{x + 3}$.

V úlohách **1204** až **1206** nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku:

1204. $(y^2 - 3x^2)\,y' + 2xy = 0,\ \ y(1) = 1$.

1205. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2},\ \ y(1)\sqrt{e} = 1/\sqrt{e}$.

1206. $(xy' - y) \operatorname{arctg} (y/x) = x,\ \ y(1) = 0$.

V úlohách **1207** až **1209** vhodnou zámenou premenných riešte dané diferenciálne rovnice ako homogénne diferenciálne rovnice prvého rádu.

1207. $2x^2y' = y^3 + xy$.

1208. $y' = y^2 - 2x^{-2}$.

1209. a) $2xyy' = 3\sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

1210. Dokážte, že izoklíny homogénnej diferenciálnej rovnice prvého rádu sú priamky prechádzajúce začiatkom pravouhlého súradnicového systému.

1211. Dokážte, že riešenia homogénnej diferenciálnej rovnice prvého rádu sú si navzájom podobné, t. j. ak $y = f(x)$ je riešením, potom aj $ky = f(kx)$ pre každé $k > 0$ (resp. $k \neq 0$) je riešením tej diferenciálnej rovnice.

1212. Nájdite krivky, ktorých dotyčnica v každom bode má vzdialenosť od začiatku rovnajúcu sa x-ovej súradnici bodu dotyku.

1213. Nájdite krivky, ktorých ľubovoľná dotyčnica pretína os o_x v bode rovnako vzdialenom od začiatku a od bodu dotyku.

1214. Nájdite krivky, pre ktoré trojuholník vytvorený osou o_y, dotyčnicou v ľubovoľnom bode A krivky a polohovým vektorom bodu A, je rovnoramenný.

1215. Nájdite krivky, ktorých ľubovoľná dotyčnica vytína na osi o_y úsek rovnajúci sa x-ovej súradnici bodu dotyku.

1216. Aký tvar musí mať zrkadlo reflektora, aby lúče vychádzajúce z bodového zdroja svetla vytvorili po odraze na zrkadle rovnobežný zväzok lúčov.

4,5. Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu. Bernoulliho diferenciálna rovnica

Lineárnou diferenciálnou rovnicou 1. rádu s pravou stranou nazývame rovnicu

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{1}$$

kde p a q sú funkcie definované na intervale I a $q(x)$ nerovná sa nule pre každé $x \in I$.

Ak sa $q(x)$ rovná nule pre každé $x \in I$, potom diferenciálnu rovnicu

$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{2}$$

nazývame *lineárnou diferenciálnou rovnicou 1. rádu bez pravej strany.*

Veta 1. Ak sú funkcie p a q spojité na intervale (a, b), potom funkcia

$$y = \left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + c\right] e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{3}$$

kde c je ľubovoľné číslo, je riešením diferenciálnej rovnice (1) na intervale (a, b). Každým bodom oblasti $\Omega = (a, b) \times (-\infty, \infty)$ prechádza jediná integrálna krivka rovnice (1), ktorú dostaneme vhodnou voľbou konštanty c.

Funkciu (3) nazývame všeobecným riešením diferenciálnej rovnice (1).

Poznámka 1. Diferenciálna rovnica (2) je separovateľná diferenciálna rovnica. Jej všeobecné riešenie je

$$y = c\,e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{4}$$

kde c je ľubovoľné číslo.

Poznámka 2. *(Metóda variácie konštánt.)* Diferenciálnu rovnicu (1) bez použitia vzťahu (3) riešime tak, že nájdeme riešenie príslušnej diferenciálnej rovnice (2) a riešenie diferenciálnej rovnice (1) hľadáme v tvare

$$y = c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{5}$$

kde neznámu funkciu $c(x)$ určíme z podmienky, aby funkcia (5) bola riešením diferenciálnej rovnice (1).

Poznámka 3. Riešenie diferenciálnej rovnice (1) môžeme hľadať aj v tvare súčinu

$$y = u(x)\,v(x). \tag{6}$$

Pre funkciu $u(x)$ nech platí

$$u' + p(x)\,u = 0, \tag{7}$$

čo je separovateľná diferenciálna rovnica a pre funkciu $v(x)$ z rovnice (1) dostaneme separovateľnú rovnicu

$$v'u(x) = q(x). \tag{8}$$

Poznámka 4. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (1) možno vyjadriť ako súčet všeobecného riešenia (4) diferenciálnej rovnice (2) a nejakého ľubovoľného riešenia Y diferenciálnej rovnice (1)

$$y = c\,e^{-\int p(x)\,dx} + Y. \tag{9}$$

Príklad 1. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' - \frac{2}{x+1}\, y = (x+1)^3, \tag{10}$$

ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $y(0) = 1$.

Riešenie. Funkcia $p(x) = 2/(x+1)$ je spojitá na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ a funkcia $q(x) = (x+1)^3$ je spojitá v intervale $(-\infty, \infty)$. Hľadajme riešenie diferenciálnej rovnice (10) na intervale $(-\infty, -1)$ resp. $(-1, \infty)$ metódou variácie konštánt. Riešme najprv diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$y' - \frac{2}{x+1}\, y = 0. \tag{11}$$

To je separovateľná diferenciálna rovnica, ktorej jedno riešenie je $y = 0$. Ak ďalej predpokladáme $y \neq 0$, môžeme rovnicu (11) upraviť na rovnicu so separovanými premennými. Máme

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x+1} = 0.$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je

$$\ln |y| - 2 \ln |x+1| = c_1,$$

čiže

$$\ln \frac{|y|}{(x+1)^2} = \ln c_2, \quad \text{kde} \quad c_2 > 0.$$

Z toho potom

$$|y| = c_2(x+1)^2$$

a ďalej

$$y = c_3(x+1)^2, \quad \text{kde} \quad c_3 \neq 0.$$

Ak uvážime, že aj $y = 0$ je riešením rovnice (11), dostaneme, že všeobecným riešením diferenciálnej rovnice (11) je

$$y = c(x+1)^2, \quad x \in (-1, \infty),$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

Hľadajme riešenie diferenciálnej rovnice (10) podľa poznámky 2 v tvare

$$y = c(x)\,(x+1)^2. \tag{12}$$

Platí

$$y' = c'(x)\,(x+1)^2 + 2c(x)\,(x+1).$$

Dosadením do (10) dostaneme

$$c'(x)\,(x+1)^2 + 2c(x)\,(x+1) - 2c(x)\,(x+1)^2/(x+1) = (x+1)^3$$

a po úprave

$$c'(x) = x + 1.$$

Z toho potom

$$c(x) = \int (x+1)\, dx + C = (x+1)^2/2 + C,$$

kde C je ľubovoľné číslo.

Dosadením do (12) máme

$$y = (x+1)^4/2 + C(x+1)^2 \tag{13}$$

čo je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (10).

Pre riešenie, ktoré vyhovuje danej začiatočnej podmienke $y(0) = 1$, dostaneme z rovnice (13)

$$1 = 1/2 + C$$

a z toho

$$C = 1/2.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (10), ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 1$, je

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{1}{2}(x+1)^2 \quad x \in (-1, \infty).$$

Všeobecné riešenie (13) diferenciálnej rovnice (10) môžeme dostať aj priamo použitím vzorca (3). Máme

$$y = \left[\int (x+1)^3 \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right] \mathrm{e}^{\int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x}$$

$$y = \left[\int (x+1)^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + c\right](x+1)^2 = \frac{1}{2}(x+1)^4 + c(x+1)^2.$$

Hľadajme všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (10) ešte podľa poznámky 3. Položíme podľa (6)

$$y = u(x)\,v(x).$$

Z toho potom

$$y' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice (10) máme

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}\,uv = (x+1)^3,$$

čiže

$$uv' + v\left(u' - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3. \tag{14}$$

Ak položíme podľa (7) $u' - 2u/(x+1) = 0$ dostaneme $u = C_1(x+1)^2$, $C_1 \neq 0$. [Pozri riešenie diferenciálnej rovnice (11).] Z rovnice (14) máme

$$uv' = (x+1)^3$$

a po dosadení za u

$$C_1(x+1)^2\,v' = (x+1)^3.$$

Odtiaľ

$$v' = \frac{1}{C_1}(x+1)$$

a

$$v = \frac{1}{2C_1}(x+1)^2 + C_2,$$

kde C_2 je ľubovoľné číslo.

Zo (6) máme

$$y = u(x)\,v(x) = C_1(x+1)^2\left[\frac{1}{2C_1}(x+1)^2 + C_2\right] = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2.$$

Bernoulliho diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^\alpha, \tag{15}$$

kde p a q sú funkcie definované na intervale I, pričom $q(x)$ nerovná sa 0 pre každé $x \in I$ a číslo α je rôzne od 0 a 1, nazývame *Bernoulliho diferenciálnou rovnicou.*

Ak v diferenciálnej rovnici (15) je $\alpha = 0$ alebo $\alpha = 1$, potom rovnica (15) je lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu.

Ak $\alpha > 0$, potom $y = 0$ pre $x \in I$ je jedno z riešení diferenciálnej rovnice (15).

Ak α je rôzne od 0 a 1, substitúciou

$$z = y^{1-\alpha} \tag{16}$$

možno diferenciálnu rovnicu (15) previesť na lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$z' + (1 - \alpha)\, p(x)\, z = (1 - \alpha)\, q(x). \tag{17}$$

Veta 2. Nech z je ľubovoľné riešenie diferenciálnej rovnice (17), $z \neq 0$, na intervale I, potom každá funkcia tvaru

$$y = z^{1/(1-\alpha)}, \qquad \alpha \neq 1, \qquad x \in I, \tag{18}$$

je riešením diferenciálnej rovnice (15) na intervale I. Naopak, ku každému riešeniu diferenciálnej rovnice (15) okrem prípadného riešenia $y = 0$, $x \in I$, existuje také riešenie z diferenciálnej rovnice (17), pre ktoré platí (18).

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}, \quad \text{kde } x \in I = (0, \infty). \tag{19}$$

Riešenie. Funkcie $p(x) = 1/x$ a $q(x) = (\ln x)/x$ sú spojité na intervale I.

Riešením diferenciálnej rovnice (19) je zrejme $y = 0$. Predpokladajme ďalej $y \neq 0$, potom z rovnice (19) máme

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}. \tag{20}$$

Ak podľa (16) položíme $z = y^{-1}$, máme $z' = -y^{-2}y'$ a dosadením do rovnice (20) dostaneme

$$-z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

To je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorej všeobecné riešenie na intervale $(0, \infty)$ je

$$z = 1 + \ln x + cx,$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

Podľa (18) riešením diferenciálnej rovnice (19) na intervale $(0, \infty)$ je

$$y = (1 + \ln x + cx)^{-1},$$

kde c je ľubovoľné číslo.

1217. Riešte lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu bez pravej strany:

a) $y' + \dfrac{1}{x^2} y = 0.$ b) $y' - y \operatorname{tg} x = 0.$

c) $y' - y(x \sin x - \cos x) = 0.$ d) $y'e^{x^2} - xy = 0.$

V úlohách 1218 až 1235 riešte lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu s pravou stranou.

1218. $y' + 3y = x.$

1219. $y' + 2y = e^{2x}.$

1220. $y' + xy = x.$

1221. $xy' = 2y + x + 1.$

1222. $xy' + y = x^3.$

1223. $x^2y' + xy = -1.$

1224. $(1 - x^2)\, y' + x(y - a) = 0.$

1225. $(1 + x^2)\, y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$

1226. $y' - \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2}} = a\, \dfrac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}.$

1227. $y' - xy = x\, e^{x^2}.$

1228. $x (\ln x)\, y' - 2y = \ln x.$

1229. $y' + \dfrac{1}{x + 1} y = \sin x.$

1230. $xy' - 2y = x^3 \cos x.$

1231. $y' \cos x + 2y \sin x = 2 \sin x.$

1232. $y' \operatorname{tg} x - y = \dfrac{1}{4} x(2 \operatorname{tg} x - x).$

1233. $(1 + x^2)\, y' + y = \operatorname{arctg} x.$

1234. $y' + \dfrac{xy}{1+x^2} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$

1235. $y' - \dfrac{y}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \operatorname{arctg} x.$

V úlohách 1236 až 1239 nájdite riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu, ktoré spĺňajú danú začiatočnú podmienku.

1236. $y' + x^2 y = x^2$, $y(2) = 1$.

1237. $y' + y = \cos x$, $y(0) = 1$.

1238. $y' + y \operatorname{cotg} x = \sin x$, $y(\pi/2) = 1$.

1239. $xy' + 2y = 2x \cos 2x + 2 \sin 2x$, $y(\pi) = 1$.

V úlohách 1240 až 1243 zámenou premenných $v = x$, $u = y$, pričom $v = \varphi(u)$ preveďte danú diferenciálnu rovnicu na lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu a riešte ju.

1240. $(x + y^2)\, y' - y = 0$.

1241. $(x - 2xy - y^2)\, y' + y^2 = 0$.

1242. $(2e^y - x)\, y' = 1$.

1243. $(2x + y - 4 \ln y)\, y' - y = 0$.

1244. Nájdite krivky, ktorých dotyčnica v ľubovoľnom bode P vytína na osi o_y úsek rovnajúci sa dĺžke subnormály v bode P.

1245. Nájdite krivky, ktorých dotyčnica v ľubovoľnom bode P spolu s osou o_y a úsečkou OP, kde O je začiatok pravouhlého súradnicového systému, vytvára trojuholník s obsahom a^2.

1246. Žiarovka je v miestnosti s teplotou vzduchu $T_0 = 20$ °C. Po zapojení na sieť vzniká v žiarovke za každú minútu 1,4 kcal tepla. Z povrchu žiarovky sa pri rozdiele teplôt (žiarovka—vzduch) 1 °C za každú minútu vyžiari 14 cal tepla.*) Tepelná kapacita žiarovky je $C = 12{,}5$ cal deg^{-1}. Za predpokladu, že sa teplota vzduchu v miestnosti nemení, nájdite teplotu žiarovky v čase:
a) $t = 1$ min, b) $t \to \infty$.

1247. Do okruhu je zapojená cievka s koeficientom samoindukcie L, ohmickým odporom R a konštantným napätím U. Aký priebeh bude mať prúd J v závislosti od času, ak v čase $t = 0$ bol prúd $J(0) = 0$.

1248. Cievka, ktorá má ohmický odpor $R = 5\,\Omega$ a indukčnosť $L = 1H$, je pripojená na striedavé napätie

$$u = 1\,000 \sin (100\pi t + \pi/3).$$

Nájdite intenzitu prúdu v cievke po piatich periódach striedavého napätia od pripojenia.

1249. Na svorkách cievky sa napätie za 10 sekúnd rovnomerne zmenšilo z $e_0 = 2$ V na $e_1 = 1$ V. Aký je prúd na konci desiatej sekundy, ak počiatočný prúd bol $\dfrac{50}{3}$ A, odpor cievky je $R = 0{,}12\,\Omega$ a jej indukčnosť je $0{,}1H$.

V úlohách 1250 až 1256 riešte Bernoulliho diferenciálne rovnice.

1250. $y' + xy = xy^3$.

1251. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$

1252. $y' + 2y/x = -x^4 e^x y^3$.

1253. $y' + y/x = ay^2 \ln x$.

1254. $y' - 9x^2 y + 3(x^5 - x^2) \sqrt[3]{y^2} = 0$.

1255. $y' + y + y^2 \sin x = 0$.

1256. $y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$.

*) Vyžarovanie tepla je priamo úmerné rozdielu teplôt žiarovka — vzduch.

Dané diferenciálne rovnice v úlohách 1257 až 1260 upravte na Bernoulliho diferenciálne rovnice a riešte ich.

1257. $3y^2y' - 4y^3 = x + 1$.

1258. $2xyy' + x = y^2$.

1259. $y'/\sqrt{y} + 4\sqrt{y}\,x = 2x\,e^{-x^2}$.

1260. $(2x^2y \ln y - x)\,y' - y = 0$.

1261. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $y' - \dfrac{xy}{2(x^2 - 1)} = \dfrac{x}{2y}$, ktoré prechádza bodom $A = (0, 1)$.

1262. Nájdite krivky, ktorých dotyčnica v ľubovoľnom bode $P = (x_0, y_0)$ vytína na osi o_y úsek rovnajúci sa y_0^2.

1263. Nájdite krivku, ktorá prechádza bodom O a stred úsečky určenej ľubovoľným dotykovým bodom a priesečníkom normály v tomto bode s osou o_x leží na parabole $y^2 = ax$.

1264. Elektrický okruh pozostáva zo zdroja a z cievky, ktorej odpor, ako aj indukčnosť sú priamo úmerné prúdu, ktorý ňou preteká. Pri prúde 1 A je odpor cievky 20 Ω a indukčnosť 8 H. Napätie zdroja sa priamo úmerne mení za dobu 2 min. od 0 V do 20 V. Nájdite závislosť prúdu od času t počas týchto 2 minút.

4,6. Riccatiho diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$y' = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x), \tag{1}$$

v ktorej p, q, r sú spojité funkcie na intervale J nazývame *Riccatiho diferenciálnou rovnicou.*

Ak pre všetky $x \in J$ je $p(x) = 0$, potom diferenciálna rovnica (1) je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu.

Ak pre všetky $x \in J$ je $r(x) = 0$, potom diferenciálna rovnica (1) je Bernoulliho diferenciálna rovnica.

Veta 1. Nech y_0 je jedno riešenie diferenciálnej rovnice (1) v intervale J. Nech z je ľubovoľné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu

$$z' + [2p(x)\,y_0 + q(x)]\,z = -p(x), \qquad x \in J, \tag{1a}$$

potom každá funkcia

$$y = y_0 + 1/z \tag{2}$$

je riešením diferenciálnej rovnice (1) a naopak, ku každému riešeniu y diferenciálnej rovnice (1), $y \neq y_0$, existuje riešenie z diferenciálnej rovnice (1a), pre ktoré platí (2).

Poznámka 1. Ak namiesto (2) zvolíme $y = y_0 + u$, potom u je riešenie Bernoulliho diferenciálnej rovnice

$$u' = [2p(x)\,y_0 + q(x)]\,u + p(x)\,u^2, \qquad x \in J.$$

Veta 2. Ak y_0, y_1 sú dve rôzne riešenia Riccatiho diferenciálnej rovnice v intervale J, potom každé riešenie Riccatiho diferenciálnej rovnice má tvar

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{1 + z(y_1 - y_0)},$$

kde z je všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu bez pravej strany

$$z' + [2p(x)\,y_0 + q(x)]\,z = 0.$$

Veta 3. Ak poznáme tri rôzne riešenia Riccatiho diferenciálnej rovnice v intervale J, potom každé riešenie Riccatiho diferenciálnej rovnice nájdeme bez integrovania.

Veta 4. Ak sú v diferenciálnej rovnici (1) koeficienty p a aj q spojité a majú spojité derivácie na intervale J, pričom $p(x) \neq 0$ pre každé $x \in J$, potom diferenciálnu rovnicu (1) možno pomocou zámeny premenných

$$y = \frac{1}{p(x)} z(x)$$

upraviť na tvar

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \pm z^2 + q_1(x)\, z + r_1(x). \tag{3}$$

Poznámka 2. Diferenciálnu rovnicu (1) možno pomocou zámeny premenných

$$y = u(x) - q(x)/2p(x)$$

previesť na diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = p(x)\, z^2 + r_2(x). \tag{4}$$

Vo všeobecnosti riešenia diferenciálnej rovnice (1) nie sú elementárne funkcie.

Diferenciálnu rovnicu

$$y' = \alpha y^2 + \beta x^n, \tag{5}$$

kde α, β, n sú čísla, nazývame *špeciálnou Riccatiho diferenciálnou rovnicou.*

Jej riešenia sú elementárnymi funkciami iba pre $n = -2$ alebo $n = -4k/(2k - 1)$, kde k je celé číslo.

Ak v diferenciálnej rovnici (5) je $n = -2$, zámenou premenných $y = 1/z$ dostaneme z nej homogénnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu.

Ak v diferenciálnej rovnici (5) je $n = 0$, potom diferenciálna rovnica (5) je separovateľná diferenciálna rovnica prvého rádu.

Ak v diferenciálnej rovnici (5) je $n = -4k/(2k - 1)$ a k je celé číslo rôzne od nuly, potom pre $k > 0$ postupnými zámenami premenných

$$y = \frac{1}{zx^2} - \frac{1}{\alpha x}$$

$$x = x_1^{1/(n+3)}$$

prejde diferenciálna rovnica (5) na tvar

$$w' = \gamma w^2 + \delta,$$

čo je diferenciálna rovnica (5) pre $n = 0$.

Pre $k < 0$ postupnými zámenami premenných

$$x_1 = x^{1/(n_1+3)},$$

$$z = \frac{1}{y x_1^2} + \frac{1}{(n_1 + 3)\, \beta x_1},$$

kde $n_1 = -\dfrac{3n + 4}{n + 1}$ prejde diferenciálna rovnica (5) na tvar

$$w_1' = \gamma_1 w_1^2 + \delta_1,$$

čo je diferenciálna rovnica (5) pre $n = 0$.

Príklad 1. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y' = \frac{\ln x}{x} y^2 - \frac{2 \ln x + 1}{x} y + \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x \in (0, \infty). \tag{6}$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (6) je tvaru (1), kde $p(x) = (\ln x)/x$, $q(x) = -(2\ln x + 1)/x$, $r(x) = (1 + \ln x)/x$. Tieto funkcie sú spojité v intervale $J = (0, \infty)$. Ľahko zistíme, že funkcia $y_0 = 1$ je riešením diferenciálnej rovnice na intervale J. Podľa poznámky 1 položme $y = 1 + z$, potom je $y' = z'$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (6) máme

$$z' = \frac{\ln x}{x}(1 + z)^2 - \frac{2\ln x + 1}{x}(1 + z) + \frac{1 + \ln x}{x}$$

alebo po úprave

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{z^2 \ln x}{x}. \tag{7}$$

Diferenciálna rovnica (7) je Bernoulliho diferenciálna rovnica, ktorú sme riešili v príklade 2 v článku 4,5. Jej všetky riešenia sú

$$z = \frac{1}{1 + cx + \ln x}.$$

Všetky riešenia diferenciálnej rovnice (6) sú

$$y = 1 + \frac{1}{1 + cx + \ln x}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y' = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x}x + x, \qquad x \in (0, \infty). \tag{8}$$

Riešenie. Diferenciálnu rovnicu (8) možno previesť na špeciálnu Riccatiho diferenciálnu rovnicu. Položme $y = xz$, potom $y' = z + xz'$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (8) dostaneme

$$z + xz' = xz^2 + z + x,$$

Keďže $x \neq 0$, dostaneme

$$z' = z^2 + 1, \tag{9}$$

čo je špeciálna Riccatiho diferenciálna rovnica pre $n = 0$. Keďže diferenciálna rovnica (9) je separovateľná diferenciálna rovnica prvého rádu, jej všetky riešenia sú

$$\operatorname{arctg} z = x + c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Z toho vyplýva

$$y/x = \operatorname{tg}(x + c), \qquad -\pi/2 - c < x < \pi/2 - c.$$

Hľadané riešenie diferenciálnej rovnice (8) je

$$y = x \operatorname{tg}(x + c),$$

kde $\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$.

V úlohách 1265 až 1271 riešte Riccatiho diferenciálnu rovnicu, ak poznáte jedno jej riešenie y_1.

1265. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$, $y_1 = x + 2$.

1266. $y' = xy^2 - \dfrac{2x^2 + 1}{x}y + \dfrac{x^2 + 1}{x}$, $y_1 = 1$.

1267. $y' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + x + 1$, $y_1 = x$.

1268. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$, $y_1 = -1/x$.

1269. $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$, $y_1 = a/x$.

1270. $y' + 2y\,e^x - y^2 = e^{2x} + e^x$, $y_1 = e^x$.

1271. $y' - y^2 - y\sin 2x - \cos 2x = 0$, $y_1 = \operatorname{tg} x$.

V úlohách 1272 až 1274 riešte špeciálnu Riccatiho diferenciálnu rovnicu.

1272. $y' = y^2/3 + 2/3x^2$.
1273. $y' = y^2 + x^{-4}$.
1274. $y' - y^2 = -x^{-4/3}$.

V úlohách 1275 až 1279 riešte Riccatiho diferenciálnu rovnicu tak, že ju prevediete na špeciálnu Riccatiho diferenciálnu rovnicu.

1275. $xy' - 5y - y^2 = x^2$.
1276. $y' = y^2 + y/x - 4/x^2$.
1277. $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$.
1278. $3xy' - 9y - y^2 = x^{2/3}$.
1279. $y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0$.

4,7. Diferenciálne rovnice tvaru $x = f(y')$, $y = g(y')$, Lagrange—d'Alembertova diferenciálna rovnica, a Clairautova diferenciálna rovnica

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$y = f(y')\,x + g(y'), \tag{1}$$

kde f a g sú spojité funkcie na intervale J, pričom obe nie sú konštanty, nazývame *Lagrange-d'Alembertovou rovnicou.*

Ak v diferenciálnej rovnici (1) je $f(y') = y'$ pre všetky $y' \in J$, potom diferenciálnu rovnicu

$$y = xy' + g(y') \tag{2}$$

nazývame *Clairautovou rovnicou.*

Ak v diferenciálnej rovnici (1) je $f(y') = 0$ pre všetky $y' \in J$, potom máme diferenciálnu rovnicu tvaru

$$y = g(y'). \tag{3}$$

Riešenie diferenciálnych rovníc (1), (2), (3) možno nájsť metódou derivovania.

Nech f a g sú diferencovateľné funkcie na intervale J. Položme $y' = p$. Derivovaním diferenciálnej rovnice (1) podľa x dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$f(p) - p + [f'(p)\,x + g'(p)]\,p' = 0. \tag{4}$$

Veta 1. Nech funkcie f a g majú spojité derivácie na intervale J. Nech funkcia $x = \varphi(t)$ je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu

$$[f(t) - t]\,x' + f'(t)\,x = g'(t) \tag{6}$$

a nech má inverznú funkciu φ_{-1} na intervale J. Potom funkcia daná parametricky

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \varphi(t)\,f(t) + g(t), \end{aligned} \tag{5}$$

kde $t \in J$, je riešením Lagrange-d'Alembertovej diferenciálnej rovnice na intervale J.

Veta 2. Ak pre $p_0 \in J$ je $f(p_0) - p_0 = 0$, potom funkcia

$$y = p_0x + g(p_0), \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{7}$$

je riešením diferenciálnej rovnice (1).

Veta 3. Každá funkcia

$$y = cx + g(c), \tag{8}$$

kde c je ľubovoľné číslo z intervalu J, je riešením Clairautovej diferenciálnej rovnice (2).

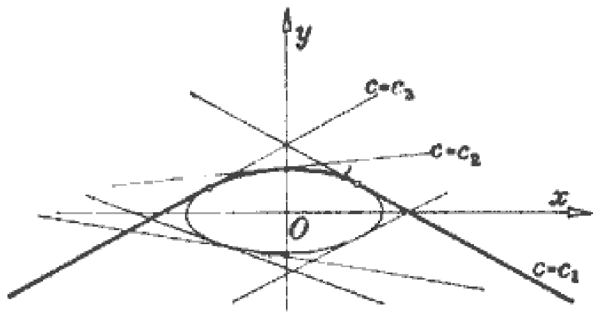
Nech funkcia g má na intervale J rýdzo monotónnu spojitú deriváciu, potom funkcia, ktorej parametrické rovnice sú

$$\begin{aligned} x &= -g'(t), \\ y &= -tg'(t) + g(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$t \in J$, je riešením Clairautovej diferenciálnej rovnice (2).

Poznámka. Geometrický význam riešení (8) Clairautovej diferenciálnej rovnice (2) je ten, že riešenia (8) tvoria jednoparametrický systém priamok v rovine. Tento systém má obálku, ktorej rovnica je určená systémom rovníc (9), čiže je riešením Clairautovej diferenciálnej rovnice.

Okrem týchto riešení má Clairautova diferenciálna rovnica (2) ešte riešenia, ktorých integrálne krivky sú zložené z časti obálky (9) a polpriamok určených rovnicami (8) *(obr. 35)*.



Obr. 35

Veta 4. Ak funkcia g na intervale J, ktorý neobsahuje číslo 0, má spojitú deriváciu rôznu od nuly, potom funkcia, ktorej parametrické rovnice sú

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{g'(t)}{t}\, \mathrm{d}t, \\ y &= g(t), \end{aligned} \tag{10}$$

$t \in J$, je riešením diferenciálnej rovnice $y = g(y')$.

Metódou derivovania možno riešiť aj diferenciálnu rovnicu tvaru

$$x = f(y'), \tag{11}$$

kde f je spojitá funkcia, rôzna od konštanty na intervale J.

Nech f je diferencovateľná funkcia na intervale J. Položme $y' = p$, máme $x = f(p)$. Derivovaním tejto rovnice podľa y dostávame diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$\frac{1}{p} = f'(p)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

a

$$y = \int pf'(p)\, \mathrm{d}p.$$

Veta 5. Ak funkcia f má na intervale J spojitú deriváciu rôznu od nuly, potom funkcia, ktorej parametrické rovnice sú

$$\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= \int tf'(t)\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{12}$$

$t \in J$, je riešením diferenciálnej rovnice $x = f(y')$.

Príklad 1. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'^2 + y' - 1 - x = 0. \tag{13}$$

Riešenie. Upravme danú diferenciálnu rovnicu na tvar

$$x = y'^3 + y' - 1. \tag{14}$$

Porovnaním s diferenciálnou rovnicou (11) dostaneme $f(p) = p^3 + p - 1$, kde sme položili $p = y'$. Podľa vety 5 bude riešenie nájdené metódou derivovania riešením danej diferenciálnej rovnice v intervale $(-\infty, \infty)$. Derivujme diferenciálnu rovnicu (14) podľa y, dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = (3p^2 + 1)\frac{dp}{dy}.$$

Za vyššie uvedených predpokladov je $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{p}$ a máme

$$(3p^2 + 1)\,dp - \frac{1}{p}\,dy = 0,$$

čo je separovateľná diferenciálna rovnica. Jej riešením je

$$y = \int (3p^3 + p)\,dp,$$

čiže

$$y = 3p^4/4 + p^2/2 + C$$

v intervale $(0, \infty)$ alebo $(-\infty, 0)$ kde C je ľubovoľná konštanta. Riešenie diferenciálnej rovnice (13) v intervale $(-\infty, \infty)$ je

$$x = p^3 + p - 1,$$
$$y = 3p^4/4 + p^2/2 + C, \quad p \in (-\infty, \infty).$$

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'^5 + y'^3 = y - 1. \tag{15}$$

Riešenie. Upravme diferenciálnu rovnicu (15) na tvar

$$y = y'^5 + y'^3 + 1. \tag{16}$$

Porovnaním s diferenciálnou rovnicou (3) máme $g(p) = p^5 + p^3 + 1$, kde sme položili $y' = p$. Funkcia g má na intervale $(0, \infty)$ resp. $(-\infty, 0)$ spojitú kladnú deriváciu $g'(p) = 5p^4 + 3p^2$. Podľa vety 4 bude riešenie nájdené metódou derivovania v týchto intervaloch riešením diferenciálnej rovnice (15). Derivujme diferenciálnu rovnicu (16) podľa x, dostaneme

$$p = (5p^4 + 3p^2)\frac{dp}{dx},$$

čiže

$$\frac{dx}{dp} = 5p^3 + 3p.$$

Z toho dostávame

$$x = 5p^4/4 + 3p^2/2 + C$$

a hľadané riešenie diferenciálnej rovnice (15) je

$$x = 5p^4/4 + 3p^2/2 + C,$$
$$y = p^5 + p^3 + 1$$

pre $p \in (0, \infty)$ resp. $p \in (-\infty, 0)$, kde C je ľubovoľná konštanta.

Príklad 3. Nájdime krivku, ktorej každá dotyčnica vytvára spolu so súradnicovými osami trojuholník s obsahom $2a^2$.

Riešenie. Nech má hľadaná krivka rovnicu $y = f(x)$. Dotyčnica tejto krivky v jej ľubovoľnom bode $P = (x, y)$ má rovnicu

$$Y - y = y'(X - x),$$

a jej priesečníky so súradnicovými osami sú $R = (x - y/y', 0)$, $Q = (0, y - xy')$, pričom je $y' \neq 0$. Z podmienky úlohy vyplýva

$$\frac{1}{2}\left|x - \frac{y}{y'}\right|\left|y - xy'\right| = 2a^2,$$

čiže

$$(y - xy')^2 = 4a^2\,|y'|,\quad y' \in J,$$

pričom $J = (0, \infty)$ alebo $J = (-\infty, 0)$.

Z toho dostaneme $\quad y = xy' \pm 2a\sqrt{|y'|},\quad y' \in J,$

čo je Clairautova diferenciálna rovnica. Položme $y' = p$, máme

$$y = xp \pm 2a\sqrt{|p|} \tag{17}$$

a po derivovaní podľa x dostaneme

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \pm 2a\frac{1}{2\sqrt{|p|}}\,\frac{|p|}{p}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

čiže

$$\left(x \pm a\frac{\sqrt{|p|}}{p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Z toho vyplýva

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{18}$$

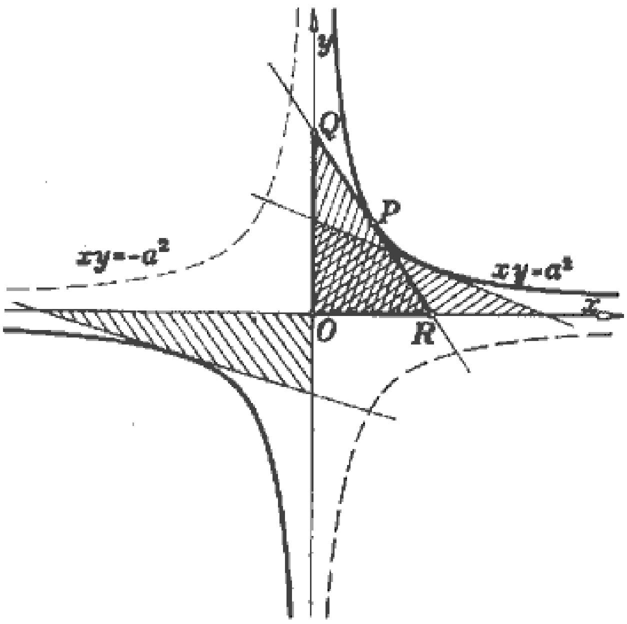
alebo

$$x = \mp a\frac{\sqrt{|p|}}{p} \tag{19}$$

Z diferenciálnej rovnice (18) dostaneme $p = C$, kde C je ľubovoľné číslo. Preto riešením Clairautovej diferenciálnej rovnice je

$$y = Cx \pm 2a\sqrt{|C|}, \tag{20}$$

kde $x \in (-\infty, \infty)$ a C je ľubovoľná konštanta rôzna od nuly.



Obr. 36

Z rovnice (19) po dosadení do rovnice (17) dostaneme

$$x = \mp a\frac{\sqrt{|p|}}{p},$$
$$y = \mp a\sqrt{|p|} \pm 2a\sqrt{|p|},$$

čiže

$$x = \mp a\frac{\sqrt{|p|}}{p},$$
$$y = \pm a\sqrt{|p|},$$

$p \in J$, čo sú parametrické rovnice danej krivky. Vylúčením parametra p z týchto rovníc dostaneme rovnicu rovnoosovej hyperboly

$$xy = \pm a^2. \tag{21}$$

Podľa vety 3 je toto riešenie v každom z intervalov $(0, \infty)$ resp. $(-\infty, 0)$ riešením našej úlohy. Riešenia (20) sú dotyčnice k hyperbole (21), ktorá je ich obálkou (*obr. 36*).

Príklad 4. Riešme Lagrange—d'Alembertovu diferenciálnu rovnicu

$$y = x(y'^2 + y') + y'^3 + y'^2/2.$$

Riešenie. Porovnaním s diferenciálnou rovnicou (1) máme $f(y') = y'^2 + y'$, $g(y') = y'^3 + y'^2/2$. Funkcie f a g majú na intervale $(-\infty, \infty)$ spojité derivácie. Riešme danú diferenciálnu rovnicu zavedením parametra $y' = p$

$$y = x(p^2 + p) + p^3 + p^2/2.$$

Derivovaním podľa x dostaneme

$$p = p^2 + p + x(2p + 1)\, p' + (3p^2 + p)\, p'.$$

Z toho máme

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2p+1}{p^2}\, x = -3 - \frac{1}{p},$$

kde $p \in (0, \infty)$ alebo $p \in (-\infty, 0)$.

To je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu pre neznámu funkciu $x = \varphi(p)$. Jej riešenie je

$$x = \frac{C}{p^2}\, e^{\frac{1}{p}} - p, \tag{22}$$

kde C je ľubovoľná konštanta. V ďalšom texte uvažujme iba tie riešenia (22), ktoré sú rýdzo monotónne na intervale $(0, \infty)$. Potom podľa vety 1 dostávame dosadením za x riešenia danej diferenciálnej rovnice v parametrickom tvare

$$x = \frac{C}{p^2}\, e^{\frac{1}{p}} - p,$$

$$y = C\left(1 + \frac{1}{p}\right) e^{\frac{1}{p}} - \frac{p^2}{2},$$

kde $p \in (0, \infty)$.

V úlohách 1280 až 1286 riešte diferenciálne rovnice:

1280. $x = y' + y'^3$.

1281. $x = (1 + y')/y'^2$.

1282. $x(1 + y'^2) = 1$.

1283. $x = ay'/\sqrt{1 + y'^2}$.

1284. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$.

1285. $x = y' \sin y'$.

1286. $y'(x - \ln y') = 1$.

V úlohách 1287 až 1291 riešte diferenciálne rovnice:

1287. $y = y'^2 - 2y'^3$.

1288. $y\sqrt{1 + y'^2} = y'$.

1289. $y = y' - \ln y'$.

1290. $y = (y' - 1)\, e^{y'}$.

1291. $y^2 + 2yy' - y'^4 = 0$.

V úlohách 1292 až 1302 riešte Clairautove diferenciálne rovnice:

1292. $y = xy' - 4y'^2$.

1293. $y = xy' + y' - y'^2$.

1294. $y = xy' + y'^4$.

1295. $y = xy' + 2\sqrt{-y'}$

1296. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

1297. $y = xy' + 1/(2y'^2)$.

1298. $y = xy' + \cos y'$.

1299. $y = xy' + y' + e^{y'}$.

1300. $y = xy' - \ln y'$.

1301. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

1302. $2y'^2(y - xy') = 1$.

V úlohách 1303 až 1312 riešte Lagrange—d'Alembertove diferenciálne rovnice:

1303. $y = -xy' + y'^2$.

1304. $y = 2xy' + y'^{-2}$.

1305. $y = xy'^2 + y'^2$. **1306.** $y = (1 + y')x + y'^2$.
1307. $2yy' = x(1 + y'^2) + y'^4 + 3y'^2$. **1308.** $y = 2xy' - \ln y'$.
1309. $yy' = 2xy'^2 + 1$. **1310.** $y = xy'(y' + 2)$.
1311. $2y = xy'^2/(y + 2)$. **1312.** $y = k(x + yy')/\sqrt{1 + y'^2}$.

1313. Nájdite krivku, ktorej všetky dotyčnice vytínajú na súradnicových osiach úseky p, q, pričom $p + q = 2a$, kde a je dané číslo.

1314. Nájdite krivku, ktorej všetky dotyčnice pretínajú súradnicové osi v bodoch P, Q, pričom dĺžka úsečky PQ sa rovná a, kde a je dané kladné číslo.

1315. Nájdite krivku, ktorej každá dotyčnica má od dvoch daných bodov konštantný súčin vzdialeností.

1316. Nájdite krivku, ktorej každá dotyčnica určuje úsečku s koncovými bodmi na súradnicových osiach tak, že jej stred leží na parabole $y^2 = 2x$.

1317. Nájdite krivku, ktorá prechádza začiatkom súradnicového systému a súradnicové osi vytínajú na jej ľubovoľnej normále úsečku dĺžky 2.

1318. Z daného bodu roviny sa šíri zvuk priamočiaro na všetky strany od zdroja. Zároveň v rovine duje vietor v tom istom smere s konštantnou rýchlosťou a. Nájdite krivky v tejto rovine, pozdĺž ktorých sa zvuk šíri, t. j. krivky, ktorých dotyčnice sú kolmé na príslušné „vlnoplochy".

4,8. Trajektórie.

Nech

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

je rovnica jednoparametrického systému kriviek (pozri čl. 3,8). Krivku K, ktorá pretne každú krivku systému (1) pod uhlom β, pričom $0 < \beta < \pi$, budeme nazývať *trajektóriou pod uhlom* β daného systému kriviek *(obr. 37)*.

Ak $\beta = \pi/2$, je trajektória kolmá na každú krivku daného systému a nazývame ju *ortogonálnou trajektóriou*. Nech $y = f(x)$ je rovnica ortogonálnej trajektórie. Vylúčením parametra α z rovníc

$$\begin{aligned} F_y(x, y(x), \alpha) - F_x(x, y(x), \alpha)\, y'(x) &= 0, \\ F(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu ortogonálnych trajektórií.

Ak $\beta \neq \pi/2$, hovoríme o *izogonálnej trajektórii*. Nech $y = f(x)$ je rovnica izogonálnej trajektórie. Vylúčením parametra α z rovníc

$$\begin{aligned} F_y(x, y, \alpha) + mF_x(x, y, \alpha)\, y' + F_x(x, y, \alpha) - mF_y(x, y, \alpha) &= 0, \\ F(x, y, \alpha) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

pričom $m = \operatorname{tg} \beta$, dostaneme diferenciálnu rovnicu izogonálnych trajektórií.

Poznámka 1. Ak je jednoparametrický systém (1) kriviek daný diferenciálnou rovnicou $f(x, y, y') = 0$, pričom nijaká krivka nemá dotyčnicu rovnobežnú s osou o_y, potom rovnica

$$f(x, y, -1/y') = 0 \tag{4}$$

je diferenciálnou rovnicou ortogonálnych trajektórií systému kriviek (1).

Ak nijaká krivka systému (1) nemá dotyčnicu so smernicou $-1/k$, potom rovnica

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \tag{5}$$

kde $k = \operatorname{tg} \beta$, je diferenciálnou rovnicou izogonálnych trajektórií pod uhlom β daného systému (1).

Poznámka 2. Uvedené diferenciálne rovnice trajektórií určujú trajektórie alebo oblúky trajektórií, ktoré v nijakom bode nemajú dotyčnicu rovnobežnú s osou o_y. Body trajektórií, v ktorých je dotyčnica rovnobežná s osou o_y, treba určiť osobitne.

Príklad 1. Nájdime izogonálne trajektórie pod uhlom $\beta = 45°$ sústavy priamok $y = \alpha x$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Riešenie. Položme $F(x, y, \alpha) = y - \alpha x$. Máme $F_x = -\alpha$, $F_y = 1$. Podľa (3) dostaneme

$$(1 - \alpha)\, y' - \alpha - 1 = 0,$$
$$y - \alpha x' = 0.$$

Vylúčením parametra α máme

$$(1 - y/x)\, y' - y/x - 1 = 0, \tag{6}$$

kde $x \neq 0$.

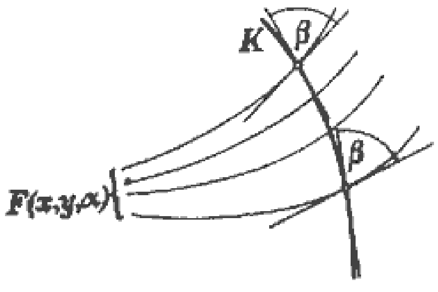
To je homogénna diferenciálna rovnica. Položme $y = ux$, potom $y' = u'x + u$.

Dosaďme do rovnice (6), po úprave dostaneme

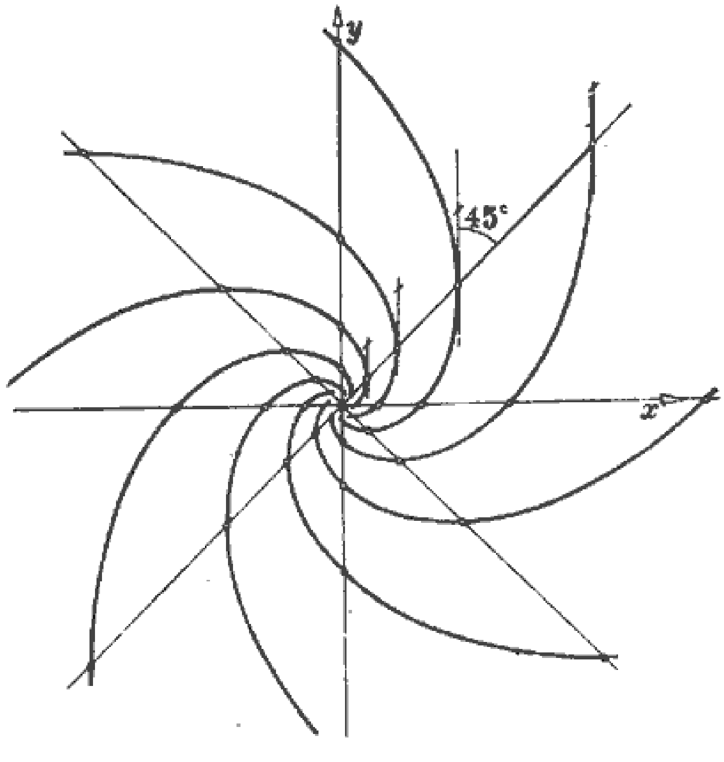
$$u'x + u = \frac{1 + u}{1 - u}, \qquad 1 - u \neq 0,$$

čiže

$$\frac{1 - u}{1 + u^2}\, u' - \frac{1}{x} = 0.$$



Obr. 37



Obr. 38

To je separovaná diferenciálna rovnica, ktorej riešenie je

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln (u^2 + 1) = \ln |x| + c_1.$$

Ak položíme $u = y(x)$, dostaneme

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \ln x^2 = \ln |x| + c_1,$$

čiže

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - c = \ln \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Ak urobíme transformáciu $x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi$, dostaneme riešenie v polárnom súradnicovom systéme

$$\varphi - c_1 = \ln \varrho,$$

čiže

$$\varrho = e^{\varphi - c_1}.$$

Ak ešte položíme $e^{-c_1} = c$, dostaneme

$$\varrho = c\, e^{\varphi}.$$

Teda izogonálne trajektórie pod uhlom 45° sústavy priamok $y = \alpha x$ sú logaritmické špirály $\varrho = c\, e^{\varphi}$, kde c je ľubovoľné kladné číslo (pozri *obr. 38*).

V úlohách **1319** až **1332** nájdite ortogonálne trajektórie daných jednoparametrických systémov kriviek.

1319. $x^2 + y^2 = \alpha$*.) **1320.** $y^2 = 4\alpha x$.

1321. $xy = \alpha$, $\alpha \neq 0$. **1322.** $y = \alpha x^2$.

1323. $y^2 = x + \alpha$. **1324.** $x^2 - \alpha x + 4y = 0$.

1325. $x^2 + y^2 + \alpha x = 0$. **1326.** $x^2/\alpha + y^2/4\alpha = 1$, $\alpha \neq 0$.

1327. $x^2/4 + y^2/9 = \alpha$. **1328.** $y = \alpha\, e^{-2x}$.

1329. $y^2 = \alpha\, e^x + x + 1$. **1330.** $(x^2 + y^2)^2 = \alpha^2(x^2 - y^2)$, $\alpha \neq 0$.

1331. $\varrho^2 = \ln \operatorname{tg} \varphi + \alpha$. **1332.** $\varrho = \alpha \cos^2 \varphi$, $\alpha \in (0, \infty)$.

1333. Nájdite ortogonálne trajektórie všetkých kružníc dotýkajúcich sa priamok $y = \pm x$.

1334. Nájdite ortogonálne trajektórie všetkých kružníc, ktoré prechádzajú dvoma bodmi $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $a > 0$.

1335. V rovine $z = 0$ v bode $A = (1, 2, 0)$ sa nachádza elektrický náboj. Rovnica siločiar poľa vytvoreného týmto nábojom je $y = \alpha(x - 1) + 2$ v rovine $z = 0$. Nájdite priesečnice ekvipotenciálnych hladín s rovinou $z = 0$.

1336. Nájdite ortogonálne trajektórie jednoparametrického systému priamok vytvárajúcich hyperbolický paraboloid $z = mxy$.

V úlohách **1337** a **1338** nájdite evolventy daných kriviek ako ortogonálne trajektórie ich dotyčníc.

1337. $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$ (reťazovka).

1338. $x = 2a(\cos t + t \sin t)$, $y = 2a(\sin t - t \cos t)$ (evolventa kružnice).

V úlohách **1339** až **1345** nájdite izogonálne trajektórie pod uhlom β daného jednoparametrického systému kriviek.

1339. $y = \alpha x$. **1340.** $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $\beta = \pi/4$.

1341. $y^2 = 2\alpha x$, $\beta = \pi/3$. **1342.** $(x - 3y)^4 = \alpha x y^6$, $\beta = \pi/4$.

1343. $y = x \ln \alpha x$, $\alpha \neq 0$, $\beta = \pi/4$. **1344.** $\varrho = \alpha e^{\varphi}$, $\beta = \pi/4$.

1345. $\varrho = \alpha(1 + \cos \varphi)$.

V úlohách **1346** a **1347** nájdite izogonálne trajektórie daného jednoparametrického systému kriviek v priestore.

---

*) V tomto článku, ak o α nie je nič uvedené, platí $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

1346. $x^2 + y^2 = z^2,\quad z = \alpha,\qquad \alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),\ \beta = \pi/4.$

1347. $x^2 + y^2 = a^2,\quad z = \alpha,\qquad \alpha \in (-\infty, \infty).$

1348. Nájdite rovnice izogonálnych trajektórií meridiánov na guľovej ploche.

4,9. Diferenciálne rovnice vyšších rádov. Zníženie rádu diferenciálnej rovnice

Pri niektorých typoch diferenciálnych rovníc vyšších rádov možno vhodnou zámenou premenných znížiť rád diferenciálnej rovnice. Tento postup nazývame *znižovaním rádu* diferenciálnej rovnice.

I. Diferenciálnu rovnicu

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad n > 1 \tag{1}$$

možno zámenou premenných $u = y$,*) $v = y'$, kde $v = \varphi(u)$ previesť na diferenciálnu rovnicu

$$G(u, v, v^{\cdot}, \ldots, v^{(m)}) = 0,^{**)} \tag{2}$$

kde $m < n$. Pritom platí

$$\begin{aligned} y' &= v, \\ y'' &= v^{\cdot} v, \\ y''' &= v^{\cdot\cdot} v^2 + v^{\cdot 2} v, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Poznámka 1. Ak $n = 2$, potom diferenciálnu rovnicu (1) tvaru $F(y, y', y'') = 0$ možno uvedeným postupom upraviť na diferenciálnu rovnicu prvého rádu a prípadne riešiť prv uvedenými metódami.

Poznámka 2. Keďže sa jedná o formálnu transformáciu rovnice (1) do rovnice (2), o tom, či nájdené riešenia sú riešeniami pôvodnej diferenciálnej rovnice (1), presvedčíme sa dosadením.

Príklad 1. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice

$$yy'y'' - y'^3 = 0, \tag{4}$$

ktoré spĺňa počiatočné podmienky $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Riešenie. Daná diferenciálna rovnica je tvaru (1). Položme $u = y$, $v = y'$. Pomocou vzťahov (3) z diferenciálnej rovnice (4) dostaneme

$$uv^2v^{\cdot} - v^3 = 0, \tag{5}$$

čiže

$$v^2(uv^{\cdot} - v) = 0. \tag{6}$$

Z toho máme $v = 0$ alebo $uv^{\cdot} - v = 0$. Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu bez pravej strany $uv^{\cdot} - v = 0$ zahŕňa aj prípad $v = 0$. Jej všetky riešenia sú

$$v = c_1 e^{\int \frac{1}{u} du} = c_1 u,$$

kde $u \in (-\infty, 0)$ alebo $u \in (0, \infty)$ a c_1 je ľubovoľná konštanta.

---

*) O funkcii $y = f(x)$ predpokladáme, že je z množiny $C^n(I)$ (pozri čl. 4,1) a že má inverznú funkciu.
**) Znaky $v^{\cdot}, v^{\cdot\cdot}, \ldots$ značia dv/du, $d^2v/du^2, \ldots$.

Všetky riešenia diferenciálnej rovnice (6) sú

$$v = c_1 u.$$

Z toho pre riešenia diferenciálnej rovnice (4) vyplýva

$$y' = c_1 y,$$

čo je opäť lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu bez pravej strany. Jej všeobecné riešenie je

$$y = c_2 e^{-\int c_1 \mathrm{d}x} = c_2 e^{-c_1 x}, \tag{7}$$

kde c_2 je ľubovoľná konštanta a $x \in (-\infty, \infty)$.

Dosadením do diferenciálnej rovnice (4) zistíme, že funkcia (7) je jej riešením.

Pre riešenie, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y(0) = 1, y'(0) = 1$, musia konštanty c_1 a c_2 spĺňať rovnice

$$c_2 = 1,$$
$$c_1 c_2 = 1.$$

Z toho potom dostaneme $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Hľadané riešenie je $y = e^x$.

II. Diferenciálnu rovnicu

$$F(x, y^{(k)}, \quad y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad 1 \leqq k \leqq n \tag{8}$$

možno zámenou premenných

$$v(x) = y^{(k)}(x)$$

previesť na diferenciálnu rovnicu

$$F(x, v, v', \ldots, v^{(n-k)}) = 0. \tag{9}$$

Pritom platí

$$y^{(k+1)} = v', \qquad y^{(k+2)} = v'', \ldots, y^{(n)} = v^{(n-k)}.$$

Poznámka 3. Ak $n = 2$, potom diferenciálna rovnica (1) má tvar $F(x, y', y'') = 0$ a možno ju previesť na diferenciálnu rovnicu prvého rádu, prípadne riešiť.

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'' + y' \operatorname{cotg} x = \sin 2x, \qquad x \in (0, \pi). \tag{10}$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (10) je tvaru (8). Položme $y' = v$, potom je $y'' = v'$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (10) dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$v' + v \operatorname{cotg} x = \sin 2x, \qquad x \in (0, \pi). \tag{11}$$

Jej riešením je

$$v = \frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{c_1}{\sin x},$$

kde c_1 je ľubovoľná konštanta a $x \in (0, \pi)$.

Pre riešenia diferenciálnej rovnice (10) máme

$$y' = \frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{c_1}{\sin x}, \qquad x \in (0, \pi),$$

čo je separovaná diferenciálna rovnica. Jej riešenie je

$$y = \int \left(\frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{c_1}{\sin x} \right) \mathrm{d}x + c_2,$$

kde c_2 je ľubovoľná konštanta.

Hľadané riešenie diferenciálnej rovnice (10) na intervale $(0, \pi)$ je

$$y = x/3 - [\sin (2x)]/6 + c_1 \ln \operatorname{tg} (x/2) + c_2,$$

kde c_1 a c_2 sú ľubovoľné konštanty.

Poznámka 4. K uvažovanému typu diferenciálnych rovníc patrí aj diferenciálna rovnica tvaru

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{12}$$

Ak sa dá z rovnice (12) vyjadriť

$$y^{(n)} = \varphi(x), \tag{13}$$

potom jej riešenie nájdeme postupným integrovaním.

Ak diferenciálna rovnica $F(x, y^{(n)}) = 0$, je taká, že krivku danú rovnicou $F(x, y) = 0$ možno vyjadriť v tvare $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, potom je diferenciálna rovnica (12) ekvivalentná so systémom $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, $t \in J$. Riešenie diferenciálnej rovnice (12) nájdeme n-násobnou integráciou v tvare

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \varphi'(t) \{\int \varphi'(t) [\dots (\int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt)\, dt] \dots\}\, dt.$$

III. Diferenciálnu rovnicu

$$F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad 1 \leq k \leq n \tag{14}$$

možno zámenou premenných

$$v(x) = y^{(k)}(x)$$

previesť na diferenciálnu rovnicu tvaru

$$F(v, v', \dots, v^{(n-k)}) = 0. \tag{15}$$

Pritom platí

$$y^{(k+1)} = v', \dots, y^{(n)} = v^{(n-k)}.$$

Tým dostaneme diferenciálnu rovnicu tvaru (1).

Príklad 8. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y''' - y'' = 0. \tag{16}$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (16) je tvaru (14). Položme $y'' = v$, potom je $y''' = v'$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (16) máme

$$v' - v = 0. \tag{17}$$

Diferenciálna rovnica (17) je lineárna diferenciálna rovnica bez pravej strany. Jej všeobecné riešenie je

$$v = c_1\, e^x,$$

kde c_1 je ľubovoľná konštanta.

Pre riešenie diferenciálnej rovnice (16) z toho vyplýva

$$y'' = c_1\, e^x,$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica tvaru (13). Jej riešenia nájdeme dvojnásobným integrovaním. Máme

$$y = \int [\int c_1\, e^x\, dx]\, dx = \int (c_1\, e^x + c_2)\, dx = c_1\, e^x + c_2 x + c_3,$$

kde c_1, c_2, c_3 sú ľubovoľné konštanty.

IV. Majme diferenciálnu rovnicu

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{18}$$

kde

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{19}$$

Každé riešenie diferenciálnej rovnice (18) je riešením diferenciálnej rovnice

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c, \tag{20}$$

kde c je ľubovoľná konštanta a naopak.

Poznámka 4. O tom, kedy ľavá strana diferenciálnej rovnice (18) je deriváciou funkcie Φ, t. j. platí (19), hovorí *Eulerova veta*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^n} = 0. \tag{21}$$

Príklad 4. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$yy'' + y'^2 = 0. \tag{22}$$

Riešenie. Porovnaním diferenciálnej rovnice (22) s rovnicou (18) dostaneme $F(x, y, y', y'') = yy'' + y'^2$. Najprv zistíme, či platí Eulerova veta (21). Máme

$$y'' - \frac{d}{dx}(2y') + \frac{d^2}{dx^2}(y) = y'' - 2y'' + y'' = 0,$$

t. j. existuje funkcia $\Phi(x, y, y')$, pre ktorú platí

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y') = yy'' + y'^2.$$

Funkcia $\Phi(x, y, y') = yy' + c$. Diferenciálna rovnica (20) je

$$yy' = c_1,$$

kde c_1 je ľubovoľná konštanta.
Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je

$$\int y\,dy = \int c_1\,dx + c_2,$$

kde c_2 je ľubovoľná konštanta. Z toho potom dostaneme

$$y^2/2 = c_1x + c_2,$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty.
Riešením diferenciálnej rovnice (22) je

$$y^2 = C_1 x + C_2.$$

V. Majme diferenciálnu rovnicu

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{23}$$

kde funkcia $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ je homogénna funkcia k-tého stupňa vzhľadom na $y, y', \ldots, y^{(n)}$, t. j. platí

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

pre ľubovoľné $t \neq 0$.
Urobme zámenu premenných

$$v = y'/y, \qquad \text{t. j.} \qquad |y| = e^{\int v\,dx}. \tag{24}$$

Potom je

$$\begin{aligned} y' &= vy, \\ y'' &= (v' + v^2)\,y, \\ y''' &= (v'' + 3vv' + v^3)\,y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice (23) dostaneme diferenciálnu rovnicu $(n - 1)$-ho rádu

$$F(x, 1, v, v', \ldots, v^{(n-1)}). \tag{26}$$

Ak $v = \varphi(x)$, $x \in J$ je riešením diferenciálnej rovnice (26), potom $|y| = e^{\int \varphi(x)dx}$ je riešením diferenciálnej rovnice (23) na intervale J.

Príklad 5. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0. \tag{27}$$

Riešenie. Položme $F(x, y, y', y'') = xyy'' + xy'^2 - yy'$ a zistime, či funkcia $F(x, y, y', y'')$ je homogénna funkcia vzhľadom na y, y', y''. Keďže pre ľubovoľné $t \neq 0$ platí

$$F(x, ty, ty', ty'') = xtyty'' + x(ty')^2 - tyty' =$$
$$= t^2(xyy'' + xy'^2 - yy') = t^2F(x, y, y', y'')$$

je funkcia $F(x, y, y', y'')$ homogénna druhého stupňa vzhľadom na y, y', y''.

Nech $y \neq 0$, $x \in J$. V diferenciálnej rovnici (27) urobme zámenu premenných $v = y'/y$. Pomocou (25) po dosadení do diferenciálnej rovnice (27) máme

$$x(v' + v^2) + xv^2 - v = 0,$$

čiže

$$xv' - v = -2xv^2, \tag{28}$$

čo je Bernoulliho diferenciálna rovnica. Jej riešenie je

$$v = x/(x^2 + c_1),$$

$x \in J$, pričom $x \neq 0$, $x^2 + c_1 \neq 0$ a c_1 je ľubovoľná konštanta.

Podľa (24) riešenie diferenciálnej rovnice (27) je

$$|y| = e^{\int \frac{x}{x^2+c_1}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2+c_1| + c},$$

čiže

$$|y| = e^c\sqrt{x^2 + c_1},$$

a

$$y = c_2\sqrt{x^2 + c_1},$$

kde c_1 a $c_2 \neq 0$ sú ľubovoľné konštanty.

Z diferenciálnej rovnice (27) vyplýva, že riešením budú ešte aj také funkcie, pre ktoré je $y' = 0$, čiže $y = c$, kde c je ľubovoľná konštanta.

VI. Majme diferenciálnu rovnicu

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{29}$$

kde funkcia $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ je homogénna funkcia k-tého stupňa vzhľadom na všetky argumenty, t. j. platí

$$F(tx, ty, \ldots, ty^{(n)}) = t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

pre ľubovoľné $t \neq 0$.

Urobme zámenu premenných

$$v = y/x \quad \text{a} \quad u = \log x, \quad \text{čiže} \quad x = e^u, \quad y = v\,e^u. \tag{30}$$

Potom je

$$y' = v^{\cdot} + v, \quad y'' = (v^{\cdot\cdot} + v^{\cdot})\,e^{-u}, \quad y''' = (v^{\cdot\cdot\cdot} - v^{\cdot})\,e^{-2u},^{*)} \ldots \tag{31}$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice (29) dostaneme diferenciálnu rovnicu n-tého rádu prv uvedenú v odsekoch I — V.

V úlohách 1349 až 1354 riešte diferenciálne rovnice.

1349. $y'' = 6x - 1/x^2$. **1350.** $y''' = x + \sin x$.

1351. $y'' \sin^4 x - \sin 2x = 0$. **1352.** $xy^{(4)} = 1$.

1353. $y''' = 2xy''$. **1354.** $xy^{(4)} + y^{(3)} = e^x$.

V úlohách 1355 a 1356 nájdite riešenie diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky.

1355. $y'' = 2x^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

1356. $y''' = 1/x^2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$.

*) $v^{\cdot} = dv/du$, $v^{\cdot\cdot} = d^2v/du^2$, ...

V úlohách 1357 a 1358 riešte diferenciálne rovnice vhodným parametrickým vyjadrením pre $y^{(n)}$ a x.

1357. $e^{y''} + y'' = x$. **1358.** $y'''^2 + x^2 = 1$.

V úlohách 1359 až 1367 riešte diferenciálne rovnice tvaru $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

1359. $y'' + y - 1 = 0$. **1360.** $y'' = e^y$.
1361. $y'' - 2yy' = 0$. **1362.** $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2)$.
1363. $y'' - y'^3 \ln y = 0$. **1364.** $yy'' - y'^2 - 4yy' = 0$.
1365. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$. **1366.** $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.
1367. $y'' \operatorname{tg} y - (2y')^2 = 0$.

V úlohách 1368 a 1369 nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky.

1368. $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
1369. $2yy'^3 + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

V úlohách 1370 až 1380 riešte diferenciálne rovnice $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

1370. $xy'' - y' = 0$. **1371.** $y'' - y'/x = x^2$, $x \neq 0$.
1372. $y' = xy'' + y'' - y''^2$. **1373.** $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$.
1374. $xy'' = y' \ln (y'/x)$, $x \neq 0$. **1375.** $xy'' = y' + x \sin \left(\dfrac{y'}{x}\right)$, $x \neq 0$.
1376. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **1377.** $y''^3 + xy'' = 2y'$.
1378. $x^4y''' + 2x^3y'' - 1 = 0$. **1379.** $y''' = y''/x$, $x \neq 0$.
1380. $xy''' - y'' - \sqrt{x^2 + y''^2} = 0$.

V úlohách 1381 až 1388 nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $F(y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

1381. $y''^2 - 4y' = 0$. **1382.** $y'' - \sqrt{1 - y'^2} = 0$.
1383. $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$. **1384.** $2(4 - y) y'' = 1 + y'^2$.
1385. $ay''' = y''$, $a \neq 0$. **1386.** $y''' - y''^2 = 0$.
1387. $y'''^2 + y''^2 - 1 = 0$. **1388.** $y''' - y''^2/y' = 0$, $y' \neq 0$.

V úlohách 1389 až 1394 riešte diferenciálne rovnice, ktorých ľavá strana je deriváciou funkcie $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$.

1389. $y''/y' - 2yy'/(1 + y^2) = 0$. **1390.** $yy'' - y'(y' + 1) = 0$.
1391. $y'' = xy' + y + 1$. **1392.** $xy'' = y' + x^2yy'$.
1393. $yy''' - y'y'' = 0$. **1394.** $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$.

V úlohách 1395 až 1405 riešte diferenciálne rovnice $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, ak funkcia F je homogénna, resp. homogénna vzhľadom na $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

1395. $yy'' - 2y'^2 = 0$. **1396.** $2yy'' + 2y'^2 + y^2 = 0$.

1397. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$. **1398.** $yy'' - y'^2 = yy'/\sqrt{1 + x^2}$.

1399. $x^2yy'' + y'^2 = 0$. **1400.** $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

1401. $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

1402. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$.

1403. $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$.

1404. $x^4y'' - x^3y'^3 + 3x^2yy'^2 - (3xy^2 + 2x^3)\,y' + 2x^2y + y^3 = 0$.

V úlohách 1405 a 1406 riešte diferenciálne rovnice s počiatočnými podmienkami.

1405. $2y''' - 3y''^2 = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

1406. $yy'' + y'^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

1407. Nájdite krivky v rovine, ktorých krivosť v každom bode je:

a) konštantná,

b) nepriamo úmerná tretej mocnine dĺžky normály,

c) úmerná dĺžke normály, keď koeficient úmernosti je $k = 1, -1, 2, -2$.

V úlohách 1408 až 1411 nájdite krivky v rovine, ak sú dané ich prirodzené rovnice.

1408. $R = ks$.

1409. $R^2 = 2as$.

1410. $R^2 + s^2 = a^2$.

1411. Nájdite rovnovážny tvar neroztažného lana upevneného v bodoch A, B, $x_A \neq x_B$, ak horizontálna zložka napätia lana je konštantná (laná reťazových mostov). Tiaž lana zanedbajte.

1412. Nájdite rovnovážny tvar homogénneho neroztažného lana upevneného v dvoch bodoch A, B, $x_A \neq x_B$, ak na neho pôsobí jeho vlastná tiaž.

1413. Nájdite ohybovú krivku nosníka, ktorý je na oboch koncoch votknutý, ak na neho pôsobí rovnomerne zaťaženie s pomerným zaťažením q.

1414. Lokomotíva s hmotnosťou m sa pohybuje rýchlosťou v_0. V čase t_0 strojvodca vypol stroj a lokomotíva sa pohybuje ďalej iba zotrvačnosťou. Akú dráhu prejde lokomotíva od vypnutia, ak trenie je lineárnou funkciou rýchlosti lokomotívy.

1415. Po priamke $x = a$, $a \neq 0$ letí bombardovacie lietadlo konštantnou rýchlosťou v. V čase $t_0 = 0$ je v bode $P = (a, 0)$. Z bodu $0 = (0, 0)$ v čase t_0 štartuje konštantnou rýchlosťou w samonavádzacia raketa vzdušnej obrany a stíha bombardovacie lietadlo. Smer jej pohybu v každom časovom okamihu je určený najkratšou spojnicou rakety a lietadla. Nájdite rovnicu dráhy rakety a čas, v ktorom raketa zasiahne lietadlo.

1416. Svetlo dopadá pod uhlom 30° na vodnú hladinu. Index lomu N vody je lineárnou funkciou hĺbky pod hladinou. Na hladine $N(0) = 4/3$ a v hĺbke 1 m je $N(1) = 3/2$. Nájdite dráhu svetelného lúča vo vode.

4,10. Lineárne diferenciálne rovnice

Diferenciálnu rovnicu

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x), \tag{1}$$

pričom funkcie $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$ a $f(x)$ sú spojité funkcie na intervale J, $a_0(x) \neq 0$ pre všetky $x \in J$, nazývame *lineárnou diferenciálnou rovnicou n-tého rádu*.

Funkcie $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$ nazývame *koeficientmi* lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu.

Namiesto diferenciálnej rovnice (1) možno uvažovať ekvivalentnú lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = g(x), \tag{2}$$

kde $p_i(x) = a_i(x)/a_0(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a $g(x) = f(x)/a_0(x)$, $x \in J$ alebo

$$L(y) = g(x), \tag{3}$$

kde $L(y)$ značí ľavú stranu diferenciálnej rovnice (2).

Ak v lineárnej diferenciálnej rovnici (1), resp. (2) je $f(x) = 0$, resp. $g(x) = 0$ pre každé $x \in J$, potom nazývame diferenciálnu rovnicu (1), resp. (2) lineárnou diferenciálnou rovnicou n-tého rádu *bez pravej strany*. Ak v diferenciálnej rovnici (1), resp. (2) nie je $f(x) = 0$, príp. $g(x) = 0$ pre každé $x \in J$, nazývame ju lineárnou diferenciálnou rovnicou *s pravou stranou*.*)

Veta 1. Pre každé $x_0 \in J$ a pre začiatočné podmienky $y(x_0) = b_1$, $y'(x_0) = b_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = b_n$, kde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sú ľubovoľné čísla, existuje jedno a len jedno riešenie $y(x)$, $x \in J$, lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu (1), ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky.

Veta 2. Nech funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sú riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Potom aj každá ich lineárna kombinácia $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sú ľubovoľné čísla, je riešením tejto diferenciálnej rovnice.

Poznámka. Riešenie $y = 0$ pre každé $x \in J$ nazývame *triviálnym riešením* diferenciálnej rovnice $L(y) = 0$. Každá lineárna diferenciálna rovnica bez pravej strany má triviálne riešenie.

Ak existuje taká nenulová m-tica reálnych resp. komplexných čísiel $c_1, c_2, \ldots, c_m$, že pre funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definované na intervale J platí

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_mf_m(x) = 0 \tag{4}$$

pre každé $x \in I \subset J$, potom hovoríme, že funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sú *lineárne závislé na intervale I*.

Ak funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ nie sú lineárne závislé, na intervale I, nazývame ich *lineárne nezávislé na intervale I*.

Nech funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ majú na intervale J derivácie až do rádu $m - 1$. Potom determinant

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x), & \ldots, & f_m(x) \\ f_1'(x), & f_2'(x), & \ldots, & f_m'(x) \\ f_1''(x), & f_2''(x), & \ldots, & f_m''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(m-1)}(x), & f_2^{(m-1)}(x), & \ldots, & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

nazývame *Wronského determinantom* funkcií $f_1, f_2, \ldots, f_m$ alebo len ich *wronskiánom*.

Veta 3. Ak funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sú lineárne závislé na intervale J, potom $W(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$ pre každé $x \in J$.

Veta 4. Nech $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sú riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany. Ak $m > n$, potom tieto riešenia sú lineárne závislé.

Veta 5. n-riešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany je lineárne závislých [nezávislých] vtedy a len vtedy, ak ich wronskián sa rovná [nerovná sa] nule aspoň v jednom čísle $x \in J$.

Dôsledok. Wronskián n ľubovoľných riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany sa rovná nule pre každé $x \in J$ (lineárne závislé riešenia), alebo sa nerovná nule pre nijaké $x \in J$ (lineárne nezávislé riešenia).

---

*) Niekedy lineárnu diferenciálnu rovnicu bez pravej strany nazývame aj homogénnou lineárnou diferenciálnou rovnicou a lineárnu diferenciálnu rovnicu s pravou stranou nazývame nehomogénnou lineárnou diferenciálnou rovnicou.

Fundamentálnym systémom riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany nazývame každých n lineárne nezávislých riešení tejto diferenciálnej rovnice.

Veta 6. Každá lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu bez pravej strany má fundamentálny systém riešení.

Nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je fundamentálny systém riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany na intervale J. Všeobecným riešením lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany nazývame funkciu

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \tag{6}$$

kde $x \in J$ a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú ľubovoľné čísla.

Veta 7. Každé riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany má tvar (6), kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú vhodne zvolené čísla.

Veta 8. Ak je daný fundamentálny systém riešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany, potom táto diferenciálna rovnica má tvar

$$\frac{a_0(x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \begin{vmatrix} y^{(n)}, & y^{(n-1)}, & \ldots, & y', & y \\ y_1^{(n)}, & y_1^{(n-1)}, & \ldots, & y_1', & y_1 \\ y_2^{(n)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_2', & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n)}, & y_n^{(n-1)}, & \ldots, & y_n', & y_n \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

kde $a_0(x)$ je ľubovoľná spojitá funkcia na intervale J, pričom $a_0(x) \neq 0$ pre všetky $x \in J$.

Veta 9. Nech $p_1(x)$ je koeficient pri $y^{(n-1)}$ v lineárnej diferenciálnej rovnici (2) bez pravej strany. Potom v intervale J platí

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int p_1(x)\mathrm{d}x}, \tag{8}$$

kde $x_0 \in J$ *(Liouvilleov vzorec)*.

Veta 10. Nech $Y(x)$ je riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice (3) s pravou stranou, $L(y) = g(x)$. Potom každé riešenie tejto lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou má tvar

$$y = z + Y, \tag{9}$$

kde $z = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ je všeobecné riešenie zodpovedajúcej lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany $L(y) = 0$.

Poznámka. Riešenie (9) nazývame *všeobecným riešením* lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou (3).

Veta 11. *(Lagrangeova metóda variácie konštánt.)* Ak $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice $L(y) = 0$, potom lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu s pravou stranou $L(y) = g(x)$ má riešenie

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{W_i(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

pričom $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je wronskián fundamentálneho systému a $W_i(x)$ je determinant, ktorý vznikne z wronskiánu nahradením i-tého stĺpca wronskiánu stĺpcom, ktorého prvky sú $0, 0, \ldots, 0, g(x)$.

Poznámka. Riešenie Y lineárnej diferenciálnej rovnice $L(y) = g(x)$ možno dostať aj tak, že riešenie tejto diferenciálnej rovnice hľadáme v tvare $y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 + \ldots + c_n(x)\, y_n$, kde pre funkcie $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i \qquad = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i' = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (11)\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = g(x).
\end{aligned}$$

Veta 12. Nech y_1 je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu $L(y) = 0$, $y_1(x) \neq 0$ pre každé $x \in J$. Potom zámenou premenných $u = (y/y_1)'$, $u = u(x)$ dostaneme z lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu $L(y) = g(x)$ lineárnu diferenciálnu rovnicu rádu $n - 1$ tvaru

$$u^{(n-1)} + q_1(x)\, u^{(n-2)} + \dots + q_{n-2}(x)\, u' + q_{n-1}(x)\, u = h(x). \qquad (12)$$

Ak $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_{n-1}u_{n-1} + U$ je všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice (12), potom

$$y = y_1[c_1 \int u_1\,dx + c_2 \int u_2\,dx + \dots + c_{n-1} \int u_{n-1}\,dx + c_n] + Y, \qquad (13)$$

kde $Y = y_1 \int U\,dx$ je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $L(y) = g(x)$.

Poznámka. Ak poznáme k lineárne nezávislých riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu bez pravej strany, $L(y) = 0$, potom možno pomocou vety 12 previesť lineárnu diferenciálnu rovnicu n-tého rádu $L(y) = g(x)$ postupne na lineárnu diferenciálnu rovnicu rádu $n - k$.

Veta 13. Nech funkcia $Y_i = Y_i(x)$, $x \in J$ je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu $L(y) = g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Potom funkcia $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$ je riešením lineárnej rovnice $L(y) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)$ na intervale J (*Princíp superpozície*).

Príklad 1. Nájdime lineárnu diferenciálnu rovnicu bez pravej strany, pričom $a_0(x) = 1$, ktorá má fundamentálny systém riešení $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$, $x \in (0, \pi/2)$.

Riešenie. Podľa vety 8 má hľadaná diferenciálna rovnica tvar

$$\frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y'', & y', & y \\ y_1'', & y_1', & y_1 \\ y_2'', & y_2', & y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Keďže je $y_1' = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$, $y_1'' = -2 \cos 2x$, $y_2' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$, $y_2'' = 2 \cos 2x$, po dosadení do (5) dostaneme

$$W(y_1, y_2) = \sin 2x \neq 0$$

pre $x \in (0, \pi/2)$. Zo vzťahu (14) vyplýva

$$\frac{1}{\sin 2x} \begin{vmatrix} y'', & y', & y \\ -2\cos 2x, & -\sin 2x, & \cos^2 x \\ 2\cos 2x, & \sin 2x, & \sin^2 x \end{vmatrix} = 0.$$

Z toho potom dostaneme hľadanú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$y'' - 2\,(\operatorname{cotg} 2x)y' = 0$$

pre $x \in (0, \pi/2)$.

Príklad 2. Riešme lineárnu diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$xy'' - (1 + x)\, y' + y = 0, \qquad (15)$$

ak poznáme jedno jej riešenie $y_1 = 1 + x$, $x \in (0, \infty)$.

Riešenie. Podľa vety 12 zavedme substitúciu $u = (y/y_1)'$, čiže $y = y_1 \int u \, dx$. Keďže je $y_1 = 1 + x$, máme $y = (1 + x) \int u \, dx$. Z toho potom dostaneme $y' = \int u \, dx + (1 + x) u$, $y'' = 2u + (1 + x) u'$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (15) máme

$$x[2u + (1 + x) u'] - (1 + x) [\int u \, dx + (1 + x) u] + (1 + x) \int u \, dx = 0.$$

Odtiaľ po úprave dostaneme

$$x(1 + x) u' - (1 + x^2) u = 0.$$

To je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu. Jej všeobecné riešenie je

$$u = c_1 e^{\int (1+x^2)/(x+x^2) \, dx},$$

čiže

$$u = c_1 e^{x + \ln x - 2\ln(x+1)},$$

$$u = \frac{c_1 x e^x}{(1 + x)^2}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Po dosadení do vzťahu $y = y_1 \int u \, dx$ máme

$$y = (1 + x) \left[c_1 \int \frac{x e^x}{(1 + x)^2} \, dx + c_2\right].$$

Z toho dostaneme všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare

$$y = (1 + x) \left[c_1 \frac{e^x}{1 + x} + c_2\right]$$

alebo

$$y = c_1 e^x + c_2(1 + x), \qquad x \in (0, \infty).$$

Príklad 3. Nájdime všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$xy'' - (1 + x) y' + y = x^3, \tag{16}$$

kde $x \in (0, \infty)$.

Riešenie. Podľa vety 10 všeobecné riešenie y danej diferenciálnej rovnice je súčet všeobecného riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany

$$xy'' - (1 + x) y' + y = 0 \tag{17}$$

a jedného riešenia Y lineárnej diferenciálnej rovnice (16) s pravou stranou, t. j.

$$y = z + Y.$$

Z príkladu 2 máme

$$z = c_1 e^x + c_2(1 + x).$$

Riešenie Y diferenciálnej rovnice (16) nájdeme Lagrangeovou metódou variácie konštánt podľa rovnice (10)

$$y = y_1 \int \frac{W_1}{W} \, dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} \, dx,$$

Keďže

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = 1 + x,$$
$$f(x) = x^3, \qquad a_0(x) = x, \qquad g(x) = x^2,$$

potom pre W, W_1, W_2 platí

$$W = \begin{vmatrix} e^x, & 1 + x \\ e^x, & 1 \end{vmatrix} = -x e^x,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0, & 1+x \\ x^2, & 1 \end{vmatrix} = -x^3 - x^2,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x, & 0 \\ e^x, & x^2 \end{vmatrix} = x^2 e^x,$$

Po dosadení dostaneme

$$y = e^x \int (x^2 + x)\, e^{-x}\, dx + (1 + x) \int (-x)\, dx,$$

čiže je

$$y = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)/2, \qquad x \in (0, \infty).$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (16) je

$$y = c_1 e^x + c_2(1 + x) - (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)/2,$$

kde $x \in (0, \infty)$.

Príklad 4. Nájdime všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$(x + 1)\, xy'' + (x + 2)\, y' - y = 0, \qquad x \in (0, \infty),$$

ak vieme, že jedným jej riešením je polynóm.

Riešenie. Hľadajme riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare $y = x^n + Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynóm stupňa $m \leq n - 1$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice za $y' = nx^{n-1} + Q'(x)$, $y'' = n(n-1)\, x^{n-2} + Q''(x)$ dostaneme

$$(x + 1)\, x\, [n(n-1)x^{n-2} + Q''(x)] + (x + 2)\, [nx^{n-1} + Q'(x)] - x^n - Q(x) = 0.$$

Keďže koeficient pri x^n sa musí rovnať nule, dostávame

$$n(n - 1) + n - 1 = 0,$$

čiže

$$n^2 - 1 = 0$$

a

$$n_1 = 1, \qquad n_2 = -1.$$

Koreňu $n_1 = 1$ zodpovedá polynóm prvého stupňa $y = x + a$, kde a je zatiaľ neurčené číslo. Po dosadení $y = x + a$, $y' = 1$, $y'' = 0$ do danej diferenciálnej rovnice dostaneme rovnicu pre a:

$$0 + (x + 2)\, 1 - x - a = 0,$$

z ktorej

$$a = 2.$$

Hľadané riešenie je $y_1 = x + 2$.

Druhému koreňu $n_2 = -1$ nezodpovedá polynóm. Skúsme však hľadať riešenie v tvare $y = x^{-1} + bx^0$. Po dosadení $y = 1/x + b$, $y' = -1/x^2$, $y'' = 2/x^3$ do danej diferenciálnej rovnice dostaneme

$$2(x + 1)\, x/x^3 - (x + 2)/x^2 - 1/x - b = 0,$$

čiže

$$(2x + 2 - x - 2 - x)/x^2 - b = 0$$

a

$$b = 0.$$

Druhé hľadané riešenie je $y_2 = 1/x$, $x \in (0, \infty)$. Keďže $W(y_1, y_2) = -2(x + 1)/x^2 \neq 0$, pre všetky $x \in (0, \infty)$, všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y = c_1(x + 2) + c_2/x, \qquad x \in (0, \infty).$$

V úlohách 1417 až 1427 preskúmajte, či dané funkcie sú na množine M lineárne závislé alebo lineárne nezávislé, ak M je prienik oborov definícií týchto funkcií.

1417. $y = 3x - 7$, $y = 3x + 2$.

1418. $y = 2 - x$, $y = 1 + x$, $y = 3x + 4$.

1419. $y = 1$, $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$.

1420. $y = 2$, $y = \cos^2 x$, $y = \sin^2 x$.

1421. $y = \sin x$, $y = \sin 3x$, $y = \sin^3 x$.

1422. $y = e^{2x}$, $y = e^{3x}$, $y = e^{5x}$.

1423. $y = \cos^2 x$, $y = e^x$, $y = \sin 2x$, $y = \cos 2x$, $y = \ln x$.

1424. $y = \log_2 x$, $y = \log_2 x^2$.

1425. $y = x$, $y = e^x$, $y = x\,e^x$.

1426. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$, $y = 1$.

1427. $y = x^2$, $y = x\,|x|$.

1428. Vypočítajte wronskián funkcií

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ x^3 & \text{pre } x \geqq 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{pre } x < 0, \\ 0 & \text{pre } x \geqq 0. \end{cases}$$

Možno na základe tohto rozhodnúť, či dané funkcie sú lineárne závislé? Ukážte, že funkcie sú lineárne nezávislé!

1429. Nech y_1, y_2 sú dve riešenia diferenciálnej rovnice $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$, $x \in (a, b)$. Ukážte, že pre ich wronskián platí $W'(x) = -p(x)\,W(x)$. Na základe tohto nájdite $W(x)$ a ukážte, že ak $W(x_0) = 0$ pre nejaké $x_0 \in (a, b)$, potom platí $W(x) = 0$ pre všetky $x \in (a, b)$.

V úlohách 1430 až 1435 nájdite lineárnu diferenciálnu rovnicu bez pravej strany, ak je daný jej fundamentálny systém riešení.

1430. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$.

1431. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

1432. $y_1 = e^x$, $y_2 = \sinh x$.

1433. $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

1434. $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = e^x$.

1435. $y_1 = e^x(1 - x)$, $y_2 = x\,e^x$.

1436. Ukážte, že $y = x^2 + e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x + 2$.

V úlohách 1437 až 1443 nájdite všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice, ak poznáte jedno jej riešenie.

1437. $x^2(x + 1)\,y'' - 2y = 0$, $y_1 = 1 + 1/x$, $x \in (0, \infty)$.

1438. $(1 + x^2)\,y'' + xy' - n^2y = 0$, $y_1 = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$.

1439. $(2x + 1)\,y'' + (4x - 2)\,y' - 8y = 0$, $y_1 = e^{-2x}$.

1440. $xy'' + 2y' - xy = 0$, $y_1 = e^x/x$, $x \in (0, \infty)$.

1441. $y'' - (\operatorname{tg} x)y' + 2y = 0$, $y_1 = \sin x$, $x \in (0, \pi/2)$.

1442. $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,y = 0$, $y_1 = \operatorname{tg} x$, $x \in (0, \pi/2)$.

1443. $x^2y''' - 2y' = 0$, $y_1 = \ln x$, $x \in (0, \infty)$.

V úlohách 1444 až 1448 nájdite všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice, ak viete, že polynóm je jej riešením.

1444. $(2x + 1)\,y'' + 4xy' - 4y = 0$.

1445. $x(x - 1)\,y'' - xy' + y = 0$.

1446. $x^2 \ln xy'' - xy' + y = 0$.

1447. $(x^2 + 1)\,y'' - 2y = 0$.

1448. $(2x - x^2)\,y'' + (x^2 - 2)\,y' + 2(1 - x)\,y = 0$.

V úlohách **1449** až **1451** riešte lineárne diferenciálne rovnice s pravou stranou, ak riešením zodpovedajúcej lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je polynóm.

1449. $(2x + 1)\,y'' + (2x - 1)\,y' - 2y = x^2 + x$.

1450. $(3x + 2x^2)\,y'' - 6(1 + x)\,y' + 6y = 6$.

1451. $x^2y'' - xy' = 3x^3$.

V úlohách **1452** až **1455** riešte lineárne diferenciálne rovnice, ak poznáte jej dve riešenia.

1452. $(3x^3 + x)\,y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$, $y_1 = 2x$, $y_2 = 1 + x^2$.

1453. $(x^2 - 1)\,y'' + 4xy' + 2y = 6x$, $y_1 = x$, $y_2 = (x^2 + x + 1)/(x + 1)$.

1454. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = x^3$.

1455. $xy''' - y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

4,11. Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi

Rovnicu

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{1}$$

kde a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, sú reálne čísla, nazývame *lineárnou diferenciálnou rovnicou s konštantnými koeficientmi bez pravej strany* a skrátene ju budeme písať

$$L_n(y) = 0.$$

Algebraickú rovnicu

$$r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0 \tag{2}$$

nazývame *charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice* (1). Korene charakteristickej rovnice nazývame *charakteristickými koreňmi* diferenciálnej rovnice (1).

Veta 1. Ak $r_1, r_2, \dots, r_k$ sú navzájom *rôzne* charakteristické korene diferenciálnej rovnice (1), potom funkcie

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x}, \quad \dots, \quad e^{r_kx}$$

sú lineárne nezávislými riešeniami diferenciálnej rovnice (1).

Veta 2. Ak r_1 je k-násobným koreňom diferenciálnej rovnice (1), potom funkcie

$$e^{r_1x}, \quad x\,e^{r_1x}, x^2\,e^{r_1x}, \quad \dots, \quad x^{k-1}\,e^{r_1x}$$

sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1).

Veta 3. Ak $\alpha + i\beta$ je k-násobný charakteristický koreň diferenciálnej rovnice (1), pričom α, β sú reálne čísla, $\beta \neq 0$, potom funkcie

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{k-1}\,e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x\,e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{k-1}\,e^{\alpha x}\sin\beta x$$

sú lineárne nezávislými riešeniami diferenciálnej rovnice (1).

Veta 4. Nech charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice (1) má:

a) reálne navzájom rôzne korene: r_1 ako k_1-násobný, r_2 ako k_2-násobný, ..., r_m ako k_m-násobný,

b) komplexné navzájom rôzne korene: $\alpha_1 + i\beta_1$ ako s_1-násobný, $\alpha_2 + i\beta_2$ ako s_2-násobný, ..., $\alpha_p + i\beta_p$ ako s_p-násobný, pričom $\beta_j \neq 0$ pre $j = 1, 2, \dots, p$. Nech platí $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_p) = n$. Potom fundamentálnym systémom diferenciálnej rovnice (1) je systém funkcií

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad \ldots, \quad x^{k_1 - 1} e^{r_1 x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{r_m x}, \quad x e^{r_m x}, \quad \ldots, \quad x^{k_m - 1} e^{r_m x},$$

$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \quad x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \quad \ldots, x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x,$$

$$e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \quad x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \quad \ldots, x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x, \quad x e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x, \quad \ldots, x^{s_p - 1} e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x,$$

$$e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x, \quad x e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x, \quad \ldots, x^{s_p - 1} e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x.$$

Príklad 1. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = 0. \tag{3}$$

Riešenie. Rovnica (3) je lineárnou diferenciálnou rovnicou s konštantnými koeficientmi. Predpokladáme, že riešenie je tvaru $y = e^{rx}$. Máme

$$y' = r e^{rx}, \qquad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Po dosadení do rovnice (3) a po úprave je

$$e^{rx}(r^2 - 5r + 6) = 0. \tag{4}$$

Keďže $e^{rx} \neq 0$ pre každé číslo x, z rovnice (4) vyplýva

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

čo je charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice (3). Jej korene sú $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Podľa vety (1) funkcie $y_1 = e^{2x}$ a $y_2 = e^{3x}$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (3). Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (3) je

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Príklad 2. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + 2y' + 5y = 0. \tag{5}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice (5) je

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Jej korene sú $r_1 = -1 + 2\,\mathrm{i}$, $r_2 = -1 - 2\,\mathrm{i}$. Podľa vety 3 sú $e^{-x} \cos 2x$ a $e^{-x} \sin 2x$ lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (5). Všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Príklad 3. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y^{(4)} + 2y''' + 8y' + 5y = 0. \tag{6}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica danej diferenciálnej rovnice je

$$r^4 + 2r^3 + 8r + 5 = 0.$$

Charakteristické korene sú

$$r_{1,2} = -1, \quad r_3 = 1 + 2\,\mathrm{i}, \quad r_4 = 1 - 2\,\mathrm{i}.$$

Fundamentálny systém diferenciálnej rovnice (6) je

$$e^{-x}, \quad x e^{-x}, \quad e^{x} \cos 2x, \quad e^{x} \sin 2x$$

a všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x),$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné čísla.

Diferenciálnu rovnicu
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2a}$$
čiže
$$L_n(y) = f(x),$$
kde a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, sú reálne čísla a funkcia $f(x)$ je rôzna od nulovej funkcie, nazývame *lineárnou diferenciálnou rovnicou s konštantnými koeficientmi s pravou stranou.*

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (2a) hľadáme podľa vety 10 čl. 4, 10. Pritom riešenie Y diferenciálnej rovnice (2a) môžeme nájsť metódou variácie konštánt podľa vety 11, čl. 4, 10 alebo, ak pravá strana diferenciálnej rovnice (2a) má špeciálny tvar, metódou neurčitých koeficientov podľa vety 5 resp. 6 tohto článku.

Poznámka. V ďalšom texte pod riešením diferenciálnej rovnice budeme rozumieť nielen reálnu, ale aj komplexnú funkciu reálnej premennej, ktorá má derivácie príslušného rádu na intervale J a ktorá po dosadení spĺňa diferenciálnu rovnicu pre každé $x \in J$.

Veta 5. Nech diferenciálna rovnica (2a) má tvar
$$L_n(y) = P_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{7}$$
kde $P_m(x)$ je polynóm stupňa m a α je reálne [komplexné] číslo. Potom, ak α nie je charakteristickým koreňom, má diferenciálna rovnica (7) partikulárne riešenie
$$y = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)\, e^{\alpha x}.$$
Ak α je k-násobným charakteristickým koreňom, potom funkcia
$$y = x^k (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)\, e^{\alpha x}$$
je riešením diferenciálnej rovnice (7). Reálne [komplexné] čísla $b_0, b_1, \dots, b_m$ určíme metódou neurčitých koeficientov.

Veta 6. Ak funkcia $z(x) = u(x) + \mathrm{i}\, v(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice
$$L_n(y) = P_m(x)\, e^{(\alpha + \mathrm{i}\beta) x},$$
potom $u(x) = \operatorname{Re} z(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice
$$L_n(y) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$$
a $v(x) = \operatorname{Im} z(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice
$$L_n(y) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Príklad 4. Riešme diferenciálnu rovnicu
$$y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{8}$$

Riešenie. Riešme najprv diferenciálnu rovnicu $y'' + y = 0$. Korene charakteristickej rovnice $r^2 + 1 = 0$ sú $r_1 = \mathrm{i}$, $r_2 = -\mathrm{i}$. Fundamentálny systém riešení tejto diferenciálnej rovnice podľa vety 4, je $\cos x$, $\sin x$. Všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice bez pravej strany je
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$
Partikulárne riešenie Y diferenciálnej rovnice (8) s pravou stranou budeme hľadať metódou variácie konštánt. Vypočítajme W, W_1, W_2. Máme
$$W = \begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{vmatrix} = 1, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0\,, & \sin x \\ \operatorname{tg} x, & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$
$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x, & 0 \\ -\sin x, & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x.$$
Podľa vety 11, čl. 4,10 dostaneme
$$Y = y_1 \int \frac{W_1}{W}\, dx + y_2 \int \frac{W_2}{W}\, dx = \cos x \int \left(-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) dx + \sin x \int \sin x\, dx =$$
$$= \cos x\, [\sin x + \ln \operatorname{cotg} (\pi/4 + x/2)] + \sin x\, (-\cos x) = \cos x \,.\, \ln \operatorname{cotg} (\pi/4 + x/2).$$

Podľa vety 10, čl. 4,13 všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (8) je

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \,.\, \ln \cotg (\pi/4 + x/2), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Príklad 5. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'' + y' = 5x + 2\,e^x. \tag{9}$$

Riešenie. Riešme najprv diferenciálnu rovnicu bez pravej strany $y'' + y' = 0$. Korene charakteristickej rovnice $r^2 + r = 0$ sú $r_1 = 0$, $r_2 = -1$. Všeobecné riešenie tejto diferenciálne rovnice bez pravej strany je

$$y = c_1 + c_2\,e^{-x}.$$

Partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou nájdeme na základe princípu superpozície (veta 13 čl. 4,10).

Hľadajme najprv partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + y' = 5x. \tag{10}$$

Podľa vety 5, keďže $\alpha = 0$ je jednoduchým charakteristickým koreňom, je riešením diferenciálnej rovnice (10) funkcia

$$y = x(b_0 + b_1 x)\,e^{0x} = b_0 x + b_1 x^2.$$

Konštanty b_0, b_1 určíme metódou neurčitých koeficientov.

Vypočítajme

$$y' = b_0 + 2b_1 x, \qquad y'' = 2b_1.$$

Dosadením do rovnice (10) dostaneme

$$2b_1 + b_0 + 2b_1 x = 5x.$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách máme

$$b_0 + 2b_1 = 0,$$
$$2b_1 = 5.$$

Z toho potom je

$$b_1 = 5/2, \quad b_0 = -5.$$

Riešením diferenciálnej rovnice (10) je

$$Y_1 = -5x + \frac{5}{2}x^2.$$

Hľadajme ešte riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + y' = 2\,e^x. \tag{11}$$

Podľa vety 5, keďže $\alpha = 1$ nie je charakteristickým koreňom, riešením diferenciálnej rovnice (11) je

$$y = b_0\,e^x.$$

Dosadením

$$y' = b_0\,e^x, \qquad y'' = b_0\,e^x$$

do rovnice (11) máme

$$b_0\,e^x + b_0\,e^x = 2e^x.$$

Z tohto dostaneme $b_0 = 1$. Riešením diferenciálnej rovnice (11) dostaneme

$$Y_2 = e^x.$$

Podľa princípu superpozície riešením diferenciálnej rovnice (9) je

$$Y = Y_1 + Y_2 = -5x + \frac{5}{2}x^2 + e^x.$$

Podľa vety 10, čl. 4,10 všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (9) je

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + -5x + \frac{5}{2} x^2 + e^x.$$

Príklad 6. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x. \tag{12}$$

Riešenie. Keďže $4\,e^x \sin x = \operatorname{Im} 4\,e^{(1+i)x}$, budeme podľa vety 6 riešiť diferenciálnu rovnicu

$$y'' - 2y' + 2y = 4\,e^{(1+i)x}. \tag{13}$$

Riešme najprv diferenciálnu rovnicu $y'' - 2y' + 2y = 0$. Korene charakteristickej rovnice $r^2 - 2r + 2 = 0$ sú $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$. Všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice bez pravej strany je

$$y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Keďže $r_1 = 1 + i$ je jednoduchým charakteristickým koreňom, partikulárnym riešením diferenciálnej rovnice (13) podľa vety 5, je

$$y = b_0 x\, e^{(1+i)x}. \tag{14}$$

Konštantu b_0 určíme metódou neurčitých koeficientov. Vypočítajme

$$y' = b_0\, e^{(1+i)x} + b_0(1 + i)\, x\, e^{(1+i)x} = e^{(1+i)x} [b_0 + (b_0 + b_0 i)\, x],$$

$$y'' = (b_0 + b_0 i)\, e^{(1+i)x} + (b_0 + b_0 i + 2b_0 ix)\, e^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}(2b_0 + 2b_0 i + 2b_0 ix).$$

Po dosadení do rovnice (13) dostaneme

$$e^{(1+i)x}[2b_0 + 2b_0 i + 2b_0 ix - 2(b_0 + (b_0 + b_0 i)\, x) + 2b_0 x] = 4\, e^{(1+i)x}.$$

Z toho po vydelení $e^{(1+i)x}$ a po úprave dostaneme

$$2b_0 i = 4 \quad \text{čiže} \quad b_0 = -2\,i.$$

Po dosadení do (14) dostaneme riešenie diferenciálnej rovnice (13)

$$y = -2i\, x\, e^{(1+i)x}.$$

Podľa vety 6 riešením diferenciálnej rovnice (12) je

$$Y = \operatorname{Im} [-2i\, x\, e^{(1+i)x}] = -2x\, e^x \cos x.$$

Všeobecným riešením diferenciálnej rovnice (12) je

$$y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - 2x\, e^x \cos x,$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné čísla.

V úlohách **1456** až **1486** riešte diferenciálne rovnice.

1456. $y'' - 9y = 0.$

1457. $y'' + 3y' - 4y = 0.$

1458. $y'' + 5y' = 0.$

1459. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

1460. $2y'' - 6y' + y = 0.$

1461. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

1462. $4y'' + 12y' + 9y = 0.$

1463. $y'' - 2a^2y' + a^4 y = 0.$

1464. $y'' + 16y = 0.$

1465. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

1466. $y'' + y' + 2y = 0.$

1467. $y'' + 2ay' + 4a^2y = 0.$

1468. $y''' - y' = 0.$

1469. $y^{(4)} - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0.$

1470. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

1471. $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$

1472. $y''' - y'' = 0.$

1473. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

1474. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0.$

1475. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$

1476. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y''' + y'' + 8y' + 4y = 0.$

1477. $y^{(6)} - y^{(4)} = 0.$

1478. $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0.$

1479. $y''' - y = 0.$

1480. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$

1481. $y^{(4)} + 4y = 0.$

1482. $y^{(4)} - a^4 y = 0.$

1483. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$

1484. $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0.$

1485. $y^{(6)} + 64y = 0.$

1486. $y^{(8)} - 256y = 0.$

V úlohách **1487** až **1491** riešte lineárne diferenciálne rovnice s pravou stranou metódou neurčitých koeficientov.

1487. $y'' - 7y' + 10y = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná:

a) 40,
b) $20x^2 - 28x + 14$,
c) $-12\,e^{3x}$,
d) $6\,e^{2x}$,
e) $-e^{2x}(6x + 7)$,
f) $(9x^2 + 6x - 3)\,e^{5x}$,
g) $116 \sin 2x$,
h) $8\,e^{2x} \sin x$,
i) $\cosh 2x$,

1488. $3y'' - 4y' = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná:

a) 8,
b) $-32x^3 + 84x + 50$,
c) $3\,e^x$,
d) $4\,e^{4x/3}$,
e) $25 \sin x$,
f) $-25x \cos x$,
g) $16 \sin (4x/3)$,
h) $8 \sinh (4x/3)$.

1489. $9y'' - 6y' + y = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná:

a) $\sqrt{2}$,
b) $4\,e^{-x/3}$,
c) $e^{x/3}$,
d) $\sin (x/3)$,
e) $\cos 2x \,.\, \sin 4x$,
f) $9x^2 - 6x + 1$.

1490. $y'' + 4y = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná:

a) $x^4 - 2x$,
b) $\cos 2x$,
c) $\cos 3x$,
d) e^{-2x},
e) $\cos 3x \,.\, \sin x$,
f) $8 \cosh 2x$,
g) $2x \sin 2x$,
h) $x\,e^{2x} \sin 2x$.

1491. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná:

a) e^{2x},
b) $\sin x$,
c) $2x^2$,
d) $e^{2x} \sin 2x$,
e) $e^{2x} \cos 2x$,
f) $x\,e^{2x} \cos x$,
g) 13,
h) $e^{-x} \cosh 3x \,.\, \sin x$.

V úlohách **1492** až **1510** riešte diferenciálne rovnice.

1492. $y'' - y' + 1 = 0.$

1493. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + \sin 2x.$

1494. $y'' + y' - 6y = x + e^{2x}.$

1495. $y'' + 2y' + y = e^{-x} + e^x.$

1496. $y'' + 4y = 5 \sin 3x + \cos 3x + \sin 2x.$

1497. $y'' - 5y' + 6y = e^{nx}.$

1498. $y'' - y = \cos^2 x.$

1499. $y'' + 2y' - 3y = \sin^4 x.$

1500. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-2x} - 1}{e^{-x} + 1}.$

1501. $y''' - y = x^3 - 1.$

1502. $y''' + 2y'' + 5y' = x.$

1503. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} \sin x.$

1504. $y''' + y' = \sin x + x \cos x.$

1505. $y^{(4)} + y'' = 7x - 3 \cos x.$

1506. $y^{(4)} + y''' = \cos 4x.$

1507. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + x^3.$

1508. $y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40\,e^x.$

1509. $y^{(4)} - y = x\,e^x + \cos x$. **1510.** $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$.

V úlohách **1511** až **1519** riešte lineárne diferenciálne rovnice metódou variácie konštánt.

1511. $y'' - y = 1/x$.

1512. $y'' - 6y' + 9y = (9x^2 + 6x + 2)/x^3$.

1513. $y'' - 2y' + y = e^x/x$. **1514.** $y'' - y = \dfrac{2\,e^x}{e^x - 1}$.

1515. $y'' + y = 1/\sin x$. **1516.** $y'' + 4y = \sec 2x$.

1517. $y'' + y = -\mathrm{cotg}^2 x$. **1518.** $y''' - y'' = (2 + x)/x^3$.

1519. $y^{(4)} - y'' = 1/4\,\sqrt{x^3} - 15/16\,\sqrt{x^7}$.

1520. Nech charakteristická rovnica lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientmi $y'' + ay' + by = Q(x)$ má dva rôzne reálne korene r_1, r_2. Metódou variácie konštánt ukážte, že jej všeobecné riešenie je

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{r_1 - r_2}\int e^{-r_1 x}Q(x)\,dx + \frac{e^{r_2 x}}{r_2 - r_1}\int e^{-r_2 x}Q(x)\,dx.$$

V úlohách **1521** až **1528** nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré vyhovuje daným podmienkam.

1521. $4y'' + y = 0,\ y'(\pi) = 3,\ y(\pi) = 2$.

1522. $y'' - y = 2x,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$.

1523. $y'' + y = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

1524. $y'' - 5y' + 6y = x + e^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

1525. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$.

1526. $y''' - y' = 3(2 - x^2),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$.

1527. $y''' + 2y'' + 2y' + y = x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$.

1528. $y^{(4)} + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1$.

1529. Nájdite integrálnu krivku diferenciálnej rovnice $y'' - 4y = 0$, ktorá sa dotýka priamky $3x - y + 1 = 0$ v bode $A = (0, 1)$.

1530. Nájdite integrálnu krivku diferenciálnej rovnice $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, ktorá sa dotýka v bode $A = (0, 2)$ priamky $x - y + 2 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$.

1531. Teleso s hmotou m padá z výšky h pôsobením zemskej tiaže (tiažové zrýchlenie je g) bez začiatočnej rýchlosti. Odpor vzduchu $\boldsymbol{R}$ pri páde telesa je priamo úmerný rýchlosti v telesa, pričom platí $R = kmv$, kde k [N kg^{-1} m^{-1} s] je konštanta úmernosti. Nájdite výšku telesa v čase t.

1532. Závažie s hmotou $m = 2$ g je zavesené na pružine, ktorej tuhosť je $c = 0{,}6$ kpm^{-1}. Na závažie pôsobí sila $\boldsymbol{F}$, $F = 1{,}2 \cdot 10^{-4} \sin \omega t$ [N]. Vypočítajte, pre akú frekvenciu ω vynútených kmitov závažia bude ich amplitúda najväčšia, ak odpor prostredia $\boldsymbol{R}$ je priamo úmerný rýchlosti, t. j. $R = \sqrt{mc}\ v \cdot 10^{-4}$ [N]. Aká je táto najväčšia amplitúda.

1533. Závažie s hmotou 5,88 kg je zavesené na pružine. Pri kmitaní v jednom prostredí teleso kmitá s dobou kmitu $T_1 = 0{,}4\,\pi$ s, v druhom prostredí $T_2 = 0{,}5\,\pi$ s. V prvom prostredí možno odpor prostredia zanedbať, zatiaľ čo v druhom prostredí je priamo úmerný rýchlosti. Nájdite pohyb závažia v druhom prostredí, ak pružina sa v začiatočnom okamihu predĺžila zavesením závažia o 4 cm vzhľadom na jej pôvodnú dĺžku a závažie bolo voľne pustené.

1534. Nájdite vynútené kmity závažia s hmotou m zaveseného na pružine s tuhosťou c, ak na neho pôsobí zvislá sila f, $f(t) = f_0 (\sin \omega t + (\sin 3\omega t)/3)$.

1535. Na pružine s tuhosťou $c = 2 \text{ kp m}^{-1}$ je zavesená tyč z mäkkého železa s hmotou 0,1 kg. Spodný koniec tyče zasahuje do cievky, cez ktorú prechádza striedavý prúd $i = 20 \sin 8 \pi t$ [A]. Prúd začína tiecť cievkou od okamihu $t = 0$ a tyč bola predtým v pokoji ($x = 0$, $v = 0$). Magnetické pole vznikajúce v cievke vťahuje tyč do cievky, pričom pre silu F pôsobiacu na tyč je $F = 1{,}6\, \pi\, 10^{-2}\, i$ [N]. Nájdite vynútené kmity tyče.

1536. Doštička s hmotou 0,1 kg, ktorá je zavesená na pružine upevnenej na druhom konci, pohybuje sa medzi pólovými nástavcami permanentného magnetu. Vírivé prúdy brzdia jej pohyb silou R úmernou rýchlosti, t. j. $R = k\Phi^2 v$ [N], kde v je rýchlosť [ms^{-1}], Φ magnetický tok [weber] medzi pólmi magnetu a $k = 10^9$ [$\text{m}^{-1} . \text{s} . \text{N} . \text{weber}^{-2}$]. Začiatočná výchylka doštičky z polohy, keď pružina ešte nie je roztiahnutá, je spôsobená iba tiažou, pričom pre tiaž 0,02 kp sa pružina predĺži o 1 cm. Začiatočná rýchlosť doštičky sa rovná nule. Opíšte pohyb doštičky, ak pre magnetický tok platí a) $\Phi = \sqrt{5} . 10^{-5}$ [weber], b) $\Phi = 10^{-4}$ [weber].

1537. Pre ohyb $y = \varphi(x)$ nosníka na pružnom podklade platí diferenciálna rovnica

$$EJ \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} + ky = q,$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, J je moment zotrvačnosti prierezu nosníka. Pre konštantu k nosníka platí $k = Cb$, kde C je modul stlačiteľnosti podložia a b je konštantná šírka nosníka. Najdite všeobecné riešenie pre ohyb tohto nosníka, ak pôsobí naň rovnomerné zaťaženie $q = q_0$.

1538. Pre ohyb $y = \varphi(x)$ steny kruhovej valcovej nádrže platí diferenciálna rovnica

$$y^{(4)} + \frac{Ed}{Dr^2} y = \frac{\gamma}{D} (h - x),$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, d hrúbka steny, r polomer nádrže, h výška hladiny tekutiny v nádrži, γ je merná tiaž tekutiny a D je tuhosť steny, $D = Ed^3/k(1 - \mu^2)$, pričom μ je Poissonova konštanta. Nájdite ohyb steny, ak je nádrž na spodnom okraji dokonale votknutá [$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$] a na hornom okraji ($x = h$) je voľná, t. j. $y''(h) = 0$, $y'''(h) = 0$.

1539. Pri veľkých uhlových rýchlostiach tenkých a dlhých hriadeľov dochádza k porušeniu ich rovnovážneho priamočiareho tvaru a pri tzv. kritickej rýchlosti sú možné aj iné rovnovážne tvary hriadeľa. Nájdite kritickú rýchlosť ω_k hriadeľa dĺžky l na oboch koncoch uloženého v ložiskách, ak diferenciálna rovnica pre ohyb otáčajúceho sa hriadeľa je

$$EJy^{(4)} = q\omega^2 y/g,$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, J moment zotrvačnosti prierezu hriadeľa vzhľadom na jeho neutrálnu os, q je veľkosť tiaže pôsobiacej na jednotku dĺžky hriadeľa, ω je jeho uhlová rýchlosť a $y = f(x)$ udáva ohybovú krivku.

1540. V elektrickom okruhu sú sériove za sebou zapojené odpor R, cievka s indukčnosťou L a kondenzátor s kapacitou C. Kondenzátor je nabitý a má náboj q_0. V čase $t = 0$ sa okruh uzavrie kľúčom. Nájdite časový priebeh prúdu v okruhu.

1541. V elektrickom okruhu sú zapojené sériove za sebou odpor $R = 100\ \Omega$, cievka s indukčnosťou $L = 10$ H, kondenzátor s kapacitou $C = 2\,000\ \mu$F a jednosmerný zdroj napätia $U = 1$ V. Pre čas $t = 0$ je prúd $i = 0$ a veľkosť náboja na kondenzátore $q = 0$. Nájdite: a) prúd i v okruhu a náboj q v čase t, b) najväčšiu hodnotu i a q.

1542. V elektrickom okruhu pozostávajúcom zo sériove zapojenej cievky indukčnosti L, kondenzátora kapacity C a ohmického odporu R pôsobí elektromotorická sila $e = E_0\, e^{-\beta t}$, $t \in \langle 0, \infty)$. Nájdite napätie na kondenzátore a prúd v okruhu.

1543. Nájdite kapacitu C kondenzátora, ak pri jeho vybíjaní cez tlmivku s odporom $R = 1$ kΩ a s indukčnosťou $L = 1$ H*) amplitúda prúdu za štyri periódy po začiatku vybíjania je 1/16 prvej amplitúdy prúdu.

4,12. Eulerova diferenciálna rovnica

Nech $ax + b \neq 0$ pre každé x z intervalu I, pričom a, b sú čísla, $a \neq 0$. Lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$(ax + b)^n y^{(n)} + (ax + b)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \ldots + (ax + b)\, a_{n-1} y' + a_n y = g(x), \qquad (1)$$

kde $a_1, \ldots a_n$, sú čísla a $g(x)$ je funkcia definovaná na intervale I, nazývame *Eulerovou diferenciálnou rovnicou.*

Eulerovu diferenciálnu rovnicu môžeme riešiť dvojakým spôsobom.

1. Urobíme zámenu premenných $u = \log|ax + b|$, $y = \varphi(u)$, potom platí

$$(ax + b)\, y' = a\dot{y},^{**)}$$

$$(ax + b)^2\, y'' = a^2(\ddot{y} - \dot{y}),$$

$$(ax + b)^3\, y''' = a^3(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Po dosadení do Eulerovej diferenciálnej rovnice (1) dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientmi

$$a^n y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\dot{y} + a_n y = h(u), \qquad (2)$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sú isté čísla, $h(u) = g\left(\dfrac{-b + e^u}{a}\right)$, ak $ax + b > 0$ a $h(u) = g\left(\dfrac{-b - e^u}{a}\right)$, ak $ax + b < 0$.

Veta 1. Ak funkcia $y = \varphi(u)$ je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientmi (2), potom funkcia $y = \varphi(\log|ax + b|)$ je riešením diferenciálnej rovnice (1).

2. Ak máme riešiť Eulerovu diferenciálnu rovnicu (1) bez pravej strany — *homogénnu* Eulerovu diferenciálu rovnicu, t. j. $g(x) = 0$, pre každé $x \in I$, môžeme hľadať riešenia v tvare

$$y = (ax + b)^r, \qquad (3$$

kde číslo r je koreňom algebraickej rovnice

$$r(r - 1) \ldots (r - n + 1)\, a^n + a_1\, r(r - 1) \ldots (r - n + 2)\, a^{n-1} +$$
$$+ \ldots + a_{n-1} a r + a_n = 0. \qquad (4)$$

*) Pri riešení predpokladáme, že odpor R a indukčnosť L sú zapojené za sebou.
**) $\dot{y} = \mathrm{d}y/u$, $\mathrm{d}\ddot{y} = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}u^2, \ldots$

Rovnicu (4) nazývame *charakteristickou rovnicou homogénnej Eulerovej diferenciálnej rovnice* (1). Táto rovnica je aj charakteristickou rovnicou homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientmi (2).

Ak charakteristická rovnica (4) má k-násobný reálny koreň r_1, potom jemu zodpovedajúce riešenia diferenciálnej rovnice (1) sú

$$y_j = (ax + b)^{r_1} \ln^{j-1} (ax + b), \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{5}$$

Ak má charakteristická rovnica k-násobné komplexné korene, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, potom im zodpovedajúce riešenia diferenciálnej rovnice (1) sú

$$\begin{aligned} y_{2j-1} &= (ax + b)^{\alpha} \ln^{j-1} (ax + b) \,.\, \cos [\beta \ln (ax + b)], \\ y_{2j} &= (ax + b)^{\alpha} \ln^{j-1} (ax + b) \,.\, \sin [\beta \ln (ax + b)], \end{aligned} \tag{6}$$

pričom $j = 1, 2, \ldots, k$.

Rovnicu (4) dostaneme z Eulerovej diferenciálnej rovnice bez pravej strany, ak do nej dosadíme za $y, y', \ldots$ funkciu (3) a jej deriváoie a vydelíme s $(ax + b)^r$.

Pri riešení Eulerovej diferenciálnej rovnice s pravou stranou nájdeme podľa prv uvedeného všeobecné riešenie Eulerovej diferenciálnej rovnice bez pravej strany, a potom použijeme metódu variácie konštánt.

Príklad 1. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1) y' + 4y = 0, \quad x \in (-1/2, \infty). \tag{7}$$

Riešenie. Rovnicu (7) budeme riešiť dvoma spôsobmi.

1. Diferenciálna rovnica (7) je Eulerova diferenciálna rovnica bez pravej strany. Urobme zámenu premenných $2x + 1 = e^u$. Potom $u = \ln (2x + 1)$. Nájdime derivácie y', y''. Máme

$$\begin{aligned} (2x + 1)\, y' &= 2\dot{y}, \\ (2x + 1)^2 y'' &= 4(\ddot{y} - \dot{y}). \end{aligned}$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice (7) dostaneme

$$4\ddot{y} - 4\dot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0,$$

čiže

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0, \qquad u \in (-\infty, \infty), \tag{8}$$

čo je diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi bez pravej strany. Charakteristická rovnica

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

diferenciálnej rovnice (8) má korene $r_1 = 1$, $r_2 = 1$. Jej všeobecné riešenie je

$$y = c_1 e^u + c_2 u e^u.$$

Keďže $u = \ln (2x + 1)$, všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (7) je

$$y = c_1(2x + 1) + c_2(2x + 1) \ln (2x + 1),$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné čísla.

2. Hľadajme riešenie v tvare $y = (2x + 1)^r$. Potom je

$$y' = 2r(2x + 1)^{r-1}, \quad y'' = 4r(r - 1)\,(2x + 1)^{r-2}.$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice (7) a úprave dostaneme

$$(2x + 1)^r [4r(r - 1) - 4r + 4] = 0.$$

Keďže je $(2x + 1)^r \neq 0$, dostaneme

$$4r^2 - 8r + 4 = 0,$$

čo je charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice (7). Jej korene sú $r_1 = 1$, $r_2 = 1$. Podľa (5) jej všeobecné riešenie je

$$y = c_1(2x + 1) + c_2(2x + 1)\ln(2x + 1),$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné čísla.

Príklad 2. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$x^2y'' - 3xy' - 9y/4 = x^2 \ln x, \qquad x \in (0, \infty). \tag{9}$$

Riešenie. Diferenciálna rovnica (9) je Eulerova diferenciálna rovnica s pravou stranou. Urobme zámenu premenných $x = e^u$, $u \in (-\infty, \infty)$. Potom $u = \ln x$ a $y' = \dot{y}/x$, $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2$. Po dosadení do diferenciálnej rovnice (9) a úprave dostaneme

$$\ddot{y} - 4\dot{y} - 9y/4 = u\,e^{2u}. \tag{10}$$

Diferenciálna rovnica (10) je diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi so špeciálnou pravou stranou. Jej všeobecné riešenie je

$$y = c_1 e^{9u/2} + c_2 e^{-u/2} + e^{2u}(-4u/25 + 16/625).$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (9) je

$$y = c_1 e^{(9\ln x)/2} + c_2 e^{(-\ln x)/2} + x^2[(-4\ln x)/25 + 16/625],$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty.

V úlohách 1544 až 1565 riešte Eulerovu diferenciálnu rovnicu.

1544. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

1545. $x^2y'' + \dfrac{3}{2}xy' - y = 0$.

1546. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

1547. $x^2y'' + xy' - y = 0$.

1548. $(x + 2)^2 y'' + 3(x + 2)y' - 3y = 0$.

1549. $x^2y'' - 2y = 0$.

1550. $x^3y''' + xy' - y = 0$.

1551. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$.

1552. $(2x + 3)^3 y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0$.

1553. $x^2y'' + xy' + y = x$.

1554. $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

1555. $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$.

1556. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$

1557. $x^2y'' - 2xy' - 4y = x \sin x + (x^2 + 16)\cos x$.

1558. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2ax + 12b/x$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1559. $(x - 2)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x$.

1560. $(x + 1)^2 y'' + (x + 1)y' + y = x^2 + 2\sin\ln(1 + x)$.

1561. $(x + 1)^3 y'' + 3(x + 1)^2 y' + (x + 1)y = 6\ln(x + 1)$.

1562. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$.

1563. $x^3y''' - 9x^2y'' + 37xy' - 64y = x^4(6 + 24\ln x + 60\ln^2 x)$.

1564. $x^3y''' + 15x^2y'' + 60xy' + 60y = \ln x$.

1565. $x^4y'''' + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' + y = x^2$.

1566. Na kruhovú dosku s polomerom R a malou hrúbkou h, ktorá je na celom svojom obvode pevne votknutá, pôsobí rovnomerné zaťaženie $q = \text{const}$. Pre ohyb dosky $w = f(r)$, $0 \leq r \leq R$ platí diferenciálna rovnica

$$w^{(4)} + 2w'''/r - w''/r^2 + w'/r^3 = q/K,$$

kde konštanta K je tuhosť dosky, $K = \dfrac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$, E je modul pružnosti v ťahu a μ Poissonove číslo. Nájdite ohyb dosky.

1567. Prechodom elektrického prúdu cez dlhú valcovú cievku sa táto cievka zahrieva. Pre teplotu T cievky vo vrstve závitov,*) ktorá má polomer $b + x$, v ustálenom stave platí diferenciálna rovnica

$$(b + x)\, T'' + T' = -a^2(b + x),$$

kde b je polomer vnútorného závitu a a^2 konštanta. Nájdite rozloženie teploty v cievke, ak pre $x = 0$ je $T'(0) = 0$ a $T(b) = T_0$.

4,13. Systém diferenciálnych rovníc

Systém k rovníc

$$\begin{aligned} &F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0,\\ &F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

nazývame *systémom k diferenciálnych rovníc pre n neznámych funkcií* $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ak $k = n$ a systém (1) má tvar

$$\begin{aligned} &y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{2}$$

potom ho nazývame *normálnym systémom n diferenciálnych rovníc*. Číslo n nazývame jeho *rádom*.

Riešením na intervale J systému diferenciálnych rovníc (1) nazývame každú takú n-ticu funkcií jednej premennej $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, diferencovateľných na intervale J, že dosadením týchto n funkcií a ich derivácií do systému (1) dostaneme z každej diferenciálnej rovnice systému (1) správnu rovnosť dvoch funkcií.

Nech n-tica funkcií $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je riešením systému (2) na intervale J. Každému číslu $x_0 \in J$ je touto n-ticou funkcií priradený bod $X_0 = (x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))$ priestoru E_{n+1}. Množinu všetkých takýchto bodov nazývame *integrálnou krivkou systému* (2). Systém rovníc

$$\begin{aligned} x &= t,\\ y_1 &= y_1(t),\\ y_2 &= y_2(t),\\ &\ldots\ldots,\\ y_n &= y_n(t), \end{aligned} \tag{3}$$

$t \in J$, nazývame *parametrickými rovnicami integrálnej krivky*.

Hľadanie riešenia systému (1), ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y_1(x_0) = a_1$, $y_2(x_0) = a_2$, $\ldots$, $y_k(x_0) = a_k$, nazývame *Cauchyho úlohou* pre systém diferenciálnych rovníc (1) a uvedené začiatočné podmienky *Cauchyovskými začiatočnými podmienkami*.

Veta 1. *(Peanova veta.)* Ak funkcie f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ na pravých stranách systému (2)

$$y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

sú spojité na intervale $J_{n+1} = \langle x_0 - a, x_0 + a\rangle \times \langle y_1 - b, y_1 + b\rangle \times \langle y_2 - b, y_2 + b\rangle \times \times \ldots \times \langle y_n - b, y_n + b\rangle$, kde $a > 0$, $b > 0$ s ohľadom na interval J_{n+1}, potom systém (2) má aspoň jedno riešenie $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y_k(x_0) =$

*) Priestor cievky $b \leq x \leq 2b$ považujte za homogénne prostredie.

$= c_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Toto riešenie je spojite diferencovateľné v intervale $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, kde $h = \min\{a, b/M\}$, pričom pre $M > 0$ platí: $|f_k(x, y_1 y_2, \ldots, y_n)| \leqq M$ pre každý bod $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in J_{n+1}$.

Veta 2. Ak pravé strany systému (2)

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

sú na intervale J_{n+1} z vety 1 spojité s ohľadom na interval J_{n+1} a parciálne derivácie $\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$ sú ohraničené na intervale J_{n+1}, t. j. $\left|\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}\right| \leqq K$, potom systém (2) má jediné riešenie spĺňajúce začiatočné podmienky a spojite diferencovateľné v intervale $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, kde $h = \min\{a, b/M\}$.

Nech pravé strany f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ systému (2) majú spojité parciálne derivácie na uzavretej oblasti D. Nech funkcia $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ má spojité parciálne derivácie podľa všetkých premenných v oblasti D. Ak pre nejaké riešenie systému (2), $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x \in J_1$, ktorého graf leží v oblasti D, platí

$$\Psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C \tag{4}$$

pre všetky $x \in J_1$, nazývame rovnicu (4) *prvým integrálom systému* (2) *na oblasti D*.

Veta 3. Nutná a postačujúca podmienka, aby rovnica (4) bola prvým integrálom systému (2) na oblasti D je

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) + \frac{\partial\Psi}{\partial y_2} f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) + \\ + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

pre všetky $x \in J_1$.

Hovoríme, že prvé integrály

$$\Psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \quad \Psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \ldots, \quad \Psi_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_m$$

systému (2) sú *závislé v oblasti D*, ak existuje taká zložená funkcia $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $u_1 = \Psi_1(x, y_1, \ldots, y_n)$, $u_2 = \Psi_2(x, y_1, \ldots, y_n)$, $\ldots$, $u_m = \Psi_m(x, y_1, \ldots, y_n)$, že pre všetky body $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$ platí

$$\Phi(\Psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \Psi_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)) = 0.$$

Prvé integrály systému (2), ktoré nie sú závislé v oblasti D, nazývame *nezávislými* v oblasti D.

Veta 4. Nech $\Psi_1 = C_1$, $\Psi_2 = C_2$, $\ldots$, $\Psi_k = C_k$ sú prvé integrály systému (2) v oblasti D. Potom aj

$$F(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k) = C,$$

kde $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je ľubovoľná spojitá diferencovateľná funkcia k premenných na oblasti Ω, pričom $(C_1, C_2, \ldots, C_k) \in \Omega$, je prvý integrál systému (2) na oblasti D.

Veta 5. Normálny systém (2) má najviac n nezávislých prvých integrálov.

Veta 6. Nech pravé strany f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, systému (2) majú spojité všetky parciálne derivácie v intervale $J = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_1^{(0)} - \delta_2, y_1^{(0)} + \delta_2) \times (y_2^{(0)} - \delta_3, y_2^{(0)} + \delta_3) \times \ldots \times (y_n^{(0)} - \delta_{n+1}, y_n^{(0)} + \delta_{n+1})$. Potom normálny systém (2) má n nezávislých prvých integrálov.

Veta 7. Ak je daný jeden prvý integrál systému (2), potom možno znížiť rád systému (2) o jednotku.

Systém diferenciálnych rovníc v tvare

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{6}$$

kde funkcie n premenných $F_1, F_2, \ldots, F_n$ majú na oblasti Ω spojité parciálne derivácie, pričom v každom bode $A \in \Omega$ je aspoň jedno z čísiel $F_i(A) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazývame *systémom diferenciálnych rovníc v symetrickom tvare.*

Ak platí $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ pre každý bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, potom možno vyjadriť systém (6) v normálnom tvare

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n} &= \frac{F_1(X)}{F_n(X)}, \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_n} &= \frac{F_2(X)}{F_n(X)}, \\ &\cdots\cdots, \\ \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_n} &= \frac{F_{n-1}(X)}{F_n(X)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Integrálne krivky a prvé integrály systému (7) nazývame *integrálnymi krivkami* a *prvými integrálmi systému* (6).

Veta 8. **Nutná a postačujúca podmienka, aby $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ bol prvý integrál systému (6), je**

$$F_1(X) \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + F_2(X) \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \ldots + F_n(X) \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0. \tag{8}$$

Poznámka 1. Každej diferenciálnej rovnici n-tého rádu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{9}$$

možno priradiť systém

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\cdots\cdots, \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{10}$$

ktorý nazývame *normálnym systémom diferenciálnej rovnice n-tého rádu* (9).

Poznámka 2. Niekedy možno upraviť normálny systém (2) na jedinú diferenciálnu rovnicu n-tého rádu pre jedinú neznámu funkciu y_k. Riešením tejto diferenciálnej rovnice možno nájsť riešenie y_k a takto potom aj riešenie systému (2). Táto metóda integrovania systému (2) sa nazýva *eliminačná metóda.*

Poznámka 3. Systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} y_1^{(m_1)} &= f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right), \\ y_1^{(m_1)} &= f_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_n^{(m_n)} &= f_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right), \end{aligned}$$

kde $m_1 \geqq 1$, $m_2 \geqq 1$, $\ldots$, $m_n \geqq 1$, $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, nazývame *kanonickým systémom diferenciálnych rovníc m-tého rádu*. Kanonický systém diferenciálnych rovníc m-tého rádu možno podobne ako v poznámke 1 upraviť na normálny systém m diferenciálnych rovníc.

Poznámka 4. Upraviť systém diferenciálnych rovníc (2) na symetrický tvar (6) je často výhodné pri hľadaní prvých integrálov systému diferenciálnych rovníc (2). Po prevedení na systém diferenciálnych rovníc v symetrickom tvare hľadáme také kombinácie členov z rovnosti (6) (lineárne vzhľadom na diferenciály), aby na ľavej strane bol úplný diferenciál a na pravej strane nula. Integrovaním tejto rovnice dostaneme prvý integrál systému (6).

Príklad 1. Nájdime riešenie systému diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} y' &= (3y - 2z)/x, \\ z' &= (4y - 3z)/x \end{aligned} \tag{11}$$

na intervale $(0, \infty)$.

Riešenie. Daný systém diferenciálnych rovníc riešme eliminačnou metódou (pozri poznámku 2). Z druhej rovnice systému (11) máme

$$y = (xz' + 3z)/4 \tag{12}$$

a derivovaním

$$y' = (xz'' + 4z')/4. \tag{13}$$

Po dosadení do prvej rovnice systému (11) máme

$$(xz'' + 4z')/4 = 3(xz' + 3z)/4x - 2z/x$$

a po úprave

$$x^2z'' + xz' - z = 0, \qquad x \in (0, \infty).$$

To je Eulerova diferenciálna rovnica, jej riešením dostaneme (pozri článok 4,15)

$$z = c_1x + c_2/x, \qquad x \in (0, \infty).$$

Po dosadení do rovnice (12) máme

$$y = (c_1x - c_2/x + 3c_1x + 3c_2/x)/4$$

čiže

$$y = c_1x + c_2/2x.$$

Riešenie systému (11) na intervale $(0, \infty)$ je

$$(c_1x + c_2/2x,\ c_1x + c_2/x),$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty.

Príklad 2. Riešme systém diferenciálnych rovníc

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{z + x} = \frac{dz}{x + y}\ {}^{*)}$$

Riešenie. Daný systém budeme riešiť tak, že nájdeme dva nezávislé prvé integrály. Z rovnosti

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{z + x}$$

vyplýva rovnosť

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy - dx}{x - y}. \tag{14}$$

Podobne z rovnosti

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dz}{x + y}$$

vyplýva rovnosť

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dz - dx}{x - z}. \tag{15}$$

Porovnaním vzťahov (14) a (15) dostaneme

$$\frac{d(y - x)}{x - y} = \frac{d(z - x)}{x - z},$$

*) V tomto systéme diferenciálnych rovníc, ako aj pri ďalších diferenciálnych rovniciach tohto tvaru uvažujeme takú oblasť $\Omega \subset E_3$, v ktorej všetky funkcie uvedené v menovateľoch príslušných diferenciálnych rovníc sú rôzne od nuly, napr.

$$\Omega:\ x < 0 < \infty,\ 0 < y < x,\ 0 < z < x.$$

z čoho vyplýva

$$\mathrm{d}\,(\ln|z - x|) - \mathrm{d}\,(\ln|y - x|) = 0.$$

Teda jeden z prvých integrálov je

$$\ln\left|\frac{z-x}{y-x}\right| = \ln|C|,$$

čiže

$$\frac{z-x}{y-x} = C_1,$$

kde C_1 je ľubovoľná konštanta rôzna od nuly.

Podobne dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{z+x} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{2x+y+z}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{2(x+y+z)}.$$

Porovnaním s rovnicou (14) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}(y-x)}{x-y} = \frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{2(x+y+z)}.$$

Z toho dostaneme

$$\mathrm{d}\,(\ln|y-x|^2) + \mathrm{d}\,(\ln|x+y+z|) = 0.$$

Ďalší nezávislý prvý integrál je

$$\ln|(y-x)^2(x+y+z)| = \ln|C|,$$

čiže

$$(y-x)^2(x+y+z) = C_2,$$

kde C_2 je ľubovoľná konštanta rôzna od nuly.

Riešením daného systému diferenciálnych rovníc je dvojica nezávislých prvých integrálov

$$\frac{z-x}{y-x} = C_1,$$

$$(y-x)^2(x+y+z) = C_2,$$

kde $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

V úlohách 1568 až 1577 riešte daný systém diferenciálnych rovníc eliminačnou metódou.

1568. $y' = x,\quad x' = y.$*)

1569. $x' = y - x,\quad y' = x + y.$

1570. $x' = y - x,\quad y' = y + 3x.$

1571. $x' = -y + 3x + \sin t,\quad y' = x + y.$

1572. $x' = x^2/y,\quad y' = x.$

1573. $x' = -x^3,\quad y' = x(1 - y).$

1574. $x' = x/t - yx^2,\quad y' = y^2x.$

1575. $x' = y + t,\quad y'' = x.$

1576. $x'' = z',\quad y'' = y' + z,\quad z' = x' + y'.$

*) V tomto príklade, ako aj v ďalších príkladoch tohto článku derivácie podľa t značíme čiarkou, napr. $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, atď.

V úlohách 1577 a 1579 nájdite riešenie systému diferenciálnych rovníc, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky.

1577. $x' = -x - y + 3y^2/2,$
$y' = x + y,$
$y(-2) = 1,\ x(-2) = -2.$

1578. $x' = y,$
$y' = -x,$
$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

1579. $x'' = y,$
$y'' = x,$
$x(0) = 2, \quad y(0) = 2,$
$x'(0) = -2, \quad y'(0) = 2.$

V úlohách 1580 až 1584 riešte daný diferenciálny systém n-tého rádu tak, že nájdete jeho n nezávislých prvých integrálov.

1580. $x' = y,$
$y' = x.$

1581. $x' = x^3 + 3xy^2,$
$y' = 2y^3,$
$z' = 2y^2.$

1582. $(z - y)^2 y' = z,$
$(z - y)^2 z' = y.$

1583. $zy' = z - 1,$
$1 = (y - t)\, z'.$

1584. $x' = (x - y)/(z - t),$
$y' = (x - y)/(z - t),$
$z' = x - y + 1.$

V úlohách 1585 až 1595 riešte dané diferenciálne systémy v symetrickom tvare.

1585. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

1586. $\dfrac{dx}{z - y} = \dfrac{dy}{x - z} = \dfrac{dz}{y - x}.$

1587. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

1588. $\dfrac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}.$

1589. $\dfrac{dx}{y(x + y)} = \dfrac{-dy}{x(x + y)} = \dfrac{dz}{(z - y)(2x + 2y + z)}.$

1590. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = \dfrac{dy}{\operatorname{tg} z} = \dfrac{dz}{\cos^2 z}.$

1591. $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{-xz} = \dfrac{dz}{e^z}.$

1592. $\dfrac{dx}{e^x} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dz}{y\, e^x}.$

1593. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{dz}{x} = \dfrac{du}{y}.$

1594. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{dz}{u} = \dfrac{du}{-z}$

1595. $\dfrac{dx}{y - u} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{u - y} = \dfrac{du}{x - z}$

1596. Hmotný bod M s hmotou m sa pohybuje v rovine R_{xy} tak, že sila na neho pôsobiaca je $\mathbf{F} = k(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, $k > 0$. Nájdite pohyb tohto bodu, ak $\mathbf{r}(0) = \mathbf{o}$, $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{i}$.

1597. Rýchlosť rastu kultúry mikroorganizmov je priamo úmerná ich množstvu a množstvu živných látok (konštanta úmernosti je k). Rýchlosť zmenšovania sa množstva živných látok je priamo úmerná začiatočnému množstvu mikroorganizmov $M_1(0) = A$ (konštanta úmernosti je k_1) a času t. Začiatočné množstvo živných látok je $M_2(0) = B$. Nájdite závislosť oboch množstiev M_1, M_2 od času.

4,14. Lineárne diferenciálne systémy

Lineárnym diferenciálnym systémom nazývame systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\, y_n + a_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \ldots + a_{2n}(x)\, y_n + a_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + a_{nn}(x)\, y_n + a_n(x), \end{aligned} \tag{1}$$

čo budeme kratšie zapisovať

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j + a_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Funkcie $a_{ik}(x)$, definované na intervale J, nazývame koeficientmi lineárneho diferenciálneho systému.

Ak $a_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom systém

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

nazývame *homogénnym lineárnym diferenciálnym systémom.*

Diferenciálny systém (3) má vždy za riešenie n-ticu $(0, 0, \ldots, 0)$, ktorú nazývame *nulovým* alebo *triviálnym riešením.*

Hovoríme, že n-tice funkcií $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ *sú lineárne závislé na intervale* J, ak existujú čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$, nie všetky rovnajúce sa nule, že pre každé $x \in J$ platí

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_k Y_k = o,$$

kde $o = (0, 0, \ldots, 0)$. Ak n-tice funkcií nie sú lineárne závislé na J, hovoríme, že sú *lineárne nezávislé* na J.

n lineárne nezávislých na intervale J riešení diferenciálneho systému (3) nazývame *fundamentálnym systémom riešení diferenciálneho systému* (3).

Veta 1. Ak všetky koeficienty $a_{ik}(x)$ a funkcie $a_i(x)$ lineárneho diferenciálneho systému (1) sú spojité funkcie na intervale (a, b), potom každým bodom P pásu $a < x < b$, $-\infty < y_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ prechádza práve jedno riešenie na intervale (a, b) systému (1).

Veta 2. Ak $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ sú riešenia systému (3), potom aj ich lineárna kombinácia je riešením systému (3).

Veta 3. Nech $Y_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}), \ldots, Y_n = (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn})$ sú riešenia systému (3). Tieto riešenia sú lineárne nezávislé na intervale J, t. j. tvoria fundamentálny systém vtedy a len vtedy, keď aspoň v jednom čísle $x \in J$ je

$$D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_{11}, & y_{21}, & \ldots, & y_{n1} \\ y_{12}, & y_{22}, & \ldots, & y_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n}, & y_{2n}, & \ldots, & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Veta 4. Každé riešenie diferenciálneho systému (3) možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu riešení jeho fundamentálneho systému.

Veta 5. Nech U je riešením nehomogénneho diferenciálneho systému (1) a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ je fundamentálny systém riešení príslušného homogénneho systému (3). Potom n-tica Y je riešením diferenciálneho systému (1) vtedy a len vtedy, keď ju možno vyjadriť v tvare

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_n Y_n + U,$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú vhodné čísla.

Veta 6. Nech $Y_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}), \ldots, Y_n = (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn})$ je fundamentálny systém riešení homogénneho diferenciálneho systému (3), ktorý prislúcha k systému (1). Nech $D = D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ a D_j je determinant, ktorý vznikne z determinantu D, ak v ňom j-ty stĺpec nahradíme stĺpcom $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$. Potom n-tica $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, kde

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{n} y_{jk} \int \frac{D_j}{D}\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

je riešením nehomogénneho diferenciálneho systému (1).

Poznámka 1. Riešenie (4) nehomogénneho systému (1) sme dostali metódu variácie konštánt, ktorá tkvie v tom, že riešenie nehomogénneho diferenciálneho systému (1) hľadáme v tvare

$$Y = c_1(x)\, Y_1 + c_2(x)\, Y_2 + \ldots + c_n(x)\, Y_n,$$

kde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ je fundamentálny systém riešení homogénneho diferenciálneho systému (3) a $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ sú neznáme funkcie, ktoré určíme nasledovne. Dosadením do systému (1) dostaneme pre nelineárny systém

$$c_1'(x)\, y_{1i} + c_2'(x)\, y_{2i} + \ldots + c_n'(x) y_{ni} = a_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Riešením tohto systému a potom integrovaním dostaneme hľadané funkcie $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$.

Príklad 1. Riešme systém diferenciálnych rovníc

$$y_1' = \frac{1}{x}\,(3y_1 - 2y_2 + 2\,e^x - 3),$$

$$y_2' = \frac{1}{x}\,(4y_1 - 3y_2 + 3\,e^x - 4 + x\,e^x)$$

Riešenie. Daný systém je nehomogénny lineárny diferenciálny systém. Všeobecné riešenie príslušného homogénneho diferenciálneho systému je (pozri príklad 1, čl. 4,13)

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1(x, x) + c_2(1/2x, 1/x) = (c_1 x + c_2/2x,\ c_1 x + c_2/x).$$

Všeobecné riešenie daného nehomogénneho diferenciálneho systému nájdeme podľa vety 5 a 6. Vypočítajme determinanty D, D_1, D_2. Dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} x, & \dfrac{1}{2x} \\ x, & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{2\,e^x - 3}{x}, & \dfrac{1}{2x} \\ \dfrac{3\,e^x - 4 + xe^x}{x}, & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^x - 2 - xe^x}{2x^2},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x, & \dfrac{2\,e^x - 3}{x} \\ x, & \dfrac{3\,e^x - 4 + x\,e^x}{x} \end{vmatrix} = e^x + x\,e^x - 1.$$

Podľa vety 6 jednopartikulárne riešenie daného nehomogénneho diferenciálneho systému je $U = (u_1, u_2)$, pričom

$$u_1 = x \int \frac{e^x - 2 - x\,e^x}{x^2}\, dx + \frac{1}{2x} \int 2(e^x + x\,e^x - 1)\, dx,$$

$$u_2 = x \int \frac{e^x - 2 - x\,e^x}{x^2}\, dx + \frac{1}{x} \int 2(e^x + x\,e^x - 1)\, dx.$$

Z tohto po vypočítaní integrálov a po úprave dostaneme

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = e^x.$$

Riešením daného diferenciálneho systému podľa vety 5 je $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 = U$, pričom $c_1Y_1 + c_2Y_2$ je všeobecným riešením príslušného homogénneho diferenciálneho systému a $U = (1, e^x)$ je partikulárnym riešením daného nehomogénneho diferenciálneho systému.
Rozpísaním na zložky dostaneme všeobecné riešenie daného diferenciálneho systému v tvare

$$y_1 = c_1x + c_2/2x + 1,$$
$$y_2 = c_1x + c_2/x + e^x.$$

Lineárny diferenciálny systém s konštantnými koeficientmi

Ak v systéme (1) resp. (3) sú koeficienty a_{ik} reálne čísla, dostaneme systém

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + a_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1a}$$

resp.

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3a}$$

ktorý nazývame *lineárnym diferenciálnym systémom s konštantnými koeficientmi* resp. *homogénnym lineárnym diferenciálnym systémom s konštantnými koeficientmi.*

Poznámka 2. Ďalej v tomto článku riešením môže byť aj komplexná funkcia reálnej premennej.

Veta 7. Diferenciálny systém (3a) má nenulové riešenie

$$Y = (\alpha_1 e^{r_1x}, \alpha_2 e^{r_1x}, \ldots, \alpha_n e^{r_1x}), \tag{5}$$

kde r_1 je koreňom charakteristickej rovnice systému (3a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r, & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} - r, & \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

a n-tica $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je riešením systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} (a_{11} - r_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \quad &+ \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - r_1)\alpha_2 &+ \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 \quad &+ \ldots + (a_{nn} - r_1)\alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Veta 8. Nech $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sú navzájom rôzne korene charakteristickej rovnice diferenciálneho systému (3a). Nech $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ sú riešenia diferenciálneho systému (3a) najdené podľa vety 6. Potom tieto riešenia sú lineárne nezávislé.

Veta 9. Nech r_1 je k-násobným koreňom charakteristickej rovnice diferenciálneho systému (3a). Potom existujú polynómy $P_{mj}(x)$ stupňa najviac m, kde $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, že n-tice

$$\begin{aligned} U_0 &= (P_{01}e^{r_1x}, P_{02}e^{r_1x}, \ldots, P_{0n}e^{r_1x}), \\ U_1 &= (P_{11}e^{r_1x}, P_{12}e^{r_1x}, \ldots, P_{1n}e^{r_1x}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{k-1} &= (P_{k-1,1}e^{r_1x}, P_{k-1,2}e^{r_1x}, \ldots, P_{k-1,n}e^{r_1x}) \end{aligned}$$

sú lineárne nezávislými riešeniami diferenciálneho systému (3a).

Poznámka 3. Koeficienty polynómov P_{mj} určíme metódou neurčitých koeficientov po dosadení jednotlivých riešení U_i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ do diferenciálneho systému (3a).

Veta 10. Ak riešením diferenciálneho systému (3a) je n-tica komplexných funkcií

$$Z = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, \ldots, u_n + iv_n),$$

pričom $u_j, v_j, j = 1, 2, \ldots, n$ sú reálne a imaginárne časti týchto funkcií, potom riešením diferenciálneho systému (3a) je aj n-tica reálnych častí zložiek riešenia Z

$$\operatorname{Re} Z = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

a n-tica imaginárnych častí zložiek riešenia Z

$$\operatorname{Im} Z = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Veta 11. Nech charakteristická rovnica (6) diferenciálneho systému (3a) má:
a) reálne korene: r_1 ako ν_1-násobný, r_2 ako ν_2-násobný, $\ldots$, r_k ako ν_k-násobný;
b) komplexné korene: $\alpha_1 + i\beta_1$ ako μ_1-násobný, $\alpha_2 + i\beta_2$ ako μ_2-násobný, $\ldots$, $\alpha_s + i\beta_s$ ako μ_s-násobný.

Nech platí $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k + 2(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s) = n$.

Ak k týmto koreňom nájdeme reálne nenulové riešenia podľa viet 9 a 10, dostaneme n riešení, ktoré tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálneho systému (3a).

Poznámka 4. Všeobecné riešenie nehomogénneho diferenciálneho systému (1a) hľadáme podľa vety 5 a 6.

Ak funkcie $a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ majú špeciálny tvar (ako v článku 4,11), možno postupovať podobne ako pri lineárnych diferenciálnych rovniciach s konštantnými koeficientmi so špeciálnym tvarom pravej strany.

Príklad 1. Riešme diferenciálny systém

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= -y_1, \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Riešenie. Systém (7) je lineárny diferenciálny systém s konštantnými koeficientmi. Predpokladáme, že riešenie je

$$Y = [y_1(x), y_2(x), y_3(x)] = (\alpha_1 e^{rx}, \alpha_2 e^{rx}, \alpha_3 e^{rx}). \tag{8}$$

Vypočítajme y_1', y_2', y_3'. Máme

$$y_1' = \alpha_1 r e^{rx}, \qquad y_2' = \alpha_2 r e^{rx}, \qquad y_3' = \alpha_3 r e^{rx}.$$

Po dosadení do systému (7) a úprave dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - r)\,\alpha_1 e^{rx} + \alpha_2 e^{rx} - 2\alpha_3 e^{rx}, \\ 0 &= -\alpha_1 e^{rx} - r\alpha_2 e^{rx}, \\ 0 &= \alpha_1 e^{rx} + \alpha_2 e^{rx} + (-1 - r)\,\alpha_3 e^{rx}. \end{aligned} \tag{9}$$

Keďže $e^{rx} \neq 0$ pre každé číslo x, z (9) vyplýva

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - r)\,\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \\ 0 &= -\alpha_1 - r\alpha_2, \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 - (1 + r)\,\alpha_3. \end{aligned} \tag{10}$$

To je homogénny lineárny systém pre neznáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ktorý má nenulové riešenie vtedy a len vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} 2 - r, & 1, & -2 \\ -1, & -r, & 0 \\ 1, & 1, & -(1 + r) \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0.$$

Tým sme dostali charakteristickú rovnicu systému (7). Jej korene sú $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$.

Pre $r_1 = 1$ vypočítame zo systému (10) neznáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Máme $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = -u$, $\alpha_3 = 0$, kde u je ľubovoľné číslo. Pre $u = 1$ z (8) dostaneme jedno riešenie diferenciálneho systému (7)

$$Y_1 = (e^x, -e^x, 0).$$

Pre $r = i$ vypočítame zo systému (10) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Máme $\alpha_1 = -iu$, $\alpha = u$, $\alpha_3 = -iu$, kde u je ľubovoľné číslo. Ak položíme $u = 1$, dostaneme z (8) riešenie diferenciálneho systému (7)

$$Z = (-i\, e^{ix}, e^{ix}, -i\, e^{ix}). \tag{11}$$

Z (11) podľa vety 10 dostaneme dve riešenia, a to

$$Y_2 = \operatorname{Re} Z = (\sin x, \cos x, \sin x)$$

a

$$Y_3 = \operatorname{Im} Z = (-\cos x, \sin x, -\cos x).$$

Podľa vety 11 riešenia Y_1, Y_2, Y_3 tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálneho systému (7) a všeobecné riešenie je

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3 = (c_1 e^x + c_2 \sin x - c_3 \cos x, -c_1 e^x + \\ + c_2 \cos x + c_3 \sin x, c_2 \sin x - c_3 \cos x).$$

Z toho potom dostaneme

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 \sin x - c_3 \cos x,$$
$$y_2 = -c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$
$$y_3 = c_2 \sin x - c_3 \cos x,$$

kde c_1, c_2, c_3 sú ľubovoľné čísla.

1598. Daný je diferenciálny systém

$$x' = 4x - 3y,$$
$$y' = 5x - 4y.$$

Dokážte, že dvojice funkcií (e^t, e^t) a $(3\, e^{-t}, 5\, e^{-t})$:

a) sú jeho riešeniami,

b) tvoria jeho fundamentálny systém.

Nájdite jeho všeobecné riešenie.

1599. Daný je diferenciálny systém

$$x' = 4x - 3y + 2 \sin t,$$
$$y' = 5x - 4y.$$

a) Dokážte, že dvojica funkcií $(-\cos t - 4 \sin t, -5 \sin t)$ je riešením daného systému. Pomocou príkladu 1598 nájdite jeho všeobecné riešenie.

b) Nájdite riešenie daného systému, pre ktoré platí $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

1600. Daný je diferenciálny systém

$$x' = -9x + 19y + 4z,$$
$$y' = -3x + 7y + z,$$
$$z' = -7x + 17y + 2z.$$

Dokážte, že trojice funkcií (3, 1, 2), ($4 \sin t + 9 \cos t$, $\sin t + 3 \cos t$, $2 \sin t + 7 \cos t$), ($9 \sin t - 4 \cos t$, $3 \sin t - \cos t$, $7 \sin t - 2 \cos t$):

a) sú jeho riešenia,

b) tvoria jeho fundamentálny systém.

Nájdite všeobecné riešenie daného diferenciálneho systému.

1601. Daný je diferenciálny systém

$$x' = -9x + 19y + 4z + 1,$$
$$y' = -3x + 7y + z,$$
$$z' = -7x + 17y + 2z.$$

a) Dokážte, že trojica funkcií ($-3t$, $-t$, $-2t - 1$) je riešením daného systému. Pomocou príkladu **1600** nájdite jeho všeobecné riešenie.

b) Nájdite riešenie daného systému, pre ktoré platí $x(0) = 6$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

V úlohách **1602** až **1619** riešte homogénne diferenciálne systémy.

1602. $x' = 7x + 6y$, $y' = 2x + 6y$.

1603. $x' = x + y$, $y' = 8x - y$.

1604. $x' = x + y$, $y' = -5x - y$.

1605. $x' = x + 3y$, $y' = -3x + y$.

1606. $x' = -4x - y$, $y' = x - 2y$.

1607. $x' = 4x - 9y + 5z$, $y' = x - 10y + 7z$, $z' = x - 17y + 12z$.

1608. $x' = 16x + 14y + 38z$, $y' = -9x - 7y - 18z$, $z' = -4x - 4y - 11z$.

1609. $x' = -x + y + z$, $y' = x + y - z$, $z' = x - y + z$.

1610. $x' = x - y$, $y' = x - z$, $z' = x$.

1611. $x' = 2x - y + 2z$, $y' = x + 2z$ $z' = -2x + y - z$.

1612. $x' = -5x - 10y - 20z$, $y' = 5x + 5y + 10z$, $z' = 2x + 4y + 9z$.

1613. $x' = x - y + z$, $y' = x + y - z$, $z' = -y + 2z$.

1614. $x' = y$, $y' = 4x + 3y - 4z$, $z' = x + 2y - z$.

1615. $x' = 2x - y - z$, $y' = 2x - y - 2z$, $z' = -x + y + 2z$.

1616. $x' = 3x + y - z$, $y' = -x + 2y + z$, $z' = x + y + z$.

1617. $x' = 4x$, $y' = 4y$, $z' = 4z$, $u' = 4u$.

1618. $x' = 3x - 5y + u$, $y' = x - y$, $z' = -3z - u$, $u' = 5z + u$.

1619. $x' = -7x - 4u$, $y' = -13x - 2y - z - 8u$, $z' = 6x + y + 4u$, $u' = 15x + y + 9u$.

V úlohách **1620** až **1623** nájdite riešenie homogénnych diferenciálnych systémov s počiatočnými podmienkami.

1620. $x' = -5x + 2y$, $y' = x - 7y$, $x(0) = y(0) = 1$.

1621. $x' = -3x - y$, $y' = x - y$, $x(0) = y(0) = 1$.

1622. $x' = y + z,\quad y' = x + z,\quad z' = x + y,\quad x(0) = 0,\ y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

1623. $x' = x + y + z,\quad y' = x - y + z,\quad z' = x + y - z,\quad x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

V úlohách **1624** a **1625** preveďte daný systém diferenciálnych rovníc na normálny tvar.

1624. $x' - 2y' + x - 3y = e^t,\quad 2x' + 3y' - x + 4y = 2\,e^t.$

1625. $x'' - 2x + y = \sin t,\quad y'' - x - 2y = \cos t.$

V úlohách **1626** až **1632** riešte diferenciálne systémy, ktoré nie sú v normálnom tvare.

1626. $x'' + 8y = 0,\quad y'' - 8x = 0.$

1627. $x'' = 3x + 4y,\quad y'' = -x - y.$

1628. $x'' + x' + y' - 2y = 0,\quad x' - y' + x = 0.$

1629. $x'' - 2y'' + y' + x - 3y = 0,\quad -2x'' + 4y'' - x' - 2x + 5y = 0.$

1630. $x'' - 2y' + 2x = 0,\quad y'' + 3x' - 8y = 0.$

1631. $x'' = -x + y + z,\quad y'' = x - y + z,\quad z'' = x + y - z.$

1632. $x'' = 3x - y - z,\quad y'' = -x + 3y - z,\quad z'' = -x - y + 3z.$

V úlohách **1633** až **1643** riešte nehomogénne lineárne diferenciálne systémy.

1633. $x' = 3x - 2y,\quad y' = 2x - y + 1.$

1634. $x' = -x + 5y,\quad y' = -x + y + 8t.$

1635. $x' = y + t^2,\quad y' = x + 2\,e^t.$

1636. $x' = 2x + 3y + 8\,e^t,\quad y' = 3x + 2y + 5t.$

1637. $x' = -5x + 2y + e^t,\quad y' = x - 6y + e^{2t}.$

1638. $x' = 7x + 6y - 10\,e^{3t},\quad y' = 2x + 6y - 5\,e^{3t}$

1639. $x' = -x + y + \cos t,\quad y' = -5x + 3y.$

1640. $x' = 2x + 4y + \cos t,\quad y' = -x - 2y + \sin t.$

1641. $x' = -2x + 2y,\quad y' = 2x + y + 16t\,e^t.$

1642. $x' = 4x - 9y + 5z + 1 + 13t,\quad y' = x - 10y + 7z + 3 + 15t,\quad z' = x - 17y + 12z + 2 + 26t.$

1643. $x' = 16x + 14y + 38z - 2\,e^{-t},\quad y' = -9x - 7y - 18z - 3\,e^{-t},\quad z' = -4x - 4y - 11z + 2\,e^{-t}.$

V úlohách **1644** až **1646** riešte dané diferenciálne systémy metódou variácie konštánt.

1644. $x' = -x + 2y,\quad y' = -x + y + 1/\cos t,$

1645. $x' = -x + 2y + 15\,e^t\sqrt{t},\quad y' = -2x + 3y.$

1646. $x' = -y + \operatorname{tg} t,\quad y' = x + \operatorname{tg}^2 t - 1.$

1647. Hmotný bod M s hmotnosťou $m = 1$ kg sa pohybuje v rovine R_{xy} za pôsobenia sily $\mathbf{F} = -16x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$, [N; m]. Začiatočná poloha bodu M je $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ [m] a začiatočná rýchlosť $\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{j}$ [m s^{-1}]. Nájdite dráhu bodu M.

1648. Nájdite rovnicu dráhy hmotného bodu pohybujúceho sa v silovom poli, v ktorom sila účinkujúca na hmotný bod má v každom mieste smer kolmý na os z, smeruje k osi z a je priamo úmerná vzdialenosti od nej.

1649. Strela s hmotnosťou m bola vystrelená so začiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v}(0) = v_0(\cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{k})$, $0 < \alpha < \pi/2$. Odpor vzduchu je $\mathbf{R} = -kmg\,\mathbf{v}$, kde k je konštanta úmernosti, $\mathbf{v}$ rýchlosť strely a g tiažové zrýchlenie. Nájdite dráhu strely. Dokážte, že táto dráha má zvislú asymptotu.

1650. Na hmotný bod M s hmotnosťou m pôsobí príťažlivá [odpudivá] sila $F = -k^2m\,\mathbf{r}$ [$F = k^2m\,\mathbf{r}$], kde k je konštanta úmernosti a $\mathbf{r}$ je polohový vektor bodu M. Začiatočná poloha je $\mathbf{r}(0) = a\mathbf{i}$, $a > 0$ a začiatočná rýchlosť bodu M je $\mathbf{v} = v_0(\cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j})$. Nájdite pohyb bodu M a vypočítajte jeho dráhu.

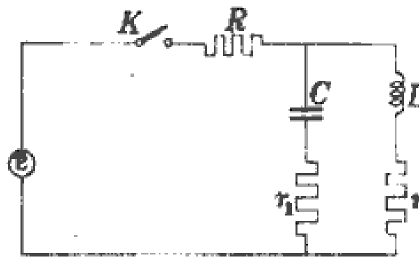
1651. Hmotný bod M priťahujú sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ do stredov S_1, S_2, pričom platí $\mathbf{F}_1 = -km\mathbf{r}$, $\mathbf{F}_2 = -km\,[2(a + bt)\,\mathbf{i} - \mathbf{r}]$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor bodu M a m je jeho hmotnosť. Začiatočná poloha bodu M je $\mathbf{r}(0) = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, $a > 0$ a jeho začiatočná rýchlosť je $\mathbf{v}(0) = b\mathbf{i} + b\mathbf{k}$, $b > 0$. Nájdite dráhu bodu M.

1652. Homogénna tenká tyč dĺžky l_1 a hmotnosti m_1 sa môže otáčať v zvislej rovine okolo pevného bodu O. K voľnému koncu A tyče je pripojená druhá tenká tyč dĺžky l_2 s hmotou m_2, ktorá sa môže otáčať v tej istej zvislej rovine. Opíšte malé kmity tohto systému v zvislej rovine.

1653. Nabitá častica s nábojom e a hmotnosťou m sa pohybuje v homogénnom elektrickom poli $\mathbf{E} = E_0\mathbf{j}$. Nájdite dráhu tejto častice, ak v čase $t = 0$ sa nachádzala v začiatku pravouhlého súradnicového systému a jej rýchlosť bola $\mathbf{v}(0) = v_0(\cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j})$, $0 \leqq \alpha \leqq \pi/2$.

1654. Nabitá častica s nábojom e a hmotnosťou m sa pohybuje v homogénnom magnetickom poli $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Nájdite dráhu tejto častice, ak v čase $t = 0$ sa nachádzala v začiatku pravouhlého súradnicového systému a jej rýchlosť bola a) $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{j}$, b) $v(0) = v_0(\cos\alpha\mathbf{j} + \sin\alpha\mathbf{k})$.

1655. Nabitá častica s nábojom e a hmotnosťou m sa pohybuje v homogénnom elektrickom a magnetickom poli, pre ktoré platí $\mathbf{E} = E_0\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Nájdite dráhu častice, ak v čase $t = 0$ bola v začiatku pravouhlého súradnicového systému a jej rýchlosť bola $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{i}$.



Obr. 39

1656. V elektrickej sieti (pozri *obr. 39*) je v čase $t = 0$ zapojený kľúč K. Nájdite prúdy i_1, i_2, ak $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$ a $e_0 = E_0(1 - e^{-\alpha t})$.

1657. Primárna cievka transformátora má konštanty L_1, R_1, sekundárna L_2, R_2, pričom $L_1 = 3$ H, $L_2 = 6$ H, $R_1 = 7\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $M = 4$ H a) Nájdite prúdy v oboch cievkach transformátora, ak v čase $t = 0$ primárna cievka bola odpojená od zdroja konštantného napätia a primárna i sekundárna cievka boli spojené nakrátko, pričom $i_1(0) = 2$ A, $i_2(0) = 3$ A. b) Nájdite maximum i_1 a čas, kedy ho dosiahne. c) Nájdite hodnotu i_1, i_2 v čase $t = 0{,}01$ s.

1658. Riešte predchádzajúcu úlohu, ak primárna cievka bola v čase $t = 0$ pripojená na zdroj konštantného napätia $U = 200$ V a $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$, pričom sekundárna cievka bola pripojená na ohmickú záťaž $R = 10\,\Omega$.

5. VÝSLEDKY

1. Diferenciálny počet funkcie viac premenných

1,1. Bodové množiny v E_n

5. Body zhustenia tvoria interval $\langle 2, 3\rangle$. **6.** Body zhustenia sú všetky body $(0, 1/l, 1/m)$, $(1/k, 0, 1/m)$, $(1/k, 1/l, 0)$, $(0, 0, 1/m)$, $(0, 1/l, 0)$, $(1/k, 0, 0)$ pričom k, l, m sú ľubovoľné prirodzené čísla a bod $O = (0, 0, 0)$. **7.** Body zhustenia sú všetky body, pre ktoré platí $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$. **8.** Body zhustenia tvoria priestor E_3. **9.** a) otvorená, $A = (-2)$, $B = (3)$; b) ani otvorená, ani uzavretá $A = (2)$, $B = (4)$; c) uzavretá, $A = (3)$, $B = (5)$; d) ani otvorená, ani uzavretá, $A = (4)$, $B = (6)$. **10.** a) $(-2, 4)$, otvorená množina; b) $\langle 2, 5\rangle$, uzavretá množina; c) $(4, 5\rangle$, ani otvorená, ani uzavretá; d) $\langle 3, 4\rangle$, uzavretá množina. **12.** Hranica je guľová plocha $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$. **15.** Otvorená množina. **16.** Ani otvorená, ani uzavretá množina. **17.** Otvorená množina. **18.** Uzavretá množina. **19., 20., 21.** Ani otvorená ani uzavretá množina. **22.** Otvorená množina. **24.** Neohraničená množina. **25.** Ohraničená množina. **26.** Ohraničená množina. **27.** Neohraničená množina. **28.** Neohraničená množina. **29.** Ohraničená množina. **30.** Ohraničená množina. **31.** Netvoria oblasť. **32.** Uzavretá oblasť. **33.** Oblasť. **34.** Netvorí oblasť. **35.** Netvorí oblasť. **36.** Uzavretá oblasť. **44.** $Y_1 = (1/3, 5/3, 3)$, $Y_2 = (1/5, 7/5, 3)$, $Y_3 = (1/7, 9/7, 3)$, $Y_4 = (1/9, 11/9, 3)$, $Y_5 = (1/11, 13/11, 3)$. **45.** a) $X_k = (1 - 1/k, 1 + 1/k, 1)$; b) $X_k = (1/k, 1/2^k, k/(1 + k^2))$; c) $X_k = (1 - 1/k, 2 + 1/k, 1/k)$. **47.** $A = (0, 1, 2)$. **48.** $A = (1, 0, 0)$. **49.** $A = (1, 0, 0)$.

1,2. Funkcia dvoch a viac premenných

50. $\sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}$. **51.** $V = a^2 . \sqrt{4h^2 - a^2}/6$. **52.** $v = S^2/4\pi V$. **53.** $V = nRT/p$, kde R je plynová konštanta. **54.** $R = x + 2y/(2 + y)$, $[\Omega]$, $W = 4(x + y)/[2(x + y) + xy]$, $[W]$. **55.** a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; b) $-3/2$, -3; c) nie je definovaná, $\pi/2$. **56.** a) 6; b) nie je definované. **57.**

$y \diagdown x$	0	1	2	3	4	5
0	—	—	—	—	—	—
1	1	2	5	10	17	26
2	0,5	1,5	4,5	9,5	16,5	25,5
3	1/3	4/3	13/3	28/3	49/3	76/3

58. a) 1; b) $a^{1/a} + (1/a)^a/2$; c) $(x + h)^{y+k} + (y + k)^{x+h}/2$. **59.** $xyz + xy/z$; $-f(x, y, z)$; $t + 1/t$; $1 + y^2/x^2$; **62.** $f(x, y) = xy + (x^2 - y^2)/2$. **63.** $f(x) = x^2\sqrt{1 + 1/x^2}$. **64.** $f(x, y) = (x + y)^3 - 2y$, $\varphi(x) = x^3 - x$. **65.** $f(x, y) = x^3(y^3 - 1)/(y - 1)^3$, $y \neq 0$, $y \neq 1$. **66.** $f(x) = (2x \ln x)/(1 + x^2)$. **67.** a) Celý priestor E_2 okrem priamok $x = 0$, $y = 1$; b) Celý priestor E_2 okrem priamok $y = x$, $y = -x$; c) Celý priestor E_2 okrem kružnice $x^2 + y^2 = 25$; d) Celý priestor E_2 okrem polpriamok $2x + y = 0$, $x < 0$ a $y - 2x = 0$, $x < 0$. **68.** a) $x \geqq 0$, $y > 0$; b) I. a III. kvadrant bez súradnicových osí; c) $-3 \leqq x \leqq 3$, $-\sqrt{9 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{9 - x^2}$; d) $0 < x < \infty$, $-x < y < x$. e) Množina všetkých bodov $X = (x, y)$, kde $|x| \geqq |y|$; f) všetky body z E_2, pre ktoré platí $|x| \geqq 1$, $|y| \geqq 1$, alebo $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$. **69.** a) E_3 okrem roviny $y + z = 0$; b) guľa $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4$; c) $x > 0, y > 0, z > 0$; $x > 0, y < 0, z < 0$; $x < 0, y < 0, z > 0$; $x < 0, y > 0, z < 0$. **70.** a) E_2 okrem priamok $x + y = n$, kde n je celé číslo; b) $2n\pi \leqq x \leqq (2n + 1)\pi, y \geqq 0$, $(2n - 1)\pi \leqq x \leqq 2n\pi$, $y \leqq 0$. **71.** a) $-1 \leqq x \leqq 1$, $-\infty < y < \infty$; b) $-\infty < x < \infty$, $-1 - x \leqq$

$\leq y \leq 1 - x$. **72.** a) $x > 0$, $2n\pi < y < (2n+1)\pi$; $x < 0$, $(2n+1)\pi < y < (2n+2)\pi$ pre každé celé číslo n; b) $y > x$; c) $x < 0$, $y > 0$; $x > 0$, $y > x$; d) medzikružie so stredom $S = (0, 0)$ a polomerom $r = 1$ a $r = \sqrt{2}$, bez vonkajšej kružnice; e) $-\infty < x < 0$, $x \leq y < 0$; $0 < x < \infty$, $0 < y \leq x$; f) $2n < x^2 + y^2 < 2n + 1$, pre každé celé číslo n. **77.** a) $f(1, y, z) = 1/\sqrt{1 + y^2 + z^2}$; b) $f(x, 2, z) = -[illegible] - z$, $f(0, y, 3) = -1 - y$; c) $f(1, y, z) = \log yz$, $f(x, 2, 1) = \log 2x$. **78.** a) $f(2, y) = 2y/(4 + y^2)$; b) $f(x, 1) = e^{[illegible]}$; c) $f(0, y) = \arccos y^2$. **79.** a) Rezy sú paraboly; b) rezy sú priamky a paraboly. **80.** a) Vrstevnice sú kružnice; b) vrstevnice sú elipsy; c) vrstevnice sú hyperboly a priamky. **81.** a) rovina $2x + y - z - k = 0$; b) guľová plocha $x^2 + y^2 + z^2 - k = 0$; c) jednodielny rotačný hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. **82.** a) Vrstevnice sú priamky; b) vrstevnice sú hyperboly; c) vrstevnice sú priamky; d) vrstevnice sú kružnice a priamka. **85.** a) $u = x - y$, $v = x + y$, $z = \sqrt{u} + \sqrt{v}$. **86.** $v = x/y$, $w = x/z$, $u = v\,e^w$; **87.** $u = x^2 + y^2 - 2$, $v = 4 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{u} + \log v$; **88.** $v = x + y + z$, $w = x^2 + y^2 + z^2$, $u = (\sin v)/\sqrt{w}$; **89.** $u = xy/(x^2 - y^2)$, $z = \ln u$. **90.** $v = y/(x - y)$, $u = \sqrt{v}$, $z = \operatorname{arctg} u$. **91.** $F(x, y) = x + 2y + x^v$. **92.** $F(x, y) = \sin 3xy + \sqrt{x^2 - y^2}$. **93.** $F(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1,3. Limita a spojitosť funkcie viac premenných

94. 5. **95.** 25. **96.** 0. **97.** Neexistuje. **98.** 0. **99.**, **100.** Neexistuje. **101.** 1/4. **102.** 4. **103.** Neexistuje. **104.** 0. **105.** 1. **106.** e^{-k}. **107.** 1. **108.** 0. **109.** 1. **110.** 1,0. **111.** 0,1/2. **112.** Neexistuje. 1. **113.** 0; 1. **117.** $f(2, 1) = 1$ a $f(x, y) = 4 - x - y$, pre $x \neq 2$, $y \neq 1$. **118.** $f(x, y, z) = 3x + 4y - 2z + 5$ pre $x \neq 0$, $y \neq 1$, $z \neq 2$ a $f(x, y, z) = 5$ pre $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$. **120.** a) Nespojitá vo všetkých bodoch (x, y), pre súradnice ktorých platí $y = x$; **121.** Nespojitá vo všetkých bodoch (x, y), pre súradnice ktorých platí $y^2 = 2x$. **123.** Nespojitá vo všetkých bodoch priamky $y = x$. **124.** Spojitá na celom E_2. **125.** Nespojitá v bode $A = (0, 0)$. **126.** Nespojitá vo všetkých bodoch kružnice $x^2 + y^2 = 4$. **127.** Nespojitá vo všetkých bodoch priamok $y = x$, $y = -x$. **128.** Nespojitá vo všetkých bodoch (m, n), kde m, n sú celé čísla. **129.** Nespojitá vo všetkých bodoch kružnice $x^2 + y^2 = 1$. **130.** Nespojitá v bode $A = (2, 1, 1)$. **131.** Vo všetkých bodoch roviny $x - 2y + 3z = 0$.

1,4. Parciálne derivácie

137. 16π, $16\pi/3$. **138.** 0, 0. **139.** $e \sin 2$, $e \cos 2$. **140.** $36 + 2e^6$, $27 + 3e^6$. **141.** 1, 0. **142.** $0{,}9\sqrt{30}$, $-0{,}6\sqrt{30}$. **143.** 1, -1. **144.** 3/7, 2/7, 1/7, 0. **145.** $f'_x = 9x^2 + 10xy$, $f'_y = 5x^2 - 6y^2$. **146.** $f'_x = 22y^2(2xy^2 + z^3)^{10}$, $f'_y = 44xy(2xy^2 + z^3)^{10}$, $f'_z = 33z^2(2xy^2 + z^3)^{10}$. **147.** $f'_x = yz + zu + uy$, $f'_y = zu + ux + xz$, $f'_z = ux + xy + yu$, $f'_u = xy + yz + zx$. **148.** $f'_x = 2xy - 4y^3/x^5$, $f'_y = x^2 + 3y^2/x^4$. **149.** $f'_x = 1/y + z/x^2$, $f'_y = -x/y^2 + 1/z$, $f'_z = -y/z^2 - 1/x$. **150.** $f'_x = -1/2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, $f'_y = 1/2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$. **151.** $f'_x = -x/u^3$, $f'_y = -y/u^3$, $f'_z = -z/u^3$. **152.** $f'_x = y\cos x - \sin(x - y)$, $f'_y = \sin x + \sin(x - y)$. **153.** $f'_x = 3x^2y^2 - 2x\sin y$, $f'_y = 2x^3y - x^2\cos y + 2^y\ln 2$. **154.** $f'_x = -[2xy(x + y) + \sin(x^2y) \,.\, \cos(x^2y)]/(x + y)^2\sin^2(x^2y)$, $f'_y = -[x^2(x + y) + \sin(x^2y) \,.\, \cos(x^2y)]/(x + y)^2\sin^2(x^2y)$. **155.** $f'_x = -2y\sin(xy - z) + 4y^3(2x - z)$, $f'_y = -2x\sin(xy - z) + 3y^2(2x - z)^2$, $f'_z = 2\sin(xy - z) - 2y^3(2x - z)$. **156.** $f'_x = -y/(x^2 + y^2)$, $f'_y = x/(x^2 + y^2)$. **157.** $f'_x = 1/(1 + x^2)$, $f'_y = -1/(1 + y^2)$. **158.** $f'_x = e^{x/y}/y + yx^{y-1}$, $f'_y = -x\,e^{x/y}/y^2 + x^y\ln x$. **159.** $f'_x = y/|x + y|\sqrt{2y(x - y)}$, $f'_y = -x/|x + y|\sqrt{2y(x - y)}$. **160.** $f'_x = -2y/(x^2 - y^2)$, $f'_y = 2x/(x^2 - y^2)$. **161.** $f'_x = e^{x+2y}y(1 + x)$, $f'_y = e^{x+2y}x(1 + 2y)$. **162.** $f'_x = -1/\sqrt{x^2 + y^2}$, $f'_y = -y/\sqrt{x^2 + y^2}\,(x - \sqrt{x^2 + y^2})$. **163.** $f'_x = (3x^2 + 2xy + 2xz)\,u\ln 2$, $f'_y = x^2u\ln 2$, $f'_z = x^2u\ln 2$. **164.** $f'_x = z/x + \ln y$, $f'_y = x/y + \ln z$, $f'_z = y/z + \ln x$. **165.** $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y\ln x$. **166.** $f'_x = z \,.\, x^{y-1}(y\ln x + 1)$, $f'_y = x^y z\ln^2 x$. **167.** $f'_x = uy^z/x$, $f'_y = zuy^{z-1}\ln x$, $f'_z = uy^z\ln x \,.\, \ln y$. **168.** $f'_x = zx^{1/y-1}/y$, $f'_y = -(zx^{1/y}\ln x)/y^2$, $f'_z = x^{1/y}$. **169.** $f'_x = (y/z)^x\ln(y/z)$, $f'_y = (x/y)(y/z)^x$, $f'_z = -(x/z)(y/z)^x$. **170.** $f'_x = 3yz(3x + 2z)^{yz-1}$, $f'_y = z(3x + 2z)^{yz}\ln(3x + 2z)$, $f'_z = y(3x + 2z)^{yz} \,.\, [\ln(3x + 2z) + 2z/(3x + 2z)]$. **171.** $f'_x = \sqrt{xy}(2x + 3z)^{\sqrt{yz}}[1 + 4x\sqrt{yz}/(2x + 3z)]/2x$, $f'_y = \sqrt{xy}(2x + 3z)^{yz}[1 + \sqrt{yz}\ln(2x + 3z)]/2y$, $f'_z = \sqrt{xy^2z}(2x + 3z)^{yz}[\ln(2x + 3z) + 6z/(2x + 3z)]/2z$. **172.** $f'_x = \cos y(\ln x)^{\cos y - 1}/x$, $f'_y = -\sin y \,.\, (\ln x)^{\cos y}\ln\ln x$. **173.** $f'_x = [u\ln(y \operatorname{tg} z)]/x$, $f'_y = (u\ln x)/y$.. **174.** $f'_x = u\operatorname{tg} z \,.\, \operatorname{cotg} x$, $f'_y = u\cos y \,.\, \ln\operatorname{cotg} z$, $f'_z = u[\ln\sin x - \sin y \,.\, \operatorname{cotg} z]/\cos^2 z$.

175. $f'_x = -u \operatorname{tg} x \,.\, \cos y^{\cos z}$, $f'_y = -u(\cos y)^{\cos z - 1} \sin y \,.\, \cos z \,.\, \ln \cos x$, $f'_z = -u \,.\, \sin z \ln \cos y \,.\, \ln \cos x$, $(\cos y)^{\cos z}$ **176.** $f'_x = x^2 u\,[3 \ln \cos (x - y^2) - x \operatorname{tg} (x - y^2)]$, $f'_y = 2x^3 yu \operatorname{tg} (x - y^2)$, $f'_z = u/z$. **182.** $\pi/6$. **183.** $\alpha = \beta = \operatorname{arctg} 4$. **184.** a) $r = A + (i + 4j)t$; b) $r = A + (j - 6k)t$. **185.** a) $f(X) - f(A) = 2(2\xi_1 + 48) + 2(6\xi_2 + 3\xi_2^2)$, kde $P_1 = (\xi_1, 4)$, $P_2 = (1, \xi_2)$ a $\varrho(P_1, A) < 2\sqrt{2}$, $\varrho(P_2, A) < 2\sqrt{2}$; b) $f(X) - f(A) = -(\pi/2)^2 \sin (\pi\xi_1/2)$, kde $P_1 = (\xi_1, \pi/2)$ a $\varrho(P_1, A) < \pi\sqrt{2}/2$; c) $f(X) - f(A) = 3 - 12/\xi_3^2$, kde $P_3 = (1, 1, \xi_3)$ a $\varrho(P_3, A) < \sqrt{21}$.

1,5. Totálny diferenciál a jeho použitie

186. $\mathrm{d}f(A, X) = -4(x + 1) - 4(y - 1)$. **187.** $\mathrm{d}f(A, X) = 0$. **189.** $2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3)$. **190.** $-(x - \pi/4)/\sqrt{2}$. **191.** Nie je. **194.** $\Delta f(A, X) = -33$, $\mathrm{d}f(A, X) = -64$. **195.** $-0{,}018$. **196.** $0{,}005$. **197.** $\mathrm{d}f = 2(x - y)\,\mathrm{d}x + 2(y - x)\,\mathrm{d}y$. **198.** $\mathrm{d}f = x^4y^3z^2(5yz\,\mathrm{d}x + 4xz\,\mathrm{d}y + 3xy\,\mathrm{d}z)$. **199.** $\mathrm{d}f = -\sin (3x + 2y - 3z)(3\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y - 3\mathrm{d}z)$. **200.** $\mathrm{d}f = (y^2 \cos xyz - xy^3z \sin xyz)\,\mathrm{d}x + (2xy \cos xyz - x^2y^2z \sin xyz)\,\mathrm{d}y - x^2y^3 \sin xyz\,\mathrm{d}z$. **201.** $\mathrm{d}f = (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)/(x^2 + y^2)$. **202.** $\mathrm{d}f = -2(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)/y^2 \sin (2x/y)$. **203.** $\mathrm{d}f = \mathrm{e}^{\alpha x}\,[\cos (\beta y/z)\,\mathrm{d}x - \beta z^{-1} \,.\, \sin (\beta y/z)\,\mathrm{d}y + \beta yz^{-2} \sin (\beta y/z)\,\mathrm{d}z$. **204.** $\mathrm{d}f = 3x^{yz}(yzx^{-1}\mathrm{d}x + z \ln x \,.\, \mathrm{d}y + y \ln x \,.\, \mathrm{d}z)$. **205.** $\mathrm{d}f = (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)/(x^2 + y^2)$. **206.** $\mathrm{d}f = x^2(-2x^{-1}yz\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z)/(x^4 + y^2z^2)$. **207.** $9{,}506$. **208.** $434{,}592$. **209.** $1{,}10$. **210.** $1{,}38296$. **211.** $0{,}555$. **212.** $0{,}005$. **213.** $\mathrm{d}u = -0{,}8$ cm, $\mathrm{d}P = -0{,}30\ \mathrm{m}^2$. **214.** $70{,}37\ \mathrm{cm}^3$. **215.** $\pi(ag - bl)/g\sqrt{lg}$. **216.** $4x + 2y - z - 3 = 0$; $(x - 1)/4 = (y - 1)/2 = (z - 3/-1$. **217.** $5x + y - z + 3 = 0$; $(x - 1)/5 = y = (z - 2)/-1$. **218.** $2x + y - z - 2 = 0$; $(x - 1)/2 = y - 2 = (z - 2)/-1$. **219.** 5. **220.** $x + y + z \pm \sqrt{50} = 0$. **221.** $4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$.

1,6. Parciálne derivácie zloženej funkcie

222. 4π. **223.** $\operatorname{sgn}\left[\dfrac{t \cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sqrt{\sin t}\right]$. **224.** $12t^{\sin t - 1}\ln t$. **225.** $\dfrac{2 + \mathrm{e}^t(2 + t \ln t)}{2t\sqrt{1 + \mathrm{e}^t}}$, $t > 0$. **226.** a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2}$, b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yu$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = yu + xu\varphi'(x) + xy\left[\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \varphi'(x)\right]$. **227.** $\mathrm{e}^{\sin^2 x}\left[(1 + \sin^2 x)\cos x - \dfrac{\sin^4 x}{\cos x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$. **228.** $\mathrm{e}^{3x} \sin x$. **229.** $2\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x$. **230.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y \cos y \cdot (\cos y - \sin y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 \sin^2 y(\sin y - 2\cos y) + x^3 \cos^2 y(\cos y - 2 \sin y)$. **231.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^{-2} \cdot \ln(3x - 2y) + 3x^2/y^2(3x - 2y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2x^2y^{-3} \ln (3x - 2y) - \dfrac{2x^2}{y^2(3x - 2y)}$. **232.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$. **233.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x + y)^2} \operatorname{arctg} (xy + x + y) + \dfrac{1}{1 + (xy + x + y)^2} \cdot \dfrac{xy^2 + xy}{x + y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x + y)^3} \operatorname{arctg} (xy + x + y) + \dfrac{1}{1 + (xy + x + y)^2} \cdot \dfrac{x^2y + xy}{x + y}$. **234.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{(x^2 + y^2)/xy} \cdot \dfrac{x^4 - y^4 + 2x^3y}{x^2y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{e}^{(x^2 + y^2)\, x/y}\, \dfrac{y^4 - x^4 + 2xy^3}{xy^2}$. **235.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2(x \sin^2 y - y^2 \sin x \cos x)}{y^2 \cos^2 x + x^2 \sin^2 y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2(y \cos^2 x + x^2 \sin y \cos y)}{y^2 \cos^2 x + x^2 \sin^2 y}$. **236.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v}$. **237.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial z}{\partial u} + y\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial u} + x\dfrac{\partial z}{\partial v}$. **238.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\left[x + \dfrac{\ln (x + x + z)}{x + y + z}\right]$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos y + \dfrac{2 \ln (x + y + z)}{x + y + z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3 + \dfrac{2 \ln (x + y + z)}{x + y + z}$. **239.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3 + \dfrac{2x(x^2 - 3y + z)}{x^2 + y^2 + z^2} + 2x \ln (x^2 + y^2 + z^2)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -1 + \dfrac{2y(x^2 - 3y + z)}{x^2 + y^2 + z^2} - 3 \ln (x^2 + y^2 + z^2)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z + \dfrac{2z(x^2 - 3y + z)}{x^2 + y^2 + z^2} + \ln (x^2 + y^2 + z^2)$. **240.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2}{r^2 + v + s^2}\,[ur^2 \ln 2 + xyz + s \cos (x + y + z)]$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{r^2 + v + s^2}[4r^2y \ln 2 + x^2z + 2s\cos(x + y + z)]$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{r^2 + v + s^2}[2r^2 \ln 2 + x^2y + 2s\cos(x + y + z)]$, kde $r = 2^{x + y^2 + z}$, $v = x^2yz$, $s = \sin(x + y + z)$. **241.** $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{y}{\sqrt{z}}\left(\dfrac{x}{4|t|} - \dfrac{x}{v} - vw\right)\operatorname{tg}\dfrac{xy}{\sqrt{z}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{y}{\sqrt{z}}\left(\dfrac{x}{4|v|} + \dfrac{xt}{v^2} - tw\right).\operatorname{tg}\dfrac{xy}{\sqrt{z}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial w} = -\dfrac{y}{\sqrt{z}}\left(\dfrac{x}{4|w|} + tw\right)\operatorname{tg}\dfrac{xy}{\sqrt{z}}$, kde $x = tvw$, $y = e^{t/v}$, $z = \sqrt{tv/w}$. **242.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r} + 3\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos x \sin y \sin z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial u}{\partial s} - \dfrac{\partial u}{\partial t}\sin x . \cos y \sin z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial u}{\partial r} - 2\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\sin x \sin y \cos z$.

1,7. Parciálne derivácie vyšších rádov

251. $f''_{xx} = 6x - 36x^2y$, $f''_{xy} = f''_{yx} = -12x^3$,*) $f''_{yy} = 20y^3$. **252.** $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 0$ $f''_{xy} = z$, $f''_{yz} = x$, $f''_{xz} = y$. **253.** $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 0$, $f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 1$. **254.** $f''_{xx} = 6(x^2 - y^2)(5x^2 - y^2)z^2$, $f''_{yy} = 6(x^2 - y^2)(5y^2 - x^2)z^2$, $f''_{zz} = 2(x^2 - y^2)^3$, $f''_{xy} = -24(x^2 - y^2)xyz^2$, $f''_{yz} = -12yz(x^2 - y^2)^2$, $f''_{xz} = 12xz(x^2 - y^2)^2$. **255.** $f''_{xx} = 2/3x^3y$, $f''_{xy} = 1/3x^2y^2$, $f''_{yy} = 2/3xy^3$. **256.** $f''_{xx} = 2y/x^3$, $f''_{xy} = 1 - 1/x^2$, $f''_{yy} = 0$. **257.** $f''_{xx} = (u^2 - x^2)/u^3$, $f''_{yy} = (u^2 - y^2)/u^3$, $f''_{zz} = (u^2 - z^2)/u^3$, $f''_{xy} = -xy/u^3$, $f''_{yz} = -yz/u^3$, $f''_{xz} = -xz/u^3$, kde $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **258.** $f''_{xx} = a^2u$, $f''_{yy} = b^2u$, $f''_{zz} = c^2u$, $f''_{xy} = abu$, $f''_{yz} = bcu$, $f''_{xz} = acu$, kde $u = e^{ax + by + cz}$. **259.** $f''_{xx} = -e^{2y}\sin x$, $f''_{xy} = 2e^{2y}\cos x$, $f''_{yy} = 4e^{2y}\sin x$. **260.** $f''_{xx} = y^2z^2u\ln^2 2$, $f''_{yy} = x^2z^2u\ln^2 2$, $f''_{zz} = x^2y^2u\ln^2 2$, $f''_{xy} = (z + xyz^2\ln 2)u\ln 2$, $f''_{xz} = (y + xy^2z\ln 2)u\ln 2$, $f''_{yz} = (x + x^2yz\ln 2)u\ln 2$, kde $u = 2^{xyz}$. **261.** $f''_{xx} = 2(1 - x^2)/(1 + x^2)^2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2(1 + y^2)/(y^2 - 1)^2$. **262.** $f''_{xx} = 2(y^2 + z^2 - x^2)/v^2$, $f''_{yy} = 2(x^2 + z^2 - y^2)/v^2$, $f''_{zz} = 2(x^2 + y^2 - z^2)/v^2$, $f''_{xy} = -4xy/v^2$, $f''_{yz} = -4yz/v^2$, $f''_{xz} = -4xz/v^2$, kde $v = x^2 + y^2 + z^2$. **263.** $f''_{xx} = -\cos(x - y)$, $f''_{xy} = 1 + \cos(x - y)$, $f''_{yy} = -\cos(x - y)$. **264.** $f''_{xx} = (2 - y)\cos(x + y) - x\sin(x + y)$, $f''_{xy} = (1 - y)\cos(x + y) - (1 + x)\sin(x + y)$, $f''_{yy} = -(2 + x)\sin(x + y) - y\cos(x + y)$. **265.** $f''_{xx} = -2xy/v^2$, $f''_{xy} = (x^2 - y^2)/v^2$, $f''_{yy} = 2xy/v^2$, kde $v = x^2 + y^2$. **266.** $f''_{xx} = y(y - 1)x^{y-2}$, $f''_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$, $f''_{yy} = x^y\ln^2 x$, $x > 0$. **267.** $f''_{xx} = x^{x/y-1}[y + x(1 + \ln x)^2]/y$, $f''_{xy} = -x\ln x . (1 + \ln x)x^{x/y}/y^{-2}$, $f''_{yy} = (x^{x/y+2}\ln^2 x)/y^3$. **268.** $f''_{xx} = uy^z(y^z - 1)/x^2$, $f''_{yy} = uzy^{z-2} . (z - 1 + zy^z\ln x)\ln x$, $f''_{zz} = uy^z(1 + y^z\ln x) . \ln x . \ln^2 y$, $f''_{xy} = uzy^{z-1}(1 + y^z\ln x)/x$, $f''_{yz} = uy^{z-1}(\ln x) \times . [1 + z\ln y(1 + y^z\ln x)]$, $f''_{xz} = uy^z\ln y . (1 + y^z\ln x)/x$. **269.** nie. **270.** áno. **271.** áno. **272.** áno. **273.** $f'''_{xxx} = 24x + 12y$, $f'''_{xxy} = 12x - 8y$, $f'''_{xyy} = -8x + 18y$, $f'''_{yyy} = 18x - 24y$. **274.** $e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$. **275.** $(x^2y^3z - 1) . \sin(xyz) - 3xyz\cos(xyz)$. **276.** 0. **277.** $12(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)/(x^2 + y^2)^4$. **278.** $z'''_{xxx} = \sin(\sin y + x)$, $z'''_{xxy} = (\cos y)\sin(\sin y + x)$, $z'''_{yyy} = [\sin(\sin y + x)](\cos^3 y + \cos y) + 3\cos(\sin y + x) . \sin y . \cos y$. **280.** $z^{(5)}_{xxyxy} = 72$, $z^{(7)}_{yxxxyxx} = 0$. **281.** $2(-1)^m(m + n - 1)!(nx + my)/(x - y)^{m+n+1}$. **282.** $4xyz''_{uu} + 2(x^2 + y^2)z''_{uv} + xyz''_{vv} + z'_v$. **283.** 0. **284.** $z''_{xx} = y^2f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv}/y^2$, $z''_{xy} = xyf''_{uu} - xf''_{vv}/y^3 + f'_u - f'_v/y^2$, $z''_{yy} = x^2f''_{uu} - 2x^2f''_{uv}/y^2 + x^2f''_{vv}/y^4 + 2xf'_v/y^3$, kde $u = xy$, $v = x/y$. **285.** $z''_{xx} = f''_{vv}/y^2$, $z''_{xy} = -xf''_{vv}/y^3 + f''_{vw}/yu - f'_v/y^2$, $z''_{yy} = x^2f''_{vv}/y^4 - 2xf''_{vw}/uy^2 + f''_{ww}/u^2 + 2xf'_v/y^3$, $z''_{xu} = -f''_{vw}/u^2$, $z''_{yu} = xf''_{vw}/yu^2 - yf''_{ww}/u^3 - f'_w/u^2$ $z''_{uu} = y^2f''_{ww}/u^4 + 2yf'_w/u^3$, kde $v = x/y$, $w = y/u$. **286.** $f''_{uu} + 4tf''_{uv} + 4t^2f''_{vv} + 6t^2f''_{uw} + 12t^3f''_{vw} + 9t^4f''_{ww} + 2f'_v + 6tf'_w$, kde $u = t$, $v = t^2$, $w = t^3$. **287.** $u''_{xx} = 4x^2f''_{vv} + 2f'_v$, $u''_{yy} = 4y^2f''_{vv} + 2f'_v$, $u''_{zz} = 4z^2f''_{vv} + 2f'_v$, $u''_{xy} = 4xyf''_{vv}$, $u''_{yz} = 4yzf''_{vv}$. **288.** $f^{(n)}(t)a^pb^rc^s$, $p + r + s = n$. **299.** $2xy$. **300.** $2[(x - 1)(y + 1) + (x - 1)(z - 2) + (y + 1)(z - 2)]$. **301.** $-z(x + y - 2)$. **302.** $2(x - 1)^2 + 8(x - 1)(y - 1) + 2(y - 1)^2$. **303.** $(2y/x^3)\,\mathrm{d}x^2 - (2/x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. **304.** $2\,\mathrm{d}x^2 - 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}y^2$. **305.** $[(y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x^2 - 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}y^2]/(x^2 + y^2)^2$. **306.** $(e^{x - y^2} - \cos x)\,\mathrm{d}x^2 - 4y\,e^{x - y^2} \times \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (4y^2 - 2)e^{x - y^2}\,\mathrm{d}x$. **307.** $-y\sin x\,\mathrm{d}x^2 + 2(\cos x - \sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x\cos y\,\mathrm{d}y^2$. **308.** $-\sin(x + y + z)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2$. **309.** $y(y - 1)x^{y-2}\,\mathrm{d}x^2 + 2(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + x^y\ln^2 x\,\mathrm{d}y^2 + yx^{y-1}\,\mathrm{d}^2x + x^y\ln x\,\mathrm{d}^2y$, kde $x = uv$, $y = u + v$, $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x^2 =$

---

*) Vo výsledkoch ďalších úloh nie sú uvedené vzťahy rovnosti príslušných zmiešaných parciálnych derivácií. Vždy je uvedená iba jedna zmiešaná parciálna derivácia z dvojice navzájom rovných zmiešaných parciálnych derivácií.

$= u^2\,dv^2 + 2uv\,.\,du\,dv + v^2\,dv^2$, $dy = du + dv$, $dy^2 = du^2 + 2\,du\,dv + dv^2$, $d^2x = 2\,du\,dv$, $d^2y = 0$. **310.** $[4x^2g''(u) + 2g'(u)]\,dx^2 + 8xyg''(u)\,dx\,dy + [4y^2g''(u) + 2\,g'(u)]\,dy^2$, kde $u = x^2 + y^2$. **311.** $f''_{uu}\,du^2 + 2f''_{uv}du\,dv + f''_{vv}\,dv^2$, kde $du = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, $dv = m\,dx + n\,dy + p\,dz$. **312.** $6(x - 7)(y - 11)(z + 10)$. **313.** $-9!\,.\,(x + y - 1)^{10}$. **314.** $g^{(n)}(0)\,(x + y + z)^n$. **315.** $\sin(x + 2y^2)\,dx^3 + 12y\sin(x + 2y^2)\,dx^2\,dy + 12[4y^2\sin(x + 2y^2) - \cos(x + 2y^2)]\,dx\,dy^2 + 16y\,.\,[4y^2\sin(x + 2y^2) - 3\cos(x + 2y^2)]\,dy^3$. **316.** $24[dx^4 - 3\,dx^2\,dy\,dz + 2\,dx\,dy\,dz^2 - 4\,dy^3\,dz + dy^4]$. **317.** $6(dx - 2\,dy - 3\,dz)^4/(x - 2y - 3z)^4$. **318.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3 x^k \times y^{n-k}\,dx^{n-k}\,dy^k$.

1,8. Taylorova veta pre funkcie viac premenných

319. $f(x, y) = -4 - (y - 2) + 3(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 2) + (y - 2)^2$. **320.** $f(x, y, z) = 3(x - 1) - 3y - 3(z - 1) + 3(x - 1)^2 - 3(z - 1)^2 - 3(x - 1)\,y - 3(z - 1)\,y + (x - 1)^3 + y^3 - (z - 1)^3 - 3(x - 1)\,y(z - 1)$. **321.** $f(x, y) = (x - 1) + (y - 1) + 3(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1) + 3(y - 1)^2 + (x - 1)^3 + (y - 1)^3$. **322.** $1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + d^3f(\Theta x, \Theta y)/6$. **323.** $1 - (x^2 + y^2)^2/2 + d^6f(\Theta x, \Theta y)/6!$. **324.** $y + xy + x^2y/2 - y^3/6 + d^4f(\Theta x, \Theta y)/4!$. **325.** $xy - xy^2/2 + x^2y/2 + x^2 + d^4f(\Theta x, \Theta y)/4!$. **326.** $1/2 + (x - \pi/4)/2 - (y - \pi/4)/2 - [(x - \pi/4)^2 - 2(x - \pi/4)(y - \pi/4) + (y - \pi/4)^2]/4$. **327.** $1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + (x - 1)^2(y - 1)/2$. **328.** 1,1021. **329.** $\sqrt{2}/4\,[1 + (x - \pi/4) + (y - \pi/4) + (z - \pi/4) + (1/2)(x - \pi/4)^2 - (1/2)(y - \pi/4)^2 - (1/2)(z - \pi/4)^2 + (x - \pi/4)(y - \pi/4) + (x - \pi/4)(z - \pi/4) + (y - \pi/4)(z - \pi/4)$. **330.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(2x + 4y + 3z - \pi)^{2k}/(2k)!$, $L_n = (2x + 4y + 3z - \pi)^{n+1}[\cos(2\Theta x + 4\Theta y + 3\Theta z - \Theta\pi + (n + 3)\,\pi/2]/(n + 1)!$, $0 < \Theta < 1$. **331.** $\sum_{k=0}^{n}(x + y + z)^k/k! + (x + y + z)^{n+1}\,e^{\Theta(x+y+z)}/(n + 1)!$, $0 < \Theta < 1$. **332.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}(x + y + 3z - 1)^k/k! + (-1)^n(x + y + 3z - 1)^{n+1}/(n + 1)\,[1 + \Theta(x + y + 3z - 1)]^{n+1}$.

1,9. Lokálne extrémy funkcie viac premenných

333. V bode $A = (4, -2)$ je maximum*) 13. **334.** V bode $A = (1, 1)$ je minimum 1. **335.** V bode $A = (1, 4)$ je minimum -21. **336.** V bode $A = (2, -3)$ je maximum 4. **337.** V bode $A = (3/4, 0)$ je maximum $29/4$. **338.** V bode $A = (-2, -3/2)$ je minimum $3/4$. **339.** Nemá extrémy. **340.** Nemá extrémy. **341.** Minimum v bodoch priamky $z = 0$, $x - y + 2 = 0$. **342.** V bode $A = (6, 6)$ je minimum -1. **343.** V bode $A = (1, 1)$ je minimum -82, v bode $B = (-1, -1)$ je maximum 82. **344.** V bodoch $A_1 = (-2, 0)$, $A_2 = (0, 2)$ je minimum -2. **345.** V bode $A = (4, 6)$ je maximum 6 912. **346.** V bode $A = (5/2, 4/5)$ je minimum 30. **347.** Maximum $(a/3)^{3/2}$ v bode $A = (2a/3, 2a/3)$. **348.** Maximum $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ v bode $A = (b/a, c/a)$. **349.** Minimum $-1/2e$ v bodoch $A = (1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$, $B = (-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$, maximum $1/2e$ v bodoch $C = (1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$, $D = (-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$. **350.** Minimum 0 v bode $A = (0, 0)$, maximum $2/e$ v bodoch $A = (0, 1)$, $B = (0, -1)$. **351.** Minimum 0 v bode $A = (-1, -1)$. **352.** Stacionárne body $A = [(-1)^{m+1}\pi/12 + (m + n)\,\pi/2,\ (-1)^{m+1}\,\pi/12 + (m - n)\,\pi/2]$, kde m, n sú celé čísla. Maximum ak m, n sú nepárne, minimum ak m, n sú párne. **353.** Minimum -2 v bode $A = (1, -1, 1)$. **354.** Minimum 1 v bode $A = (0, 0, 0)$. **355.** Minimum $-6\,913$ v bode $A = (23, -145, -2)$. **356.** Maximum a^4 v bode $A = (a, a, a)$. **357.** Minimum $3/2$ pre $x = y = z$. **358.** Maximum v bode $A = (a/m, b/m, c/m)$ pre

*) Vo výsledkoch úloh 333 až 360 pre stručnosť používame namiesto lokálne maximum, resp. lokálne minimum iba maximum, resp. minimum. Podobne vo výsledkoch úloh 361 až 372 namiesto viazané lokálne maximum resp. minimum hovoríme len o maxime, resp. minime.

$m = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$. **359.** Maximum $[2/(n^2 + n + 2)]^{(n^2+n+2)/2}$ pre $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2/(n^2 + n + 2)$. **360.** Čísla $a, x_1, x_2, \ldots x_n, b$ tvoria geometrickú postupnosť s koeficientom $q = \sqrt[n+1]{b/a}$. **361.** Maximum 1/4 v bode $A = (-1/2, 3/2)$. **362.** Maximum v bode $A = (-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, minimum v bode $B = a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$. **363.** Minimum $p^2q^2/(p^2 + q^2)$ v bode $A = (pq^2/(p^2 + q^2), p^2q/(p^2 + q^2))$. **364.** Minimum $2a^n$ v bode $A = (a, a)$. **365.** Extrém $1 + (-1)^k/\sqrt{2}$ v bode $A = (5\pi/8 + k\pi/2, 3\pi/8 + k\pi/2)$, kde k je celé číslo. **366.** Maximum v bodoch $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, -1)$, $C = (-1, 1, -1)$, $D = (-1, -1, 1)$; minimum v bodoch $E = (-1, -1, -1)$, $F = (-1, 1, 1)$, $G = (1, -1, 1)$, $H = (1, 1, -1)$. **367.** Minimum v bode $A = (k\sqrt{a}, k\sqrt{b}, k\sqrt{c})$, kde $k = \sqrt{a} + b\sqrt{} + \sqrt{c}$. **368.** Maximum 1/8 v bode $A = (2\pi/\sqrt{3}, 2\pi/\sqrt{3}, 2\pi/\sqrt{3})$. **369.** Maximum na^m pre $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$. **370.** Maximum a^4 pre $x = y = z = t = a$. **371.** Maximum 112/27, minimum 4. **372.** Minimum 5 v bode $A = (0, -1, 2)$. **373.** Minimum -19 v bode $P = (0, 3)$, maximum -1 v bode $Q = (0, 0)$. **374.** Maximum 4 v bode $A = (1, 2)$, minimum -64 v bode $B = (2, 4)$. **375.** Maximum 13 v bode B; minimum -1 v bodoch A a $E = (1, 1)$. **376.** Minimum 0, v bode O, maximum 1 v bodoch $A = (1,0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$, $D = (0, -1)$. **377.** Maximum 1 v bodoch A, B, C, D; minimum $-1/8$ v bodoch $P = (\pi/3, \pi/3)$, $Q = (2\pi/3, 2\pi/3)$. **378.** Maximum 4 v bodoch $A = (2, 0)$, $B = (-2, 0)$; minimum -4 v bodoch $C = (0, -2)$, $D = (0, 2)$. **379.** Maximum $3/e$ v bode $A = (\pm 1, 0)$; minimum 0 v bode $B = (0, 0)$. **380.** Maximum $1 + \sqrt{2}$; minimum $-1/2$. **381.** a/n. **382.** Extrémy λ sú riešením rovnice $|A - \lambda E| = 0$, kde $A = (a_{ij})_1^n$. **385.** Trojuholník so stranami $s/2$, $3s/4$, $3s/4$; obdĺžnik so stranami $2s/3$, $s/3$. **386.** Rovnobežnosten so stranami $2R/\sqrt{3}$, $2R/\sqrt{3}$, $R/\sqrt{3}$. **387.** Výška valca je $h/3$, kde h je výška kužeľa. **388.** Kocka s hranou $a/\sqrt{3}$. **389.** Vzdialenosť $\varrho = |Ax + By + C|/\sqrt{A^2 + B^2}$. **390.** $Q_1 = [(a_1b_2 - a_2b_1)/(b_1 + b_2), 0]$, $Q_2 = [0, (a_1b_2 - a_2b_1)/(a_1 + a_2)]$, $L_{\min} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$. **391.** Rovnostranný valec, t. j. $h = 2r$, kde h je výška valca, r polomer základne. **392.** $x/a + y/b + z/c = 3$. **393.** Bod $A = (x, y)$ je ťažisko, kde $x = (\sum_{i=1}^{n} m_ix_i)/M$, $y = (\sum_{i=1}^{n} m_iy_i)/M$ a $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. **394.** $h = \sqrt{S}/4\sqrt{3}$, $\alpha = \pi/3$. **395.** $I_1 : I_2 : I_3 : \ldots : I_n = 1/R_1 : 1/R_2 : 1/R_3 : \ldots : 1/R_n$.

1,10. Implicitná funkcia

396. a) Nekonečne veľa; b) dve: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$. **397.** a) Nekonečne mnoho; b) štyri: $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$; c) $y = x$, $y = |x|$; d) štyri: $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$. **398.** Pretože $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A = 0$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = -\sqrt{x}$. **399.** $-1, -3$. **400.** $0, -2/3$. **401.** $-1, -2/3, -2/3$. **402.** $2/3, 14/27, 98/81$. **403.** $x = 2\sqrt[3]{2}$. **404.** $\pm bx/a\sqrt{x^2 - a^2}$, $|x| > a$. **405.** $(4y - 2x)/(3y^2 - 4x)$. $3y^2 - 4x \neq 0$ a $y = f(x)$. **406.** $f'(x) = 2x/2^y \ln 2$, kde $y = f(x)$. **407.** $f'(x) = -\sin y/(x\cos y + \sin y - 2\sin y)$, $x\cos y + \sin y - 2\sin y \neq 0$, $y = f(x)$. **408.** $y' = 1/(1 - 4\cos y)$, $y'' = -4\sin y/(1 - 4\cos y)^3$, pričom $1 - 4\cos y \neq 0$, $y = f(x)$. **409.** $y' = (x - y)/(x + y)$, $y'' = (-2x^2 + 2y^2 + 4xy)/(x + y)^3$, pričom $x + y \neq 0$, $y = f(x)$. **410.** $y' = [y^2(1 - \ln x)]/[x^2(1 - \ln y)]$, $y'' = \frac{y^2[(1 - \ln x)^2y - 2(x - y)(1 - \ln x)(1 - \ln y) - x(1 - \ln y)^2]}{x^4(1 - \ln y)^3}$, pričom $1 - \ln y \neq 0$, $y = f(x)$. **411.** $y' = y/(1 + 2y^2)$, $y'' = (y + 2y^3 - 4y^2)/(1 + 2y^2)^3$, pričom $1 + 2y^2 \neq 0$, $y = f(x)$. **412.** $y' = (x + y)/(x - y)$, $y'' = 2(x^2 + y^2)/(x - y)^3$, $x \neq y$, $y = f(x)$. **413.** $(1 + y^2)/(x + \operatorname{arctg} y)^2$, $y'' = \{2[y(x + \operatorname{arctg} y) + 1]y'\}/(x + \operatorname{arctg} y)^3$, pričom $\operatorname{arctg} y \neq x$, $y = f(x)$. **414.** $-5/2, 5/2, 2, -2$. **415.** $-1, 0$. **416.** $0, 0, 4/15, 0, 4/15$. **417.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x + y + 1}{6z + y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 4y - z}{y + 6z}$, pričom $6z + y \neq 0$, $z = f(x, y)$. **418.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -c^2x/a^2z$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$, pričom $z \neq 0$, $z = f(x, y)$. **419.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$, $\cos x - y\sin z \neq 0$, $z = f(x, y)$. **420.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^{z+1}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^{z+1}}$, $z = f(x, y)$. **421.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y + z}{x + y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -$

$-\frac{x+z}{x+y}$, $x+y\neq 0$, $z=f(x,y)$. **422.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-4x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4\,\frac{z^2+4x^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{2y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\,\frac{z^2+2y^2}{z^3}$, $z\neq 0$, $z=f(x,y)$. **423.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{1+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2-4x+z+5}{(1+z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2z+2-4y^2}{(1+z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2y(2-x)}{(1+z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{2y(2-x)}{(1+z)^3}$, $z\neq -1$, $z=f(x,y)$. **424.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy-z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy-z^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy^3z}{(xy-z^2)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^3yz}{(xy-z^2)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z^3x^2y+z^3xy-2z^2y^3-z^4x-z^5}{(xy-z^2)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{x^2y^2z-2z^3x^3-z^5}{(xy-z^2)^3}$, $xy-z^2\neq 0$, $z=f(x,y)$. **425.** $\mathrm{d}z=-2(x-6)-\frac{2}{3}(y-z)$, $\mathrm{d}^2z=-\frac{5}{3}(x-6)^2-\frac{8}{9}(x-6)(x-2)-\frac{13}{27}(x-2)^2$. **426.** $\mathrm{d}z=-\frac{e}{e-1}[(x-2)+(y+e)]$, $\mathrm{d}^2z=-\frac{e}{(e-1)^3}\cdot[(x-2)^2+2(x-2)(y+e)+(y+e)^2]$. **427.** $\mathrm{d}z=\frac{1}{xy-1}[(1-yz)\,\mathrm{d}x+(1-xz)\,\mathrm{d}y]$. **428.** $\mathrm{d}z=\frac{z\,e^{x/z}}{z^2+yx\,e^{x/z}}(y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y)$. **429.** $\mathrm{d}z=\frac{\sin z\,\mathrm{d}x+\cos z\,\mathrm{d}y}{e^z+y\sin z-x\cos z}$. **430.** $\mathrm{d}z=\frac{(1-5x^4)\,\mathrm{d}x+(1-5y^4)\,\mathrm{d}y}{5z^4-1}$. **431.** $\mathrm{d}z=-\frac{1}{x+y}[(y+z)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y]$, $\mathrm{d}^2z=\frac{2}{(x+y)^2}[(y+z)\,\mathrm{d}x^2+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(x+z)\,\mathrm{d}y^2]$. **432.** $\mathrm{d}z=-\frac{1}{3z}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{9z^3}[(3z^2+x^2)\,\mathrm{d}x^2+2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(3z^2+y^2)\,\mathrm{d}y^2]$. **433.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_2'}{F_2'-F_3'}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$. **434.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial u}z\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial u}x+\frac{\partial F}{\partial v}y\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial v}z\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial u}x+\frac{\partial F}{\partial v}y\right)$. **435.** $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$, $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$. **436.** $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$. **437.** $y_{\max}=y(-1)=-1$, $y_{\max}=y(1)=-1$, $y_{\min}=y(0)=\sqrt[3]{-2}$. **438.** $y_{\min}=y(-3)=-2$, $y_{\max}=y(-1)=0$. **439.** Funkcia je v bode A konkávna. **440.** $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. **441.** $x+y-2=0$, $x-y=0$. **442.** $14x-13y+12=0$, $13x+14y-41=0$. **443.** $z_{\max}=6$ v bode $A=(1,\ 1)$. **444.** Lokálne minimum $z=-1/2$, $x^2+y^2=3/4$. **445.** $x-2y-3z-6=0$. **446.** $x-6y-6z+11=0$. **447.** $x+y-2z=0$. **448.** $x+y-4z=0$. **449.** $6x+4y+z\pm 21=0$.

2. Základy vektorovej analýzy

2,1. Vektorová funkcia skaláru a vektorová funkcia viac premenných

450. a) $i+j$, $\frac{1}{2}i+j$, $\frac{1}{3}i+j$, $\frac{1}{4}i+j$, $\frac{1}{5}i+j$; b) $\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}k$, $\frac{1}{4}i+j+\frac{2}{3}k$, $\frac{1}{8}i+\frac{3}{4}k$, $\frac{1}{16}i+2j+\frac{4}{5}k$, $\frac{1}{32}i+\frac{5}{6}k$; c) $\frac{1}{4}i+j+k$, $\frac{1}{7}i+\sqrt{2}\,j+4k$, $\frac{1}{10}i+\sqrt[3]{3}\,j+9k$, $\frac{1}{13}i+\sqrt[4]{4}\,j+16k$, $\frac{1}{16}i+\sqrt[5]{5}\,j+25k$. **451.** a) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}i+\frac{2-(-1)^{2n+1}}{2n+1}j\right\}_{n=1}^{\infty}$; b) $\left\{\frac{1}{2+3/2^n}i+\frac{4.2^n+1}{3-2.2^n}j+\frac{2^{2^n}+3}{1-3.2^{2^n}}k\right\}_{n=1}^{\infty}$. **453.** a) $ei+j$; b) $\frac{1}{2}i+j+k$; c) $e^4i+9j+k$; d) $27i+\frac{3}{2}k$; e) $i+j+k$; f) neexistuje. **454.** a) úsečka AB, kde $A=(0,\ 5)$, $B=(1,\ 8)$; b) priamka určená bodmi $A=(0,\ 5)$, $B=(1,\ 8)$; c) polkružnica $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$; d) časť paraboly $y=x^2$, $x\geq 0$; e) polpriamka so začiatkom v bode $A=(1,\ -2,\ 3)$; f) skrutkovica na valci $x^2+y^2=1$. **455.** a) $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$; b) $\langle -1,\ 0\rangle$:

c) $\langle 2, 3\rangle$; d) $\{1\} \cup \langle 3, 4\rangle$. **456.** a) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (1 + \sqrt{3})\,\mathbf{k}$, nemá zmysel; b) $5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$; c) $2(9 + 2\sqrt{6})$; d) $4(48\sqrt{3} + 1)\,\mathbf{i} - 2(4\sqrt{3} - 5)\,\mathbf{j} + 762\mathbf{k}$; e) $[(2 - t)\sqrt{t} - 3\sqrt{3}\,t^2]\,\mathbf{i} - [(t^2 - 1)\sqrt{t} - 2\sqrt{3}\,t^2]\,\mathbf{j} + (3t^2 + 5t - 4)\,\mathbf{k}$. **457.** a) 1; b) $\sqrt{t^4 - 6t^3 + 10t^2 - 16t + 17}$. **458.** a) $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$; b) $2\mathbf{i}$; c) $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$; d) neexistuje. **459.** a) spojitá; b) nespojitá; c) nespojitá. **460.** $f(t) = 5t^2\mathbf{i} + 6\,e^t\mathbf{j} + \dfrac{\sin 2t}{t}\,\mathbf{k}$, pre $t \neq 0$ a $f(t) = 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ pre $t = 0$. **461.** a) $t = 0$, $t = 1$; b) $t = \sqrt{2}$, $t = -\sqrt{2}$. **462.** a) $2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; b) $\dfrac{2}{(t + 1)^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{t^2 + 1}{1 - t^2}\,\mathbf{j}$, $t \neq -1$, $t \neq 1$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{2t\sqrt{t}}\,\mathbf{k}$, $t > 0$; d) $\sin 2t\mathbf{i} + \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathbf{j}$, pre $t \neq (2k + 1)\,2\,\pi$, kde k je celé číslo. **463.** a) $\sin 2t$, $\mathbf{i} + \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $t > 0$; b) $\dfrac{1 + t^2}{(1 - t^2)^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{3\,\mathrm{tg}\,t}{\cos t}\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{1 - t}\,\mathbf{k}$, $t \neq 1$, $t \neq -1$, $t \neq (2k + 1)\,\pi/2$, kde k je celé číslo; c) $\dfrac{2\ln t}{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{1 + 4t^2}\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{t^2}\,\mathbf{k}$, $t > 0$; d) $2^{2t+1}\ln 2\,\mathbf{i} - 2^{1-2t}\ln 2\mathbf{j} + 2\cosh 2t\,\mathbf{k}$;

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)^3}}\left[2t\mathbf{i} + 2\sin\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathbf{j} - 3t\cos\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathbf{k}\right].$$

465. a) $\dfrac{2}{t}\sin t - t^2 2^t \ln 2 + \cos t \ln t^2 - 2t2^t$; b) $(2t + 2^t \ln 2 \sin t + 2t \ln t^2 + 2^t \cos t)\,\mathbf{k}$. **467.** a) $f''(t) = -f(t)$; b) $f''(t) = -\omega^2 f(t)$; c) $8(e^{2t}\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j})$. **468.** a) 0; b) $-36(t \sin 6t + 12t^2 \cos 6t + 18t^3 \sin 6t - 9t^4 \cos 6t)$. **469.** a) $f'(t) = 4t^3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $f''(t) = 12t^2\mathbf{i}$, $f'''(t) = 24t\mathbf{i}$, $f^{(4)}(t) = 24\mathbf{i}$, $f^{(n)}(t) = \mathbf{0}$, $n = 5, 6, \ldots$; b) $(-1)^{n-1}(n - 1)!\,t^{-n}\mathbf{i} + 3 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (3 - n + 1)\,t^{3-n}\mathbf{j}$, kde n je prirodzené číslo; c) $2n!(1 - t)^{-n-1}\,\mathbf{i} + (-1)^{n-1}\dfrac{(2n - 2)!}{(n - 1)!\,2^{2n-1}}\,t^{\frac{1}{2} - n}\,\mathbf{j}$, n je prirodzené číslo; d) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n - 1)!}{\ln 3} \cdot t^{-n}\mathbf{i} + (\ln 2)^n 2^t\,\mathbf{j} + 2^n \cos(nx + n\,\pi/2)\mathbf{k}$, n je prirodzené číslo. **470.** a) $\left(8\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \dfrac{e^2}{2}\,\mathbf{k}\right) \cdot (t - 2)$; b) $\left(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \dfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right)(t - 1)$; c) $\left(8\ln 2\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{3}\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right)(t - 3)$. **471.** a) $2\mathbf{r}(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$; b) $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \mathbf{r}\,\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$; c) $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$; d) $\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$. **472.** Implikácia platí aj opačne. Geometrický význam je ten, že dotyčnica v každom bode hodografu funkcie $\mathbf{r}(t)$ je kolmá na sprievodič bodu. **473.** $|\mathbf{r}(t)|\,\omega$; $|\mathbf{r}(t)|\,\omega^2$. **474.** $\omega(e^{\omega t}\mathbf{i} - e^{-\omega t}\mathbf{j})$, $\omega^2(e^{\omega t}\mathbf{i} + e^{-\omega t}\mathbf{j})$. **475.** a) $-2 \cdot \cos t\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{2}\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{c}$; b) $(t - t^{-1} - 2\ln|t|)\,\mathbf{i} + (t^{-1} - \ln|t|)\,\mathbf{j} + \dfrac{7}{12}\,t \cdot \sqrt[7]{t^5}\,\mathbf{k} + \mathbf{c}$; c) $\ln|t|\,\mathbf{i} + \mathrm{tg}\,t\mathbf{j} + 2\,\mathrm{arctg}\,t\mathbf{k} + \mathbf{c}$; d) $\ln|t - 7|\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{5}\ln|1 - 5t|\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{3(3t - 2)}\,\mathbf{k} + \mathbf{c}$. **476.** a) $2\mathbf{j}$; b) $\dfrac{1}{2}\,[(e^2 - 1)\,\mathbf{i} - (e^{-2} - 1)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}]$.

2,2. Derivácia v smere. Gradient

477. $7\sqrt{3} - 2{,}5$. **478.** 6. **479.** 24,8. **480.** 0. **481.** 5. **482.** $52/\sqrt{38}$. **483.** $\dfrac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}l} = \cos\alpha + \sin\alpha$, kde $l = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$; a) $5\pi/4$; b) $\pi/4$; c) $3\,\pi/4$, $7\,\pi/4$. **484.** Zväčšuje. **485.** a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, b) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; c) $\sqrt{3}$; d) $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$. **486.** $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. **487.** $\mathbf{i}/3 + 2\mathbf{j}/3$. **488.** $(7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k})/81$. **489.** $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $\operatorname{grad} f(A)$ je kolmý na os o_x vo všetkých bodoch, v ktorých je $x - yz = 0$. $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{o}$ v bodoch $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, -1, 1)$, $C = (1, -1, -1)$, $D = (-1, 1, 1)$,; $E = (0, 0, 0)$. **490.** $A = (3/4, -1/3)$, $B = (-3/4, 7/3)$. **491.** Všetky body kružnice $x^2 + y^2 = 2/3$. **492.** $3\sqrt{15}/5$. **493.** $\pi/2$. **494.** $(20 - 9y)\,xy\mathbf{i} + (10x^2 - 6x^2y + 5y^4)\,\mathbf{j}$. **495.** $-[xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}]/(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. **496.** $2\mathbf{r}$. **497.** $5r^3\mathbf{r}$. **498.** $-\mathbf{r}/r^3$. **499.** $-2\mathbf{r}/r^4$. **500.** $\mathbf{r}/r^2$. **501.** $\mathbf{a}$. **502.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. **503.** $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}$. **504.** $(1/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2] \cdot [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$. **506.** Paraboly s osami rovnobežnými s osou y, ktoré sa dotýkajú priamky $2x - y + 1 = 0$ v bode $A = (0, 1)$ bez bodu A a polpriamky určené bodom A a priamkou $2x - y + 1 = 0$. **507.** Rotačné elipsoidy s ohniskami v bodoch A, B.

2,3. Divergencia. Rotácia

508. a) div $\mathbf{f} = 0$, rot $\mathbf{f} = -11\mathbf{i}/3 - \mathbf{k}$; b) div $\mathbf{f} = 1$, rot $\mathbf{f} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; c) div $\mathbf{f} = -1$, rot $\mathbf{f} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - (\sin 2 \,.\, \sin 1)\, \mathbf{k}$. **509.** a) div $\mathbf{f} = 2y^2z^3 + 6xyz^2 - 3xy^2z^2$, rot $\mathbf{f} = (-2xyz^3 - 9xy^2z^2)\,\mathbf{i} + (6xy^2z^2 - y^2z^3)\,\mathbf{j} + (3y^2z^2 - 4xyz^3)\,\mathbf{k}$; b) div $\mathbf{f} = -xy(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - xz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$, rot $\mathbf{f} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}[(x^2 + y^2 + xy)\,\mathbf{i} + (y^2 + z^2 + zy)\,\mathbf{j} + (x^2 + z^2 + xz)\,\mathbf{k}]$. **510.** 3. **511.** 3α. **512.** $2/r$. **513.** $3f(r) + rf'(r)$. **514.** $2\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$. **515.** 0. **516.** 0. **517.** 0. **518.** $2\mathbf{a}$. **519.** $(\mathbf{r} \times \mathbf{a})/r^3$. **520.** $nr^{n-2}(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$. **521.** $\mathbf{r}(n^2 + 3n)\, r^{n-2}$. **522.** 0. **523.** $\mathbf{a}/r^3 - 2\mathbf{r}(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{r})/r^4$. **524.** $1/r^2$. **525.** $n(n + 1)\, r^{n-2}$. **526.** $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})\,(n^2 + 3n)\, r^{n-2}$. **527.** $\mathbf{a}/r^2$. **528.** $2/r^4$. **529.** $-8(\mathbf{a} \times \mathbf{r})/r^3$.

3. Základy diferenciálnej geometrie

3,1. Krivky a ich rovnice

549. Parabola. **550.** Časť priamky $x - y = 2$ pre $x \geq 2$. **551.** Úsek priamky $x/a + y/b = 1$ medzi súradnicovými osami. **552.** Hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. **553.** Traktrisa $x = a \ln[(a - \sqrt{a^2 - y^2})/y] + \sqrt{a^2 - y^2}$. **554.** $x = a(1 - t^2)/(1 + t^2)$, $y = 2at/(1 + t^2)$. **555.** $x = 3at/(1 + t^3)$, $y = 3at^2/(1 + t^3)$. **557.** a) $x = at(t^2 + 1)/(t^4 + 1)$, $y = at(t^2 - 1)/(t^4 - 1)$. *Návod:* Ľubovoľný bod lemniskáty vyjadrite ako jej priesečník s kružnicou $x^2 + y^2 = at(x - y)$, kde t je parameter. b) $x = (a \cos^2 t)^{1/m}$, $y = (b \sin^2 t)^{1/m}$. **559.** Dioklesova kisoida $y^2 = -x^3/(p + x)$ alebo v polárnych súradniciach $\varrho = -p\,(\sin^2 \varphi)/\cos \varphi$. **560.** $x^2(x + a)^2 + y^2 = a^2y^2$, alebo $\mathbf{r} = (a/\cos \varphi \pm a \operatorname{tg} \varphi)\, \mathbf{e}^0$. **561.** $x^2y^2 + (x + a)^2\,(x^2 - b^2) = 0$ alebo $\mathbf{r} = (a/\cos \varphi \pm b)\, \mathbf{e}^0$. **562.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ alebo parametricky $x = 3at/(1 + t^3)$, $y = 3at^2/(1 + t^3)$. **563.** $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$ alebo v polárnych súradniciach $\varrho = 2a \cos \varphi \pm b$. **564.** $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$ alebo $\varrho^4 - 2c^2\varrho^2 \sin 2\varphi = a^4 - c^4$. Ak $a = c$ je to lemniskáta. **565.** $(x^2 + y^2)^2 - (2m^2 + c)\,x^2 + (2m^2 - c)\,y^2 + m^4 - d = 0$. **566.** $(b^2 - a^2)\,\varrho^2 + 2\varrho(ac - b^2d \cos \varphi) + b^2d^2 - c^2 = 0$, kde $d = \varrho(F_1, F_2)$, $a\sqrt{x^2 + y^2} + b\sqrt{(c - d)^2 + y^2} = c$. **567.** $y = a^3/(x^2 + a^2)$ alebo $x = a \operatorname{tg} t$, $y = a \cos^2 t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. **568.** $(x^2 + y^2)\, y^2 = a^2x^2$ alebo $\varrho = a \operatorname{cotg} \varphi$. **569.** $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$ alebo $\varrho = a \sin 2\varphi$. **570.** $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(-t \cos t + \sin t)$. **571.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $x + \sqrt{y(2a - y)} = a \arccos[(a - y)/a]$. **572.** $x = (a \pm r) \cos \varphi \mp r \cos[(a \pm r)\, \varphi/r]$, $y = (a \pm r) \sin \varphi - r \sin[(a \pm r)\, \varphi/r]$; 1. $x = 3r \cos \varphi - r \cos 3\varphi$, $y = 3r \sin \varphi - r \sin 3\varphi$; 2. $x = 2r \cos \varphi - r \sin 2\varphi$, $y = 2r \sin \varphi - r \cos 2\varphi$; 3. $x = 2r \cos \varphi + r \cos 2\varphi$, $y = 2r \sin \varphi - r \sin 2\varphi$; 4. $x = 3r \cos \varphi + r \cos 3\varphi$, $y = 3r \sin \varphi - r \sin 3\varphi$. **573.** $x^2 + y^2 = (c^2/\omega^2) \operatorname{arctg}^2 (y/x)$ alebo $\varrho = c\varphi/\omega$, $\varrho = -c\varphi/\omega$. **574.** $\varrho = \varrho_0\, e^{k\varphi}$, kde ϱ_0 je prvá polárna súradnica bodu, ktorého $\varphi = 0$. **575.** $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $z = \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **576.** $x = 1 + t^2$, $y = 1/(1 + t^2)$, $z = 1/t^2$, $t \in (-\infty, \infty)$. **577.** $x = t$, $y = 1/t$, $z = t + 1/t$, $t \neq 0$. **578.** $x = t$, $y = t - t^2$, $z = 1 - t^2$, $t \in (-\infty, \infty)$. **579.** $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = 2t$, $t \in (-\infty, \infty)$.

580. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = 3e^t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **581.** $\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0$. **582.** $f(t) = b \cos t + c \sin t + d$, kde b, c, sú ľubovoľné reálne čísla; $z = bx/a + cy/a + d$. **584.** $x = (r/\sqrt{2}) \cos t$, $y = (r/\sqrt{2}) \sin t$, $z = r/\sqrt{2}$, $t \in (-\infty, \infty)$. **585.** $x = c + r \cos 2t$, $y = r \sin 2t$, $z = \pm[a^2 - (c + r)^2 + 4cr \sin^2 t]^{1/2}$; osobitný prípad $x = a \cos^2 t$ $y = a \sin t \,.\, \cos t$, $z = \pm a \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **587.** $x = a \cos^2 t$, $y = a \sin t \,.\, \cos t$, $z = \pm a \operatorname{cotg} \delta \,.\, \cos t$. **588.** $x = at \cos t$, $y = at \,.\, \sin t$, $z = a^2t^2/2p$, $t \in (-\infty, \infty)$. **589.** a) $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$, $t \in (-\infty, \infty)$; b) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = a^2 \cos 2t$, $t \in (-\infty, \infty)$; c) $x = a^2 \cos^2 t$, $y = \sqrt{a} \cos t$, $z = \pm a \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **590.** $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2 \cos t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **591.** $x = a \cosh t$, $y = a \sinh t$, $z = at$, $t \in (-\infty, \infty)$. **592.** $x = a \cos t$, $y = \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 t}$, $z = a \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$. **593.** a) $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = ct$, $t \in (0, \infty)$; b) $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = b\, e^{k\omega t}$, $t \in (0, \infty)$; c) $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = ct^2/2$, $t \in (0, \infty)$. **594.** $x = at \cos \omega t$, $y = at \sin \omega t$, $z = ct$, $t \in (0, \infty)$. **595.** $x = a \sin \delta\, e^{kt} \cos t$, $y = a \cos \delta\, e^{kt} \sin t$, $z = a \cos \delta\, e^{kt}$. **596.** $x = [2at/(1 + t^2)] \cos(a \ln t)$, $y = [-2at/(1 + t^2)] \sin(a \ln t)$, $z = a(1 - t^2)/(1 + t^2)$. *Návod:* Položme $\theta = \pi/2 + 2 \operatorname{arctg} t$.

8,2. Dĺžka krivky a prirodzené parametrické vyjadrenie

597. 8. 598. $2a(n - 2) + a\sqrt{3}\ln[(n - \sqrt{3})/(n + \sqrt{3})] + 2a\sqrt{3}\ln(2 + \sqrt{3})$, kde $n^2 = (8a - 3x_0)/(2a - x_0)$. 599. $a \ln 2$. 600. $a\sqrt{2}(e^{\alpha} - 1)$. 601. $x = [(27s + 8)^{2/3} - 4]/9$, $y = [(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}/27$, $s \geq 0$. 602. $x = a\ln[(s + \sqrt{s^2 + a^2})/a]$, $y = a\sqrt{s^2 + a^2}$. 603. 10. 609. $k\sqrt{a^2 + b^2}$. 610. $\sqrt{3}(e^{\pi} - 1)$. 611. $\sqrt{2}\sinh 1$. 612. 9,9c. 613. $8\sqrt{2}a$. 614. 42. 615. 5. 616. $2\sqrt{6}$. 617. $4a$. 618. $a\ln[(\sqrt{2a} + \sqrt{x})/(\sqrt{2a} - \sqrt{x})]$. 619. $a\sqrt{\pi/4}(1 + \pi/6)$. 620. $x_0 + z_0$. 621. $x = a\cos(s/\sqrt{a^2 + c^2})$, $y = a\sin(s/\sqrt{a^2 + c^2})$, $z = cs/\sqrt{a^2 + c^2}$. 622. $x = \sqrt{1 + s^2/2a^2}$, $y = s/\sqrt{2}$, $z = (a/2)\,.\ln[(s + a\sqrt{2})/(s - a\sqrt{2})]$. 623. $x = (s/\sqrt{3} + 1)\cos\ln(s/\sqrt{3} + 1)$, $y = (s/\sqrt{3} + 1)\sin\ln(s/\sqrt{3} + 1)$, $z = s/\sqrt{3} + 1$.

8,3. Dotyčnica a normála ku krivke v rovine

625. $X = (2a/3, 4a/3) - \{4a/9, 5a/9\}u$, $X = (2a/3, 4a/3) + \{5a/9, -4a/9\}u$. 626. $X = (a, a) - \{a, 2a\}u$, $X = (a, a) + \{2a, a\}u$. 627. $X = (a/2, a/2) + \{1, 1 - \pi/2\}u$, $X = (a/2, a/2) + \{\pi/2 - 1, 1\}u$. 628. $2x - y - 10 = 0$, $x + 2y - 35 = 0$. 629. $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 8 = 0$. 630. $5x - 6y - 21 = 0$, $6x + 5y - 13 = 0$. 631. $9x + 2y + 12 = 0$, $2x - 9y + 31 = 0$. 632. $x + 3y - 10 = 0$, $3x - y - 10 = 0$. 633. $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$. 634. $x_0x/a^2 + y_0y/b^2 = 1$, $y_0x/b^2 - x_0y/a^2 = x_0y_0e^2/a^2b^2$, kde $e^2 = a^2 - b^2$; $s_t = a^2y_0^2/b^2|x_0|$, $s_n = b^2|x_0|/a^2$. 635. $2\varrho\cos\varphi = 1$, $2\varrho\sin\varphi = \sqrt{3}$; $2\sqrt{3}/3$, 2, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$; $\pi/6$. 636. $\varrho\,.\cos(\varphi - \pi/4) = a$, $\varrho\sin(\varphi - \pi/4) = 0$; neexistuje, a, neexistuje, 0; $\pi/2$. 637. $\varrho[\cos(\varphi - 1) - 4\sin(\varphi - 1)] = 1$, $\varrho[4\cos(\varphi - 1) + \sin(\varphi - 1)] = 4$; $\sqrt{17}/4$, $\sqrt{17}$, 1/4, 4; arctg (1/4). 638. $\varrho[6\cos(\varphi - 1) - \sin(\varphi - 1)] = 18a$, $\varrho[\cos(\varphi - 1) + 6\sin(\varphi - 1)] = 3a$; $3a\sqrt{37}$, $a\sqrt{37}/2$, $18a$, $a/2$; arctg 6. 639. $\varrho[8\cos(\varphi - 2) + \sin(\varphi - 2)] = 32$, $\varrho[\cos(\varphi - 2) - 8\sin(\varphi - 2)] = 4$; $4\sqrt{65}$. $\sqrt{65}/2$, 32, 1/2; π — arctg 8. 640. $4x - 2y - 3a = 0$. 641. $x + y + a/\sqrt{2} = 0$, $x - y + a/\sqrt{2} = 0$, $x + y - a/\sqrt{2} = 0$, $x - y - a/\sqrt{2} = 0$. 642. $x_0(x_0^2 + y_0^2 - a^2)(x - x_0) + y_0(x_0^2 + y_0^2 + a^2)(y - y_0) = 0$; pre $c < 0$, štyri body s každou súradnicovou osou, pre $c = 0$ štyri body s osou o_x a dva body s osou o_y, pre $0 < c < 2a^4$ šesť bodov s osou o_x a dva body s osou o_y, pre $c \geq 2a^4$ sú to dva body s osou o_x a dva body s osou o_y. 653. a) $a\varphi\sqrt{1 + \ln^2 a}/\ln a$, $a\varphi\sqrt{1 + \ln^2 a}$, $a\varphi/|\ln a|$, $a\varphi|\ln a|$; b) $a\sqrt{\varphi^2 + 1}/\varphi$, $a\sqrt{\varphi^2 + 1}/\varphi^2$, a, a/φ^2. 654. Pre $\varphi \in \langle 0, \pi/4\rangle$ je $\vartheta = 3\varphi \pm \pi/2$ a $\nu = 2\varphi$. 656. Dioklesova kissoida $y^2 = -x^3/(x + 2p)$. 657. MacLaurinova trisektrisa $x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2)$. 658. Pascalova závitnica, v zvláštnom prípade kardioida, ak bod A leží na kružnici 659. Ružica, $\varrho = a\sin k\varphi$. 660. Lemniskáta. 661. Archimedova špirála. 662. Logaritmická špirála

8,4. Asymptoty krivky

663. $x = -1$, $y = 0$. 664. $y = 2$, $8x + 2y + 1 = 0$, $40x - 6y - 9 = 0$. 665. $x + y + a = 0$. 666. $y = 2x$. 667. $x/a + y/b = 0$, $x/a - y/b = 0$. 668. $x = 0$. 669. $x = -1/2$, $y = 0$, $y = x/2 - 3/4$. 670. $x = 0$, $x + y + 2 = 0$, $x + y - 2 = 0$. 671. $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$. 672. $x = 0$, $y = 0$, $y = -x$. 673. $x + y - 1/3 = 0$. 674. $3x - 3y + 2 = 0$. 675. $x + y + 4 = 0$. 676. $x = 1$, $x + y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$. 677. $x + y = 0$, $x - y = 0$. 678. $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x + 1 + \sqrt{2} = 0$, $x + 1 - \sqrt{2} = 0$. 679. $\varrho\sin\varphi = a$. 680. $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. 681. $\varrho\cos\varphi = a$, $\varrho\cos\varphi = -a$. 682. $\varrho\sin\varphi = a$. 683. $\varrho\cos\varphi = a$, $\varrho\cos\varphi = -a$, $\varrho\sin\varphi = a$, $\varrho\sin\varphi = -a$. 684. $\varrho\sin\varphi = a$. 685. $\varrho\cos\varphi = 2a$. 686. $X = (2, 0, 1) + \{2, 1, 2\}t$. 687. $X = (0, 0, 1) + \{1, 1, 0\}t$. 688. $X = \{1, 0, 0\}t$, $X = (1/2, 1/2, 0) + \{0, 0, 1\}t$, $X = (-1/2, 1/2, 0) + \{0, 2, -1\}t$. 689. $X = \{0, 1, 0\}t$, $X = \{1, 0, 1\}t$. 690. $X = \{1, 0, 1\}t$, $X = \{0, 1, 1\}t$, $X = \{1, 0, -1\}t$, $X = \{0, 1, -1\}t$. 691. $X = \{1, -1, -\sqrt{2}\}t$, $X = \{1, -1, \sqrt{2}\}t$.

8,5. Krivosť rovinnej krivky. Inflexné body

692. $\sqrt{2}/2$: 693. $6/5\sqrt{5}$. 694. $-e/(e^2 + 1)^{3/2}$. 695. -1. 696. 0. 697. 0. 698. $2/3a$, 699. a. 700. $\sqrt{17^3}/2$. 701. $4\sqrt{2}p$. 702. $-3\sqrt{3}/2$. 703. $2a/(x^2 + y^2)^{3/2}$. 704. $a/\cos(x/a)$. 705. $-b/a^2(1 - \varepsilon^2\cos^2 t)^{3/2}$, ε je excentricita. 706. $(\operatorname{tg} t)/a$. 707. $(a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t)^{3/2}/ab$. 708. at. 709. $-4a\sin(t/2)$.

710. $3/8a \sin(t/2)$. 711. $(1 + 2m)/4am(1 + m)\sin(t/2)$. 712. $\sqrt{3a^2/(2a + 3x)^3 x}$. 713. $y^3(2a^2b - y^3 - 3by^2)/a(y^4 - 2by^3 + a^2b^2)^{3/2}$. 714. $1/3\,(axy)^{1/3}$. 715. $(2a^2 + \varrho^2)/(a^2 + \varrho^2)^{3/2}$. 716. $1/\varrho\,\sqrt{1 + b^2}$. 717. $3/2\sqrt{2a\varrho}$. 718. $3\varrho/a^2$. 719. $(1/2, -1/4)$, $r_{min} = 1/2$. 720. $(1/\sqrt{2}, -\ln\sqrt{2})$, $r_{min} = 3\sqrt{3}/2$. 721. $t = n\pi$, r_{max} pre n nepárne, r_{min} pre n párne. 722. $(a/4, a/4)$ $r = a/\sqrt{2}$. 723. $(3\pi/2, a)$. 727. 0. 728. Pre $t = \arccos(b/a)$ 729. $(1, 0)$. 730. $(0, -a)$, $(-a, 0)$. 731. $(1/2, a\sqrt{2})$. 732. 0. 733. Pre $\varphi = \pm\pi/6$. 734. Inflexný bod (ϱ, φ) vyhovuje rovnici $2\,\mathrm{tg}^3\varphi + 3\,\mathrm{tg}^2\varphi + 3 = 0$. 737. $r = s^2/a + a$. 738. $(27s + 8)^2 = [4 + 324r^2/(27s + 8)^2]^3$. 739. $r = a\cosh(s/a)$. 740. $(s - 4a)^2 + r^2 = 16a^2$. 741. $r = a\sqrt{e^{2s/a} - 1}$. 742. $r^2 + 9s^2 = 64a^2$. 743. $s = R/\ln a$. 744. $9r^2 + s^2 = 64a^2$. 746. Logaritmická špirála $r = a\,e^{m\varphi}(\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j})$. 747. Reťazovka $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + a\cosh(t/a)\,\mathbf{j}$. 748. Cykloida $\mathbf{r} = a(2t + \sin 2t)\,\mathbf{i} + a(2 - \cos 2t)\,\mathbf{j}$.

3,6. Kružnica krivosti. Evolúta, evolventa

749. $(x + 11/2)^2 + (y - 16/3)^2 = 2197/36$. 750. $(x - 2\pi)^2 + (y + 4)^2 = 64$. 751. $x^2 + (y - 1)^2 = \pi^2/4$. 752. $(x - 7/2)^2 + (y + 4)^2 = 125/4$. 753. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$. 754. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$. 757. $(2a, 2a)$. 758. $(-3a/4, 0)$. 759. $(2a/3, a/3)$. 760. $(33a/80, -9\sqrt{3}\,a/80)$. 761. $2x^2 + 2y^2 - 15x - 9y + 36 = 0$. 763. $(x - 3a/4)^2 + (y - 3a/4)^2 = a^2/2$. 764. $\varrho = a\sin\varphi$. 765. $\varrho^2 + 2\varrho c e^{a\pi/2}\cos\varphi = c^2 e^{a\pi}$. 766. $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$. 767. $(ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}$. 768. Cykloida $x = a(t + \sin t)$, $y = -a(1 - \cos t)$. 769. $x^3 + y^2 = a^2$. 770. $x = t(3 - 25t^8)/4$, $y = t^6 + (1 + 25t^6)/20t^3$, $t \neq 0$. 771. $x = (1 + 2t^2)/t$, $y = \ln t - (1 + t^2)$, $t \in (0, \infty)$. 772. $x = t + (1 + \cos^2 t)\,\mathrm{cotg}\,t$, $y = -2\cos t \cdot \mathrm{cotg}\,t$, $t \neq k\pi$, kde k je celé číslo. 773. $x = t - (a/2)\sinh(2t/a)$, $y = 2a\cosh(t/a)$. 774. $\xi = x - F'_x(F'^2_x + F'^2_y)/\Delta$, $\eta = y - F'_y(F'^2_x + F'^2_y)/\Delta$, kde $\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx}, & F''_{xy}, & F'_x \\ F''_{xy}, & F''_{yy}, & F'_y \\ F'_x, & F'_y, & 0 \end{vmatrix}$. 776. $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = 2a^{2/3}$. 777. $27y^4 + 576a^2y^2 + 4096a^3x = 0$. 778. Reťazovka $y = a\cosh(x/a)$. 779. $\mathbf{r} = \varrho\dfrac{\varrho^2 - \varrho\ddot{\varrho}}{\varrho^2 + 2\dot{\varrho}^2 - \varrho\ddot{\varrho}}\,\mathbf{e}(\varphi) + \dot{\varrho}\dfrac{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2}{\varrho^2 + 2\dot{\varrho}^2 - \varrho\ddot{\varrho}}\,\overline{\mathbf{e}(\varphi)}$. 780. $\mathbf{r} = a[\varphi\mathbf{e} + (\varphi^2 + 1)\,\overline{\mathbf{e}}]/(\varphi^2 + 2)$. 781. Logaritmická špirála $\mathbf{r} = ma\,e^{m\varphi}\,\overline{\mathbf{e}}$. 782. Kardioida $\mathbf{r} = a[\varrho\,\mathbf{e} - 2\sin\varphi\,\overline{\mathbf{e}}]/3$. 783. Stred danej kružnice. 784. $\ln a = a^{\pi/2}$. 775. $8(x - 1)^3 = 27py^2$.

3,7. Singulárne body kriviek

786. $O = (0, 0)$. obyčajný bod. 787. $O = (0, 0)$, bod vratu druhého druhu. 788. $O = (0, 0)$ inflexný bod. 789. $O = (0, 0)$, bod vratu prvého druhu. 790. Nemá singulárne body. 791. $O = (0, 0)$, bod vratu prvého druhu. 792. $O = (0, 0)$, bod vratu druhého druhu. 793. Body vratu prvého druhu $A_n = (2\pi an, 0)$, kde n je celé číslo; $x = 2\pi n$, n je celé číslo. 794. Body vratu prvého druhu $A = (3a, 0)$, $B = (-3a/2, 3a\sqrt{3}/2)$, $C = (-3a/2, -3a\sqrt{3}/2)$; $y = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = -x/\sqrt{3}$. 795. Bod vratu prvého druhu $A = (0, a)$; $x = 0$. 796. Bod vratu prvého druhu $O = (0, 0)$. 797. Uzol $A = (1, 0)$. 798. $O = (0, 0)$, uzol pre $a > 0$, izolovaný bod pre $a < 0$, bod vratu pre $a = 0$, $b \neq 0$. 799. Uzol $O = (0, 0)$. 800. Bod samodotyku $O = (0, 0)$. 801. Izolovaný bod $O = (0, 0)$. 802. $O = (0, 0)$, trojnásobný bod s dotyčnicami $x = 0$, $y = x$. 803. Izolovaný bod $O = (0, 0)$. 804. $O = (0, 0)$ bod vratu druhého druhu. 805. Bod samodotyku $O = (0, 0)$. 806. $O = (0, 0)$ štvornásobný bod. 807. $O = (0, 0)$ bod samodotyku, uzol v bodoch $A = (a\sqrt{2}, 0)$, $B = (-a\sqrt{2}, 0)$ uzol. 808. $A = (1/e, 1/e)$ uzol s dotyčnicami $x + y = 2/e$, $y = x$. 809. $A = (e, e)$, uzol. 810. Pre ľubovoľné čísla a, b pre ktoré platí $4a^3 + 27b^2 = 0$. 811. $A = (1, 0)$ uzol, $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$. 812. $A = (1, 1)$, uzol, $x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} - 1 = 0$. 813. $O = (0, 0)$ izolovaný bod. 814. $O = (0, 0)$, uzol, $y = x$, $y = -x$. 815. Pre $m \neq 0$, $O = (0, 0)$ uzol, $mx \pm y = 0$; pre $m = 0$, $O = (0, 0)$ je bod samodotyku, $y = 0$. 816. $O = (0, 0)$; pre $b < 2a$ uzol; pre $b = 2a$ bod vratu prvého druhu (kardioida); pre $b > 2a$ izolovaný bod.

3,8. Obálka systému kriviek

817. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$. 818. $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$. 819. $y = \pm x$. 820. $y = \pm r$. 821. Štvorec daný rovnicou $|x| + |y| = 1$. 822. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4$ a os o_x pre $\lambda = 0$, $\lambda = x$. 823. $y = 0$. 824. $\mathbf{r} = [p(\alpha)\cos\alpha - p'(\alpha)\sin\alpha]\,\mathbf{i} + [p(\alpha)\sin\alpha + p'(\alpha)\cos\alpha]\,\mathbf{j}$. 825. Kisoida $x(x^2 + y^2) + py^2 = 0$. 826. Kardioida s pólom v bode P. 827. Lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$. 828. Boothova lemniskata $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$. 829. $y = 0$, $x = a(t^5 + 3t)/(t^4 + 1)$, $y = a2t^3/(t^4 + 1)$. 830. $x^2/(a^2 + b^2) + y^2/b^2 = 1$. 831. Asteroida. 832. Hyperbola $xy = P/2$. 833. Cykloida $x = c(t + \sin t)/2\omega$, $y = c(1 - \cos t)/2\omega$. 834. $y = 0$, obálka je množina všetkých inflexných bodov. 835. $y = 0$, obálka je množina všetkých bodov vratu prvého stupňa; $y = a$, $y = -a$, množina bodov vratu prvého stupňa. 836. $x = 0$, množina všetkých uzlov, $x = a$, obálka 837. Kružnice $x^2 + y^2 = 9a^2$, množina všetkých bodov vratu, $x^2 + y^2 = (5 - 2\sqrt{2})a^2$, obálka. 838. $y^2 = 8(x - p^3)/27p$. 840. Kružnice: $\mathbf{r} = \{5\cos u, 5\sin u\}$, $\mathbf{r} = \{\cos u, \sin u\}$. 841. Kružnice: $\mathbf{r} = 3a\{\cos u, \sin v\}$, $\mathbf{r} = \sqrt{(5 - 2\sqrt{2})}\,a\{\cos u, \sin v\}$. 842. Asteroida $\mathbf{r} = \{\cos^3 u, \sin^3 u\}$. 843. $\mathbf{r} = \{u, 0\}$, os o_x. 844. Epicykloida $x = a(3\cos t - \cos 3t)/4$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)/4$. 845. $54px^2 = y(2y - 9p)^2$. 846. Reťazovka $x = \frac{a}{2}\cos\frac{y + a}{2}$. 847. Asteroida. 848. Pre index lomu $n > 1$ evoluta elipsy; pre index $n < 1$ evoluta hyperboly, $(nx)^{2/3} + (y\sqrt{n^2 - 1})^{2/3} = a^{2/3}$. 849. $y = v_0^2/2g - gx^2/2v_0^2$.

3,9. Sprievodný trojhran

850. $(x - 1)/1 = y/1 = (z - 1)/1$. 851. $(x - a\,\pi/2 + 1)/a = (y - a)/a = (z - 2\sqrt{2}a)/\sqrt{2}a$. 852. $(4x - t_0^4)/4t_0^3 = (3y - t_0^3)/3t_0^2 = (2z - t_0^2)/2t_0$. 853. $(x + 1)/8 = (y - 13)12 = z/24$; $2x + 3y + 6z - 37 = 0$. 854. $(x - 3)/-6 = (y + 7)/17 = (z - 2)/-5$, $-6x + 17y - 5z + 147 = 0$. 855. $(x - r\cos^2 t_0)/-r\sin 2t_0 = (y - r\sin t_0 \cdot \cos t_0)/r\cos 2t_0 = (z - r\sin t_0)/r\cos t_0$; $-r\sin 2t_0(x - r\cos^2 t_0) + r\cos 2t_0(y - r\sin t_0 \cdot \cos t_0) + r\cos t_0(z - r\sin t_0)$. 856. V príklade 852 nepodstatne singulárny bod je $A = (0, 0, 0)$ a rovnica dotyčnice je $x/0 = y/0 = z/0$. V príklade 853 nepodstatne singulárny bod je $A = (-5, 1, -16)$ a rovnica dotyčnice je $(x + 5)/8 = (y - 1)/12 = (z + 16)/24$. V príklade 854 nieto nepodstatne singulárnych bodov. 857. $P = (0, 1, 1)$, $P_k = (\sin[(2k + 1)\pi/2], [(2k + 1)\pi/2]\sin[(2k + 1)\pi/2], (2k + 1)\pi/2 + 1)$, kde k je celé číslo $P = (0, 1, 1)$, $P_k = (-k\pi\cos k\pi, \cos k\pi, k\pi + 1)$, kde k je celé číslo. 858. $x/0 = y/0 = z/0$, $(x - 1/4)/-1 = (y + 1/3)/1 = (z - 1/2)/-1$, $(x - 4)/-8 = (y + 8/3)/4 = (z - 2)/-2$. 860. Kružnica $\mathbf{r}(t) = (-a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\mathbf{k})/\sqrt{a^2 + b^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$. 861. Vivianiho krivka $\mathbf{r} = \sin^2 t\,\mathbf{i} - \sin t \cdot \cos t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$. 862. $2x - z + 0$. 863. $bx - ay + abz - 2ab = 0$. 864. $e^{-a}x - e^{a}y + \sqrt{2}z - 2a = 0$. 865. $4x\cos a - 4y\sin a - 3z - \cos 2a = 0$. 866. $(x - a\cos^2\alpha)\sin\alpha(1/2 + \cos^2\alpha) - (y - a\sin\alpha\cos\alpha)\cos^3\alpha + (z - a\sin\alpha) = 0$. 867. $x = 1/2 + 2t$, $y = 2/3 + t$, $z = 1/2 - 2t$, $t \in (-\infty, \infty)$; $x = 1/2 + 4t$, $y = 2/3 - 4t$, $z = 1/2 + 2t$, $t \in (-\infty, \infty)$. 868. $x = t$, $y = -4t$, $z = 1 - t$, $t \in (-\infty, \infty)$, $x = -2t$, $y = t$, $z = 1 + 2t$, $t \in (-\infty, \infty)$. 869. $x = x_0 + x_0(a^2 + b^2)\,t$, $y = y_0 + y_0(a^2 + b^2)\,t$, $z = z_0$, $t \in (-\infty, \infty)$; $x = x_0 + tab\sin t_0$, $y = y_0 - tab\cos t_0$, $z = z_0 + a^2t$, $t \in (-\infty, \infty)$. 870. $x = 1 + 31t$, $y = 1 + 26t$, $z = 1 - 22t$, $t \in (-\infty, \infty)$; $x = 1 + 6t$, $y = 1 - 8t$, $z = 1 - t$, $t \in (-\infty, \infty)$. 871. $1456x + 498y - 342z - 12\,204 = 0$. 872. $x\sin(t - \alpha) - y\cos(t^2 - \alpha)\sin\alpha + z - t\sin\alpha - \cos\alpha = 0$. 873. b) $\cos\gamma_1 = kb$; c) $\cos\delta = k\sqrt{1 + b^2}$; d) $\cos\gamma_2 = k\sqrt{1 + a^2}$; pričom $k = 1/\sqrt{1 + a^2 + b^2}$, e) $\gamma_3 = 90°$. 874. Dotyčnica: $x = 2 + t$, $y = -2 - t$, $z = 2 + 2t$, normálová rovina: $x - y + 2z - 8 = 0$, binormála: $x = 2 - t$, $y = -2 - t$, $z = 2$, oskulačná rovina: $x + y = 0$, hlavná normála: $x = 2 + t$, $y = -2 - t$, $z = 2 - t$, rektifikačná rovina: $x - y - z - 2 = 0$. 875. Dotyčnica: $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + 3t$, normálová rovina: $2x + y + 3z - 6 = 0$, binormála: $x = 1 + 3t$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 - t$, oskulačná rovina: $3x - 3y - z + 1 = 0$, hlavná normála: $x = 1 + 8t$, $y = 1 + 11t$, $z = 1 - 9t$, rektifikačná rovina: $8x + 11y - 9z - 10 = 0$. 876. Dotyčnica: $x = 1 + t$, $y = 1$, $z = \pi/2 + t$, normálová rovina: $2x + 2z - \pi - 2 = 0$, binormála: $x = 1 + t$, $y = 1$, $z = \pi/2 - t$, oskulačná rovina: $2x - 2z - 2 + \pi = 0$, hlavná normála: $x = 1$, $y = 1 + t$, $z = \pi/2$, rektifikačná rovina $y - 1 = 0$. 877. Dotyčnica: $x = t$, $y = 0$, $z = bt$, normálová rovina: $x + bz = 0$, binormála: $x = -bt$,

$= 0$, $z = t$, oskulačná rovina: $bx - z = 0$, hlavná normála: $x = 0$, $y = (-b^2 - 1)t$, $z = 0$, rektifikačná rovina: $y = 0$. **878.** Dotyčnica $x = a$, $y = t$, $z = t$, normálová rovina: $y + z = 0$, binormála: $x = a$, $y = t$, $z = -t$, oskulačná rovina: $y - z = 0$, hlavná normála: $x = a + t$, $y = 0$, $z = 0$, rektifikačná rovina $x - a = 0$. **879.** $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{j}$. **880.** $\boldsymbol{\tau} = -(3/5)\cos t\mathbf{i} + (3/5)\sin t\mathbf{j} - (4/5)\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\beta} = (4/5)\cos t\mathbf{i} - (4/5)\sin t\mathbf{j} - (3/5)\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\nu} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$. **881.** $\boldsymbol{\tau} = (2a^2x^2\mathbf{i} + 2x^4\mathbf{j} - a^4\mathbf{k})/(2x^4 + a^4)$, $\boldsymbol{\beta} = (2a^2x^2\mathbf{i} - a^4\mathbf{j} + 2x^4\mathbf{k})/(2x^4 + a^4)$, $\boldsymbol{\nu} = (a^4 - 2x^4)\mathbf{i} + 2a^2x^2\mathbf{j} + 2a^2x^2\mathbf{k}/(2x^4 + a^4)$. **883.** $x = 1 - t$, $y = 1 - t$ $z = 2 - 4t$; $x + y + 4z - 10 = 0$. **884.** $x = 2 + 2\sqrt{3}t$, $y = 2\sqrt{3} + t$, $z = 3 - 2\sqrt{3}t$; $2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0$. **885.** $x = 1 + 12t$, $y = 3 - 4t$, $z = 4 + 3t$; $12x - 4y + 3z - 12 = 0$. **886.** $x = x_0 - 2y_0z_0t$, $y = y_0 + z_0(2x_0 - a)t$, $z = z_0 + ay_0t$; $2y_0z_0x + z_0(2x_0 - a)y + ay_0z = 0$. **888.** $-4x - y + z - 9 = 0$; $x = 2 + 4t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$. **889.** $9x - 6y + 2z - 18 = 0$; $x = 6 + 9t$, $y = 9 - 6t$, $z = 9 + 2t$. **890.** $99x - 75y + 32z + 25 = 0$; $x = 3 + 99t$, $y = 6 - 75t$, $z = 4 + 32t$. **891.** Dotyčnica: $x = 2 + t$, $y = 4 + 4t$, $z = 4 + 2t$, normálová rovina: $x + 4y + 2z - 26 = 0$, binormála: $x = 2 - 2t$, $y = 4$, $z = 4 + t$, oskulačná rovina: $2x - z = 0$, hlavná normála: $x = 2 + 4t$, $y = 4 - 5t$, $z = 4 + 8t$, rektifikačná rovina: $4x - 5y + 8z - 20 = 0$. **892.** Dotyčnica: $x = 1 + 2t$, $y = 1$, $z = 2 - t$, normálová rovina: $2x - z = 0$, binormála: $x = 1$, $y = 1 + t$, $z = 2$, oskulačná rovina: $y - 1 = 0$, hlavná normála: $x = 1 + t$, $y = 1$, $z = 2 + 2t$, rektifikačná rovina: $x + 2z - 5 = 0$. **893.** Dotyčnica: $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + 4t$, normálová rovina: $2x + y + 4z - 7 = 0$, binormála: $x = 1 + 6t$, $y = 1 - 8t$, $z = 1 - t$, oskulačná rovina: $6x - 8y - z + 3 = 0$, hlavná normála: $x = 1 + 31t$, $y = 1 + 26t$, $z = 1 - 22t$, rektifikačná rovina: $31x + 26y - 22z - 35 = 0$.

3,10. Krivosť a torzia priestorovej krivky

894. $2/(1 + a^2)$. **895.** 0. **896.** $\sqrt{2}/3$. **897.** $\sqrt{2}/(e + 1/e)^2$. **898.** $2\sqrt{101}/21\sqrt{21}$. **899.** -1. **900.** $101/12$. **901.** $k = \varkappa = \sqrt{2}t^2/(t^4 + 1)^2$. **902.** $k = a/(a^2 + b^2)$, $\varkappa = b/(a^2 + b^2)$. **903.** $k = \varkappa = 1/(2a\cosh^2 t)$. **904.** $k = 6/25 \sin 2t$, $\varkappa = -8/25 \sin 2t$. **905.** $k = 1/8a \sin(t/2)$, $= -1/8a \sin(t/2)$. **910.** $1/9$. **911.** $(a + b)^{1/2}/(a + b + 2z_0)^{3/2}$. **912.** $1/\sqrt{6}$. **913.** $P_1 : k = 1/a$, $\varkappa = 3/4a$; $P_2 : k = \sqrt{5}/a$, $\varkappa = 0$. **914.** $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\beta} = -\sqrt{3}\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\nu} = 2\mathbf{i}$. **920.** $\mathbf{r}''' = -\varkappa\boldsymbol{\tau} + \varkappa'\boldsymbol{\nu} + \varkappa k\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{r}^{(4)} = -3\varkappa\varkappa'\boldsymbol{\tau} + (\varkappa'' - \varkappa^3 - \varkappa k^2)\boldsymbol{\nu} + (2\varkappa'k + \varkappa k')\boldsymbol{\beta}$. **921.** $k = \varkappa = a/(2a^2 + s^2)$. **922.** $k = \cos s$, $\varkappa = \sin s$. **923.** $k = \varkappa = a\sqrt{2}/(4a^2 + s^2)$. **924.** $\mathbf{r} = (c/a)\operatorname{tg}[b(t - t_0)/c].[a\mathbf{k} + b(-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})] + bt\mathbf{k} - (b^2/a)(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j})$. **926.** Rovinné krivky v rovinách rovnobežných s R_{xy}, $\mathbf{r} = a.[(\cos t - (t_0 - t)\sin t]\mathbf{i} + a[\sin t + (t_0 - t)\cos t]\mathbf{j} + bt_0\mathbf{k}$. **927.** $\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + s\operatorname{cotg}\alpha\mathbf{k}$, $\sigma = s/\sin\alpha$, kde α je uhol, ktorý zviera priamka $z = \xi.\operatorname{cotg}\alpha$, ktorá vznikne rozvinutím krivky K do roviny $R_{\xi z}$. **928.** a) Skrutkovica: $\mathbf{r} = a(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) + a\operatorname{tg}\alpha\mathbf{k}$; b) valcovo-kužeľová skrutkovica: $\mathbf{r} = e^{m\varphi}[a\cos\varphi\mathbf{i} + a\sin\varphi\mathbf{j} + b\mathbf{k}]$. a b je konštanta. **929.** $k = a\sin^2\alpha/(a^2 + b^2\sin^2\alpha)$, $\varkappa = k\operatorname{tg}\alpha$; pre $\alpha = \pi/4$ hyperbolická skrutkovica. **930.** $k = 1/\sqrt{R^2 - c^2s^2}$, $\varkappa = c/\sqrt{R^2 - c^2s^2}$. **934.** $3x - z - 2 = 0$, $(x - 22/15)^2 + (y + 10/3)^2 + (z - 12/5)^2 = 343/45$. **935.** $4x - 4y - 3\sqrt{2}z = 0$, $(3x - 14/\sqrt{2})^2 + (3y - 14/\sqrt{2})^2 + 9z^2 = 625/4$.

3,11. Plocha a jej rovnice

939. $\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u)\cos v\mathbf{i} + \varphi(u)\sin v\mathbf{j} + \psi(u)\mathbf{k}$. **940.** $\mathbf{r}(u, v) = R\cos u.\cos v\mathbf{i} + R\cos u.\sin v\mathbf{j} + R\sin u\mathbf{k}$. **941.** $\mathbf{r}(u, v) = a\cos u.\cos v\mathbf{i} + a\cos u.\sin v\mathbf{j} + c\sin u\mathbf{k}$. **942.** $\mathbf{r}(u, v) = a\sinh u.\cos v\mathbf{i} + a\sinh u.\sin v\mathbf{j} + c\cosh u\mathbf{k}$. **943.** $\mathbf{r}(u, v) = a\cosh u.\cos v\mathbf{i} + a\cosh u.\sin v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}$. **944.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$. **945.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + ku\mathbf{k}$. **946.** $\mathbf{r}(u, v) = b\cosh(u/b).\cos v\mathbf{i} + b\cosh(u/b).\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$. **947.** $\mathbf{r}(u, v) = a\sin u.\cos v\mathbf{i} + a\sin u.\sin v\mathbf{j} + [a\ln\operatorname{tg}(u/2) + a\cos u]\mathbf{k}$. **948.** a) $x^2 + y^2 = f^2(z)$; b) $y^2 + z^2 = \varphi^2(x)$; c) $x^2 + z^2 = \psi^2(y)$; d) $F(x^2 + y^2 + z^2, ax + by + cz) = 0$. **949.** $x^2/a^2 + (y^2 + z^2)/b^2 = 1$. **950.** $(x^2 + z^2)/a^2 - y^2/b^2 = 1$. **951.** $y^2 + z^2 = 2px$. **952.** $(x^2 + y^2)4p^2 - z^4 = 0$. **953.** u — krivky meridiány, sínusoidy; v — krivky kružnice. **954.** u — krivky, v — krivky sú priamky jednodielneho hyperboloidu. **955.** $\mathbf{r}(u, v) = a\cos u.\cos v\mathbf{i} + b\sin u.\cos v\mathbf{j} + c\sin v\mathbf{k}$. **956.** a) $\mathbf{r}(u, v) = a\cos(u + v)\mathbf{i} + a\sin(u + v)\mathbf{j} + bu\mathbf{k}$; b) $\mathbf{r}(u, v) = a\cos u\mathbf{i} + a\sin u\mathbf{j} + (bu + v)\mathbf{k}$; c) $\mathbf{r}(u, v) = a\cos(u + v)\mathbf{i} + a\sin(u + v)\mathbf{j} + b(u - v)\mathbf{k}$; d) $\mathbf{r}(u, v) = a\cos v\mathbf{i} + a\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$. **957.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$. **958.** $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$. **959.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

960. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 4/\cos v$. **961.** $\mathbf{r}(u, v) = [(u + v)\,\mathbf{i} + (v - u)\,\mathbf{j} + 2uv\mathbf{k}]/\sqrt{2}$. **962.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + bv\mathbf{k}$. **963.** $\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u)\,\mathbf{i} + \psi(u)\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$. **964.** $\mathbf{r}(u, v) = \{x_0 + v[\varphi(u) - x_0]\}\,\mathbf{i} + \{y_0 + v[\psi(u) - y_0]\}\,\mathbf{j} + z_0(1 - v)\,\mathbf{k}$. **965.** $x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}(1 - z)^{2/3} = 0$. **966.** $\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u)\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + [\psi(u) + av]\,\mathbf{k}$, kde $\mathbf{r} = \varphi(u)\,\mathbf{i} + \psi(u)\,\mathbf{j}$ je rovnica krivky K. **967.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + av\mathbf{k}$. **968.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + f(v)\,\mathbf{k}$. **969.** Hyperbolický paraboloid: $bxz - ayz + qx - py = 0$. **970.** Skrutková plocha: $z = b\,\mathrm{arctg}\,(y/x)$. **971.** $\mathbf{w} = \mathbf{r}(s) + a\{(\mathbf{r}''/|\,\mathbf{r}''\,|)\,.\cos\alpha + [\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)]/|\,\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)\,|\,.\sin\alpha\}$.

3,12. Dotyková rovina a normála k ploche

972. $O = (0, 0, 0)$ kónický bod. **973.** $O = (0, 0, 0)$ kónický bod. **974.** $V = (-4, 0, -2)$ kónický bod. **975.** Singulárne body ležia na priamke $x = 1$, $z = 1$. **976.** $O = (0, 0, 0)$ izolovaný bod. **977.** $O = (0, 0, 0)$ kónický bod. **979.** $a^2(\mathrm{d}u^2 + \cos^2 u\,\mathrm{d}v^2)$. **980.** $a^2\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$. **981.** $(1 + k^2)\,\mathrm{d}u^2 + u^2\,\mathrm{d}v^2$. **982.** $[1 + f'^2(v)]\,\mathrm{d}v^2 + v^2\,\mathrm{d}u^2$. **983.** $(1 + p^2)\,\mathrm{d}x^2 + 2pq\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (1 + q^2)\,\mathrm{d}y^2$, $p = z'_x$, $q = z'_y$. **984.** $\sinh u_2 - \sinh u_1$. **986.** $\cos\delta = b^2\sqrt{1 + c^2}/\sqrt{b^2 + c^2 + b^2c^2} = \mathrm{const.}$ **987.** $8x - 3y + z - 2 = 0$. **988.** $x + y - z\sqrt{2} + 2 = 0$. **989.** $5y - z = 0$. **990.** $y - z\sinh 1 + \sinh 1 - \cosh 1 = 0$. **991.** $(x + 1)/9 = (y - 3)/(-3) = (z + 9)$, $9x - 3y + z + 27 = 0$. **992.** $(x - 2)/8 = (y - 3)/(-1) = (z - 4)/(-10)$, $8x - y - 10z + 27 = 0$. **993.** $(x - 1) = y/0 = (z - 1)$, $x + z - 2 = 0$. **994.** $(x - 1) = (y - 1) = (z - 1)/(-1)$, $x + y - z - 1 = 0$. **995.** $(x - 1)/4 = (y - 1)/2 = (z - 2)/(-1)$, $4x + 2y - z - 4 = 0$. **996.** $(x - 1) = (y - 1)/(-1) = (z - \pi/2)$, $x - y + z - \pi/2 = 0$. **997.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,.\,\mathbf{r}_0 = 0$, $X = M + \mathbf{r}_0 t$. **998.** $x\cos u + y\sin u - a = 0$, $X = M + (\cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j})\,t$. **999.** $x\cos u\sin\alpha + y\sin u\,.\sin\alpha - z\cos\alpha = 0$, $X = M + (\cos u\sin\alpha\mathbf{i} + \sin u\sin\alpha\mathbf{j} - \cos\alpha\mathbf{k})\,t$. **1000.** $[x - (a + b\cos u)\cos v]\,.\cos u\cos v + [y - (a + b\cos u)\sin v]\cos u\sin v + (z - b\sin u)\sin u = 0$, $X = M + (\cos u\cos v\mathbf{i} + \cos u\sin v\mathbf{j} + \sin u\mathbf{k})\,t$. **1001.** $xf'(u)\cos v + yf'(u)\sin v - z - uf'(u) + f(u) = 0$, $(x - u\cos v)/f(u)'\cos v = (y - u\sin v)/f'(u)\sin v = [z - f(u)]/(-1)$. **1002.** $xx_0/a^2 - yy_0/b^2 = 2(z + z_0)$, $a(x - x_0)/bx_0 = -b(y - y_0)/ay_0 = (z - z_0)/(-2ab)$. **1003.** $x\sin u - y\cos u + vz/a - uv = 0$, $X = M + (a\sin u\mathbf{i} - a\cos u\mathbf{j} + v\mathbf{k})\,t$. **1004.** $x + y + z - 3 = 0$. **1005.** $z = 0$, $x + y - z = 2$. **1006.** $7x - 3y - 4z = 0$. **1008.** Priamky $x = x_1$; $y = az/x_1$; $y = y_1$, $x = az/y_1$. **1009.** Hyperbolický paraboloid. **1019.** $(mx + ly)^2 + (lz - nx)^2 + (ny - mz)^2 = a^2(l^2 + m^2 + n^2)$. **1020.** $(x + 4y + 9z)^2 = 14(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1)$. **1021.** $2(x^2/p + y^2/q - 2z) - (x\sqrt{p} + y\sqrt{q} - 1)^2 = 0$. **1022.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$. **1023.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2 - c^2z^2$. **1024.** $x^2 + y^2 + z^2 = c\,[\mathrm{arctg}\,(y/x) - \pi/2]\,z$. **1025.** $x^2 + y^2 + z^2 = 3a\sqrt[3]{xyz}$.

3,13. Krivosť krivky na ploche. Krivosť plochy

1026. $1/\sqrt{5}$. **1030.** $\sqrt{R^2 - r^2}/Rr$. **1031.** $1/2r$, r je polomer valca. **1033.** $-a(\mathrm{d}u^2 + \cos^2 u\,\mathrm{d}v^2)$. **1034.** $2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v/u$. **1035.** $a(-\mathrm{cotg}\,u\,\mathrm{d}u^2 + \sin u\,.\cos u\,\mathrm{d}v^2)$. **1036.** $[(g''f' - f''g')\,\mathrm{d}u^2 + fg'\mathrm{d}v^2]/\sqrt{f'^2 + g'^2}$. **1037.** $(f''_{xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f''_{yy}\,\mathrm{d}y^2)/\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}$. **1038.** $2m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/\sqrt{1 + m^2(x^2 + y^2)}$. **1039.** $k_1 = -k_2 = 1/5$. **1040.** $k_1 = 4/3$, $k_2 = 4/9$. **1041.** $k_1 = 1$, $k_2 = 9/4$. **1042.** $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. **1043.** $k_1 = -9/2$, $k_2 = 9/2$. **1044.** $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. **1045.** $k_1 = m(x_0 + \sqrt{m^2 + x_0^2})/a$ $k_2 = (x_0 - \sqrt{m^2 + x_0^2})/a$, kde $m^2 = y_0^2 + z_0^2 + a^2$. **1046.** $k_s = 3\sqrt{2}/4$, $k_t = 1$. **1047.** $k_s = -\sqrt{2}$, $k_t = 0$. **1050.** $k_s = 35\sqrt{26}/676$, $k_t = 11/676$. **1051.** $k_1 = k_2 = 1/a$, $k_s = 1/a$, $k_t = 1/a^2$. **1053.** $k_1 = -k_2$, $k_s = 0$, $k_t = -1/a^2\cos^4(u/a)$. **1055.** $k_1 = 2(f' + 2uf'')/(1 + 4uf'^2)^{3/2}$, $k_2 = 2f'(1 + 4uf'^2)^{1/2}$, $k_s = 2(uf'' + 2uf'^3 + f')/(1 + 4uf'^2)^{3/2}$, $k_t = 4f'(f' + 2uf'')/(1 + 4uf'^2)^2$, kde $u = x^2 + y^2$. **1056.** $k_1 = -k_2 = a/(a^2 + u^2)$, $k_s = 0$, $k_t = -a^2/(a^2 + u^2)^2$. **1057.** $k_s = (a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)/2a^2b^2c^2(x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)^{3/2}$, $k_t = 1/a^2b^2c^2(x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)^2$. **1058.** $k_s = -z/(x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$, $k_t = -1/(x^2 + y^2 + 1)$. **1059.** $k_s = 0$, $k_t = -a^2$. **1061.** $k_s = (k_n^2 + k_g^2)^{1/2}$. **1062.** a) Eliptické; b) hyperbolické; c) eliptické; d) eliptické; e) hyperbolické; f) parabolické; g) parabolické; h) parabolické; i) parabolické (vrchol je singulárny bod). **1063.** Eliptické, okrem bodov na osi o_z (singulárne). **1066.** $A = (0, 1, 0)$ je singulárny bod; pre $x > 1$ eliptické body pre $x < 1$ hyperbolické body. **1067.** Body kružnice $x^2 + y^2 = b^2$, $z = \pm a$ sú parabolické body;

eliptické body pre $\varrho(x, 0) > a^2 + b^2$; hyperbolické body pre $\varrho(x, 0) < a^2 + b^2$. **1068.** $(0, \pm\sqrt{p^2 - q^2}, (p^2 - q^2)/2q)$. **1069.** $\pm a \sqrt{(a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)}$, 0, $\pm c \sqrt{(b^2 - c^2)/(a^2 - c^2)}$. **1070.** Body, ktoré opíšu vrcholy sinusoidy.

4. Diferenciálne rovnice

4,1. Základné pojmy a úlohy vedúce na diferenciálne rovnice

1071. a) Áno; b) áno; c) áno; d) áno. **1080.** $y'^2 + xy' = y$. **1081.** $y' + y/x = 2$. **1082.** $y'' = 0$. **1083.** $(x - 1)\,y'' - xy' + y = 0$. **1084.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. **1085.** $y' = y \ln y'$. **1086.** $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$. **1087.** $y = xy' - \sqrt{1 + y'^2}$. **1088.** $y(1 + y'^2) \operatorname{arctg} y' - y' = x$. **1089.** $x + yy' = 0$. **1090.** $y'' + y = 0$. **1091.** $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$. **1092.** $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. **1093.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. **1094.** $(1 + y'^2)\,y''' - 3y'y''^2 = 0$. **1096.** a) $\cos x - \sin x$; b) neexistuje; c) $a \sin x$; d) neexistuje. **1097.** $mv' = -kv^2$, kde m je hmota telesa, v jeho rýchlosť a k koeficient úmernosti odporu prostredia. **1098.** $y'' = [M(x)/EJ]\,(1 + y'^2)^{3/2}$, kde y je priehyb, $M(x)$ ohybový moment v prierezе x, E modul pružnosti v ťahu, J moment zotrvačnosti prierezu vzhľadom na neutrálnu os nosníka. **1099.** $T' = (k/mc)\,(T - T_1)$, $T(t_0) = T_0$, kde k je konštanta úmernosti. **1100.** $n' + \alpha n^2 = q$, kde α je koeficient úmernosti rekombinovaných iónov so štvorcom ich celkového počtu. **1101.** $Li'' + Ri' + i/C = E\,\omega \cos \omega t$, kde i je prúd v okruhu.

4,2. Diferenciálna rovnica prvého rádu

1116. Celá rovina okrem priamky $x = 0$. **1117.** Celá rovina. **1118.** Celá rovina. **1119.** Polrovina $y > x$. **1120.** Celá rovina okrem priamok $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$. **1121.** Celá rovina. **1122.** Celá rovina okrem priamky $y = 0$. **1123.** $y_3(x) = x^3/3 + x^7/63 + 2x^{11}/2\,079 + x^{15}/59\,535$. **1126.** $y_3(x) = x^5/5 + x^{11}/11 \,.\, 10^2 + x^{17}/187 \,.\, 10^3 + x^{23}/11\,132 \,.\, 10^4$. **1127.** $y_k(x) = 1 + x^3/3 + (x^3/3)^2/2! + \ldots + (x^3/3)^k/k!$. **1128.** $|x| < 1/4$.

4,3. Diferenciálna rovnica so separovanými a separovateľnými premennými

1129. $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$, $C > 0$, $x \neq 0$. **1130.** $y = (C - x)/(1 + Cx)$. **1131.** $y = -\log_{10} (C - 10^x)$. **1132.** $y = \sqrt[3]{C + 3x - 2x^3}$. **1133.** $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$. **1134.** $y = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{1 - x^2}\right)^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$. **1135.** $y = C\,e^{3x}$. **1136.** $y - 2 = C\,e^x\,(y - 1)$, $y = 1$. **1137.** $y = C\,e^{-1/x^2}$. **1138.** $y = 1/(1 - C\,x)$. **1139.** $\ln |y/(y + 1)| = x^2/2 + x + C$, $y = 0$, $y = -1$. **1140.** $x^2(1 + y^2) = C$, $C \neq 0$. **1141.** $x - y + C = \ln [y^b(a + x)^a]$, $y = 0$. **1142.** $y = C\,e^{(x+b)^2/2} - a$. **1143.** $y + \operatorname{arctg} y = x + \ln |x| + C$. **1144.** $y = a \operatorname{tg} (C - \sqrt{ax - x^2/2})$.

1145. Ak b je celé číslo, $y = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{b + 1}\, x^{b+1} + C\right), \ b \neq -1, \\ \operatorname{tg}\,(a \ln |x| + C) \text{ pre } b = -1,\ x \neq 0. \end{cases}$ Ak b nie je celé číslo, $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{b + 1}\, x^{b+1} + C\right)$, $x > 0$. **1146.** $y = C\,|\sin x| - a$, $x \neq (2k + 1)\,\pi/2$, kde k je celé číslo. **1147.** $\cos x\, e^{-\cos y} = C$, $y \neq (2k + 1)\,\pi/2$, k je celé číslo. **1148.** $y = 4 \operatorname{arctg} C(e^{-2\sin(x/2)})$. **1149.** $y = -\ln (1 - C\,e^x)$, $1 - C\,e^x > 0$. **1150.** $e^x + e^{-y} = C$. **1151.** $y^2 = 2\,[\ln(1 + e^x) + C]$. **1152.** $y = k\pi$, k je celé číslo; $x \neq \ln 2$, $\operatorname{tg} y = C\,|2 - e^x|^3 = 0$. **1153.** $y = (x + 1)\,e^{-x}$. **1154.** $2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) + 5 = 0$. **1155.** $y = (1 + x)/(1 - x)$, $x \neq -1$. **1156.** $y = \sqrt{1 + x^2}/(x + \sqrt{1 + x^2})$. **1157.** $y = 1$, $x \neq 0$. **1158.** $y = \operatorname{arctg} (1 - 2/x) + 2\pi$. **1159.** $y = \arcsin\,.\,(\sqrt{3}/2 - 1/x) + 5\,\pi$. **1160.** $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x\right) + \dfrac{7\,\pi}{2}$. **1161.** $(x - y)^2 + 2x = C$. **1162.** $\operatorname{cotg} \dfrac{y - x}{2} = x + C$. **1163.** $x + 2y + 3 \ln |2x + 3y - 7| = C$. **1164.** $\sqrt{4x + 2y + 1} - 2 \ln (\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C$. **1165.** a) Ak $xy > 0$, potom $y = x + C$

Ak $xy < 0$, potom $y = -x + C$; b) Ak $x + y > 0$, potom $y = x + C$. Ak $x + y < 0$, potom $y = -x + C$; c) Ak $x \geqq 0$, $y > 0$, potom $y = x + C$. Ak $x < 0$, $y > 0$, potom $y = C$.

1166. a) Ak $x + y \geqq 0$, potom $y = C\,e^x + 1 - x$, $C \neq 0$. Ak $x + y < 0$, potom $y = C\,e^{-x} + 1 - x$; b) Ak $xy \geqq 0$, potom $y = C\,e^{x^2/2}$. Ak $xy < 0$, potom $y = C\,e^{-x^2/2}$. 1167. $y = C\,e^{x/a}$, $C \neq 0$. 1168. $y^2 = 2p(x + C)$, $yy' > 0$; $y^2 = -2p(x + C)$, $yy' < 0$. 1169. $(C - x)^2 + y^2 = a^2$. 1170. $y = Cx^2$, $C \neq 0$. 1171. Traktrisa, $a \ln (a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C$. 1172. $x^m y^n = C$. 1173. $\varrho(1 \pm \cos \varphi) = C$. 1174. $s(t) = kt^{3/2} + s_0$. 1175. 23s. 1176. 6,48 min. 1177. $T = 42$ min; $T = 4ld\sqrt{d}/3\mu g\sqrt{2g}$. 1179. 1,9 %. 1180. $975 \cdot 10^6$ rokov.

4,4. Homogénna diferenciálna rovnica 1. rádu

1181. a) 1; b) 0; c) 2; d) 1; e) 3/2; f) 2. 1182. $x^2 - 2xy - y^2 = C$, $x + y \neq 0$. 1183. $y = x \ln |x| + Cx$, $x \neq 0$. 1184. $y^2 + 2xy = C$. 1185. $y = C\,e^{x/y}$. 1186. $(x - y) \cdot e^{x/(x-y)} = C$. 1187. $y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2$. 1188. $y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C)$. 1189. $x^2 + y^2 = Cy$. 1190. $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$. 1191. $x^3y + xy^3 = C$. 1192. $cx^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$. 1193. $y = -\ln (\ln Cx)$. 1194. $\operatorname{cotg} \ln \sqrt{x/y}$, $y = x\,e^{2k\pi}$. 1195. $y = xe^{1+Cx}$. 1196. $y = x\,(1 + \operatorname{arctg} Cx)$. 1197. $x - y \cos (y/x) + xy' \cos (y/x) = 0$. 1198. $x^2 + 3xy + y^2 + y = C$. 1199. $\ln |5x - 5y + 3| + 15x + 10y = C$, $5x - 5y + 3 = 0$. 1200. $(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = C$. 1201. $(y - x - 2)^{-4} (5y + x + 2) = C$. 1202. $\sin [(y - 2x)/(x + 1)] = C(x + 1)$. 1203. $\ln [(x + y)/(x + 3)] = 1 + C/(x + y)$. 1204. $x^2 - y^2 = 0$ 1205. $x^2/2y^2 = \ln y$. 1206. $\ln(x^2 + y^2) = 2(y/x) \operatorname{arctg} (y/x)$. 1207. $x + y^2 \ln Cx = 0$, $y = 0$. 1208. $xy = -2$, $1 - xy = Cx^3(2 + xy)$. 1209. a) $\arcsin (y^2/|x^3|) = \ln Cx^3$, $y^2 = |x^3|$. 1212. $x^2 + y^2 = Cx$. 1213. $y = C(x^2 + y^2)$. 1214. $x^2 + y^2 = Cx$, $x^2 = C^2 - 2Cy$, $xy = C$. 1215. $y = Cx - x \ln |x|$.

1216. Rotačný paraboloid, rez je parabola $y^2 = 2Cx + C^2$.

4,5. Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu. Bernoulliho diferenciálna rovnica

1217. a) $y = c\,e^{1/x}$. b) $y = c/\cos x$. c) $y = c\,e^{-x \cos x}$. d) $y = c\,e^{-x^4/4}$. 1218. $y = x/3 - 1/9 + c\,e^{-3x}$. 1219. $y = e^{2x}/4 + c\,e^{-2x}$. 1220. $y = 1 + ce^{-x^2/2}$. 1221. $y = cx^2 - x - 1/2$. 1222. $y = x^3/4 + c/x$. 1223. $y = (c - \ln |x|)/x$. 1224. $y = a + c\sqrt{1 - x^2}$. 1225. $y = (x + c)(1 + x^2)$. 1226. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})(a \arcsin x + c)$. 1227. $y = e^{x^2} + ce^{x^2/2}$. 1228. $y = c \ln^2 x - \ln x$. 1229. $(x + 1)\,y = \sin x - (x + 1) \cdot \cos x + c$. 1230. $y = x^2 \sin x + cx^2$. 1231. $y = 1 + c \cos^2 x$. 1232. $y = x^2/4 + c \sin x$. 1233. $y = c\,e^{-\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x - 1$. 1234. $y = (c - \cos x)/\sqrt{1 + x^2}$. 1235. $y = (2\sqrt{\sin x} + c) \operatorname{arctg} x$. 1236. $y = 1$. 1237. $y = (e^{-x} + \cos x + \sin x)/2$. 1238. $y = (2x - \sin 2x + 4 - \pi)/4 \sin x$. 1239. $y = \sin 2x + \pi^2/x^2$. 1240. $x = y^2 + cy$, $y = 0$. 1241. $x = y^2(1 + c\,e^{1/y})$, $y = 0$. 1242. $x = e^y + c\,e^{-y}$. 1243. $x = 2 \ln y - y + 1 + cy^2$, $y = 0$. 1244. $x = y \ln (y/c)$. 1245. $xy = a^2 + cy^2$. 1246. a) 87,37 °C, b) 120 °C. 1247. $I = UR^{-1}(1 - e^{-Rt/L})$. 1248. $i = 0{,}6$ A. 1249. 9,03 A. 1250. $y^2(c\,e^{x^2} + 1) = 1$. 1251. $\sqrt{y} = c\sqrt[4]{1 - x^2} - (1 - x^2)/3$. 1252. $y^{-2} = x^4(2\,e^x + c)$, $y = 0$. 1253. $y = 2/x(c - \ln^2 x)$. 1254. $y = (c\,e^{x^3} - x^3/3)^2$, $y = 0$. 1255. $y = 2/(c\,e^x - \sin x - \cos x)$, $y = 0$. 1256. $y^{-3} = c \cos^3 x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x$, $y = 0$. 1257. $16y^2 = c\,e^{4x} - 4x - 5$. 1258. $y^2 = -x \ln x + cx$. 1259. $y = (c + x^2)^2/4\,e^{2x^2}$. 1260. $xy(c - \ln^2 y) = 1$. 1261. $y = \sqrt{2\sqrt{1 - x^2} - x^2 - 1}$. 1262. $y^2 + x + ay = 0$. 1263. $y^2 = 4ax + 4a^2(1 - e^{x/a})$. 1264. $i = \sqrt{1{,}1(5t + e^{-5t} - 1)}$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$.

4,6. Riccatiho diferenciálna rovnica

1265. $y = x + 2 + 4/(C\,e^{4x} - 1)$. 1266. $y = 1 + 1/(-x|x| + C|x|)$, $C \neq 0$. 1267. $y = x + 1/(1 + C\,e^x)$. 1268. $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{C + \ln |x|} - \dfrac{1}{2}\right)$. 1269. $y = \dfrac{4x^3 + C}{x(x^3 + C)}$. 1270. $y = e^x + 1/(C - x)$. 1271. $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\left(C - \displaystyle\int \dfrac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\,dx\right)^{-1}$. 1272. $y = (-Cx^{2/3} + 2x)/(Cx^{5/3} - x^2)$, $C > 0$, $x \neq 0$. 1273. $y = [\operatorname{cotg} (1/x + C)]/x^2 - 1/x$, $x \neq 0$. 1274. $y = [3(C\,e^{-6x^{1/3}} + 1)]/[(3x^{2/3} + x^{1/3})\,C\,e^{-6x^{1/3}} - (3x^{2/3} - x^{1/3})]$, $x \neq 0$. 1275. $y = x/(-x/5 + Cx^{-4})$, $x \neq 0$.

1276. $y = (2x^4 - 2C)/(x^5 + Cx)$, $x \neq 0$. **1277.** $y = \operatorname{tg}(4x + C) + x^3/2$, $-C/4 - \pi/8 \leq x \leq -C/4 + \pi/8$. **1278.** $y = t/(-7 + u)$, $s = t/(s + v)$, $u = t/(-3 + \omega)$, $\omega = t/(1 + z)$, $z = \sqrt{t}/\operatorname{tg}(C - \sqrt{t})$, $t = x\sqrt{x}$. **1279.** $y = x^4 + 1/C\, e^{x^4/4}$, $C \neq 0$

4,7. Diferenciálne rovnice tvaru $x = f(y')$, $y = g(y')$, Clairotova diferenciálna rovnica, Lagrange—d'Alembertova diferenciálna rovnica

1280. $x = p + p^3$, $y = (3p^4 + 2p^2 + C)/4$. **1281.** $x = t^3 + t^2$, $y = 3t^4/2 + 2t + C$. **1282.** $y + C = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$. **1283.** $x^2 + (y - c)^2 = a^2$ **1284** $y + c = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. **1285.** $x = p \sin p$, $y = p^2 \sin p + p \cos p - \sin p + C$, $x \in (0, \pi/2)$. **1286.** $x = 1/p + \ln p$, $y = p - \ln p + C$. **1287.** $x = 2p - 3p^2 + C$, $y = p^2 - 2p^3$; $y = 0$. **1288.** $x + c = \cos p + \ln \operatorname{tg}(p/2)$, $y = \sin p$; $y = 0$. **1289.** $x = \ln p + 1/p + C$, $y = p - \ln p$. **1290.** $x = e^p + C$, $y = (p - 1)e^p$; $y = -1$. **1291.** $x = \pm 2\sqrt{1 + p^2} - \ln(\sqrt{p^2 + 1} \pm 1) + C$, $y = -p \pm p\sqrt{p^2 + 1}$; $y = 0$. **1292.** $y = Cx - 4C^2$, $y = x^2/16$. **1293.** $y = Cx + C^2$, $4y = -x^2$. **1294.** $y = Cx + C^4$, $y = -3x\sqrt[3]{2x}/8$. **1295.** $y = Cx + 2\sqrt{-C}$; $xy = 1$. **1296.** $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$, $x^2 + y^2 = a^2$. **1297.** $y = Cx + 1/2C^2$, $y = 3x^{2/3}/2$. **1298.** $y = Cx + \cos C$, $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$. **1299.** $y = Cx + C + e^C$, $y = (x + 1)\ln(-1 - x) - x - 1$. **1300.** $y = Cx - \ln C$, $y = \ln x + 1$. **1301.** $y = Cx - C^3/3$, $9y^2 = 4x^3$. **1302.** $2C^2(y - Cx) = 1$, $8y^3 = 27x^2$. **1303.** $x = 2p/3 + Cp^{-1/2}$, $y = p^2/3 - Cp^{1/2}$. **1304.** $x = C/p^2 - 1/p^3$, $y = 2C/p - 1/p^2$. **1305.** $y = (C + \sqrt{x + 1})^2$; $y = 0$. **1306.** $x = 2(1 - p) + C e^{-p}$, $y = 2 - p^2 + C e^{-p}(1 + p)$. **1307.** $x = 3p^2 + 3p \ln[(p - 1)/(p + 1)] + Cp$, $y = 2p^3 + Cp^2/2 + 3p + [(3p^2 + 1)/2] \ln|(p - 1)/(p + 1)| + C/2$; $y = x + 2$; $y = -x - 2$. **1308.** $x = (p + C)/p^2$, $y = 2 + 2C/p - \ln p$. **1309.** $x = (C - \ln p)/p^2$, $y = 2(C + \ln p)/p + 1/p^2$. **1310.** $y = 2\sqrt{Cx} + C$; $y = -x$. **1311.** $x = (1/2p^2)\ln|p + \sqrt{1 + p^2}| - p\sqrt{1 + p^2} + C$, $y = 2px + \sqrt{1 + p^2}$. **1312.** $x^2 + y^2 = (2Cx + C^2)/(k^2 - 1)$, ak $k \neq 1$; $x^2 + y^2 = Cx$, ak $k = 1$. **1313.** $(y - x - 2a)^2 = 8ax$. **1314.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **1315.** Kružnica, elipsa, hyperbola. **1316.** $y^2 + 16x = 0$. **1317.** $x = p(p^2 + 2)/\sqrt{(p^2 + 1)^3}$, $y = p^2/\sqrt{(p^2 + 1)^3}$; $x = p/\sqrt{(p^2 + 1)^3}$, $y = (2p^2 + 1)/\sqrt{(p^2 + 1)^3}$. **1318.** $x = C(\cos\varphi + b)[\operatorname{tg}(\varphi/2)]^{1/b}$, $y = C \sin\varphi \cdot [\operatorname{tg}(\varphi/2)]^{1/b}$, $b = \pm a/v_0$, kde v_0 je rýchlosť zvuku v nepohyblivom prostredí.

4,8. Trajektórie

1319. $y = cx$, $x = 0$. **1320.** $2x^2 + y^2 = c^2$. **1321.** $x^2 - y^2 = c$. **1322.** $x^2 + 2y^2 = c$. **1323.** $y = c e^{-2x}$. **1324.** $(x^2 - 4y - 8) e^{-y/2} = c$. **1325.** $x^2 + y^2 + cy = 0$. **1326.** $y^4 = cx$, $x = 0$. **1327.** $9 \ln y = 4 \ln cx$. **1328.** $y^2 = x + c$. **1329.** $3x = c\sqrt{|y|} - y^2$ $y = 0$ **1330.** $(x^2 + y^2)^2 - cxy = 0$. **1331.** $2y^2 - 1 = c(2x^2 + 1)$. **1332.** $\varrho = c\sqrt{\sin\varphi}$ **1333.** $x = c(1 \pm 2^{-1/2} \cos t) \cdot [\operatorname{tg}(t/2)]^{\pm\sqrt{2}t/2}$, $y = \pm c \sin t\, [\operatorname{tg}(t/2)]^{\pm\sqrt{2}/2}$. **1334.** $x^2 + y^2 - cx + a^2 = 0$ **1335.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = c$. **1336.** Krivky ležiace na valcoch $x^2(1 + m^2y^2) = c$ alebo $y^2(1 + m^2x^2) = c$. **1337.** $x \cosh t = c + a(t \cosh t - \sinh t)$; $y \cosh t = c \sinh t + a$. **1338.** $x = 2a(t \sin t - \cos t) - (at^2 + c)\cos t$, $y = 2a(\sin t + t \cos t) - (at^2 + c)\sin t$. **1339.** $\varrho = c\, e^{\varphi/m}$, kde $m = \operatorname{tg}\beta$. **1340.** $\varrho = c\, e^{\varphi}$. **1342.** $(x + y)^2 (y - 2x)^4 = c(y - x)^3$; $y = x$. **1343** $y^2 = c(x + y)$; $y = -x$. **1344.** $\varphi = c$. **1345.** $\varrho = c[1 + \cos(2\varphi - 2\beta)]$. **1346.** $\varrho = c\, e^{\varphi/\sqrt{2}}$; $z = \varrho$ **1347.** $x = a \cos t$, $y = a \cos t$, $z = t$; $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ct$. **1348.** $\operatorname{cotg}(\pi/4 - \vartheta/2) = c\, e^{m\varphi}$.

4,9. Diferenciálne rovnice vyšších rádov. Zníženie rádu diferenciálnej rovnice

1349. $y = x^2 + \ln|x| + C_1x + C_2$. **1350.** $y = x^3/6 - \sin x + C_1x + C_2$. **1351.** $y = \ln|\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$, $\sin x = 0$. **1352.** $y = (x^3 \ln|x|)/6 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **1353.** $y = C_1[x \int\limits_0^x e^{t^2}\, dt - (e^{x^2} - 1)/2]$. **1354.** $y = \dfrac{x^2}{2} \int\limits_0^x \dfrac{e^t}{t}\, dt - \dfrac{x + 1}{2} e^x + C_1x^2 \ln x + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **1355.** $y = x^5/10 + x + 2$. **1356.** $y = -x \ln|x| + x^2 - 1$. **1357.** $x = e^t + t$, $y = (t/2 - 3/4) e^{2t} + (t^2/2 - 1 + C_1) e^t + t^3/6 + C_1t + C_2$. **1358.** $x = \sin t$, $y = t/4 + (19 \sin 2t)/96 - (t \cos 2t)/8 - (\cos 2t)/32 - (C_1 \cos 2t)/4 + (\sin 4t)/192 + C_2 \sin t + C_3$. **1359.** $y = 1 +$

$+ C_1 \sin (C_2 \mp x)$. 1360. $e^y \sin^2 (C_1x + C_2) = 2C_1^2$, $e^y \sinh^2 (C_1x + C_2) = 2C_1^2$, $e^y(x + C)^2 = 2$. 1361. $y = C_1 \operatorname{tg} (C_1x + C_2)$, $y(C - x) = 1$, $\ln |(y - C_1)/(y + C_1)| = 2C_1x + C_2$, $y = C$. 1362. $x = C_1 + C_2 \ln |y + z| + \ln |y - C_1z|$, $z^2 = y^2 + 1 - C_1^2$. 1363. $x - C_2 = \frac{-y^2}{2} \ln y + 3y^2/4 + C_1y$. 1364. $\ln |\ln |C_1y|| = 4x + C_2$. 1365. $2(C_1y - 1)^{3/2} = 3C_1x + C_2$. 1366. $y \cos^2 (x + C_1) = C_2$. 1367. $y = \operatorname{arctg} (C_2 - C_1x)$. 1368. $y = (e^x + e^{-x})/2$. 1369. $y^3 - y = 3x$. 1370. $y = C_1x^2/2 + C_2$, 1371. $y = x^4/8 + C_1x^2/2 + C_2$. 1372. $y = C_1x^2/2 + (C_1 - C_1^2)x + C_2$. 1373. $y = (1 + C^2) \ln (1 + Cx) - x/C + C_1$, $C \neq 0$. 1374. $y = \frac{1}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) e^{C_1x+1} + C_2$, $C_1 \neq 0$. 1375. $yC^2 = (C^2x^2 + 1) \operatorname{arctg} Cx - Cx + C_1$, $y = k\pi x^2 + C$, kde k je celé číslo. 1376. $y = -x - (\sin 2x)/2 + C_1 \sin x + C_2$. 1377. $x = C_1p + 3p^2$, $y = 12p^5/5 + 5C_1p^4/4 + C_1^2p^3/6 + C_2$, $y = C$. 1378. $y = -1/2x - C_1 \ln |x| + C_2x + C_3$. 1379. $y = C_1x^3/6 + C_2x + C_3$. 1380. $y = C_1x^5/120 - x^3/12C_1 + C_2x^2/2 + C_3x + C_4$, $C_1 \neq 0$. 1381. $y = (C_2 + x)^3/3 + C_1$. 1382. $y = -\cos (C_1 + x) + C_2$. 1383. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$. 1384. $2x = C_2 + C_1(2t - \sin 2t)$, $y = 4 - C_1 \sin^2 t$. 1385. $y = C_1 e^{x/a} + C_2x + C_3$, $C_1 \neq 0$. 1386. $y = (C_1 - x) \ln (C_1 - x) - (c_1 - x) + C_2x + C_3$, $C_1 \neq x$, $y = C_1x + C_2$. 1387. $y = \cos (C - x) + C_1x + C_2$. 1388. Ak $C_1 \neq 0$, potom $y = C_3 e^{C_1x} - \frac{C_2}{C_1}$. Ak $C_1 = 0$, potom $y = C_2x + C_3$. 1389. $\operatorname{arctg} y = Cx + C_1$, $C \neq 0$. 1390. $C_1y - 1 = C_2 e^{C_1x}$, $y = -x + C$, $y = 0$. 1391. $y = e^{x^2/2} (C_1 \int e^{-x^2/2} dx + C_2) - 1$. 1392. $y = 4C_1 \operatorname{tg} (C_1x^2 + C_2)$, $2 \ln |(y - C_1)/(y + C_1)| = C_1x^2 + C_2$, $y(C - x^2) = 4$, $y = C$. 1393. Ak $y'' > 0$, $y > 0$, $C > 0$, potom $y = C_2 e^{C_1x} + C_3 e^{-C_1x}$, $C_1 \neq 0$. Ak $y'' < 0$, $y < 0$, $C > 0$, potom $y = C_2 \cos C_1x + C_3 \sin C_1x$, $C_1 \neq 0$, $y = C_1x + C_2$. 1394. $y = \pm \sqrt{Cx + C_1} + C_2x + C_3$, $C \neq 0$ a $Cx + C_1 \geq 0$. 1395. $y = C$, $y(C_2 - C_1x) = 1$, $C_1 \neq 0$. 1396. $y = \sqrt{C_1 \cos (x + C_2)}$. 1397. $2C_1C_2y = C_2^2 |x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$. 1398. $\ln |y| = C_1[x^2 + x\sqrt{1 + x^2} + \ln |x + \sqrt{1 + x^2}|] + C_2$, $C_1 > 0$. 1399. $|y|^{C_1^2+1} = C_2(x - 1/C_1) \cdot |x + C_1|^{C_1^2}$, $y = C$. 1400. $4C_1y^2 = 4x + x(C_1 \ln C_2x)^2$. 1401. $y = C_2 |x| e^{-C_1/x}$, $C_2 \neq 0$. 1402. $2 \ln C_1y + C_2/x + x/C_2$, $C_2 \neq 0$. 1403. $y = x(C_1 \arcsin (C_2/x))$, $C_2 \neq 0$. 1404. $y = x \arcsin C_2x - C_1x$. 1405. $y(x + 2) = -x - 6$. 1406. $y = x + 1$. 1407. a) kružnica; b) $(x - C_1)^2 - C_2y^2 + kC_2^2 = 0$; c) reťazovka $y = a \cosh ((x - x_0)/2)$; kružnica $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$, $y = \frac{(x + c_2)^2}{4c_1} + c_1$, $c_1 \neq 0$, $x = \frac{c_1}{2}(t - \sin t) + c_2$, $y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos t)$. 1408. Logaritmická špirála. 1409. Evolventa kružnice. 1410. Cykloida. 1411. Parabola. 1412. Reťazovka $y = a \cosh [(x + C_1)/a] + C_2$. 1413. $y = qx^2(1 - x)^2/24\,EJ$. 1414. $s = \frac{m}{ab}(a + bv_0) + \frac{am}{b^2} \ln \frac{a + bv_0}{a}$ 1415. $y''(a - x) = v\sqrt{1 + y'^2}/\omega$, $t = a/v(1 - v^2/\omega^2)$. 1416. $y = 3 \ln (x + 8 + \sqrt{x^2 + 16x + 55}) + C$.

4,10. Lineárne diferenciálne rovnice

1417. Nezávislé. 1418. Závislé. 1419. Nezávislé. 1420. Závislé. 1421. Závislé. 1422. Nezávislé. 1423. Závislé. 1424. Závislé. 1425. Nezávislé. 1426. Závislé. 1427. Nezávislé. 1428. 0; funkcie sú lineárne nezávislé; $W = 0$, $x \in J$ je iba nutná podmienka pre lineárnu závislosť. 1429. $W(x) = C e^{-\int p(x) dx}$. 1430. $y'' - y' \operatorname{cotg} x = 0$. 1431. $(x - 1) \cdot y'' - xy' + y = 0$. 1432. $y'' - y = 0$. 1433. $y'' + 4y = 0$. 1434. $(x^2 - 2x + 2) y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$. 1435. $y'' - 2y' + y = 0$. 1437. $y = C_1(1 + 1/x) + C_2(x/2 + 1 - [(x + 1) \ln |x + 1|]/x)$. 1438. $y = C_1(x + \sqrt{x^2 + 1})^n + C_2(x - \sqrt{x^2 + 1})^n$. 1439. $y = C_1 e^{-2x} + C_2(4x^2 + 1)$. 1440. $y = (C_1e^{-x} + C_2 e^x)/x$. 1441. $y = C_1 \sin x + C_2(2 - \sin x \cdot \ln [(1 + \sin x)/(1 - \sin x)]$. 1442. $y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x \operatorname{tg} x)$. 1443. $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3x^2$. 1444. $y = C_1x + C_2 e^{-2x}$. 1445. $y = C_1(1 + x \ln |x|) + C_2x$. 1446. $y = C_1x + C_2(1 + \ln |x|)$. 1447. $y = C_1(x^2 + 1) + C_2[x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x]$. 1448. $y = C_1 e^x + C_2x^2$. 1449. $y = C_1(2x - 1) + C_2 e^{-x} + (x^2 + 1)/2$. 1450. $y = C_1x^3 + C_2(x + 1) - x$. 1451. $y = x^3 + C_1x^2 + C_2$. 1452. $y = C_1(x^2 + 1) + C_2/x + 2x$. 1453. $y = C_1/(x + 1) + C_2/(x - 1) + x$. 1454. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. 1455. $y = C_1x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

4,11. Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi

1456. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$. **1457.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}$. **1458.** $y = c_1 + c_2 e^{-5x}$. **1459.** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x/2}$. **1460.** $y = c_1 e^{(3-\sqrt{7})x/2} + c_2 e^{(3+\sqrt{7})x/2}$. **1461.** $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$. **1462.** $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x/2}$. **1463.** $y = (c_1 + c_2 x) e^{a^2 x}$. **1464.** $y = [c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$. **1465.** $y = (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) e^{2x}$. **1466.** $y = e^{-x/2}[c_1 \sin(\sqrt{7}\, x/2) + c_2 \cos(\sqrt{7}\, x/2)]$. **1467.** $y = e^{-ax}(c_1 \cos a\sqrt{3}x + c_2 \sin a\sqrt{3}\, x)$. **1468.** $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$. **1469.** $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}$. **1470.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$. **1471.** $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{3x} + c_5 e^{-3x}$. **1472.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x}$. **1473.** $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + c_3 e^{-2x}$. **1474.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 x e^{x}$. **1475.** $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{-x}$. **1476.** $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + (c_4 + c_5 x) e^{2x}$. **1477.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^{x} + c_6 e^{-x}$. **1478.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2) e^{-x}$. **1479.** $y = c_1 e^{x} + [c_2 \cos(\sqrt{3}\, x/2) + c_3 \sin(\sqrt{3}\, x/2)] e^{-x/2}$. **1480.** $y = c_1 e^{x} + (c_2 \cos 3x + c_4 \sin 3x) e^{2x}$. **1481.** $y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) e^{x} + (c_3 \cos x + c_4 \sin x) e^{-x}$. **1482.** $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \sin ax + c_4 \cos ax$. **1483.** $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x$. **1484.** $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \cos x + c_5 x \sin x$. **1485.** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + (c_3 \cos x + c_4 \sin x) e^{\sqrt{3}x} + (c_5 \cos x + c_6 \sin x) \cdot e^{-\sqrt{3}x}$. **1486.** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + (c_5 \cos \sqrt{2}x + c_6 \sin \sqrt{2}\, x) e^{\sqrt{2}x} + (c_7 \cos \sqrt{2}x + c_8 \sin \sqrt{2}\, x) \cdot e^{-\sqrt{2}x}$. **1487.** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + y_1$; a) $y_1 = 4$; b) $y_1 = 2x^2 + 1$; c) $y_1 = 6 e^{3x}$; d) $y_1 = -2x e^{2x}$; e) $y_1 = (x^2 + 3x) e^{2x}$; f) $y_1 = (x^3 - x) e^{5x}$; g) $y_1 = 3 \sin 2x + 7 \cos 2x$; h) $y_1 = (3 \cos x - \sin x) e^{2x}$; i) $y_1 = -x e^{2x}/6 + e^{-2x}/56$. **1488.** $y = c_1 + c_2 e^{4x/3} + y_1$; a) $y_1 = -2x$; b) $y_1 = 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 8x$; c) $y_1 = -3 e^{x}$; d) $y_1 = x e^{4x/3}$; e) $y_1 = 4 \cos x - 3 \sin x$; f) $y_1 = (3x + 172/25) \cos x + (4x - 54/25) \sin x$; g) $y_1 = (3/2) \cdot [\cos(4x/3) - \sin(4x/3)]$; h) $y_1 = x e^{4x/3} - (3/8) e^{-4x/3}$. **1489.** $y = (c_1 + c_2 x) e^{x/3} + y_1$; a) $y_1 = \sqrt{2}$; b) $y_1 = e^{-x/3}$; c) $y_1 = (11/198) x^2 e^{x/3}$; d) $y_1 = (1/2) \cos(x/3)$; e) $y_1 = (12 \cos 2x - 35 \sin 2x)/(2\,738 + (36 \cos 6x - 323 \sin 2x)/211\,250$; f) $\cancel{y_1 = x^2 + 2x/3 - 10}$. **1490.** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + y_1$; a) $y_1 = 2x^4 - 6x^2 + 4x + 3)/8$; b) $y_1 = (x \sin 2x)/4$; c) $y_1 = -(\cos 3x)/5$; d) $y_1 = e^{-2x}/8$; e) $y_1 = (3x \cos 2x - \sin 2x)/24$; f) $y_1 = \cosh 2x$; g) $y_1 = (1/32 - x^2/4) \cos 2x + (x/8) \sin 2x$; h) $y_1 = 0{,}01\, e^{2x}[(5x - 1) \sin 2x + (7 - 10x) \cos 2x]$. **1491.** $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + y_1$; a) $y_1 = e^{2x}$; b) $y_1 = (\cos x + \sin x)/8$; c) $y_1 = 2x^2/5 + 16x/25 + 44/125$; d) $y_1 = -(e^{2x} \sin 2x)/3$; e) $y_1 = -(e^{2x} \cos 2x)/3$; f) $y_1 = (x^2 \sin x + x \cos x) e^{2x}/4$; g) $y_1 = 13/5$; h) $y_1 = e^{-4x}(3 \sin x + \cos x)/240 - x e^{2x}(\cos x)/4$. **1492.** $y = c_1 e^{x} + c_2 + x$. **1493.** $y = (c_1 \sin x + c_2 \cos x) e^{x} - (\sin 2x)/10 + (\cos 2x)/5 + x^2/2 + x + 1/2$. **1494.** $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + x e^{2x}/5 - x/6 - 1/36$. **1495.** $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}/2 + e^{x}/4$. **1496.** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \sin 3x - (\cos 3x)/5 - (x \cos 2x)/4$. **1497.** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^{nx}/(n^2 - 5n + 6)$, ak $n \neq 2$, $n \neq 3$. **1498.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 0{,}5 - 0{,}1 \cos 2x$. **1499.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} - 1/8 + (8 \sin 4x - 19 \cos 4x)/3\,400 + (7 \cos 2x - 4 \sin 2x)/130$. **1500.** $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + x^2/2) - 1$. **1501.** $y = c_1 e^{x} + [c_2 \cos(\sqrt{3}x/2)\, e^{-x/2} + c_3 \sin(\sqrt{3}x/2)]\, e^{-x/2} - x^3 - 5$. **1502.** $y = c_1 + (c_2 \sin 2x + c_3 \cos 2x) e^{-x} + x^2/10 - 2x/25$. **1503.** $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + e^{-x} \cos x$. **1504.** $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x - (x \sin x)/2 + 3x (\sin x)/4 - x^2(\cos x)/4$. **1505.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + 7x^3/6 + 3x(\sin x)/2$. **1506.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + (4 \cos 4x - \sin 4x)/1\,088$. **1507.** $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + x^2/2) e^{x} + 12x^2 + 3x^3 + x^4/2 + x^5/20$. **1508.** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + (c_3 + c_4 x) e^{-x} + (\sin x)/6 + 2 e^{x}$. **1509.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x + (x^2 - 3x) e^{x}/8 - (x \sin x)/4$. **1510.** $y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + x^5/60 - x^3/2$. **1511.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + (e^{x}/2) \int (e^{-x}/x)\, dx - (e^{-x}/2) \int (e^{x}/x)\, dx$. **1512.** $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} + 1/x$ **1513.** $y = (x \ln|x| + c_1 x + c_2) e^{x}$. **1514.** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + 1 + x e^{-x} + (e^{x} + e^{-x}) \cdot \ln(1 - e^{-x})$. **1515.** $y = (c_1 + \ln|\sin x|) \sin x + (c_2 - x) \cos x$. **1516.** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + (1/4) \cos 2x \cdot \ln|\cos 2x| + (1/2) \sin 2x$. **1517.** $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + 2$. **1518.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + \ln x$. **1519.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x} + \sqrt{x}$. **1521.** $y = 2 \sin(x/2) - 6 \cos(x/2)$. **1522.** $y = (\sinh x)/\sinh 1 - 2x$. **1523.** $y = \cos x + (\sin x - x \cos x)/2$. **1524.** $y = (58 e^{3x} - 81 e^{2x} + 18 e^{x} + 6x + 5)/36$. **1525.** $y = 2 + e^{-x}$. **1526.** $y = e^{x} + x^3$. **1527.** $y = e^{-x} + e^{-x/2}[\cos(\sqrt{3}\, x/2) + 3^{-1/2} \sin(\sqrt{3}\, x/2)] + x - 2$. **1528.** $y = (\cosh x \cdot \sin x - \sinh x \cdot \cos x)/2$. **1529.** $y = (5 e^{2x} - e^{-2x})/4$. **1530.** $y = 4 - 3 e^{-x} + e^{-2x}$. **1531.** Výška $y = h - gt/k + g(1 - e^{-kt})/k^2$. **1532.** $\omega \doteq 1{,}22\ s^{-1}$; $A_{max} \doteq 20{,}025$ cm. **1533.** $x = 5 e^{-3t} \cdot \sin[4t + \operatorname{arctg}(4/3)]$. **1534.** $y = [(h/(k^2 - \omega^2)] \sin \omega t + [h/(k^2 - 9\omega^2)] \sin 3\omega t$, $h = f_0/m$, $k^2 = c/m$, $k \neq \omega$; $y = -(ht/2\omega) \cos \omega t - (h/24\omega^2) \sin 3\omega t$, $k = \omega$. **1535.** $x \doteq -2{,}3 \sin 8\pi t$, [cm]. **1536.** a) $x = -e^{-2{,}5t} \cdot [(5/100) \cos 13{,}78t + (0{,}907/100) \sin 13{,}78t]$; $x = -e^{-98t} \cdot (49 e^{96t} - 1)/960$ **1537.** $y = c_1 \cos ax \cosh ax + c_2 \cos ax \sinh ax + c_3 \sin ax \cosh ax + c_4 \sin ax \sinh ax + q_0/4a^4$, kde $a^4 = k/4EJ$ **1538.** $w =$

f) $5x^2 + 102x + 45$

$= (r^3/Ed)\,\gamma(h - x) - (r^3/Ed)\,\gamma h\,.\,[\mathrm{e}^{-ax}(\sin ax + \cos ax) - (1/ah)\,\mathrm{e}^{-ax}\sin ax]$, kde $a = \sqrt[4]{Ed/4Dr^2} = \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)/r^2d^2}$. **1539.** $y = c\sin(n\pi x/l)$, $\omega_k = (n^2\pi/l^2)\sqrt{EJg/q}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Návod:* Začiatočné podmienky sú $y(0) = y(l) = 0$, $y''(0) = y''(l) = 0$. **1540.** $i = (2/\omega CL)\,\mathrm{e}^{-Rt/2L}\sin\omega t$, $\omega = \sqrt{4CL - R^2C^2}/2LC$, ak $CR^2 < 4L$; $i = (2q_0/RC\sqrt{1 - 4L/R^2C})\,\mathrm{e}^{-Rt/2L}\sinh(Rt\sqrt{1 - 4L/R^2C}/2L$, ak $CR^2 > 4L$. **1541.** a) $i = (\mathrm{e}^{-5t}\sin 5t)/50$, $q = [1 - \mathrm{e}^{-5t}\,.\,(\cos 5t + \sin 5t)]/500$; b) $i_{max} = 6{,}5\,.\,10^{-3}$ [A], $q_{max} = 2{,}08\,.\,10^{-13}$ [As]. **1542.** $u_C = E_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}/LC\ [(\beta - b)^2 + \omega_0^2] - E_0\,\mathrm{e}^{-bt}[\omega_0\cos\omega_0 t - (\beta - b)\sin\omega_0 t]/\omega_0 LC[(\beta - b)^2 + \omega_0^2]$, $i = -\beta E_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}/L[(\beta - b)^2 + \omega_0^2] - E_0\,\mathrm{e}^{-bt}[\beta\omega_0\cos\omega_0 t + (b^2 + \omega_0^2 - b\beta)\sin\omega_0 t]/\omega_0 L\,[(\beta - b)^2 + \omega_0^2]$, kde $b = R/2L$, $\omega_0 = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$. **1543.** $C = 0{,}048$ [μF].

4,12. Eulerova diferenciálna rovnica

1544. $y = C_1x + C_2/x^2$. **1545.** $y = x^{-1/4}(C_1x^{\sqrt{17}/4} + C_2x^{-\sqrt{17}/4})$, $x \neq 0$. **1546.** $y = \frac{1}{x^2}\,.\,(C_1 + C_2\ln|x|)$, $x \neq 0$. **1547.** $y = C_1x + C_2/x$, $x \neq 0$. **1548.** $y = C_1(x + 2) + C_2/(x + 2)^3$, $x \neq -2$. **1549.** $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$. **1550.** $y = x(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)$. **1551.** $y = C_1/x + x(C_2 + C_3\ln|x|)$. **1552.** $y = C_1(x + 3/2) + C_2(x + 3/2)^{3/2} + C_3(x + 3/2)^{1/2}$. **1553.** $y = C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + x/2$. **1554.** $y = x[C_1 + \ln|x|\,(C_2 + \ln|x|)]$. **1555.** $y = C_1x + C_2x\ln|x| + 3x^3/4$. **1556.** $y = C_1x^2 + C_2x + 12^{-1}\left(\ln|x| - \frac{7}{12}\right)x^5$. **1557.** $y = C_1x^4 + C_2/x - \cos x - (3/x)\sin x$ **1558.** $y = C_1x^3 + C_2x^2 + ax + 6b/x$. **1559.** $y = (x - 2)^2(C_1 + C_2\ln|x - 2|) + x - 3/2$. **1560.** $y = C_1\sin\ln|1 + x| + C_2\cos\ln|1 + x| + (1 + x)^2/5 + x + 2 - \ln|x + 1|\cos.\ln|x + 1|$. **1561.** $y = (C_1 + C_2\ln|x + 1| + \ln^3|x + 1|)/(x + 1)$. **1562.** $y = C_1x^2 + C_2x + C_3x\ln|x| - x^3/4 - (3x\ln^2|x|)/2$. **1563.** $y = x^4(C_1 + C_2\ln x + C_3\ln^2 x + \ln^3 x + \ln^4 x + \ln^5 x)$. **1564.** $y = C_1/x^3 + C_2/x^4 + C_3/x^5 + (\ln x - 47/60)/60$. **1565.** $y = C_1x + C_2x\ln|x| + C_3/x + (C_4\ln|x|)/x + x^3/9$. **1566.** $w = q(R^2 - r^2)^2/64K$. **1567.** $T = T_0 + a^2b^2\,.\left(1 - \frac{1}{2}\ln\frac{x + b}{2b}\right) - \frac{a^2}{4}\,(b + x)^2$.

4,13. Systém diferenciálnych rovníc

1568. $x = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}$, $y = C_1\mathrm{e}^t - C_2\mathrm{e}^{-t}$. **1569.** $x = C_1\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} + C_2\mathrm{e}^{-t\sqrt{2}}$, $y = C_1(1 + \sqrt{2})\,\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} + C_2(1 - \sqrt{2})\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{2}}$. **1570.** $x = -C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{2t}/3$, $y = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{2t}$. **1571.** $x = -(1/25)\cos t - (7/25)\sin t + C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2t\,\mathrm{e}^{2t}$, $y = (3/25)\sin t + (4/25)\cos t + C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2t\,\mathrm{e}^{2t}$. **1572.** $x = C_1C_2\,\mathrm{e}^{C_1t}$, $y = C_2\,\mathrm{e}^{C_1t}$. **1573.** $x = 1/(t + c_1)$, $y = (t + c_2)/(t + c_1)$. **1574.** $x = 2C_1t\,\mathrm{e}^{-C_1t^2}/C_2$, $y = C_2\,\mathrm{e}^{C_1t^2}$. **1575.** $x = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t/2}\sin\sqrt{3}\,t/2 + C_3\mathrm{e}^{-t/2}\,.\cos\sqrt{3}\,t/2$, $y = C_1\mathrm{e}^t + C_2'\mathrm{e}^{-t/2}\sin\sqrt{3}\,t/2 + C_3'\mathrm{e}^{-t/2}\,.\cos\sqrt{3}\,t/2 - t$, kde $C_2' = -(C_2 + C_3\sqrt{3})/2$, $C_3' = -(C_3 - \sqrt{3}\,C_2)/2$. **1576.** $x = C_5 - (C_2 + 2C_3)\,t + C_3t^2 + C_4\mathrm{e}^{2t}$, $y = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4\mathrm{e}^{2t}$, $z = 2C_3 - C_2 - 2C_3t + 2C_4\mathrm{e}^{2t}$. **1577.** $x = \sin t$, $y = \cos t$. **1578.** $x = -(4t + 24)/(t + 4)^3$, $y = 4/(t + 4)^2$. **1579.** $x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 2\sin t$, $y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} + 2\sin t$. **1580.** $x + y = C_1\mathrm{e}^t$, $x - y = C_2\mathrm{e}^{-t}$. **1581.** $z = C_1y$, $(x^2 + y^2)\,y = C_2x^2$. **1582.** $(z - y)^2 + 2x = C_1$, $z^2 - y^2 = C_2$. **1583.** $(y - t)\,z = C_1$, $(y - t)^{z/2(y-t)} = C_2$. **1584.** $x - y = C_1$, $z - t(x - y + 1) = C_2$, $y - \ln(z - t) = C_3$. **1585.** $y = C_1x$, $z = C_2x$. **1586.** $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. **1587.** $y = C_1x$, $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2$. **1588.** $x^2 + y^2 + z^2 = C_1y$, $z = C_2y$. **1589.** $x^2 + y^2 = C_1$, $(x + y)(x + y + z) = C_2$. **1590.** $\mathrm{tg}\,z + \mathrm{cotg}\,x = C_1$, $2y + 2\,\mathrm{tg}\,z\,.\,\mathrm{cotg}\,x + \mathrm{cotg}^2 x = C_2$. **1591.** $x^2 + y^2 = C_1$, $\mathrm{arctg}\,(x/y) + (z + 1)\,\mathrm{e}^{-z} = C_2$. **1592.** $\mathrm{e}^{-x} - 1/y = C_1$, $z = (\ln|y| - x)/(\mathrm{e}^{-x} - 1/y) + C_2$. **1593.** $x^2 - z^2 = C_1$, $y^2 - u^2 = C_2$, $x + z = C_3(u + y)$. **1594.** $x^2 + y^2 = C_1$, $z^2 + u^2 = C_2$, $yz + xu = C_3$. **1595.** $x + z = C_1$, $y + u = C_2$, $(x - z)^2 + (y - u)^2 = C_3$. **1596.** $x = [v_0/2\omega]\,(\sinh\omega t + \sin\omega t)$, $y = [v_0/2\omega]\,(\sinh\omega t - \sin\omega t)$, kde $\omega = \sqrt{k/m}$. **1597.** $M_1 = (k\alpha^2/2k_1)\,\{1 - [(1 - \beta\,\mathrm{e}^{k\alpha t})/(1 + \beta\,\mathrm{e}^{k\alpha t})]^2\}$, $M_2 = \alpha[(1 - \beta\,\mathrm{e}^{k\alpha t})/(1 + \beta\,\mathrm{e}^{k\alpha t})]$, kde $\alpha = \sqrt{B^2 + 2Ak_1/k}$, $\beta = (\alpha - B)/(\alpha + B)$.

4,14. Lineárne diferenciálne systémy

1602. $x = 2c_1\mathrm{e}^{10t} + 3c_2\mathrm{e}^{3t}$, $y = c_1\mathrm{e}^{10t} - 2c_2\mathrm{e}^{3t}$. **1603.** $x = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-3t}$, $y = 2c_1\mathrm{e}^{3t} - 4c_2\mathrm{e}^{-3t}$. **1604.** $x = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$, $y = (2c_2 - c_1)\cos 2t - (2c_1 + c_2)\sin 2t$. **1605.** $x = \mathrm{e}^t(c_1\sin 3t - c_2\cos 3t)$, $y = \mathrm{e}^t(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)$. **1606.** $x = \mathrm{e}^{-3t}[c_1 + c_2(t - 1)]$, $y = \mathrm{e}^{-3t}(-c_1 - c_2t)$. **1607.** $x = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} + c_3\mathrm{e}^{3t}$, $y = 2c_1\mathrm{e}^t + 3c_2\mathrm{e}^{2t} - c_3\mathrm{e}^{3t}$, $z = 3c_1\mathrm{e}^t + 5c_2\mathrm{e}^{2t} - 2c_3\mathrm{e}^{3t}$. **1608.** $x = c_1\mathrm{e}^{2t} - 2c_2\mathrm{e}^{-t} - 2c_3\mathrm{e}^{3t}$, $y = -c_1\mathrm{e}^{2t} - 3c_2\mathrm{e}^{-t}$, $z = 2c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{-3t}$. **1609.**

$x + y + z = c_1 e^t$, $y - z = c_2 e^{2t}$, $(2x - y - z) = c_3 e^{-2t}$. **1610.** $2x = c_1 e^t + (c_2 + c_3) \cos t - (c_2 - c_3) \sin t$, $y = c_2 \cos t + c_3 \sin t$, $2z = c_1 e^t + (c_2 - c_3) \cos t + (c_2 + c_3) \sin t$. **1611.** $x = c_2 \cos t + (c_2 + 2c_3) \sin t$, $y = 2c_1 e^t + c_2 \cos t + (c_2 + 2c_3) \sin t$, $z = c_1 e^t + c_3 \cos t - (c_2 + c_3) \sin t$. **1612.** $x = -2c_1 e^{5t} + e^{3t}[c_2(20 \cos t - 10 \sin t) + c_3(15 \cos t + 5 \sin t)]$, $y = e^{3t}[c_2(15 \cos t + 5 \sin t) + c_3(15 \sin t - 5 \cos t)]$, $z = c_1 e^{5t} + e^{3t}[c_2(-14 \cos t + 2 \sin t) + c_3(-2 \cos t - 14 \sin t)]$. **1613.** $x = (c_1 + c_2 t) e^t + c_3 e^{2t}$, $y = (c_1 - 2c_2 + c_2 t) e^t$, $z = (c_1 - c_2 + c_2 t) e^t + c_3 e^{2t}$. **1614.** $x = e^t[2c_1 + c_2(t - 4) + c_3]$, $y = e^t(2c_1 + 4c_2 t)$, $z = e^t[3c_1 + c_2(6t - 5)]$. **1615.** $x = (c_1 + c_3 t) e^t$, $y = (c_2 + 2c_3 t) e^t$, $z = (c_1 - c_2 - c_3 - c_3 t) e^t$. **1616.** $x = e^{2t}[c_1 + c_2(t + 1) + c_3(t^2/2 + t)]$, $y = e^{2t}[c_2 + c_3(t + 2)]$, $z = e^{2t}[c_1 + c_2(t + 1) + c_3(t^2/2 + t + 1)]$. **1617.** $x = c_1 e^{4t}$, $y = c_2 e^{4t}$, $z = c_3 e^{4t}$, $u = c_4 e^{4t}$. **1620.** $x = e^{-6t}[(c_1 + c_2) \cos t - (c_1 - c_2) \sin t]$, $y = e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. **1621.** $x = e^{-2t} (c_1 - c_2 + c_2 t)$, $y = e^{-2t}(-c_1 - c_2 t)$, $c_1 = -1$, $c_2 = -2$. **1622.** $x = 0$, $y = -e^{-x}$ $z = e^{-x}$. **1623.** $x = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$, $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$, $z = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}$, $c_1 = 1/3$, $c_2 = 1/6$, $c_3 = 1/2$. **1625.** $x_1' = x_2$, $x_2' = 2x_1 - x_3 + \sin t$, $x_3' = x_4$, $x_4' = x_1 + 2x_3 + \cos t$. **1624.** $x' = (-x + y + 7 e^t)/7$, $y' = (3x - 10y)/7$. **1626.** $x = e^{2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + e^{-2t} . (c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$, $y = e^{2t}(c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t) + e^{-2t}(c_3 \cos 2t - c_4 \sin 2t)$. **1627.** $x = -2 e^t(c_1 + c_2 + c_2 t) - 2 e^{-t}(c_3 - c_4 + c_4 t)$, $y = e^t(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t)$. **1628.** $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{-2t}$, $y = 2c_1 e^t + c_3 e^{2t}$. **1629.** $x = 3c e^t$, $y = c e^{-t}$. **1630.** $x = 2c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-2t} + 2c_3 \cos 2t + 2c_4 \sin 2t$, $y = 3c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t} - c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t$. **1631.** $x + y + z = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $y - z = c_3 \cos \sqrt{2} t + c_4 \sin \sqrt{2} t$, $z - x = c_5 \cos \sqrt{2} t + c_6 \sin \sqrt{2} t$. **1632.** $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_5 e^{-2t}$, $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_4 e^{2t} + c_6 e^{-2t}$, $z = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - (c_3 + c_4) e^{2t} - (c_5 + c_6) e^{-2t}$. **1633.** $x = (c_1 + c_2 + 2c_2 t) e^t - 2$, $y = (c_1 + 2c_2 t) e^t - 3$. **1634.** $x = (c_1 + 2c_2) \cos 2t + (2c_1 - c_2) \sin 2t + 10t$, $y = c_1 \cos 2t - c_2 . \sin 2t + 2t + 2$. **1635.** $x = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + (t - 1) e^t - 2t$, $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t e^t - t^2 - 2$. **1636.** $x = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} + e^t - 3t + 12/5$, $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} - 3e^t + 2t - 13/5$. **1637.** $x = 2c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + 7e^t/40 + e^{2t}/27$, $y = c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-7t} + e^t/40 + 7 e^{2t}/54$. **1640.** $x = c_1(1 + 2t) - 2c_2 - 2 \cos t - 3 \sin t$, $y = c_1 t + c_2 + 2 \sin t$. **1641.** $x = c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-3t} - (8t + 6) e^t$, $y = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - (12t + 13) e^t$. **1644.** $x = (c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t + 2 \cos t . \ln |\cos t| + 2t \sin t$, $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln |\cos t|$. **1645.** $x = (c_1 - c_2 + 2c_2 t - 8t^{5/2} + 10t^{3/2}) e^t$, $y = (c_1 + 2c_2 t - 8t^{5/2}) e^t$ **1646.** $x = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2$, $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t$. **1647.** $x = 1 - 2y^2$. **1648.** Zovšeobecnená skrutkovica $x = a \cos (t + \alpha)$, $y = b \cos (t + \beta)$, $z = ct + \gamma$, kde a, b, c, α, β, γ sú integračné konštanty. **1649.** $x = (v_0 \cos \alpha) (1 - e^{-kgt})/kg$, $y = (1 + kv_0 \sin \alpha) (1 - e^{-kgt})/k^2 g$; asymptota $x = (v_0 \cos \alpha)/kg$. **1650.** $\mathbf{r} = a \cos (kt) \mathbf{i} + k^{-1}\mathbf{v} (0) \sin (kt)$, dráha je elipsa $x^2 - 2(\operatorname{cotg} \alpha) xy + (\operatorname{cotg}^2 \alpha + a^2 k^2/v_0^2 \sin^2 \alpha)y^2 = a^2$, resp. $\mathbf{r} = a \cosh (kt) \mathbf{i} + k^{-1} \mathbf{v}(0) \sinh (kt)$, dráha je hyperbola $x^2 - 2(\operatorname{cotg} \alpha) xy + (\operatorname{cotg}^2 \alpha - a^2 k^2/v_0^2 \sin^2 \alpha) = a^2$. **1651.** Skrutkovica na eliptickom valci $y^2/a^2 + 2kz^2/b^2 = 1$, stúpanie je $\pi b \sqrt{2/k}$. **1652.** $\varphi_1 = c_1(g - 2l_2 n_1^2/3) \sin (n_1 t + \alpha_1) + c_2(g - 2l_2 n_2^2/3) \sin (n_2 t + \alpha_2)$, $\varphi_2 = c_1 l_1 n_1^2 \sin (n_1 t + \alpha_1) + c_2 l_1 n_2^2 t \sin (n_2 t + \alpha_2)$, kde φ_1, φ_2 sú uhly tyčí so zvislým smerom a n_1, n_2 sú kladné korene rovnice $(4 + 3\mu) n^4 - 6g[(1 + 3\mu)/l_2 + (1 + 2\mu)/l_1] n^2 + 9g^2 (1 + 2\mu)/l_1 l_2 = 0$, kde $\mu = m_2/m_1$. **1653.** Dráha je parabola $x = eEt^2/2m + v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha$ alebo $x = y \operatorname{cotg} \alpha + eEy^2/2mv_0^2 \sin^2 \alpha$. **1654.** a) Skrutkovica $x = v_0\omega^{-1} \cos \alpha (-\cos \omega t + 1)$, $y = v_0\omega^{-1} \cos \alpha . \sin \omega t$, $z = v_0 t \sin \alpha$, kde $\omega = eB/m$; b) kružnica $x = v_0\omega^{-1} (-\cos \omega t + 1)$, $y = v_0\omega^{-1} \sin \omega t$, $z = 0$. **1655.** $x = v_0\omega^{-1} \sin \omega t + Et/B$, $y = -v_0\omega^{-1} \cos \omega t$, $z = 0$.

1658. $i_1 = (U/R_1) \{1 - [\sigma T_1 T_2/(T_1 + T_2) q] [(\beta - R_1/T_2) e^{-\alpha t} - (\alpha - R_1/T_2) e^{-\beta t}]\}$, $i_2 = -UM/R_1 R_2[1/(T_1 + T_2) q] (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$, kde $\sigma = 1 - M^2/L_1 L_2$, $T_1 = L_1/R_1$, $T_2 = L_2/R_2$, $q = \sqrt{1 - 4\sigma T_1 T_2/(T_1 + T_2)^2}$, $\alpha = (T_1 + T_2) (1 - q)/2\sigma T_1 T_2$, $\beta = (T_1 + T_2) (1 + q)/2\sigma T_1 T_2$; b) 2,37 A, 0,61 s, c) 2,15 A, 2,85 A.

LITERATÚRA

1. Baranenkov G. S., Demidovič, B. P. ...: Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. Moskva: GIFML 1959
2. Berman G. N.: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza. Moskva: Izd. „Nauka“ 1965
3. Davydov N. A., Korovkin P. P., Nikoľskij V. N.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskva: Izd. „Prosveščenije“ 1965
4. Demidovič B. P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Moskva: GITTL 1956
5. Djubjuk P. R. ...: Sbornik zadač po kursu vysšej matematiki dľa vtuzov. Moskva: Izd. „Vysšaja škola“ 1963
6. Filippov A. F.: Sbornik zadač po differencialnym uravnenijam. Moskva: Fizmatgiz 1961
7. Finikov S. P.: Kurs differencialnoj geometrii. Moskva: GITTL 1952
8. Gjunter M. N., Kuzmin R. O.: Sbornik zadač po vysšej matematike, I a II. Moskva: GITTL 1957
9. Gusak A. A., ...: Sbornik zadač po differencialnoj geometrii. Minsk 1963
10. Kiselev A. I., ...: Sbornik zadač po obyknovennym differenciaľnym uravnenijam. Moskva: Izd. „Vysšaja škola“ 1965
11. Kluvánek I., Mišík L., Švec M.: Matematika I a II, Bratislava. SVTL 1966
12. Krysicki W., Wlodarski L., Analiza matematyczna v zadaniach część druga. Warszawa: PWN 1962
13. Matvejev N. M.: Zbierka príkladov z obyčajných diferenciálnych rovníc. Bratislava: SVTL, SNTL 1964
14. Minorskij B. P.: Sbornik zadač po vysšej matematike. Moskva: GITTL 1964
15. Pachová Zs., Frey T.: Vektorová a tenzorová analýza. Praha: SNTL, SVTL 1964
16. Zaporožec G. I.: Rukovodstvo k rešeniju zadač po matematičeskomu analizu. Moskva: Izd. „Vysšaja škola“ 1961

EDÍCIA MATEMATICKO-FYZIKÁLNEJ LITERATÚRY

Zbierka je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického smeru, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní

Doc. RNDr. Jozef Eliaš, CSc. – RNDr. Ján Horváth, CSc. – Ing. Juraj Kajan

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

3. časť

MDT 517 (075.8)

Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, Hurbanovo nám. 3, v septembri 1980 ako svoju 7241. publikáciu

Zodpovedná redaktorka Tatiana Belanová
Technická redaktorka Jana Plšková
Väzbu navrhol Leodegar Horváth

Vytlačili Nitrianske tlačiarne, n. p., Jašíkova 18, Nitra
220 strán, 39 obrázkov, 22,79 AH, 23,42 VH

Tretie vydanie. Náklad 10 000 výtlačkov

302 03 2

63–230–79 Kčs 26,–

508/21; 857