JOZEF ELIAŠ - JÁN HORVÁTH - JURAJ KAJAN

# ZBIERKA ÚLOH
# Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

2. časť

JOZEF ELIAŠ – JÁN HORVÁTH – JURAJ KAJAN

# ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

2. časť

*5. vydanie*

alfa

VYDAVATEĽSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY
BRATISLAVA

*Druhá časť Zbierky úloh z vyššej matematiky obsahuje 1509 úloh aj s výsledkami. Úlohy sú z oblasti funkcie jednej reálnej premennej, komplexnej funkcie reálnej premennej, z diferenciálneho a integrálneho počtu.*

*Je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického i prírodovedeckého zamerania, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní.*

*1. vydanie 1966*
*2. vydanie 1969*
*3. vydanie 1972*
*4. vydanie 1976*
*5. vydanie 1979*

Redakcia teoretickej literatúry – vedúci redaktor
prom. fyz. Sergej Troščák

# OBSAH



*) Čísla v zátvorke označujú číslo strany, na ktorej sú príslušné výsledky.

*PREDHOVOR*

*Táto 2. časť Zbierky úloh z vyššej matematiky je pokračovaním 1. časti. Obsahuje látku z diferenciálneho a integrálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej. Táto spolu s látkou v prvej časti tvorí zhruba náplň cvičení z matematiky v I. ročníku na väčšine vysokých škôl technického smeru.*

*Ďalšia 3. a 4. časť Zbierky úloh obsahuje látku z matematiky predpísanú pre II. prípadne III. ročník vysokých škôl technických.*

*Spôsob spracovania látky, ako aj usporiadanie príkladov, úloh a ich výsledkov je rovnaký ako v 1. časti Zbierky. Pri odvolávaní sa na 1. časť používame takéto označenie: napr. 2,3/I znamená článok 2,3 z 1. časti Zbierky.*

*Sme si vedomí, že pri spracovaní tejtô časti Zbierky mohlo dôjsť k rôznym nepresnostiam a nedostatkom. Za všetky kritické pripomienky na odstránenie nedostatkov a zlepšenie tohto diela budeme čitateľom veľmi povďační.*

*Napokon chceme znovu poďakovať za mnohé cenné pripomienky a kritické poznámky lektorom tejto časti Zbierky J. Chavkovi, odb. asistentovi Katedry matematiky SF VŠT v Košiciach a prom. mat. N. Nesetovej, odb. asistentke Katedry matematiky a deskr. geometrie SF SVŠT v Bratislave. Súčasne vyslovujeme vďaku prom. ped. A. Kajanovej za nakreslenie obrázkov a Vydavateľstvu ALFA za starostlivosť, ktorú venovalo vydaniu tejto publikácie.*

*Autori*

# 1. FUNKCIA JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

## 1,1. Pojem a základné vlastnosti funkcie

**Pojem funkcie.** Majme dv neprázdne množiny $M$ a $N$. Hovoríme, že na množine $M$ je *definovaná funkcia $f$*, ak je daný predpis, podľa ktorého každému prvku z množiny $M$ je priradený jeden prvok z množiny $N$. Množinu $M$ nazývame *oborom definície funkcie $f$*. *Oborom hodnôt funkcie $f$* nazývame podmnožinu prvkov z $N$, ktorá je obrazom množiny $M$.

Pojem funkcie $f$ je ekvivalentný s pojmom zobrazenia $f$ množiny $M$ do množiny $N$ (pozri 4,9/I).

Ak funkcia $f$ s oboror definície $M$ priraďuje prvku $x \in M$ prvok $y$, zapisujeme to takto:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Prvok $y$ resp. $f(x)$ na vame *hodnotou funkcie v prvku $x$*.

Ak $M$ a $N$ sú množi *reálnych* čísiel, hovoríme o *reálnej funkcii reálnej premennej*.

Znak $x$ vo vzťahu ( nazývame *nezávisle premennou* alebo *argumentom funkcie*, znak $y$ *závisle premennou*.

Funkcia je najčastejšie daná

a) rovnicou $y = f(^{*}),$

b) tabuľkou$^{**}$),

c) slovným predpom,

d) graficky.

**Parciálna funkc** Nech $f$ je funkcia s oborom definície $M$ a nech $M' \subset M$. Hovoríme, že funkcia $g$ je parcna funkcia z $f$ na množine $M'$, ak jej obor definície je množina $M'$ a pre každé $a \in M'$ pla $g(a) = f(a)$.

**Graf funkcie.** Gfom funkcie $f$ nazývame množinu všetkých bodov $A = (a, b)$ v rovine pri zvolenom prouhlom súradnicovom systéme, ktorých prvá súradnica $a$ patrí do oboru definície funkcie a druhá súradnica $b$ je hodnota funkcie $f$ v čísle $a$, t. j. $b = f(a)$.

Množina bod v rovine je grafom funkcie vtedy a len vtedy, keď každá priamka rovnobežná s osou $o_y$ má s uto množinou spoločný najviac jeden bod.

**Operácie s fciami.** Funkcie $f$ a $g$ *sa rovnajú* vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich obory definícií a ak každé $a$ z oboru definície platí $f(a) = g(a)$. Označujeme to $f = g$.

Nech $f$ je fcia s oborom definície $M$ a $\alpha$ je reálne číslo. Nech pre funkcie $g$ a $h$ definované na množine Mati

$$g(a) = |f(a)|, \qquad h(a) = \alpha \,.\, f(a),$$

pre každé $a$ *I*. Funkciu $g$ nazývame *absolútnou hodnotou funkcie $f$* a označujeme $|f|$. Funkciu $h$ nazývame *snom* čísla $\alpha$ a funkcie $f$ a označujeme $\alpha f$.

Nech $f_1$ s sú funkcie s oborom definície $M_1$, $M_2$. Nech pre funkcie $f$, $g$, $h$ definované na množine $M =\ \cap M_2 \neq \emptyset$ platí

$$f(a) = f_1(a) + f_2(a), \qquad g(a) = f_1(a) - f_2(a), \qquad h(a) = f_1(a)\, f_2(a),$$

pre každ $\in M$. Funkciu $f$ nazývame *súčtom funkcií $f_1$, $f_2$* a označujeme $f_1 + f_2$. Funkciu $g$ nazývam *zdielom funkcií $f_1$, $f_2$* a označujeme $f_1 - f_2$. Funkciu $h$ nazývame *súčinom funkcií $f_1$, $f_2$* a očujeme $f_1 f_2$.

---

*) K stručnosti budeme namiesto „funkcia daná rovnicou $y = f(x)$" hovoriť iba „funkcia $y = f(x)$"

**) T spôsob sa používa vtedy, ak obor definície funkcie je konečná množina.

*Podielom funkcií* $f_1, f_2$ nazývame funkciu $p$ definovanú pre každé číslo $a \in M = M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, pre ktoré $f_2(a) \neq 0$ a platí

$$p(a) = \frac{f_1(a)}{f_2(a)},$$

pričom $M_1$ je obor definície funkcie $f_1$ a $M_2$ je obor definície funkcie $f_2$. Funkciu $p$ označujeme $f_1/f_2$.

Pre súčet a súčin dvoch funkcií platí *komutatívny, asociatívny* a *distributívny zákon.*

**Zložená funkcia.** Nech funkcia $g$ má obor definície množinu $A$ a obor hodnôt množinu $B$. Nech funkcia $f$ má obor definície množinu $C$, obor hodnôt množinu $D$ a $B \cap C \neq \emptyset$. *Zloženou funkciou utvorenou z funkcie $f$ a z funkcie $g$* nazývame funkciu $h$, pre ktorú platí:

1. Oborom definície funkcie $h$ je množina $M$ všetkých tých čísiel $a \in A$, pre ktoré $g(a) \in B \cap C$;
2. Pre každé číslo $a \in M$ platí $h(a) = f[g(a)]$.

Zloženú funkciu $h$ označujeme $f(g)$. Funkciu $f$ nazývame *hlavnou zložkou* a funkciu $g$ *vedľajšou zložkou* zloženej funkcie $h$.

**Ohraničená funkcia.** Ak obor hodnôt funkcie $f$ je zhora [zdola] ohraničený, hovoríme, že funkcia $f$ je *zhora* [*zdola*] *ohraničená*. Ak je funkcia zhora a zdola ohraničená, hovoríme, že je *ohraničená.*

Funkcia $f$ je zhora [zdola] ohraničená, ak existuje také číslo $S$ [$s$], že pre každé číslo $x$ z oboru definície funkcie $f$ platí

$$f(x) \leqq S \qquad [f(x) \geqq s].$$

Funkcia $f$ je ohraničená vtedy a len vtedy, keď existuje také číslo $c$, že pre každé $x$ z oboru definície funkcie $f$ platí:

$$|f(x)| \leqq c.$$

Ak funkcia $f$ je ohraničená, jej graf leží medzi dvoma rovnobežkami s osou $o_x$.

Ak funkcia $f$ je zhora ohraničená a $N$ je jej obor hodnôt, supremum množiny $N$ nazývame *supremum funkcie* $f$ a označujeme ho $\sup f$. Ak $f$ je zdola ohraničená a $N$ je jej obor hodnôt, infimum množiny $N$ nazývame *infimum funkcie* $f$ a označujeme ho $\inf f$.

Ak obor hodnôt $N$ funkcie $f$ má maximum [minimum], hovoríme, že funkcia $f$ *má maximum* [*minimum*] a označujeme ho $\max f$ [$\min f$].

Hovoríme, že funkcia $f$ má v čísle $a$ maximum [minimum], ak platí

$$f(a) = \max f \qquad [f(a) = \min f].$$

Ak funkcia $f$ má v čísle $a$ maximum [minimum], pre každé číslo $x$ z jej oboru definície platí

$$f(x) \leqq f(a) \qquad [f(x) \geqq f(a)].$$

Nech $f$ je funkcia s oborom definície $M$. Nech $g$ je parciálna funkcia z funkcie $f$ s oborom definície $M' \subset M$. Hovoríme, že funkcia $f$ je zhora [zdola] ohraničená na množine $M'$, ak $g$ je zhora [zdola] ohraničená. Vtedy platí

$$\sup_{x \in M'} f(x) = \sup g \qquad [\inf_{x \in M'} f(x) = \inf g].$$

Ak funkcia $g$ má maximum [minimum], hovoríme, že funkcia $f$ má na množine $M'$ maximum [minimum] a potom

$$\max_{x \in M'} f(x) = \max g \qquad [\min_{x \in M'} f(x) = \min g].$$

**Monotónne funkcie.** Funkciu $f(x)$ nazývame *rastúcou* [*neklesajúcou, klesajúcou, nerastúcou*], ak pre každé dve čísla $x_1$ a $x_2$ z oboru definície $M$ funkcie $f$, ktoré spĺňajú nerovnosť $x_1 < x_2$, platí

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad [f(x_1) \leqq f(x_2), \qquad f(x_1) > f(x_2), \qquad f(x_1) \geqq f(x_2)].$$

Každú neklesajúcu a každú nerastúcu funkciu nazývame *monotónnou funkciou.* Každú rastúcu funkciu a každú klesajúcu funkciu nazývame *rýdzo monotónnou funkciou.*

Ak $M'$ je podmnožina množiny $M$, hovoríme, že $f$ je *rastúca* [*neklesajúca, klesajúca, nerastúca*] *na množine* $M'$, ak parciálna funkcia z $f$ na množine $M'$ je rastúca [neklesajúca, klesajúca, nerastúca].

**Párna a nepárna funkcia.** Funkciu $f$ nazývame *párnou*, ak pre každé $a$ z jej oboru definície $M$ platí:

$$f(a) = f(-a).$$

Funkciu $f$ nazývame *nepárnou*, ak pre každé $a$ z oboru definície $M$ platí

$$f(-a) = -f(a).$$

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi $o_y$ pravouhlého súradnicového systému. Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku pravouhlého súradnicového systému.

**Periodická funkcia.** Funkciu $f$ nazývame *periodickou funkciou*, ak existuje také číslo $l \neq 0$, že pre každé $a$ z oboru definície fnkcie $f$ platí

$$f(a + l) = f(a).$$

Ak pre periodickú funkciu $f$ xistuje také najmenšie kladné číslo $l_0$ spomedzi čísiel $l \neq 0$, pre ktoré platí $f(a + l_0) = f(a)$, re každé $a$ z oboru definície funkcie $f$, nazýva sa číslo $l_0$ perióda funkcie $f$.

Pre periodickú funkciu $f$ pla $f(x + kl_0) = f(x)$ pre každé $x$ z oboru definície funkcie $f$, kde $k$ je ľubovoľné celé číslo a $l_0$ je erióda funkcie $f$.

**Jednojednoznačná funkcia.** unkciu $f$ nazývame *jednojednoznačnou*, ak pre každé dve čísla $x_1 \neq x_2$ z jej oboru definície $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Každá rýdzo monotónna fnkcia je jednojednoznačná.

**Inverzná funkcia.** Nech $f$ e jednojednoznačná funkcia s oborom definície $M$ a s oborom hodnôt $N$. Funkciu $f_{-1}$ nazýame *inverznou funkciou k funkcii* $f$, ak

a) je definovaná na mnoźe $N$,

b) priraďuje číslu $a \in N$ slo $b \in M$, pre ktoré platí $a = f(b)$, čiže $f_{-1}(a) = b$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Nech $f$ je rýd monotónna funkcia. Potom existuje k nej inverzná funkcia $f_{-1}$. Funkcia $f_{-1}$ je rastúca [ksajúca] vtedy, ak funkcia $f$ je rastúca [klesajúca].

**Veta 2.** Nech $f$ je jedjednoznačná funkčia s oborom definície $M$ a s oborom hodnôt $N$. Nech $f_{-1}$ je inverzná fucia k funkcii $f$. Potom pre každé $a \in M$ a $b \in N$ platí

$$f_{-1}[f(a)] = a, \qquad f[f_{-1}(b)] = b.$$

**Veta 3.** Graf inverzı funkcie $f_{-1}$ je *súmerný* ku grafu funkcie $f$ podľa priamky $y = x$.

**Príklad 1.** Daná je nkcia

$$f(x) = 2x^2 - 3.$$

Vypočítajme:

a) $f(0)$;
b) $f(2)$;
c) $f(a)$, kde $a$ je ľovoľné reálne číslo;
d) $f(a + 1)$, kde je ľubovoľné reálne číslo;
e) $f(1/a)$, $a \neq 0$
f) $f(2x)$;
g) $2f(x)$;
h) $f(x^2)$;
i) $[f(x)]^2$.

*Riešenie.* Obor definície danej funkcie je interval $(-\infty, \infty)$ a platí

a) $f(0) = 2 . 0 - 3 = -3$;
b) $f(2) = 2 . 2 - 3 = 5$;
c) $f(a) = 2 . t - 3 = 2a^2 - 3$;
d) $f(a + 1) = (a + 1)^2 - 3 = 2a^2 + 4a - 1$;
e) $f(1/a) = 2a)^2 - 3 = 2/a^2 - 3 = (2 - 3a^2)/a^2$;
f) $f(2x) = 2)^2 - 3 = 8x^2 - 3$;
g) $2f(x) = x^2 - 3) = 4x^2 - 6$;
h) $f(x^2) = )^2 - 3 = 2x^4 - 3$;
i) $[f(x)]^2 = x^2 - 3)^2 = 4x^4 - 12x^2 + 9$.

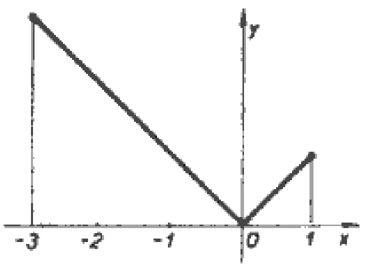
**Príklad 2.** Nájdime obor definície funkcie

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}.$$

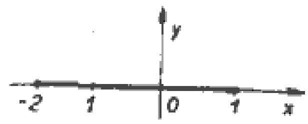
*Riešenie.* Ak funkcia je daná rovnicou $y = f(x)$ a nie je udaný jej obor definície, potom oborom definície je množina $M$ všetkých tých čísiel $x$, pre ktoré množina všetkých dvojíc $(x, y)$ je riešením rovnice $y = f(x)$.

Rovnica $y = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$ má reálne riešenie vtedy a len vtedy, keď platí $-x^2 + 8x - 12 \geq 0$.

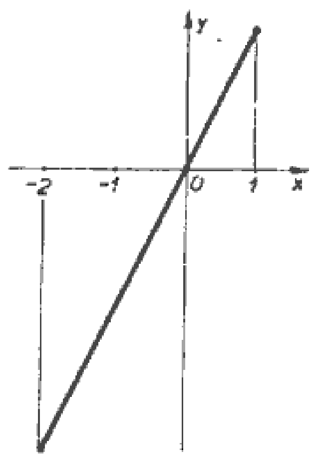
Riešením tejto nerovnosti je interval $\langle 2, 6 \rangle$. Oborom definície danej funkcie je interval $\langle 2, 6 \rangle$.



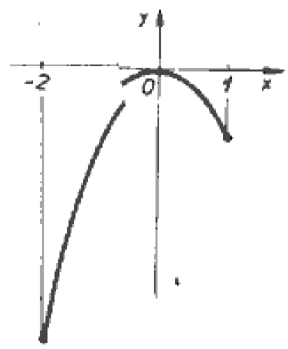

*Obr. 1*




*Obr. 2a*




*Obr. 2b*




*Obr.*

**Príklad 3.** Funkcia $f$ definovaná na intervale $\langle -3, 1 \rangle$ je daná rovnicou $f(x) = x$, funkcia $g$ definovaná na intervale $\langle -2, 2 \rangle$ je daná rovnicou $g(x) = -x$. Vypočítajme: a) $|f|$; b) $f + g$; c) $f - g$; d) $fg$; e) $f/g$; f) $f(g)$; g) $g(f)$ a narysujme ich grafy.

*Riešenie.*

a) Funkcia $|f|$ má obor definície taký ako funkcia $f$, t. j. interval $\langle -3, 1 \rangle$ a je určená rovnicou $y = |x|$. Jej graf je na *obr. 1.*

b), c), d) Súčet, rozdiel a súčin funkcií $f$ a $g$ sú definované na množine $M = \langle -3, 1 \rangle \cap \langle -2, 2 \rangle = \langle -2, 1 \rangle$. Pre každé číslo $x \in M$ platí

$$f(x) + g(x) = x + (-x) = 0,$$
$$f(x) - g(x) = x - (-x) = 2x,$$
$$f(x)\, g(x) = x(-x) = -x^2.$$

Ich grafy sú na *obr. 2a, 2b, 2c.*

e) Pretože $g(x) = 0$ len pre $x = 0$, podiel funkcií $f$ a $g$ je definovaný na množine $M' = \langle -2, 0) \cup (0, 1\rangle$. Pre ich podiel platí

$$f(x)/g(x) = x/(-x) = -1,$$

pre každé $x \in M'$. Graf podielu $f/g$ pozri na *obr. 3.*

f) Oborom definície funkcie $g(x) = -x$ je množina $A = \langle -2, 2\rangle$, jej oborom hodnôt je množina $B = \langle -2, 2\rangle$. Oborom definície funkcie $f(u) = u$ je množina $C = \langle -3, 1\rangle$ a oborom hodnôt množina $D = \langle -3, 1\rangle$. Oborom definície zloženej funkcie $y = f[g(x)]$ je množina všetkých tých čísiel $x$ z intervalu $\langle -2, 2\rangle$, pre ktoré $g(x) \in B \cap C = \langle -2, 1\rangle$. Preto obor definície zloženej funkcie $f(g)$ je $M = \langle -1, 2\rangle$ a pre každé číslo $x \in M$ platí

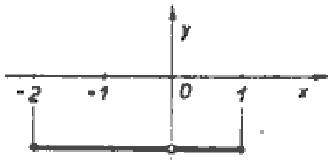
$$y = f[g(x)] = [f(u)]_{u=g(x)} = [u]_{u=-x} = -x.$$

Graf zloženej funkcie $f(g)$ je na *obr. 4.*

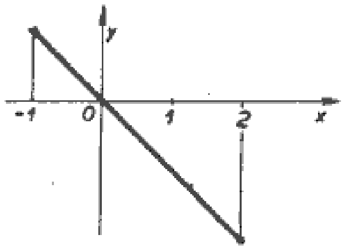
g) Oborom definície zloženej funkcie $g(f)$ je množina všetkých tých čísiel $x \in \langle -3, 1\rangle$, pre ktoré $f(x) \in D \cap A = \langle -2, 1\rangle$. Preto oborom definície zloženej funkcie $y = g[f(x)]$ je interval $\langle -2, 1\rangle$ a platí

$$y = g[f(x)] = [g(u)]_{u=f(x)} = [-u]_{u=x} = -x,$$

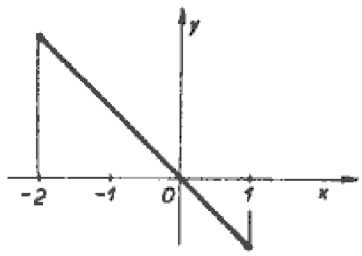
pre každé $x \in \langle -2, 1\rangle$. Graf zloženej funkcie $g(f)$ je na *obr. 5.* Funkcie $f(g)$, $g(f)$ sa nerovnajú, lebo majú rôzne obory definície, hoci sú určené tou istou rovnicou.




*Obr. 3*




*Obr. 4*




*Obr. 5*

**Príklad 4.** Nájdime obor definície funkcie

$$y = \log\left(\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - \sqrt{3}\right).$$

*Riešenie.*

Daná funkcia je zložená funkcia, ktorej hlavná zložka je $y = \log(u - \sqrt{3})$ a vedľajšia zložka je $u = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$. Obor definície vedľajšej zložky je $\langle 2, 6\rangle$ (pozri príklad 2) a obor definície hlavnej zložky je $(\sqrt{3}, \infty)$. Obor definície zloženej funkcie je množina všetkých čísiel $a$, pre ktoré platí

1. $a \in \langle 2, 6\rangle$,
2. $(\sqrt{-x^2 + 8x - 12})_{x=a} \in (\sqrt{3}, \infty)$.

Z druhej podmienky vyplýva

$$\sqrt{-a^2 + 8a - 12} > \sqrt{3},$$

čiže

$$a^2 - 8a + 15 < 0.$$

Z toho dostaneme $3 < a < 5$, čiže $a \in (3, 5)$. Pretože $a$ musí spĺňať aj prvú podmienku, pre $a$ platí $a \in (3, 5) \cap \langle 2, 6\rangle = (3, 5)$. Obor definície zloženej funkcie je interval $(3, 5)$.

**Príklad 5.** Dokážme, že funkcia $f$ daná rovnicou

$$y = E(x) + 1^{*)}$$

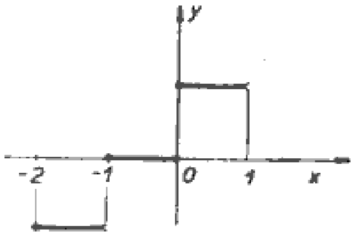
je neklesajúca. Nakreslime graf parciálnej funkcie z funkcie $f$ na množine $M' = \langle -2, 1)$.

*Riešenie.* Najskôr dokážeme, že daná funkcia $f$ je neklesajúca. Obor definície funkcie $f$ je interval $(-\infty, \infty)$. Nech $x_1$, $x_2$ sú dve ľubovoľné čísla z intervalu $(-\infty, \infty)$ a platí $x_1 < x_2$. Potom $E(x_1) \leq x_1 < x_2$. Z toho vyplýva, že najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako $x_2$, je číslo väčšie alebo rovné $E(x_1)$, teda je $E(x_1) \leq E(x_2)$. Z toho potom $E(x_1) + 1 \leq E(x_2) + 1$. Tým sme zistili, že pre každé $x_1 < x_2$ z intervalu $(-\infty, \infty)$ je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Teda funkcia $y = E(x) + 1$ je neklesajúca.

Parciálna funkcia k danej funkcii na množine $M'$ má po rozpísaní tvar

$$y = \begin{cases} -1 & \text{pre } -2 \leq x < -1, \\ 0 & \text{pre } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{pre } \phantom{-}0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Graf tejto funkcie je na *obr. 6*.




*Obr. 6*

**Príklad 6.** Dokážme, že funkcia $f$ daná rovnicou

$$y = \sqrt{3x - 2}$$

je jednojednoznačná a nájdime k nej inverznú funkciu.

*Riešenie.* Oborom definície funkcie $f$ je množina $M = \langle 2/3, \infty)$. Nech $x_1$, $x_2$ sú ľubovoľné čísla z $M$, pričom $x_1 \neq x_2$. Z toho vyplýva, že $3x_1 \neq 3x_2$ a $3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2$. Keďže je $2/3 \leq x_1$ a $2/3 \leq x_2$, máme $0 \leq 3x_1 - 2$ a $0 \leq 3x_2 - 2$.

Teda čísla $3x_1 - 2$ a $3x_2 - 2$ sú nezáporné a platí

$$\sqrt{3x_1 - 2} \neq \sqrt{3x_2 - 2}^{**)}.$$

Zistili sme, že pre $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$, teda podľa definície je funkcia $f$ jednojednoznačná.

Pretože funkcia $f$ je jednojednoznačná, existuje k nej inverzná funkcia. Nájdime najskôr obor definície inverznej funkcie, ktorý je oborom hodnôt funkcie $f$. Obor definície funkcie $f$ je množina všetkých čísiel $x$, pre ktoré platí $2/3 \leq x$. Z toho postupne vyplýva $2 \leq 3x$, $0 \leq 3x - 2$, $0 \leq \sqrt{3x - 2}$, teda $0 \leq y$. Naopak, pre každé $y \in \langle 0, \infty)$ existuje $x = (y^3 + 3)/2$, pre ktoré sa $y = f(x)$. Obor hodnôt funkcie $f$ je interval $\langle 0, \infty)$. Nech inverzná funkcia je $y = \varphi(x)$. Potom podľa vety 2. platí $f[\varphi(x)] = x$ pre každé $x \in \langle 0, \infty)$. Z toho máme

$$[\sqrt{3u - 2}]_{u = \varphi(x)} = x,$$

čiže

$$\sqrt{3\varphi(x) - 2} = x$$

a

$$\sqrt{3y - 2} = x.$$

Riešením tejto rovnice vzhľadom na $y$ dostaneme

$$3y - 2 = x^2,$$

čiže

$$y = \frac{x^2 + 2}{3}.$$

*) Funkcia $f$ definovaná pre každé číslo $x$ tak, že $f(x)$ je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné číslu $x$ nazýva sa ***celou časťou*** $x$ a označuje sa $E(x)$. Platí $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

**) Nerovnosť $a \neq b$ je ekvivalentná alebo s výrokom $a < b$, alebo $a > b$, preto pre počítanie s nerovnosťami so znakom $\neq$ platia mnohé pravidlá, ktoré boli uvedené pri nerovnostiach v 1. časti Zbierky.

Tým sme zistili, že inverzná funkcia k danej funkcii je daná rovnicou:

$$y = \frac{x^2 + 2}{3}$$

s oborom definície $M = \langle 0, \infty)$.

Poznámka. Formálne inverznú funkciu k danej funkcii, ak existuje, môžeme nájsť tak, že v rovnici, ktorá určuje danú funkciu, píšeme $x$ za $y$, $y$ za $x$ a túto rovnicu rozriešime vzhľadom na $y$.

**Príklad 7.** Ukážme, že funkcia $f$ daná rovnicou

$$y = 2 + (-1)^{E(x)}$$

je periodická.

*Riešenie.* Obor definície funkcie $f$ je $M = (-\infty, \infty)$. Ukážeme najskôr, že pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ platí $f(x + 2) = f(x)$. Pre každé $x \in M$ platí

$$E(x) \leqq x < E(x) + 1.$$

Z toho je:

$$E(x) + 2 \leqq x + 2 < [E(x) + 2] + 1.$$

Z toho vyplýva, že $E(x) + 2$ je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako $x + 2$ a teda $E(x + 2) = E(x) + 2$. Z poslednej nerovnosti platnej pre každé číslo $x$ dostaneme

$$f(x + 2) = 2 + (-1)^{E(x+2)} = 2 + (-1)^{E(x)+2} = 2 + (-1)^{E(x)}(-1)^2 = 2 + (-1)^{E(x)} = f(x).$$

Teda podľa definície je funkcia $f$ periodická.

1. Daná je funkcia $f(x) = 4x^2 - 2x - 3$. Vypočítajte:
   a) $f(-3)$; b) $f(0)$; c) $f(1/2)$; d) $f(-x)$; e) $f(a + 2)$.

2. Daná je funkcia $f(x) = E(x) - 2$, vypočítajte $f(2{,}9)$; $f(2{,}99)$; $f(2{,}9999)$; $f(3)$; $f(-3)$; $f(a)$, ak $0 \leqq a < 1$.

3. Nájdite $F(x) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, ak
   a) $f(x) = 2x + 3$;
   b) $f(x) = 1/x$;
   c) $f(x) = x^2$;
   d) $f(x) = x - E(x)$;
   e) $f(x) = x - |x|$.

4. Pre danú funkciu vypočítajte hodnoty funkcií:

a) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } -3 \leqq x < -2, \\ 1 & \text{pre } -2 \leqq x < -1, \\ -x & \text{pre } -1 \leqq x \leqq 0, \end{cases}$$

$f(-2{,}5)$, $f(-2)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi/4)$, $f(0)$, $f(1)$;

b) $$f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{pre } -3 \leqq x < -1, \\ x & \text{pre } -1 \leqq x \leqq 1, \\ x - E(x) & \text{pre } 1 < x \leqq 3, \end{cases}$$

$f(-2{,}4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, $f(1{,}6)$, $f(5/2)$, $f(3)$.

5. Daná je funkcia $f(x) = (x + 1/x)(x^2 + 1/x^2)$. Vypočítajte hodnotu funkcie v čísle $a$, $a \neq 0$, ak $a + 1/a = 3$. Dokážte, že platí $f(a) = f(1/a)$.

**6.** Nájdite funkciu

a) $f(x) = ax + b$, pre ktorú platí $f(3) = -3$, $f(-2) = 4$;

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$, pre ktorú platí $f(0) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(3) = 34$.

Vypočítajte v oboch prípadoch $f(1/2)$, $f(1)$.

**7.** Nájdite aspoň jednu funkciu s oborom definície $M$ a oborom hodnôt $N$, ak

a) množina $M$ je množina všetkých reálnych čísiel a $N = \{5\}$;

b) $M = \{1, 2, 3\}$ a $N = \{3, 5\}$;

c) $M$ je množina všetkých celých čísiel a $N$ je množina všetkých nepárnych čísiel;

d) $M$ je množina všetkých celých čísiel a $N = \{0, 1, 2\}$;

e) $M$ je množina všetkých reálnych čísiel okrem $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ a $N$ je ľubovoľná neprázdna množina čísiel.

**8.** Nájdite obor definície a obor hodnôt funkcie $f$, ak funkcia je daná tabuľkou:

a)

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $b$ |
| 2 | $a$ |
| 3 | $b$ |
| 4 | $b$ |
| 5 | $b$ |

b)

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 5 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |

c)

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 0 |
| $b$ | ! |
| $c$ | * |
| $d$ | * |
| $e$ | ! |

V úlohách 9 až 13 nájdite obor definície danej funkcie

**9.** a) $y = x$;
b) $y = x^2$;
c) $y = x^3$;
d) $y = \sqrt{x}$;
e) $y = 1/x$;
f) $y = -1/x^2$;
g) $y = |x|$;
h) $y = E(x)$;
i) $y = x - |x|$.

Porovnajte grafy týchto funkcií.

**10.** a) $y = (x - 2)/(x + 2)$;
b) $y = (2x + 3)/(x^2 + 3x + 2)$;
c) $y = (7x^2 + 6x + 5)/(x^3 - 1)$.

**11.** a) $y = \sqrt{x^2 - 4}$;
b) $y = 1/\sqrt{x - 3}$;
c) $y = \sqrt{5 - 3x}$;
d) $y = \sqrt{9 - x^2}$;
e) $y = \sqrt{(3 - 2x)^2}$;
f) $y = 3/\sqrt{x^2 - 25}$;
g) $y = \sqrt{(x + 1)/(x - 1)}$;
h) $y = \sqrt{(x - 2)(x + 3)}$.

**12.** a) $y = 3 - |x|$;
b) $y = x/|x|$;
c) $y = |x| + E(x)$;
d) $y = |x^2 - 4|$;
e) $y = x/E(x)$;
f) $y = x/[x - E(x)]$;
g) $y = x + (-1)^{E(x)}$.

**13.** a) $y = x^2/\sqrt{x^2}$;
b) $y = (x + |x|)/2x^2$;
c) $y = 2x^2/(x + |x|)$;
d) $y = 2/(x + |x| - 2)$;
e) $y = |x| \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{|4 - x^2|}}$;
f) $y = |x| \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{|4 - x^2|}}$.

**14.** Ak poznáte graf funkcie $y = f(x)$, ako by ste zostrojili graf funkcie:

a) $y = f(-x)$;
b) $y = -f(x)$;
c) $y = f(x + c)$;
d) $y = f(x) + c$;
e) $y = af(x)$;
f) $y = f(kx)$,

pričom $a$, $c$, $k$ sú reálne čísla, $k \neq 0$.

**15.** Pomocou grafu funkcie $y = f(x)$, zostrojte graf funkcie $y = f(x - a) - b$, kde $a$, $b$ sú ľubovoľné reálne čísla. Zostrojte graf funkcie:

a) $y = (x - 1)^3 + 2$;
b) $y = E(x + 2) - 1$.

**16.** Pomocou grafu funkcie $y = f(x)$, zostrojte graf funkcie $y = af(x/b)$, $a > 0$, $b > 0$. Zostrojte graf funkcie:

a) $y = x^3/2$;
b) $y = E(x/2)/3$.

**17.** Ak poznáte graf funkcie a) $y = |x|$; b) $y = x^2$, zostrojte grafy funkcií:

a) $y = -|x|$, $y = 1 + |x|$, $y = |x| - 2$, $y = |x + 1|$, $y = |x - 2|$, $y = |x + 1| - 2$, $y = 2|x|$;

b) $y = 4x^2$, $y = x^2/4$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 1)^2/2$, $y = 2(x + 2)^2$, $y = x^2 + 4x + 2$, $y = 4x^2 + 8x + 12$.

**18.** Znázornite graf funkcie:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in \langle 0, 1), \\ 3 - x & \text{pre } x \in \langle 1, 3); \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } |x| > 1, \\ 1 + x & \text{pre } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x & \text{pre } 0 < x \leq 1. \end{cases}$

**19.** Zostrojte graf funkcie:

a) $y = |x - a| + |x - b|$, kde $a$, $b$ sú dané reálne čísla;
b) $y = x^2 + |ax^2 - 1|$, kde $a$ je dané reálne číslo.

**20.** Zistite, či sa rovnajú funkcie:

a) $f(x) = x/x$, $g(x) = 1$;
b) $f(x) = x$, $g(x) = x^2/x$;
c) $f(x) = 1/x$, $g(x) = x/x^2$;
d) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$, $h(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \langle 0, \infty)$;
e) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$, $h(x) = \sqrt{x^2}$.

**21.** Dané sú funkcie $F$ a $G$. Nájdite parciálne funkcie $f$ a $g$ k daným funkciám, pre ktoré platí $f = g$, ak

a) $F(x) = |x - 1| + |x + 1|$, $G(x) = |2x|$;
b) $F(x) = 2x^2 - 1$, $G(x) = 1 - 3x$.

**22.** Nech $f$ a $g$ sú definované tabuľkou:

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $a$ | $-2$ | $3$ |
| $b$ | $0$ | $-1$ |
| $c$ | $1$ | $5$ |
| $d$ | — | $3$ |
| $e$ | $2$ | — |

Nájdite $f + g$, $f - g$, $fg$, $f/g$, $g/f$, $f^2 - fg + 3$*).

**23.** Dané sú funkcie $f$, $g$. Nájdite $|f|$, $f + g$, $f - g$, $fg$, $g/f$, $f(f)$, $g(f)$, ak

a) $f(x) = 3x$, $g(x) = 2 - x$;

b) $f(x) = (x - 1)/x$, $g(x) = 1/x$;

c) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = 1/(x + 2)$;

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leqq 0, \\ x & \text{pre } x > 0, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leqq 0, \\ -x^2 & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

Nech $\chi_M(x)$ je funkcia definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$ takto

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in M, \\ 0 & \text{pre } x \in M, \end{cases}$$

kde $M$ je daná množina.

Funkciu $\chi_M(x)$ nazývame *charakteristickou funkciou* množiny $M$.

**24.** Dané sú dve množiny $A$, $B$ reálnych čísiel, nájdite charakteristické funkcie množín: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \triangle B$, $A$, $B$. Zistite, ako súvisia tieto charakteristické funkcie s funkciami $\chi_A(x)$, $\chi_B(x)$.

**25.** Napíšte zloženú funkciu, ktorej hlavná zložka $y$ a vedľajšia zložka $u$ sú:

a) $y = E(u)$, $u = x^3$;

b) $y = u^3$, $u = E(x)$;

c) $y = \sqrt[3]{u}$, $u = 1 + x^2$;

d) $y = 1 + u^2$, $u = \sqrt[3]{x}$.

**26.** Nájdite obor definície zloženej funkcie a napíšte hlavnú a vedľajšiu zložku, ak

a) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

b) $y = \sqrt{|x|^3}$;

c) $y = (-1)^{E(x^2)}$;

d) $y = E^2(x)$;

e) $y = \dfrac{1}{E(\sqrt{1 - |x|})}$.

**27.** Nájdite zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$ a obory definícií týchto funkcií, ak pre funkcie $f$ a $g$ platí:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;

b) $f(x) = (x - 1)/(x - 1)$, $g(x) = \sqrt{x}$;

c) $f(x) = (-1)^x$, $g(x) = E(x)$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$, $\quad g(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x < 0, \\ x^2 & \text{pre } x \geqq 0; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pre } |x| \leqq 2, \\ 2 & \text{pre } |x| > 2, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } |x| \leqq 1, \\ 0 & \text{pre } |x| > 2. \end{cases}$

*) Znak — znamená, že funkcia nie je definovaná.

**28.** Nájdite obor definície zloženej funkcie a jej graf:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$;

b) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

c) $y = \dfrac{2}{1-(-1)^{E(x)}}$;

d) $y = \dfrac{2}{3-E(x)}$;

e) $y = \sqrt{3-\sqrt{x}}$;

f) $y = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

**29.** Nájdite zložené funkcie $f[f]$, $f\{f[f]\}$, ..., $f[\underbrace{f(f\{\ldots[f]\})}_{n\text{-krát}}]$, ak $f(x) = x/(1+x)$.

Funkciu $\chi(x)$ s oborom definície $(-\infty, \infty)$, pre ktorú platí:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \text{ je racionálne číslo,} \\ 0 & \text{ak } x \text{ je iracionálne číslo,} \end{cases}$$

nazývame *Dirichletovou funkciou* (**charakteristická** funkcia množiny racionálnych čísiel).

**30.** a) Nájdite funkcie $\chi^2(x)$, $E[\chi(x)]$, $\chi(x) \cdot [1-\chi(x)]$;

b) nájdite zložené funkcie $\chi[\chi(x)]$, $\chi[E(x)]$, $\chi[1-\chi(x)]$;

c) zistite, či funkcie $\chi(x)$, $\chi[E(x)]$, $(-1)^{\chi(x)}$ sú periodické a ak je to možné, nájdite ich periódu;

Ak je to možné, nakreslite grafy týchto funkcií.

**31.** Nájdite množiny všetkých čísiel, pre ktoré sú hodnoty danej funkcie iba kladné, iba záporné:

a) $y = x - 2$;

b) $y = x^2 + 2x$;

c) $y = x^3 + x^2 - 2x$;

d) $y = 1 - \dfrac{2}{x-1}$;

e) $y = -\dfrac{x+1}{x+4} + \dfrac{x-10}{x-7}$.

**32.** Daná je funkcia $f$. Nájdite všetky reálne čísla $x$, pre ktoré je:

a) $f(x) \geqq 2$, ak $f(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x)^2}$; b) $f(x) \leqq 1$, ak $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-2x^2}}{x}$.

**33.** Zistite, ktoré z daných funkcií sú monotónne resp. rýdzo monotónne:

a) $y = 2 - 7x$;

b) $y = x - |x|$;

c) $y = \sqrt{2-3x}$;

d) $y = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;

e) $y = (2+x)/(3-x)$;

f) $y = x^3 - x$;

g) $y = 2x - 3E(x)$;

h) $y = 2^{E(x/2)}$.

**34.** Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $f$ rastúca, klesajúca, neklesajúca, nerastúca, ak

a) $f(x) = |x|$;
b) $f(x) = |x| + x$;
c) $f(x) = E(1/x)$;
d) $f(x) = x^2 - 3x + 4$;
e) $f(x) = 10x/(x^2 + 25)$;
f) $f(x) = x + 2\sqrt{1 - x}$;
g) $f(x) = |x + 3| + |x - 2|$.

**35.** Nech funkcie $f$, $g$, $h$ sú rastúce a pre každé $x$ z oboru definície $M$ týchto funkcií platí $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$. Dokážte, že platí $f[f(x)] \leqq g[g(x)] \leqq h[h(x)]$.

**36.** Zistite, či funkcia $f$ definovaná na množine $M$ je zhora, zdola ohraničená resp. ohraničená a nájdite jej supremum, infimum, maximum, minimum, ak

a) $f(x) = 1/(4 + x^2)$, $M = (-\infty, \infty)$;
b) $f(x) = 2x^2 - x + 5$, $M = \langle 1, 6)$;
c) $f(x) = 2 - 3x$, $M = (-1, 3)$;
d) $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$, $M = \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$.

**37.** Zistite, ktorá z uvedených funkcií je párna alebo nepárna:

a) $y = 2$;
b) $y = \sqrt{x}$;
c) $y = \sqrt[3]{x}$;
d) $y = x - x^2$;
e) $y = x^3 - x$;
f) $y = 1/2x$;
g) $y = (x + 2)/(x - 2)$;
h) $y = x^2/(1 + 2x^2)$;
i) $y = x/|x|$;
j) $y = x/E(x)$;
k) $y = (-1)^{E(x)}$;
l) $y = x^4 + 1/\sqrt[4]{x^2}$;
m) $y = \chi(x)$;
n) $y = \chi(x)\,[1 - \chi(x)]$,
kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkcia.

**38.** Doplňte definíciu funkcie $f$ tak, aby táto funkcia bola párna resp. nepárna, ak platí:

a) $f(x) = 1 - x$ pre $x > 0$;
b) $f(x) = \sqrt{-x}$ pre $x \leqq 0$;
c) $f(x) = 1/(1 + x)$ pre $x > 0$;
d) $f(x) = E(x)$ pre $x \geqq 0$.

**39.** Dokážte, že $f(x) + f(-x)$ je párna funkcia a $f(x) - f(-x)$ je nepárna funkcia, kde $f$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k, k)$, $k > 0$.

**40.** Na základe úlohy 39 napíšte danú funkciu v tvare súčtu párnej a nepárnej funkcie:

a) $y = x + |x|$;
b) $y = x^2 + x$;
c) $y = x - E(x)$;
d) $y = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{pre } x \leqq 1, \\ x & \text{pre } x > 1; \end{cases}$
e) $y = \chi(x)$, kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkcia.

**41.** Zistite, či daná funkcia je periodická a nájdite jej periódu:

a) $y = 3$;
b) $y = (-1)^{E(x-\frac{1}{2})}$;
c) $y = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{|x|}\right)^{E(x)} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0; \end{cases}$
d) $y = \dfrac{3^{E(x)} + (-3)^{E(x)}}{3^{E(x)}}$;
e) $y = x - E(3x)/3$;
f) $y = \operatorname{sgn}\,(x - E(x) - 1/2)$.

**42.** Nakreslite graf periodickej funkcie s periódou $l = 1$, ktorá je na intervale $\langle 0, 1)$ daná rovnicou:

a) $y = x/2$; b) $y = x^2$.

**43.** Nech funkcie $f$ a $g$ sú periodické s tou istou periódou. Dokážte, že funkcie $f + g$, $fg$, $f/g$ sú periodické.

**44.** Nech funkcia $f$ má periódu $l_0$. Nech reálne číslo $a \neq 0$. Zistite, akú periódu má funkcia $f(ax)$. Akú periódu majú funkcie:

a) $y = (-1)^{E(x\sqrt{2})}$; b) $y = 3x/4 - E(3x/4)$.

**45.** Zistite, či daná funkcia je jednojednoznačná, nájdite k nej inverznú funkciu $f_{-1}$ a vypočítajte $f_{-1}(a)$, ak

a) $y = 2 + 3\sqrt{x}$, $a = 2$;
b) $y = (x - 2)(2 + x)$, $a = -1$;
c) $y = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}}$, $a = 0$.

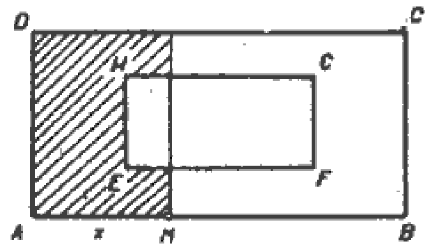
**46.** Zistite, či daná funkcia je jednojednoznačná a nájdite k nej inverznú funkciu, ak

a) $y = 3x$;
b) $y = (1 - x)/(1 + x)$;
c) $y = x/(x^2 + 2)$;
d) $y = x^3/(x^3 + 1)$;
e) $y = -4 + 3\sqrt{x}$;
f) $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x > 0$;
g) $y = |x|\,(-1)^{E(x)}$;
h) $y = x + (-1)^{E(x)}$;
i) $y = \begin{cases} x & \text{pre } x < 0, \\ 2x & \text{pre } x \geq 0; \end{cases}$
j) $y = \begin{cases} 2x + 3 & \text{pre } x < -1, \\ x & \text{pre } -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{pre } x > 1. \end{cases}$

**47.** Nájdite dĺžku jednej odvesny pravouhlého trojuholníka ako funkciu dĺžky druhej odvesny, ak dĺžka prepony je 4. Nájdite obor definície a graf tejto funkcie.

**48.** Vyjadrite:

a) obsah štvorca ako funkciu dĺžky jeho uhlopriečky;
b) obsah rovnostranného trojuholníka ako funkciu dĺžky jeho strany;
c) obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ ako funkciu uhla $\sphericalangle DAB = x$, pričom strana $AB = a$, $DC = b$, $a > b$.




*Obr. 7*

**49.** Z obdĺžnika $ABCD$ so stranami $AB = 2$, $BC = 1$ je vybraný obdĺžnik $EFGH$ so stranami $EF = 1$, $FG = 0{,}5$ (pozri *obr. 7*). Priamka rovnobežná so stranou $BC$ pretína stranu $AB$ v bode $M$. Nájdite obsah vyšrafovanej časti ako funkciu dĺžky úsečky $AM$, $\varrho(AM) = x$. Nakreslite graf tejto funkcie.

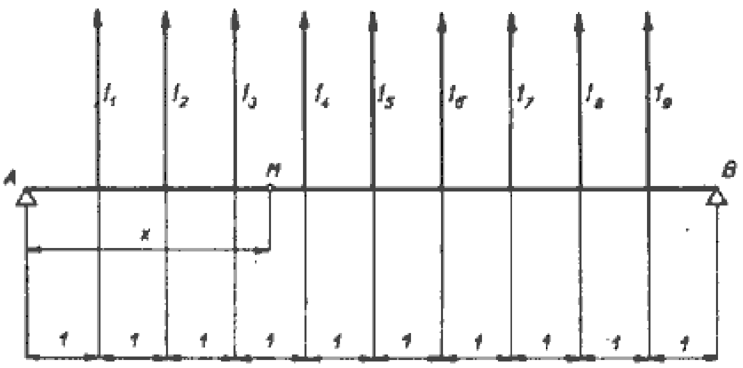
**50.** Daná je guľa s polomerom $r = 1$. Vyjadrite:

a) objem $V$ rotačného valca vpísaného do tejto gule ako funkciu jeho výšky $v$;
b) plášť $S$ vpísaného rotačného kužeľa do tejto gule ako funkciu jeho strany $s$;
c) objem $V$ opísaného rotačného kužeľa tejto gule ako funkciu jeho výšky.

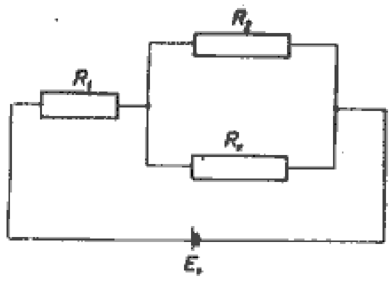
Nájdite obor definície a obor hodnôt týchto funkcií. Nakreslite grafy týchto funkcií.

**51.** Na oboch koncoch podopretého nosníka dĺžky $r = 10$ m pôsobia kolmo na nosník súhlasne rovnobežné sily $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, pričom $F_1 = 10$ N, $F_2 = x\,N$, kde $x > 0$. Vyjadrite dĺžku ramena výslednice týchto síl vzhľadom na pôsobisko sily $\boldsymbol{F}_1$. Zostrojte graf tejto funkcie.

**52.** Na homogénny nosník rovnakého prierezu $q$ a dĺžky $l = 10$ m pôsobia sily $f_1 = f_2 = \ldots = f_9 = 2$ Mp (pozri *obr. 8*). Na nosník pôsobí tiaž $G = 20$ Mp. Nájdite veľkosť výslednice síl, ktoré pôsobia na ľavú časť nosníka $AM$ ako funkciu dĺžky tejto časti $x = \varrho(AM)$. Zostrojte graf tejto funkcie (obrazec priečnych síl).




*Obr. 8.*




*Obr. 9*

**53.** Na teleso s hmotnosťou 1 kg ponorené do vody ($\varrho_0 = 1$ kg/dm$^3$) pôsobí výsledná sila $\boldsymbol{G}$, $G = x$ kp. Vyjadrite hmotnosť tohto telesa ako funkciu veľkosti sily $\boldsymbol{G}$. Narysujte graf tejto funkcie.

**54.** Do dvoch litrov 48 % kyseliny sírovej pridávame 72 % kyselinu sírovú. Vyjadrite výslednú koncentráciu $C$ kyseliny sírovej ako funkciu množstva $x$ 72 % kyseliny sírovej. Zostrojte graf tejto funkcie.

**55.** Plyn s počiatočným objemom $V_0 = 1$ l a s tlakom 2 at mení svoj objem tak, že jeho teplota je konštantná. Vyjadrite tlak $P$ ako funkciu objemu $V$ a zostrojte graf tejto funkcie.

**56.** Závislosť veľkosti prúdu $I$ od veľkosti napätia $U$ a veľkosti odporu $R$ je podľa Ohmovho zákona $I = U/R$. Ak je napätie konštantné $U = 10$ V, nájdite graf funkcie $I = f(R)$. Zistite, aký je obor definície tejto funkcie.

**57.** Majme elektrickú sieť spojenú podľa *obr. 9*, kde $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_x = x\,\Omega$, pričom $x$ sa mení od 0 do 100 $\Omega$. Vyjadrite celkový odpor $R$ ako funkciu $x$. Zostrojte graf tejto funkcie.

**58.** Námestie je osvetlené bodovým zdrojom so svietivosťou $I = 500$ cd, ktorý je umiestnený na stožiari vo výške 20 m nad námestím. Nájdite osvetlenie námestia ako funkciu vzdialenosti $x$ od päty stožiara. Zostrojte graf tejto funkcie.

## 1,2. Elementárne funkcie

**Konštanta.** *Konštantou* alebo *konštantnou funkciou* nazývame funkciu definovanú na množine $M = (-\infty, \infty)$, pre ktorú platí

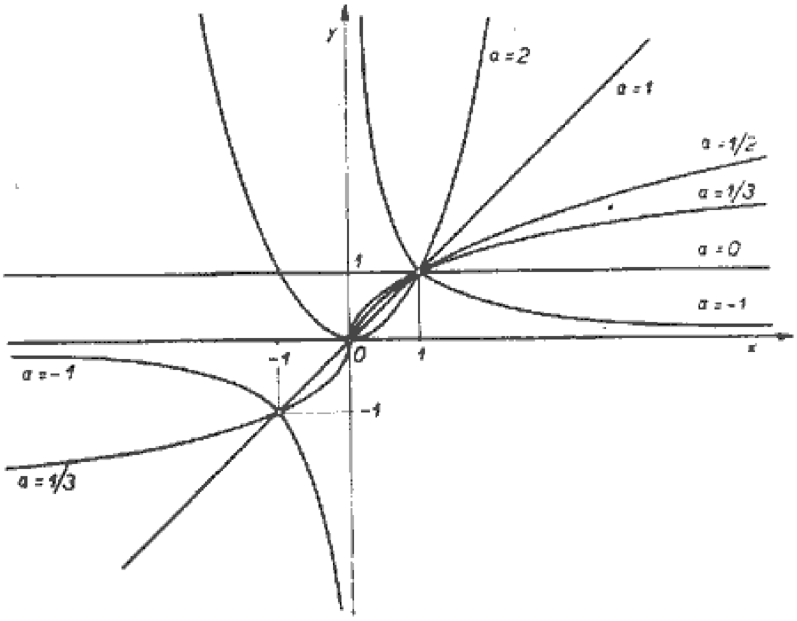
$$y = c, \tag{1}$$

kde $c$ je reálne číslo.

**Polynóm.** *Polynómom* nazývame funkciu definovanú na množine $M = (-\infty, \infty)$, danú rovnicou
$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \tag{2}$$
kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla, $a_0 \neq 0$ a celé nezáporné číslo $n$ je stupeň polynómu.

Majme dva polynómy $P, Q$. *Racionálna funkcia* je podiel polynómov $P, Q$
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{3}$$
pre každé $x$, pre ktoré je $Q(x) \neq 0$.

Ak pre stupne oboch polynómov platí $n_Q > n_P$, hovoríme o *rýdzo racionálnej funkcii* a pre $n_Q \leq n_P$ o *nerýdzo racionálnej funkcii*.




*Obr. 10*

**Mocninová funkcia.** Funkciu
$$y = x^a, \tag{4}$$
kde $a$ je číslo, nazývame *mocninovou funkciou*. Pritom môžu nastať tieto prípady:

a) $a$ je prirodzené číslo. Funkcia (4) sa nazýva *mocninovou funkciou s prirodzeným exponentom* a je definovaná pre všetky reálne čísla. Ak $a$ je párne číslo, je funkcia (4) párna, v intervale $(-\infty, 0)$ klesajúca a v intervale $(0, \infty)$ rastúca. Ak $a$ je nepárne číslo, je funkcia (4) nepárna a rastúca.

b) $a = 0$ pričom $y(0) = 1$. Funkcia (4) je konštanta.

c) $a$ je celé záporné číslo $a = -r$, kde $r > 0$. Potom funkcia
$$y = \frac{1}{x^r} \tag{5}$$
je definovaná pre každé $x \neq 0$.

d) $a$ je prevrátená hodnota prirodzeného čísla $r$, $a = 1/r$. Potom funkcia
$$y = \sqrt[r]{x} \tag{6}$$
je definovaná v intervale $(0, \infty)$ pre $r$ párne a definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$ pre $r$ nepárne. Funkcia (6) je rastúca (*obr. 10*).

e) $a$ je racionálne číslo $a = p/q$, kde $p$, $q$ sú celé čísla a $q \neq 0$. Potom je funkcia (4) definovaná pre všetky kladné čísla. Pre $p/q > 0$ je funkcia (4) definovaná pre všetky nezáporné čísla. Funkcia (4) je v tomto prípade zložená funkcia, $y = u^p$, $u = x^{1/q}$.

f) $a$ je iracionálne číslo.*) Potom obor definície funkcie (4) je $(0, \infty)$ pre $a < 0$ a $\langle 0, \infty)$ pre $a > 0$. Funkcia (4) je rastúca pre $a > 0$, klesajúca pre $a < 0$ (pozri *obr. 11*).

**Exponenciálna funkcia**

$$y = a^x, \tag{7}$$

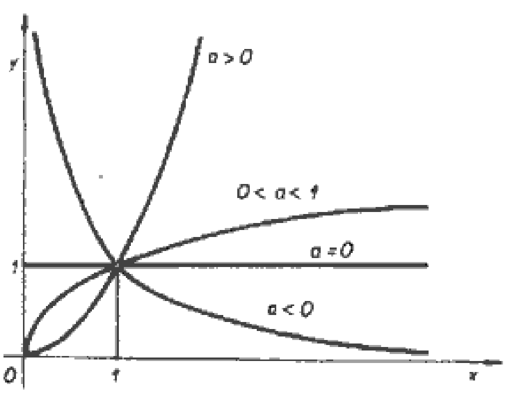
kde $a > 0$ je definovaná pre všetky reálne čísla*).

Pre $a > 1$ je exponenciálna funkcia rastúca, pre $0 < a < 1$ klesajúca a pre $a = 1$ konštanta (*obr. 12*).

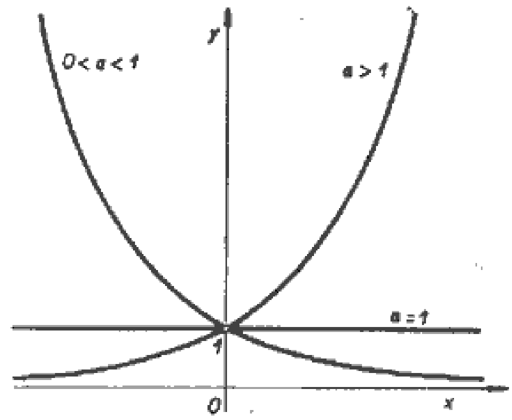
**Logaritmická funkcia.** *Logaritmická funkcia pri základe* $a$, kde $0 < a < 1$ alebo $a > 1$, je definovaná v intervale $(0, \infty)$ a je inverznou funkciou k exponenciálnej funkcii $y = a^x$. Označujeme ju

$$y = \log_a x. \tag{8}$$

Táto funkcia je rastúca pre $a > 1$, klesajúca pre $0 < a < 1$ (*obr. 13*).

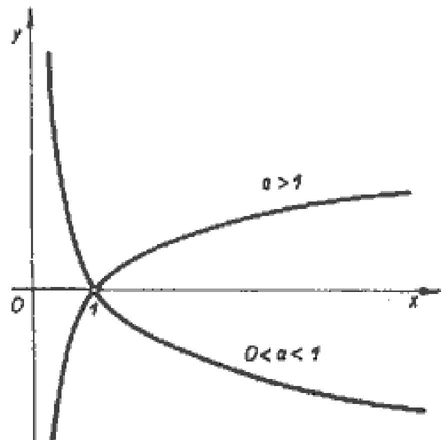



*Obr. 11*




*Obr. 12*

Logaritmická funkcia pri základe e = 2,718 281 828...**) sa nazýva stručne iba *logaritmickou funkciou* a označuje sa $y = \ln x$. Logaritmickú funkciu pri základe 10 označujeme namiesto $\log_{10} x$ iba $\log x$.




*Obr. 13*

Vlastnosti:

**Veta 1.** Nech je $a > 0$, potom platí $a^x = e^{x \ln a}$ pre každé číslo $x$.

**Veta 2.** Nech je $a > 0$, $b > 0$, pričom $a \neq 1$, $b \neq 1$, potom platí

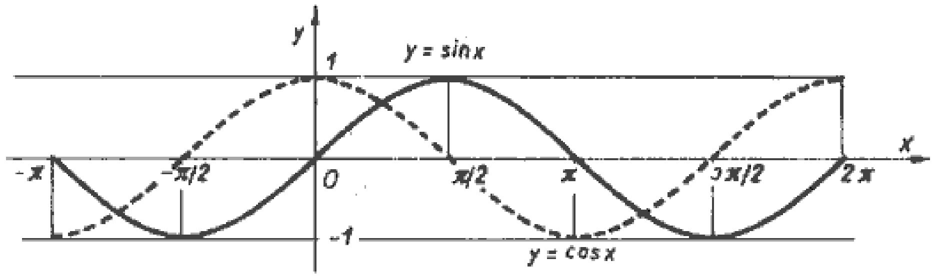
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{9}$$

pre každé kladné číslo $x$.

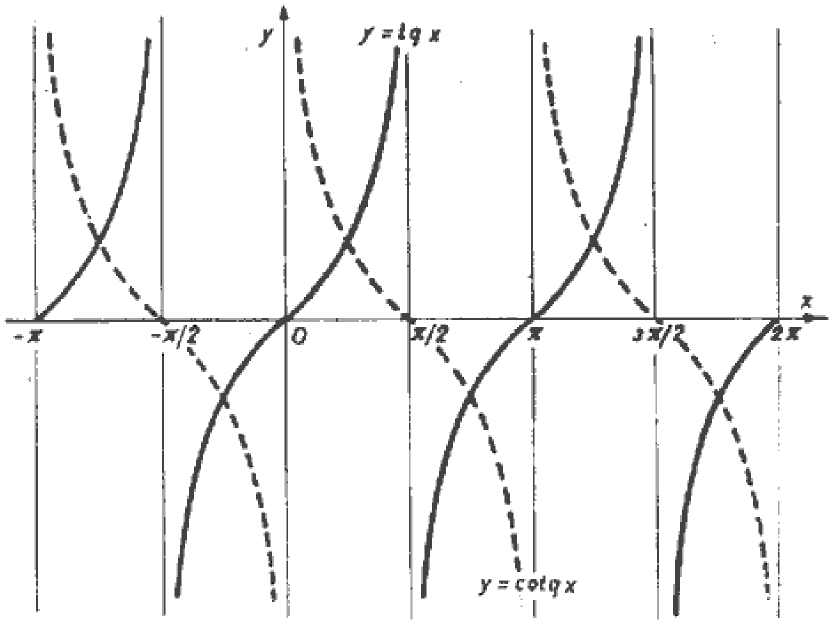
**Veta 3.** Nech je $a$ číslo, potom platí $x^a = e^{a \ln x}$ pre každé kladné číslo $x$.

**Trigonometrické funkcie.** Funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ (*obr. 14a, b, c*) nazývame *trigonometrickými* alebo *goniometrickými funkciami*.

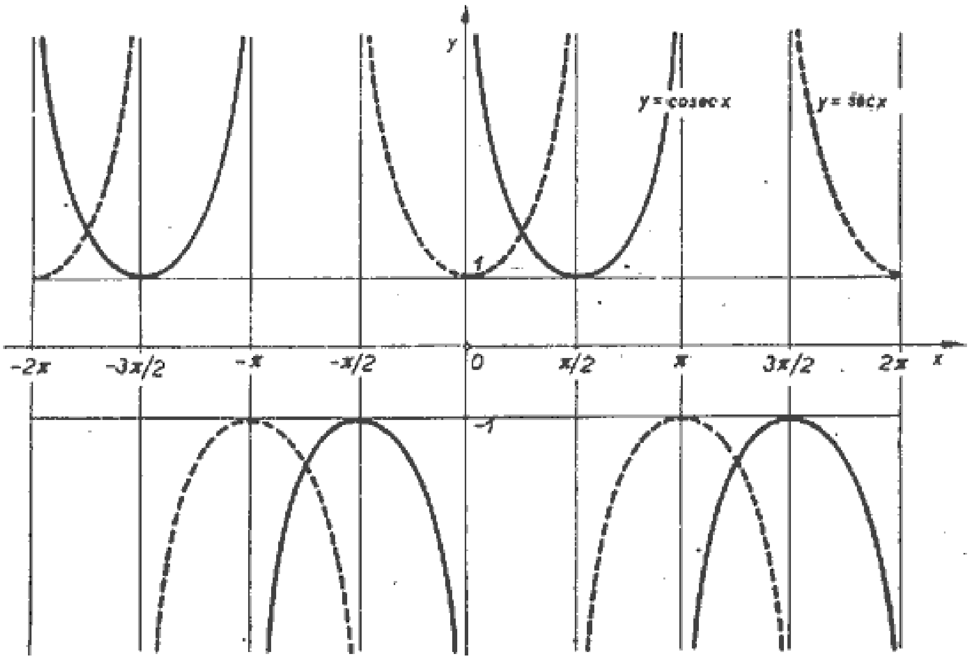
*) Definíciu mocniny s reálnym exponentom pozri aj v 1,3.
**) O čísle e bližšie pozri v 1,3.




Obr. 14a




Obr. 14b




Obr. 14c

Funkcia *sínus*

$$y = \sin x$$

a funkcia *kosínus*

$$y = \cos x$$

sú definované v intervale $(-\infty, \infty)$ a sú periodické s periódou $2\pi$. Funkcia sínus je nepárna, funkcia kosínus je párna funkcia.

Funkcia *tangens*

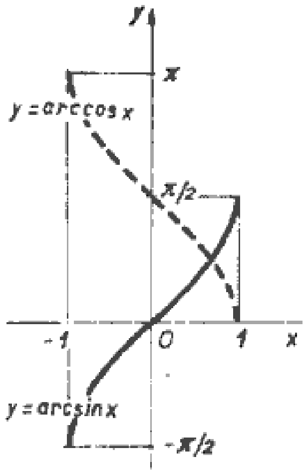
$$y = \operatorname{tg} x$$

je definovaná pre všetky čísla $x$, pre ktoré platí $x \neq (2k + 1)\,\pi/2$, kde $k$ je celé číslo.

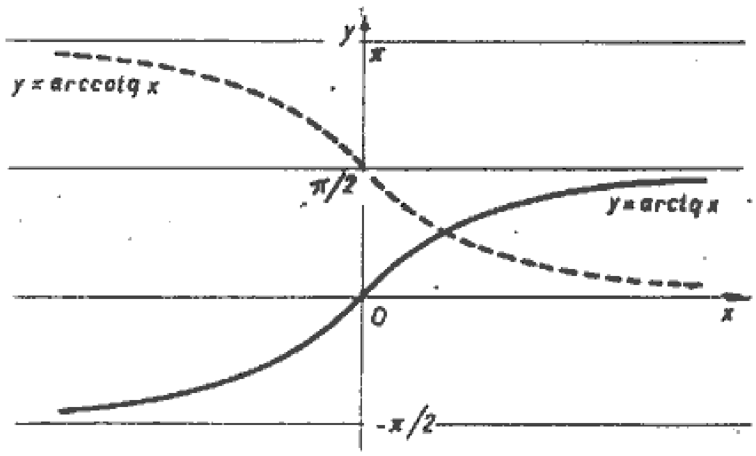
Funkcia *kotangens*

$$y = \operatorname{cotg} x$$

je definovaná pre všetky čísla $x$, pre ktoré je $x \neq k\pi$ a $k$ je celé číslo.




*Obr. 15a*




*Obr. 15b*

Funkcie tangens a kotangens sú periodické funkcie s periódou $\pi$. Funkcia tangens je nepárna, funkcia kotangens je párna funkcia.

Pre trigonometrické funkcie platí

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x), \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pre} \quad \cos x \neq 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{pre} \quad \sin x \neq 0, \tag{12}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{pre} \quad \cos x \neq 0, \tag{13}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{pre} \quad \sin x \neq 0. \tag{14}$$

**Cyklometrické funkcie.** *Cyklometrické funkcie* sú *arkussínus, arkuskosínus, arkustangens,* a *arkuskotangens* (*obr. 15a, b*).

Funkcia *arkussínus*

$$y = \arcsin x$$

je definovaná v intervale $\langle -1, 1\rangle$ a je inverznou funkciou k funkcii $y = \sin x$ v intervale $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

Funkcia *arkuskosínus*

$$y = \arccos x$$

je definovaná v intervale $\langle -1, 1\rangle$ a je inverznou funkciou k funkcii $y = \cos x$ v intervale $\langle 0, \pi\rangle$.

Funkcia *arkustangens*

$$y = \operatorname{arctg} x$$

je definovaná pre každé číslo $x$ a je inverznou funkciou k funkcii $y = \operatorname{tg} x$ v intervale $(-\pi/2, \pi/2)$.

Funkcia *arkuskotangens*

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

je definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$ a je inverznou funkciou k funkcii $y = \operatorname{cotg} x$ v intervale $(0, \pi)$.

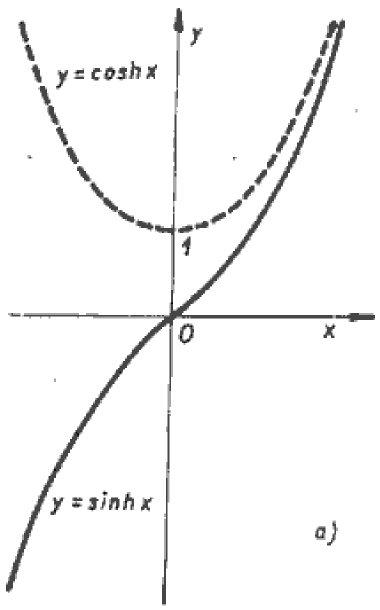
Pre cyklometrické funkcie platí

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

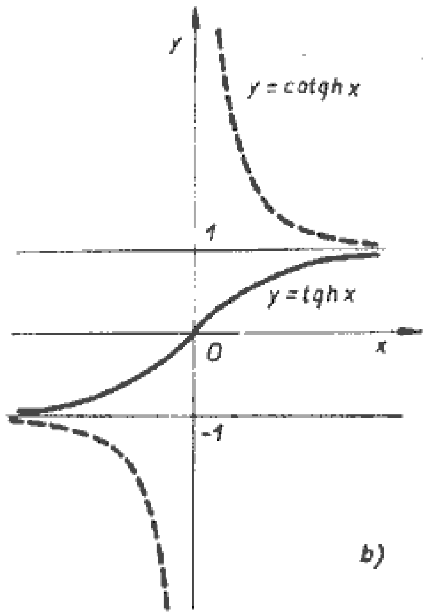
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \tag{16}$$

pre každé číslo $x$ z oboru definície týchto funkcií.

Funkcie arkussínus a arkustangens sú rastúce nepárne funkcie. Funkcie arkuskosínus a arkuskotangens sú klesajúce funkcie.



Obr. 16a



Obr. 16b

**Hyperbolické funkcie.** (*Obr. 16.*) *Hyperbolickým sinusom* nazývame funkciu

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{17}$$

a označujeme ju sinh $x$.

*Hyperbolickým kosínusom* nazývame funkciu

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{18}$$

a označujeme ju cosh $x$.

*Hyperbolickým tangensom* nazývame podiel funkcií $\sinh x$, $\cosh x$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{19}$$

a označujeme ho $\operatorname{tgh} x$.

*Hyperbolickým kotangensom* nazývame podiel funkcií $\cosh x$, $\sinh x$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{20}$$

a označujeme ho $\operatorname{cotgh} x$.

Obor definície funkcie $\operatorname{cotgh} x$ je množina všetkých reálnych čísiel okrem nuly, zatiaľ čo funkcie $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ sú definované pre všetky reálne čísla.

**Elementárne funkcie.** Každú funkciu, ktorú dostaneme z konečného počtu funkcií: konštánt, trigonometrických a cyklometrických funkcií, mocninových, exponenciálnych a logaritmických funkcií, konečným počtom operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a tvorenia zloženej funkcie, nazývame *elementárnou funkciou.*

**Príklad 1.** Daná je funkcia

$$y = 3 + \arcsin(2x - 1).$$

Nájdime jej obor definície a zistime, či táto funkcia je rýdzo monotónna. Nájdime k nej inverznú funkciu, ak existuje.

*Riešenie.* Daná funkcia je súčet funkcií $f(x) = 3$ a $g(x) = \arcsin(2x - 1)$. Funkcia $f(x) = 3$ má obor definície $(-\infty, \infty)$. Funkcia $g(x)$ je zložená funkcia $g(x) = F(G(x))$, kde $F(x) = \arcsin x$ a $G(x) = 2x - 1$. Funkcia $G(x) = 2x - 1$ má obor definície $A = (-\infty, \infty)$, obor hodnôt $B = (-\infty, \infty)$. Funkcia $F(x) = \arcsin x$ má obor definície $C = \langle -1, 1\rangle$. Obor definície funkcie $g$ je množina všetkých tých čísiel z $A = (-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $G(x) = (2x - 1) \in B \cap C = \langle -1, 1\rangle$. Z toho vyplýva

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1,$$
$$0 \leq x \leq 1.$$

Obor definície funkcie $g(x) = \arcsin(2x - 1)$ je $\langle 0, 1\rangle$. Obor definície danej funkcie je $M = (-\infty, \infty) \cap \langle 0, 1\rangle = \langle 0, 1\rangle$.

Ukážme, že daná funkcia je rastúca. Nech $x_1$, $x_2$ sú čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, pričom $x_1 < x_2$, potom aj $2x_1 - 1 < 2x_2 - 1$. Funkcia arkussínus je rastúca, a preto

$$\arcsin(2x_1 - 1) < \arcsin(2x_2 - 1)$$

a

$$3 + \arcsin(2x_1 - 1) < 3 + \arcsin(2x_2 - 1).$$

Teda táto funkcia je rastúca.

Nájdime ešte jej obor hodnôt. Z nerovností $0 \leq x \leq 1$ dostaneme $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$ a $-\pi/2 \leq \arcsin(2x - 1) \leq \pi/2$. Pretože $y = 3 + \arcsin(2x - 1)$, obor hodnôt je interval

$$\langle 3 - \pi/2,\ 3 + \pi/2\rangle.$$

Inverznú funkciu nájdeme riešením rovnice $f[f_{-1}(x)] = x$, pričom $y = f_{-1}(x)$. Z toho vyplýva

$$x = 3 + \arcsin(2y - 1)$$

a

$$\arcsin(2y - 1) = x - 3.$$

Z definície funkcie arkussínus vyplýva

$$2y - 1 = \sin(x - 3).$$

Hľadaná inverzná funkcia je

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(x - 3)$$

s oborom definície $\langle 3 - \pi/2,\ 3 + \pi/2\rangle$.

**Príklad 2.** Ukážme, že funkcia $y = g(x)$, kde

$$g(x) = \sin\frac{2x}{3} + (-1)^{E(x/\pi)} + \operatorname{tg} 2x$$

je periodická a nájdime jej periódu.

*Riešenie.* Pri riešení úlohy použijeme vetu, ak funkcia $f$ je periodická, vtedy aj funkcia $y = f(kx)$, $k > 0$ je periodická a pre jej periódu platí $l = l_0/k$, kde $l_0$ je perióda funkcie $f$ (pozri úlohu 44 z článku 1,1).

Pretože funkcia $\sin x$ je periodická s periódou $2\pi$, funkcia $(-1)^{E(x)}$ je periodická s periódou 2 a funkcia $\operatorname{tg} x$ je periodická s periódou $\pi$, periodické sú aj funkcie

$$y_1 = \sin\frac{2}{3}x, \qquad y_2 = (-1)^{E(x/\pi)}, \qquad y_3 = \operatorname{tg} 2x$$

a ich periódy sú $l_1 = 2\pi/(2/3)$, $l_2 = 2/(1/\pi)$, $l_3 = \pi/2$, čiže

$$l_1 = 3\pi, \qquad l_2 = 2\pi, \qquad l_3 = \pi/2.$$

Ukážme, že aj funkcia $y = y_1 + y_2 + y_3$ je periodická. Pretože $l = 6\pi$ je najmenšie kladné číslo, pre ktoré platí

$$g(x + l) = \sin\left(\frac{2}{3}x + 4\pi\right) + (-1)^{E(x/\pi+6)} + \operatorname{tg}(2x + 12\pi) =$$

$$= \sin\frac{2}{3}x + (-1)^{E(x/\pi)} + \operatorname{tg} 2x = g(x),$$

perióda tejto funkcie je $l = 6\pi$.

**59.** Daná je funkcia:

a) $f(x) = \operatorname{tg} 2x - 3\cos^2 x$;

b) $f(x) = \log x^2$;

c) $f(x) = \arcsin(\cos x)$;

d) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pre} \quad x \in \langle -\pi, 0), \\ \sin x & \text{pre} \quad x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$

Nájdite hodnoty:

a) $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(1)$;

b) $f(-10)$, $f(0)$, $f(0{,}01)$, $f(1)$;

c) $f(0)$, $f(-\pi)$, $f(3\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

d) $f(0)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(3)$, $f(4)$.

**60.** Nech $a$, $b$, $r$ sú reálne čísla. Dokážte, že ak funkcia $f$ spĺňa podmienku $f(ra) = rf(a)$ pre ľubovoľné $a$, $r$, vtedy je daná rovnicou $y = kx$, kde $k$ je konštanta.

**61.** Nájdite čísla $k$, $l$, $m$ tak, aby polynóm $g(x)$ sa rovnal polynómu $f(x)$, ak

a) $f(x) = 1$, $g(x) = k(x^2 + 1) + lx^2 + mx(x^2 + 1)$;

b) $f(x) = x + 1$, $g(x) = k(x - 1) + lx(x - 1) + mx^2$.

**62.** Nech $g(x) = x^2 + x + 1/x + 1/x^2$ pre $x \neq 0$. Dokážte, že $g(1/x) = g(x)$.

**63.** Dokážte, že

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right), \quad \text{ak} \quad f(x) = \log\frac{1 + x}{1 - x} \quad \text{pre} \quad x \in (-1, 1).$$

**64.** Zistite, či funkcie $f$ a $g$ sa rovnajú, ak

a) $f(x) = \log x^4$, $g(x) = 4 \log x$;

b) $f(x) = \log x^4$, $g(x) = 4 \log x$ pre $x \in \langle 1, 4 \rangle$;

c) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

**65.** Zistite, pre ktoré čísla $x$ platí:

a) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

b) $\arccos \sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$;

**66.** Dokážte, že platí:

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; c) $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$;

b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$; d) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = 1/\cosh^2 x$.

**67.** Pomocou grafu funkcie $y = x^3$, zostrojte grafy funkcií:

$y = -x^3$, $y = (x - 2)^3$, $y = -(x + 1)^3$, $y = 3x^3$, $y = \dfrac{1}{2} x^3$,

$y = x^3 + 1$, $y = x^3 - 2$, $y = -x^3 + 3$, $y = 3(x - 1)^3 + 2$.

**68.** Zostrojte graf funkcie $y = \log x$ a pomocou neho zostrojte grafy funkcií:

a) $y = \log x^2$; c) $y = 3 \log 2x$;

b) $y = \log (2 - x)$; d) $y = \log (1/x)$.

**69.** Zostrojte graf funkcie $y = 3^x$ a pomocou neho zostrojte grafy funkcií:

a) $y = 3^{-x}$; d) $y = 1 + 3^x$;

b) $y = -3^x$; e) $y = 3^{x-1}$;

c) $y = -3^{-x}$; f) $y = 3^{x/2}/10$.

**70.** Pomocou grafického sčítania, resp. odčítania nájdite grafy funkcií:

a) $y = 2^x + x$; b) $y = 2^x - x$.

**71.** Výpočtom dokážte, že graf funkcie $y = ka^x$, $k > 0$ dostanete z grafu funkcie $y = a^x$ posunutím v smere osi $o_x$.

**72.** Pomocou grafu funkcie $y = \sin x$ zostrojte graf funkcie:

a) $y = \cos x$; c) $y = -\sin x$; e) $y = \sin (x - 3)$;

b) $y = |\sin x|$; d) $y = 2 \sin x$; f) $y = 2 \cos (x/2)$.

**73.** Napíšte hlavnú a vedľajšiu zložku zložených funkcií:

a) $y = \sin x^2$; c) $y = 2^{2x}$;

b) $y = \sin^2 x$; d) $y = 2^{(x^2)}$.

**74.** Dané sú funkcie $f$ a $g$. Nájdite zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak

a) $f(x) = \log x$, $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$; c) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$;
b) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \sin x$; d) $f(x) = \sinh x$, $g(x) = \ln x$.

**75.** Daná je funkcia $y = f(x)$. Nájdite jej obor definície, ak

a) $y = (x^2 + x - 6)^{\sqrt{2}}$; b) $y = \dfrac{1}{2^{x/(x-1)} - 3^{x/(x-1)}}$.

**76.** Nájdite obor definície a zostrojte graf funkcie:

a) $y = \log_2 x$; f) $y = \log(2x - 5)$;
b) $y = \log_2(-x)$; g) $y = \log(2 - x) + \log(2 + x)$;
c) $y = \log_{1/2} x$; h) $y = \log_x 3$;
d) $y = \log|x|$; i) $y = \log \dfrac{1 - x}{1 + x}$.
e) $y = |\log x|$;

**77.** Nájdite obor definície funkcie:

a) $y = \log(\sqrt{x - 3} - 2)$; c) $y = \log \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}$.
b) $y = \log(e^x - e^{-x})$;

**78.** Nájdite obor definície a zostrojte graf funkcie:

a) $y = \sin^2 x$; c) $y = 1/\sin x$; e) $y = E(x)\,|\sin \pi x|$;
b) $y = \sin x^2$; d) $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$; f) $y = \operatorname{tg} 2x$.

**79.** Nájdite obor definície funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = \operatorname{tg} \sqrt{2x}$; c) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{9 - x^2}$.
b) $y = \dfrac{x}{\operatorname{cotg} 4x}$;

**80.** Nájdite obor definície a zostrojte graf funkcie:

a) $y = \arcsin(2x - 3)$; f) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;
b) $y = \arcsin 2^x$; g) $y = \arcsin(3 - \sqrt{4 - x})$;
c) $y = \arcsin(\sin x)$; h) $y = \arcsin(1/x)$;
d) $y = \arcsin(\cos x)$; i) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x - 1}{x + 1}$.
e) $y = \arccos(\cos x)$;

**81.** Nájdite obor definície funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = \sqrt{5 - 3x} + \arcsin \dfrac{3x - 2}{5}$; d) $y = \log(2 \cos x - \sqrt{3})$;

b) $y = \sqrt{4 - x} - \sqrt{x + 2} + \sqrt{15 - x}$; e) $y = \sin\left(\log \dfrac{1}{3x + 1}\right)$;

c) $y = \log(1 - \operatorname{tg} x)$; f) $y = \dfrac{\log(2x - 3)}{\sqrt{x^2 - 1}} + \arcsin \dfrac{x - 4}{7}$

**82.** Zistite, ktoré z funkcií sú párne a ktoré sú nepárne:

a) $y = 2^x$;

b) $y = \dfrac{a^x + 1}{a^x - 1}$;

c) $y = \cos(\pi - x)$;

d) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

e) $y = \sin x + \cos x$;

f) $y = \log \dfrac{2 - x}{2 + x}$;

g) $y = x^2 + \sin x^2$;

h) $y = \dfrac{1}{4 + \operatorname{cotg}^3 x}$;

i) $y = x \cosh x$;

j) $y = \dfrac{x + \operatorname{tgh} x}{2 + 3 \cos x}$;

k) $y = x \log |x|$;

l) $y = \dfrac{\sinh x}{\sin x}$.

**83.** Nech $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Nájdite tie čísla $x$, pre ktoré $f$ nadobúda najmenšiu a najväčšiu hodnotu.

**84.** Nájdite maximum a minimum funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = \cos^2 x$;

b) $y = \sin x^2$;

c) $y = 2 + \cos x$;

d) $y = 2^{x^2}$.

**85.** Zistite, ktorá z daných funkcií je periodická a nájdite jej periódu:

a) $y = \sin(2x/3)$;

b) $y = 5 \cos 2\pi x$;

c) $y = \cos^2 x$;

d) $y = \cos x^2$;

e) $y = x \sin x$;

f) $y = \sin(1/x)$.

**86.** Zistite, či daná funkcia je periodická a nájdite jej periódu, ak existuje:

a) $y = \arcsin(\sin x)$;

b) $y = \log(\cos x + \sin x)$;

c) $y = E(x) \arccos[E(x)]$;

d) $y = 3 \cos x - 5 \sin 4x$;

e) $y = \sin 2x + \operatorname{tg}(x/2)$;

f) $y = 2^{3 + 2\sin x}$.

**87.** Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia monotónna:

a) $y = (x^2 - x)^{\sqrt{3}}$;

b) $y = 2^{x^2 - 3x + 2}$;

c) $y = 2^{|x-3| + |x+1|}$;

d) $y = \log \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$;

e) $y = \log^2 x - 3 \log x + 2$.

**88.** Nájdite inverznú funkciu k funkcii:

a) $y = 4x - 2$;

b) $y = \sin(3x - 1)$, $|6x - 2| < \pi$;

c) $y = \dfrac{x - 1}{2 - 3x}$;

d) $y = \begin{cases} \pi x/2 & \text{pre} \quad |x| \geq 1, \\ \arcsin x & \text{pre} \quad |x| \leq 1; \end{cases}$

e) $y = 4^{\sin x}$;

f) $y = 3^{x/(x-1)}$;

g) $y = \begin{cases} x & \text{pre} \quad x < 1, \\ x^2 & \text{pre} \quad x \in \langle 1, 4 \rangle, \\ 2^x & \text{pre} \quad x > 4. \end{cases}$

**89.** Zistite, ktorá z daných funkcií je rýdzo monotónna a nájdite k nej inverznú funkciu:

a) $y = 3 + 4 \arccos (2x - 1)$;
b) $y = \ln (2 - 3x)$;
c) $y = 1 + \sqrt{3 + e^{2x}}$;
d) $y = 2^{1+\ln \sqrt{x-2}}$;
e) $y = 2^{3+\operatorname{arctg} x}$.

**90.** Zistite, ktorá z daných funkcií je jednojednoznačná a nájdite k nej inverznú funkciu:

a) $y = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$;
b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + 2\sqrt[3]{x}}$;
c) $y = \operatorname{tg} (1 - 2 \operatorname{arctg} x)$;
d) $y = \dfrac{1 + 2^x}{4 - 2^x}$.

**91.** Daná je kružnica s polomerom $r = 1$. Vyjadrite:

a) obsah kruhového odseku ako funkciu jej stredového uhla $x$,
b) výšku kruhového odseku ako funkciu stredového uhla $x$.
Zostrojte grafy týchto funkcií.

**92.** Strela opúšťa hlaveň dela rýchlosťou $v = 800 \text{ ms}^{-1}$ pod elevačným uhlom $\alpha$ Vyjadrite:

a) elevačný uhol $\alpha$ ako funkciu dostrelu $x$ vo vodorovnej rovine,
b) elevačný uhol $\alpha$ ako funkciu najväčšej výšky $y$ strely nad vodorovnou rovinou.
Zostrojte tieto funkcie, ak tiažové zrýchlenie je $g \doteq 10 \text{ ms}^{-2}$.

**93.** Raketa s počiatočnou hmotnosťou (aj s palivom) $M_0 = 4$t štartuje tak, že rýchlosť plynov opúšťajúcich dýzy rakety je $u_0 = 2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Rýchlosť rakety v čase $t$ je daná Ciolkovského rovnicou

$$u = u_0 \ln (M_0/M),$$

kde $M$ je hmotnosť rakety v čase $t$, vyjadrená v tonách. Vyjadrite:

a) hmotnosť rakety $M$ ako funkciu jej rýchlosti,
b) rýchlosť rakety $u$ ako funkciu času, ak hmotnosť rakety $M$ je funkciou času $M(t) = 4 - t/60$ a pre čas $t$ [s] platí $t \in \langle 0, 120 \rangle$.
Zostrojte grafy týchto funkcií.

**94.** Teleso kmitá v priamke s kruhovou frekvenciou $\omega = 100 \pi \text{s}^{-1}$. Výchylka telesa z rovnovážnej polohy pri tomto kmitaní je

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

kde $x_0$ je počiatočná výchylka a $v_0$ je počiatočná rýchlosť telesa.

Vyjadrite výchylku ako funkciu kosínusu vhodného argumentu a znázornite graf tejto funkcie, ak:

a) $x_0 = 0$ m, $v_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$;
b) $x_0 = 1$ m, $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$;
c) $x_0 = 1$ m, $v_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$.

**95.** Pre adiabatické zmeny plynu platí Poissonov vzťah

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p V^{\varkappa}.$$

Vyjadrite tlak $p$ ako funkciu objemu $V$, ak $p_0 = 1$ at, $V_0 = 1\ \text{m}^3$ a Poissonova konštanta je $\varkappa = 1{,}5$. Zostrojte graf tejto funkcie. Aký tlak bude mať plyn pri objeme $V = 4\ \text{m}^3$?

**96.** Na rovinné rozhranie dvoch prostredí dopadá svetelný lúč pod uhlom $x$. Nájdite uhol lomu ako funkciu uhla dopadu, ak index lomu $n_{1,2} = 2$.

**97.** Absorpcia radioaktívneho žiarenia prebieha tak, že intenzita tohto žiarenia je daná funkciou

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\mu x},$$

kde $I_0$ je pôvodná intenzita žiarenia a $x$ hrúbka absorbujúcej vrstvy látky. Nájdite:

a) hrúbku absorbujúcej vrstvy látky ako funkciu intenzity žiarenia,

b) tú hrúbku absorbujúcej vrstvy látky, ktorá zmenší pôvodnú hodnotu intenzity žiarenia na polovicu.

Zostrojte grafy týchto funkcií, ak absorpčný koeficient látky je $\mu = 2\ \text{m}^{-1}$.

## 1,3. Postupnosti

**Základné pojmy.** Funkcia $f$ definovaná na množine všetkých prirodzených čísiel $M = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ sa nazýva *postupnosťou*. Hodnotu funkcie $f$ v čísle $n$ označujeme $a_n = f(n)$ a nazývame ju *n-tým členom postupnosti*.

Postupnosť, ktorej členy sú reálne čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, označujeme

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \tag{1}$$

alebo

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Postupnosť (1) je *rastúca* [*klesajúca*, *nerastúca*, *neklesajúca*], ak pre všetky prirodzené čísla $n$ platí $a_n < a_{n+1}$, [$a_n > a_{n+1}$, $a_n \geqq a_{n+1}$, $a_n \leqq a_{n+1}$].

Postupnosť rastúca, klesajúca, nerastúca a neklesajúca sú *monotónne postupnosti*. Postupnosť rastúca a klesajúca sú *rýdzo monotónne* postupnosti.

Postupnosť (1) je *zhora* [*zdola*] *ohraničená*, ak množina všetkých jej členov je zhora [zdola] ohraničená, t. j. existuje také číslo $K$ [$k$], že pre každé prirodzené číslo $n$ platí $a_n \leqq K$, [$a_n \geqq k$].

Postupnosť (1) je *ohraničená*, ak je zhora i zdola ohraničená.

Majme danú rastúcu postupnosť prirodzených čísiel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosť (1). Postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame *vybranou postupnosťou* z postupnosti (1) podľa postupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Limita postupnosti.** Ak určité tvrdenie platí pre všetky členy postupnosti (1), s výnimkou konečného počtu členov, hovoríme, že platí pre *skoro všetky* členy postupnosti.

Číslo $a$ sa nazýva *limitou postupnosti* (1), ak v ľubovoľnom okolí čísla $a$ ležia skoro všetky členy postupnosti (1), čiže ku každému kladnému číslu $\varepsilon$ existuje také prirodzené číslo $N(\varepsilon)$, že pre každé prirodzené číslo $n > N(\varepsilon)$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ak postupnosť (1) má limitu $a$, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ alebo $a_n \to a$. Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame *konvergentnou*, ktorá nemá limitu, nazývame *divergentnou*.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Každá konvergentná postupnosť má iba jednu limitu.

**Veta 2.** Ak je postupnosť konvergentná, vtedy je ohraničená.

**Veta 3.** Monotónna a ohraničená postupnosť je konvergentná. Limita neklesajúcej [nerastúcej] ohraničenej postupnosti je jej supremum [infimum].

**Veta 4.** Bolzano—Cauchyho kritérium. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu vtedy a len vtedy, ak pre každé kladné číslo $\varepsilon$ existuje také prirodzené číslo $N(\varepsilon)$, že pre všetky prirodzené čísla $n > N(\varepsilon)$ a každé prirodzené číslo $p$ platí

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Veta 5.** Ak postupnosť (1) je konvergentná, potom aj každá vybraná postupnosť z postupnosti (1) je konvergentná a má rovnakú limitu ako postupnosť (1).

**Veta 6.** Z každej ohraničenej postupnosti možno utvoriť vybranú postupnosť, ktorá je konvergentná.

**Veta 7.** Nech postupnosť (1) je konvergentná, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\alpha$ je reálne číslo. Potom postupnosti $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti a platí

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a. \tag{3}$$

**Veta 8.** Nech postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti. Potom aj postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné a platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{6}$$

Ak $b_n \neq 0$ pre všetky prirodzené čísla $n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, potom aj postupnosť $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{7}$$

**Veta 9.** Ak postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné a pre skoro všetky členy plat $a_n \leqq b_n$, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{8}$$

**Veta 10.** Nech postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné, majú rovnakú limitu $a$ a pre skoro všetky členy postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n \leqq b_n \leqq c_n$. Potom aj postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a jej limita je číslo $a$.

**Veta 11.** Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 0 a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tak postupnosť $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 0.

**Veta 12.**

$$\lim_{n\to\infty} c = c, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{9}$$

Postupnosť $\{aq^n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva *geometrickou postupnosťou*.

**Veta 13.** Geometrická postupnosť je konvergentná

1. ak $a = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$; (10)

2. ak $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$; (11)

3. ak $q = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = a$. (12)

**Veta 14.** Postupnosť $\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ohraničená postupnosť a jej limita sa označuje znakom e. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,28\ \ldots. \tag{13}$$

**Mocnina s reálnym exponentom.** Nech $\alpha$ je reálne číslo a $a > 0$. Nech je $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ľubovoľná postupnosť racionálnych čísiel, ktorá má limitu $\alpha$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\alpha}. \tag{14}$$

Keď $\alpha > 0$, $a = 0$, potom platí

$$a^{\alpha} = 0. \tag{15}$$

**Veta 15.** Nech $\alpha$ je číslo a nech postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots\}$ má limitu číslo $a$, pričom sú definované mocniny $a^{\alpha}$, $a_n^{\alpha}$ pre každé prirodzené číslo $n$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha} = a^{\alpha}. \tag{16}$$

**Veta 16.** Nech $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, ktorá má limitu číslo $\alpha$ a nech $a > 0$; potom platí

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^{\alpha}. \tag{17}$$

**Veta 17.** Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čísiel, pre ktoré platí $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Nech je mocnina $(1 + 1/a_n)^{a_n}$ definovaná pre každé prirodzené číslo $n$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e. \tag{18}$$

**Nevlastná limita.** Postupnosť má nevlastnú limitu $\infty$ $[-\infty]$ vtedy, ak pre každé číslo $A$ sú skoro všetky členy postupnosti väčšie [menšie] ako $A$, čiže existuje také prirodzené číslo $N(A)$, že pre všetky prirodzené čísla $n > N(A)$ platí $a_n > A$, $[a_n < A]$.

Ak postupnosť má nevlastnú limitu, píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad [\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty].$$

**Veta 18.** Nech $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ a $a_n \neq 0$ pre každé prirodzené číslo $n$, potom postupnosť $\{1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n, \ldots\}$ má limitu 0.

**Veta 19.** Ak postupnosť (1) má skoro všetky členy kladné [záporné] a postupnosť $\{1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n, \ldots\}$ má limitu 0, tak postupnosť (1) má nevlastnú limitu $\infty$ $[-\infty]$.

Často je daná postupnosť, o ktorej nevieme, či je konvergentná alebo divergentná a máme nájsť jej limitu, ak existuje. V tomto prípade predpokladáme, že limita existuje a použitím viet 1 až 19 a vhodnými úpravami sa ju snažíme vypočítať. Ak takýmto spôsobom nájdeme limitu, náš predpoklad o jej existencii bol správny a použitie viet 1 až 19 bolo oprávnené, čiže daná postupnosť je konvergentná.

**Príklad 1.** Dokážme, že postupnosť $\{1/2, 2/3, \ldots, n/(n+1), \ldots\}$ je konvergentná a má limitu 1. Pre $\varepsilon = 0{,}001$ nájdime číslo $N(\varepsilon)$.

*Riešenie.* Máme ukázať, že ku každému číslu $\varepsilon > 0$, existuje také $N(\varepsilon)$, že pre všetky $n > N(\varepsilon)$ je

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

čiže

$$\left|\frac{n - n - 1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \tag{19}$$

Číslo $N(\varepsilon)$ nájdeme k danému $\varepsilon$ tak, že rozriešime nerovnosť (19). Máme

$$\frac{1}{\varepsilon} < n + 1,$$

čiže

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \tag{20}$$

Pretože $N(\varepsilon)$ je prirodzené číslo, položme

$$N(\varepsilon) = E(1/\varepsilon - 1), \quad \text{ak} \quad 1/\varepsilon - 1 \geqq 1$$

a

$$N(\varepsilon) = 1, \quad \text{ak} \quad 1/\varepsilon - 1 < 1.$$

Vtedy pre každé $n > N(\varepsilon)$ je splnená nerovnosť (20), a teda aj (19), čiže daná postupnosť je konvergentná a má limitu 1.

Pre $\varepsilon = 0{,}001$ je

$$E(1/\varepsilon - 1) = E(1\,000 - 1) = 999,$$

a

$$N(\varepsilon) = 999.$$

**Príklad 2.** Dokážme, že postupnosť $\{3/4, 9/14, 19/30, \ldots, (2n^2 + 1)/(3n^2 + n), \ldots\}$ je konvergentná a nájdime jej limitu.

*Riešenie.* Upravíme čitateľa aj menovateľa zlomku $(2n^2 + 1)/(3n^2 + n)$ delením $n^2$ a použijeme vetu o limite podielu postupností (7) bez toho, žeby sme vedeli, či limita menovateľa je rôzna od nuly. Dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 1/n^2}{3 + 1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2 + 1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} (3 + 1/n)}.$$

V ďalšom texte použijeme vzťah (4) o limite súčtu postupností a vety 12 a 15. Máme

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = \frac{2 + (\lim\limits_{n\to\infty} 1/n)^2}{3 + 0} = \frac{2 + 0^2}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$

Pretože všetky limity, ktoré sa pri výpočte vyskytli, existujú a limita menovateľa je rôzna od nuly, výpočet je správny. Daná postupnosť je konvergentná a jej limita je 2/3.

**Príklad 3.** Nájdime limitu postupnosti $\{(2^n + 3)/(1 - 4\,.\,2^n)\}_{n=1}^{\infty}$, ak táto postupnosť konverguje.

*Riešenie.* Upravíme čitateľa aj menovateľa zlomku $(2^n + 3)/(1 - 4\,.\,2^n)$ delením $2^n$ a použijeme vzťahy (7), (3), (4), (5), (6). Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3}{1 - 4\,.\,2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3/2^n}{1/2^n - 4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 3 \lim\limits_{n\to\infty} (1/2)^n}{\lim\limits_{n\to\infty} (1/2)^n - \lim\limits_{n\to\infty} 4}.$$

Pretože postupnosť $\{(1/2)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť a $|q| = 1/2 < 1$, podľa vety 13 platí

$$\lim_{n\to\infty} (1/2)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3}{1 - 4\,.\,2^n} = \frac{1 + 3\,.\,0}{0 - 4} = -\frac{1}{4}.$$

Pretože všetky limity, ktoré sa pri výpočte vyskytli, existujú a limita menovateľa je rôzna od nuly, je tento postup počítania danej limity správny. Daná postupnosť je konvergentná a jej limita je $-1/4$.

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n}{3n - 1}.$$

*Riešenie.* Pretože pre každé prirodzené číslo $n$ platí

$$-1 \leq \sin n \leq 1,$$

máme

$$\frac{2n-1}{3n-1} \leq \frac{2n + \sin n}{3n - 1} \leq \frac{2n+1}{3n-1},$$

pre $n = 1, 2, 3, \dots$. Postupnosti $\{(2n-1)/(3n-1)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(2n+1)/(3n-1)\}_{n=1}^{\infty}$ sú však konvergentné a ich limity sú rovnaké.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 1/n}{3 - 1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 1/n}{3 - 1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Podľa vety 10 je aj daná postupnosť konvergentná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n}{3n - 1} = \frac{2}{3}.$$

**Príklad 5.** Dokážme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

*Riešenie.* Daná postupnosť je nerastúca a zdola ohraničená, pretože platí

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2n} \leq a_n$$

a

$$a_n > 0$$

pre každé prirodzené číslo $n$. Preto podľa vety 3 je táto postupnosť konvergentná. Ak $A$ je jej limita, z vety 9 vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = A \geq 0.$$

Uvažujme vybranú postupnosť $\{a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots\}$ z danej postupnosti. Pre túto vybranú postupnosť podľa vety 5 je

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^{2n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \cdot A \cdot 0 = 0,$$

pričom sme použili vzťah (11).

Tým sme dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} n/2^n = 0$.

**Príklad 6.** Dokážme, že postupnosť

$$\left\{\frac{n}{2} + \frac{1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

má nevlastnú limitu.

*Riešenie.* Dokážme, že $\lim_{n\to\infty} (n/2 + 1/3) = \infty$. To znamená, že máme ku každému číslu $A$ nájsť také prirodzené číslo $N(A)$, že pre všetky prirodzené čísla $n > N(A)$ je $n/2 + 1/3 > A$, čiže $n > 2A - 2/3$.

Položme $N(A) = E(2|A|) + 1$. Pre všetky prirodzené čísla $n > N(A)$ platí $n > E(2|A|) + 1 > 2|A| \geq 2A > 2A - 2/3$, čo bolo treba dokázať. Platí teda $\lim_{n\to\infty} (n/2 + 1/3) = \infty$.

**Príklad 7.** Ukážme, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{2n + 3} = \infty.$$

*Riešenie.* Pre všetky členy danej postupnosti platí $(n^2 + 1)/(2n + 3) > 0$. Uvažujme o postupnosti $\{1/a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(2n + 3)/(n^2 + 1)\}_{n=1}^{\infty}$. Podobne ako v príklade 3 dostávame:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 3}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n + 3/n^2}{1 + 1/n^2} = \frac{2 \lim_{n\to\infty} 1/n + 3 (\lim_{n\to\infty} 1/n)^2}{\lim_{n\to\infty} 1 + (\lim_{n\to\infty} 1/n)^2} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2}{1 + 0^2} = 0.$$

Podľa vety 19 je $\lim_{n\to\infty} (n^2 + 1)/(2n + 3) = \infty$.

**98.** Funkcia $f$ je definovaná na množine prirodzených čísiel. Vypočítajte $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ak

a) $f(n) = (1 + n)^n$; b) $f(n) = n!$.

**99.** Napíšte prvých päť členov postupnosti, ktorej $n$-tý člen je:

a) $a_n = 2$;
b) $a_n = 1/3^n$;
c) $a_n = (1 - \cos n\pi)/2$;
d) $a_n = (3n + 1)/(2n - 5)$;
e) $a_n = n^{1/2}$;
f) $a_n = E(1/n)$;
g) $a_n = (2 - 1/n)^n$;
h) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
i) $a_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)/n^2$.

**100.** Nájdite $n$-tý člen postupnosti:

a) $\{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots\}$;
b) $\{2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, \ldots\}$;
c) $\{2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, \ldots\}$;
d) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$;
e) $\{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$

za predpokladu, že aj ďalšie členy postupnosti dostaneme podľa toho istého pravidla.

**101.** Nájdite všeobecný člen postupnosti danej rekurentne a napíšte jej prvých päť členov:

a) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = a_n + 1$;
b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$;
c) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$;
d) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (členy tejto postupnosti sa nazývajú Fibonacciho čísla).

**102.** Aritmetická postupnosť s $n$-tým členom $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, kde $a_1$ a $d$ sú dané čísla, je určená takto:

a) $a_1 = 3$, $d = -1$; b) $a_4 = 3$, $a_{10} = 12$.

Vypočítajte $a_n$.

**103.** Napíšte prvých desať členov geometrickej postupnosti, ak
a) $a_3 = 25$, $q = -1/5$; b) $a_5 = 30$, $a_6 = -3$.

**104.** Vyjadrite člen $a_{n+1}$ pomocou $a_n$ alebo $a_n$ a $a_{n-1}$ v postupnosti:
a) $\{1 - n\}_{n=1}^{\infty}$; c) $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.
b) $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$;

**105.** Zistite, ktoré postupnosti v úlohách 99 a 100 sú: a) rastúce; b) klesajúce; c) nerastúce; d) neklesajúce; e) zdola ohraničené; f) zhora ohraničené; g) ohraničené.

**106.** Z postupností uvedených v úlohách 99 a 100 utvorte vybrané postupnosti, ak pre postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
a) $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$; c) $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$.
b) $\{2n - 1\}_{n=1}^{\infty}$.

**107.** Daná je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážte priamo z definície limity postupnosti, že táto postupnosť má limitu $A$ a nájdite pre dané číslo $\varepsilon$ príslušné $N(\varepsilon)$.
a) $a_n = (n - 1)/(n + 1)$. $A = 1$, $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 10^{-6}$;
b) $a_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$, $A = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}001$;
c) $\{0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; \ldots\}$ $A = 1$, $\varepsilon = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}02$;
d) $a_n = (2^n + 1)/2^n$, $A = 1$, $\varepsilon = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}02$.

**108.** Pomocou Bolzano—Cauchyho vety dokážte, že postupnosť $\{n/(n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a nájdite príslušné $N(\varepsilon)$ pre
a) $\varepsilon = 1/10$; b) $\varepsilon = 3/100$.

**109.** Dokážte, že číslo $b$ nie je limitou danej postupnosti.
a) $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$, $b = 10^{-7}$; c) $\{(n + 2)/(3 + 4n)\}_{n=1}^{\infty}$, $b = 99/400$;
b) $\{1/3^n\}_{n=1}^{\infty}$, $b = 10^{-100}$; d) $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $b = 1 + 10^{-12}$.

**110.** Pomocou vety o vybranej postupnosti zistite, či postupnosť:
a) $\{1/2n\}_{n=1}^{\infty}$; d) $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$;
b) $\{1/4^n\}_{n=1}^{\infty}$; e) $\{1/n^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$;
c) $\{1 + \cos n\pi\}_{n=1}^{\infty}$; f) $\{(-1)^{n+3}\}_{n=1}^{\infty}$.
konverguje alebo diverguje a ak je konvergentná, nájdite jej limitu.

**111.** Dokážte, že postupnosť $\{(7 - n)/(2n + 3)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a nájdite jej limitu. Zistite, akú limitu majú postupnosti:

a) $\left\{\dfrac{7 - (3n + 1)}{2(3n + 1) + 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$; b) $\left\{\dfrac{7 - 3^n}{2 \cdot 3^n + 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**112.** Dokážte, že uvedené postupnosti sú monotónne a ohraničené a nájdite ich limity:

a) $\{2 - 5/2n\}_{n=1}^{\infty}$; c) $\{\sqrt[n]{2 + 1/n}\}_{n=1}^{\infty}$;
b) $\{\sqrt[n]{3}\}_{n=1}^{\infty}$; d) $\{(n^2 + 2)/(4n^2 + 1)\}_{n=1}^{\infty}$.

**113.** Dokážte, že postupnosť $\{0{,}6; 0{,}66; 0{,}666; \ldots\}$ má limitu číslo 2/3.

**114.** Nájdite limitu postupnosti:

a) $\{2 + (\cos n)/n\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{(\sin n)/2^n\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{\sqrt{2} + [n - E(\sqrt{2}n)]/n\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\{a_n/n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n$ je $n$-tá cifra čísla $\pi$.

**115.** Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a pre každé prirodzené číslo $n$ platí nerovnosť:

a) $a_{3n} \leqq 4$;

b) $1 \leqq a_{n+100}$;

c) $2 - 3^{-n} \leqq a_n \leqq 2 + 1/n^2$.

Zistite, čo platí pre $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

**116.** Dokážte, že postupnosť $\{E(nx)/n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu číslo $x$.

**117.** Dané sú postupnosti $\{(3 + n)/(2 - n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(3n^2 - 4)/(n^2 + 1)\}_{n=1}^{\infty}$. Napíšte súčet, rozdiel, súčin a podiel týchto postupností a vypočítajte ich limity, ak existujú.

**118.** Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a$, nájdite limitu postupnosti:

a) $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{3a_n^2 + 6a_n - 2\}_{n=1}^{\infty}$.

**119.** Vypočítajte limitu postupnosti:

a) $\{3 + 4/3n\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{\sqrt[n]{4} - 16\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{(7n + 5)/(4 - 2n)\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\{(2 + 3/n)^3\}_{n=1}^{\infty}$;

e) $\{(3 - 5/4n)^{100}\}_{n=1}^{\infty}$;

f) $\{(5n^2 - 4n + 7)/(17n^2 + n - 6)\}_{n=1}^{\infty}$;

g) $\{(n + 1)(n + 2)(n + 3)/(n^4 + 1)\}_{n=1}^{\infty}$;

h) $\{\sqrt{n^2 + 1}/(n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$;

i) $\{(4n^2 + \sqrt{n^3 + 1})/(n^2 + n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$;

j) $\{(5 - 2^{-n} + 4 . 5^{-n})/(3n + 2 + n3^{-n})\}_{n=1}^{\infty}$;

k) $\left\{\frac{2n^2 + 1}{3 - n^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3n - 1}{5n^2 + 4}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

**120.** Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} [(1 + 3/n)(2 - 4/n)^2(5/n^2 - 1)]$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{(6n+2)/(3n-4)}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \log_a [3n/(6n + 5)]$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5n}$;

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^7}$.

**121.** Vypočítajte limitu postupnosti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{4}{n^2} - \frac{10}{9n - 3\sqrt{n}} \sin 2n\right]$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[4n]{\frac{(n + 2)(2/9 + 1/3n)}{n + 1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{2-[(n+1)/(n-1)]n}$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^7 - 1} + \sqrt[4]{n^3 + 1}}{\sqrt[5]{n^3 + 4} + \sqrt{n^3}}$.

**122.** Vypočítajte limitu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [1 + 1/(n + 5)]^{n+5}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/2n)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n^2)^{n^2-1}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} [(n + 2)/n]^{n/2}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} [(3n - 2)/(1 + 3n)]^{5n-3}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} [1 + 1/n]^{1/n}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} (n!/n^n)$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right]$.

**123.** Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n + 2} - \sqrt{n})$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{n}(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n})]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{(n + a)(n + b)} - n]$.

**124.** Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n + 2} - \dfrac{n}{2}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 2 + 3 - \ldots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2}{n^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n^2 + 2/n^2 + \ldots + n/n^2)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}$, kde $x$ je reálne číslo.

**125.** Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^n}$, $a > 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}$, $a > 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1 + a)(1 + a^2)\ldots(1 + a^n)}$, $a > 0$.

**126.** Nech $a_1 > b_1 > 0$. Ďalšie členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú dané rekurentnými vzorcami $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Dokážte, že obe postupnosti sú konvergentné a majú tú istú limitu.

**127.** Zistite, ktoré z nasledujúcich divergentných postupností majú nevlastnú limitu:

a) $\{3 + n^2\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{(n^3 + 2n)/(3n^2 - 1)\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{(1 - \sqrt{n})^2\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\{1 + (-1)^n\, n\}_{n=1}^{\infty}$;

e) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$;

f) $\{3^n - n\}_{n=1}^{\infty}$;

g) $\{1 + 3/2 \cos n\pi\}_{n=1}^{\infty}$;

h) $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$, kde $k$ je prirodzené číslo.

**128.** Vypočítajte:

a) $\lim_{n \to \infty} (n^4 - 2n^2 + 3)$;

b) $\lim_{n \to \infty} [(n^4 - 5n)/(n^2 - 3n + 1)]$;

c) $\lim_{n \to \infty} [n^3(1 - 6/n + 4/n^3)]$;

d) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$;

e) $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n + 1}{n - 1}\right)^n$.

**129.** Dokážte, že uvedené divergentné postupnosti nemajú nevlastnú limitu a nájdite k nim vybranú postupnosť, ktorá má vlastnú alebo nevlastnú limitu:

a) $\left\{\dfrac{n^3 \cos \pi n}{n^2 + 2n - 1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{(-2)^n + 2^n\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\{n^{(-1)^n}\}_{n=1}^{\infty}$.

**130.** Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentná. Zistite, aké sú postupnosti a) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$; b) $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$; c) $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností.

**131.** Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú divergentné. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady.

**132.** Nech platí $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = 0$. Čo možno tvrdiť o limitách postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Platí $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ alebo $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$? Uveďte príklad divergentných postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = 0$.

**133.** Daný je rovnostranný trojuholník so stranou $a$. Z jeho troch výšok je zostrojený nový rovnostranný trojuholník, z výšok tohto ďalší atď. Vypočítajte limitu súčtu obsahov týchto trojuholníkov, keď ich počet $n$ rastie do nekonečna.

**134.** Do kruhu s polomerom $r$ je vpísaný štvorec. Do tohto štvorca je vpísaný kruh, do neho štvorec atď. Nájdite limitu súčtu obsahov všetkých kruhov a limitu súčtu obsahov všetkých štvorcov.

**135.** Rotačné teleso sa skladá z valcov, pričom polomer $r$ prvého valca je 10 cm a jeho výška $h = 1$ cm. Rozmery každého nasledujúceho valca sú dvakrát menšie ako rozmery predchádzajúceho. Nájdite výšku a objem tohto telesa.

**136.** V polárnom súradnicovom systéme sú dané body: $A_0 = (a, 0)$; $A_1 = (a \cos \alpha, \alpha)$; $A_2 = (a \cos^2 2\alpha, \alpha)$, ..., $A_n = (a \cos^n \alpha, n\alpha)$ atď., kde $a > 0$ a $0 < \alpha < \pi/2$. Vypočítajte dĺžku lomenej krivky $A_0 A_1 \ldots A_n \ldots$.

**137.** Lopta po dopade na rovinu v bode $P_0$ sa odráža pod uhlom $\alpha_0$ rýchlosťou $v_0$, dopadá do bodu $P_1$ a znova sa odrazí pod uhlom $\alpha_1$ rýchlosťou $v_1$ a dopadá do bodu $P_2$ atď. Pri každom odraze stratí časť svojej kinetickej energie, čím rýchlosť lopty klesá. Vypočítajte vzdialenosť lopty od bodu $P_0$ po bod, v ktorom lopta zastane, ak $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha$ a $v_1/v_0 = v_2/v_1 = \ldots = v_{n+1}/v_n = \ldots = c < 1$.

**138.** Vypočítajte, aký najväčší prúd možno dosiahnuť batériou z $n$ článkov s ems $E$ a vnútorným odporom $r$, ak články sú spojené: a) za sebou, b) vedľa seba, pričom odpor vedenia je $R$ a počet článkov sa neobmedzene zväčšuje.

**139.** Z jedného litra vodného roztoku 60 % alkoholu odlejeme 1/3 l do 1 l destilovanej vody. Pri rozmiešaní odlejeme späť 1/3 l tohto roztoku do pôvodného roztoku. Po rozmiešaní opäť odlejeme 1/3 l do nádoby, kde bola pôvodne voda a späť 1/3 l do roztoku, ktorý pôvodne obsahoval lieh atď. Vypočítajte: a) aká bude koncentrácia oboch roztokov po $n$-násobnom opakovaní tohto postupu; b) aká bude výsledná koncentrácia oboch roztokov.

**140.** Na obvode kruhu s polomerom $r$ je nanesená odporová hmota tak, že na oblúku $A_1A_2$ so stredovým uhlom $\alpha_0 = 3\pi/4$ je celkový odpor $R_0$, na oblúku $A_2A_3$ so stredovým uhlom $\alpha_1 = \alpha_0/2$ sa pomer odporov oblúka $A_2A_3$ a $A_1A_2$ na jeden cm dĺžky rovná 3, atď.... až na oblúku $A_nA_{n+1}$ so stredovým uhlom $\alpha_n = \alpha_{n-1}/2$ sa pomer odporov oblúka $A_nA_{n+1}$ a $A_1A_2$ na jeden cm dĺžky rovná $2n - 1$. Vypočítajte, aká je celková dĺžka oblúka, na ktorom je nanesená odporová hmota a aký je celkový odpor.

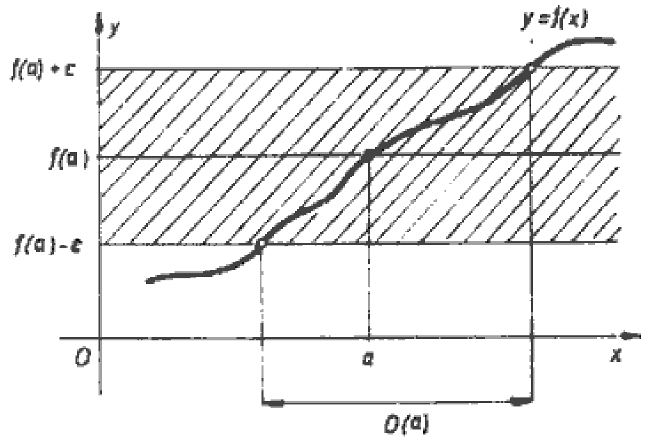
## 1,4. Spojitosť funkcie

Majme funkciu $f$, ktorá je definovaná v okolí daného čísla $a$.

Hovoríme, že funkcia $f$ je *v čísle a spojitá*, ak postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n), \ldots\}$ konverguje k číslu $f(a)$ pre každú postupnosť $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, ktorá konverguje k číslu $a$. Pritom každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je z oboru definície funkcie $f$.

Ak v definícii spojitosti žiadame ešte, aby pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platilo $a_n < a$ [$a_n > a$], hovoríme o *spojitosti zľava* [*spojitosti sprava*] funkcie $f$ v čísle $a$.

Body, v ktorých funkcia nie je spojitá, nazývame *bodmi nespojitosti*.




Obr. 17

Hovoríme, že funkcia $f$ je *spojitá na intervale J*, ak je spojitá v každom vnútornom bode intervalu $J$, sprava spojitá v ľavom koncovom bode intervalu $J$, ak ten bod patrí do $J$ a zľava spojitá v pravom koncovom bode intervalu $J$, ak ten bod patrí do $J$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Funkcia $f$ je v čísle $a$ spojitá vtedy a len vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také okolie čísla $a$, že pre každé číslo $x$ z tohto okolia je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, čiže $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ (pozri *obr. 17*).

Poznámka 1. Ak namiesto okolia čísla $a$ vo vete 1 žiadame pravé [ľavé] okolie čísla $a$, t. j. interval $(a, a + \delta)$ [$(a - \delta, a)$], kde $\delta > 0$, potom je funkcia $f$ v čísle $a$ spojitá sprava [zľava] (pozri *obr. 18*).

**Veta 2.** Funkcia $f$ je spojitá v čísle $a$ vtedy a len vtedy, keď je v ňom spojitá sprava aj zľava.

**Veta 3.** Ak sú funkcie $f$ a $g$ spojité v čísle $a$, sú v ňom spojité aj funkcie $|f|$, $kf$ ($k$ je konštanta), $f + g$, $f - g$, $fg$. Ak $g(a) \neq 0$, potom je v čísle $a$ spojitá aj funkcia $f/g$.

Obdobná veta platí pre spojitosť sprava a zľava v čísle $a$.

**Veta 4.** Ak funkcia $g$ je spojitá v čísle $a$, pričom $b = g(a)$ a ak funkcia $f$ je spojitá v čísle $b$, potom zložená funkcia $f(g)$ je spojitá v čísle $a$.

**Veta 5.** Ak funkcia $f$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$, tak je na $\langle a, b\rangle$ ohraničená.

**Veta 6.** Ak funkcia $f$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, tak má na intervale $\langle a, b\rangle$ maximum a minimum.

**Veta 7.** Ak funkcia $f$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) f(b) < 0$, tak existuje číslo $c \in (a, b)$, v ktorom je $f(c) = 0$.

**Veta 8.** Nech $f$ je funkcia spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a pre číslo $d$ nech platí $f(a) < d < f(b)$ [$f(b) < d < f(a)$], potom existuje také číslo $x_0 \in (a, b)$, že platí $f(x_0) = d$.

**Veta 9.** Ak $f$ je rýdzo monotónna a spojitá funkcia na intervale $J$ a ak $J_1$ je obraz intervalu $J$ pri funkcii $f$, potom inverzná funkcia $f_{-1}$ je spojitá na intervale $J_1$.

**Poznámka 2.** Všetky funkcie uvedené v článku 1,2 sú spojité v každom bóde svojho oboru definície.

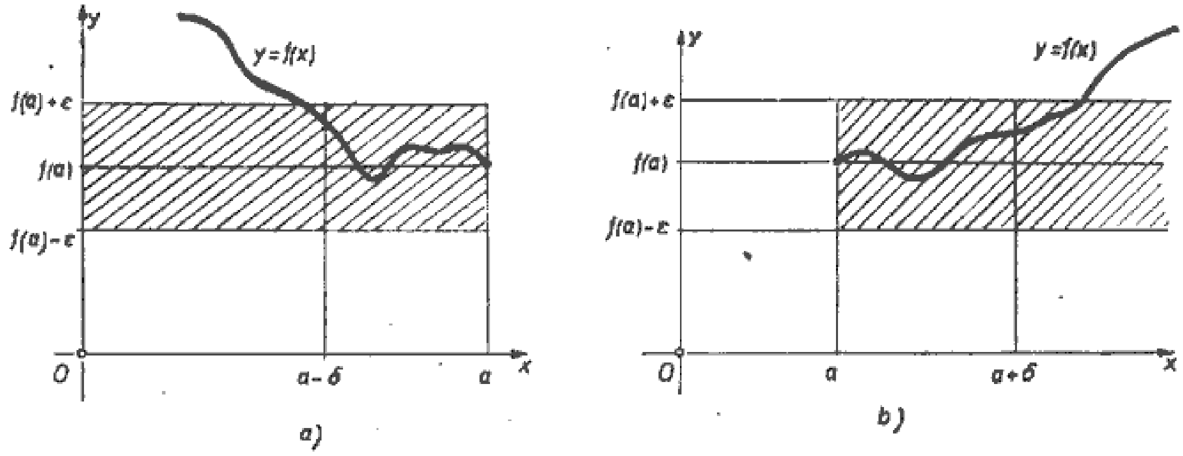
**Príklad 1.** Dokážme, že funkcia $y = x^2$ je v každom čísle spojitá.

*Riešenie.* Nech $a$ je ľubovoľné číslo. Zvoľme ľubovoľnú postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, ktorá konverguje k číslu $a$. Zostrojme k nej postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots\} = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2, \ldots\}$. Táto postupnosť (pozri vetu 15 z čl. 1,3) konverguje k číslu $a^2$, čo je $f(a)$. Podľa definície spojitosti je teda funkcia $y = x^2$ spojitá v každom čísle $a$.

**Príklad 2.** Dokážme, že funkcia

$$y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$.




*Obr. 18*

*Riešenie.* Dokážme najprv, že daná funkcia je spojitá v bode $x = 0$. Podľa vety 1 treba dokázať, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také okolie čísla 0, že pre každé číslo $x$ z tohto okolia je

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Keďže platí

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \tag{2}$$

za okolie čísla 0 zvolíme interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Potom pre všetky čísla $x$ z tohto okolia platí $|x| < \varepsilon$ a vzhľadom na vzťah (2) pre každé číslo $x$ tohto okolia platí aj nerovnosť (1). Tým sme dokázali, že daná funkcia je v bode 0 spojitá.

Pretože funkcie $f(x) = x$, $g(x) = \sin(1/x)$ sú pre $x \neq 0$ spojité, podľa vety 3 a 4 a poznámky 2 je funkcia $x \sin(1/x)$ pre každé $x \neq 0$ spojitá. Tým sme dokázali, že daná funkcia je na celom intervale $(-\infty, \infty)$ spojitá.

**Príklad 3.** Dokážme, že rovnica

$$x^3 + x + 1 = 0$$

má v intervale $(-1, 0)$ práve jeden reálny koreň.

*Riešenie.* Uvažujme o funkcii $f(x) = x^3 + x + 1$, ktorá je spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$. Keďže $f(-1) < 0$ a $f(0) > 0$, platí $f(-1) f(0) < 0$ a podľa vety 7 existuje číslo $c \in (-1, 0)$ také, že $f(c) = 0$, teda číslo $c$ je koreňom danej rovnice.

Pretože funkcia $f(x) = x^3 + x + 1$ je rastúca, nemôže existovať číslo rôzne od $c$, v ktorom by sa hodnota funkcie $f$ rovnala 0, teda číslo $c$ je jediným koreňom danej rovnice.

**141.** Funkcia $f$ je definovaná na intervale $(a, b)$. V čísle $x_0$ z tohto intervalu platí:
a) ku každému číslu $\delta > 0$ existuje také číslo $\varepsilon > 0$, že pre všetky čísla $x$, pre ktoré platí $|x - x_0| < \delta$, je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
b) ku každému číslu $\delta > 0$ existuje také číslo $\varepsilon > 0$, že ak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, potom je $|x - x_0| < \delta$;
c) ku každému číslu $\delta > 0$ existuje také číslo $\varepsilon > 0$, že pre všetky $x$, pre ktoré platí $|x - x_0| < \varepsilon$, je $|f(x) - f(x_0)| < \delta$.
Zistite, či funkcia $f$ je v týchto troch prípadoch spojitá a aká vlastnosť funkcie $f$ je daná týmito nerovnosťami.

**142.** Dokážte priamo z definície spojitosti funkcie, ako aj podľa vety 1, že funkcia $f$ je v čísle $a$ spojitá, ak
a) $f(x) = x/(x - 1)$, $a = 0$; b) $f(x) = E(x) - x$, $a = 1/2$.
V oboch prípadoch k danému $\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}001$; $10^{-6}$ nájdite príslušné $\delta$.

**143.** Pomocou vety 1 dokážte, že funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$, ak
a) $f(x) = |x|$ a $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}(x - 1)$, kde $x_0$ je ľubovoľné číslo rôzne od 0.

V úlohách 144 až 151 zistite, kde je daná funkcia spojitá:

**144.** a) $y = x + 1$; c) $y = x^3 + 5x^2 + 6x + 1$;
b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; d) $y = \dfrac{x^2 + 4x - 7}{x^3 + 5x^2 + 6x}$.

**145.** a) $y = E(x)$; d) $y = 1 + (-1)^{E(x)}$;
b) $y = x - E(x)$; e) $y = xE(x)$.
c) $y = E(x) + E(-x)$;
Znázornite aj grafy týchto funkcií.

**146.** a) $y = \dfrac{\cos x}{|x|}$; d) $y = \dfrac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;
b) $y = \dfrac{1}{\sin x}$; e) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.
c) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$;

**147.** a) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{pre } x \neq -3, \\ -6 & \text{pre } x = -3; \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0; \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{|x| - x} & \text{pre } x < 0, \\ x & \text{pre } x \geqq 0; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

**148.** a) $y = \operatorname{sgn} x$;  c) $y = x/\ln x$;
b) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$;  d) $y = \operatorname{sgn}[\cos(\pi/x)]$.

**149.** a) $y = \sqrt{9 - x}$;  b) $y = \dfrac{1 - 2e^{x^2}}{1 - e^{x^2}}$.

**150.** a) $y = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pre } x \geq 0, \\ 3 & \text{pre } x < 0; \end{cases}$  b) $y = \begin{cases} E(1/x) & \text{pre } x > 0, \\ (-1)^{E(x)} & \text{pre } x < 0. \end{cases}$

**151.** a) $y = \chi(x)$;  b) $y = (-1)^{\chi(x) + \chi(1-x)}$,
kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkcia.

**152.** Daná je funkcia $f$. Zvoľte $f(0)$ tak, aby funkcia bola spojitá v čísle 0, ak
a) $f(x) = [(x + 2)^2 - 4]/x$;  c) $f(x) = (\sin x)/x$;
b) $f(x) = x^2 E(1/x)$;  d) $f(x) = (\sqrt[4]{1 + x} - 1)/x$.

**153.** Nájdite číslo $a$ tak, aby funkcia $f$ bola spojitá, ak
a) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{pre } x < 1, \\ 2 - x/a & \text{pre } x \geq 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{pre } x < 0, \\ a - x & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

**154.** Nech funkcia $f$ je v čísle $a$ spojitá a funkcia $g$ v čísle $a$ nespojitá. Zistite, či nasledujúce funkcie sú nespojité v čísle $a$:
a) $f + g$;  c) $(-1)^{g(f)}$;  e) $g(f)$.
b) $fg$;  d) $f(g)$;

**155.** Nech funkcie $f$ a $g$ sú v čísle $a$ nespojité. Zistite, či nasledujúce funkcie sú nespojité v čísle $a$ a uveďte konkrétne príklady:
a) $f + g$;  c) $f(g)$;
b) $fg$;  d) $|f(g)|$.

**156.** Zistite, kde sú spojité zložené funkcie $f(g)$ a $g(f)$, ak
a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x(1 - x^2)$;
b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + (\cos x)/2$;
c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = \operatorname{sgn}(1 - |x|)$;
d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = (-1)^{E(x)}$;
e) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x - E(x)$;
f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x & \text{pre } 1 < x < 2, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x & \text{pre racionálne } x, \\ 2 - x & \text{pre iracionálne } x. \end{cases}$

**157.** Dokážte, že funkcia
a) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ je spojitá zľava v bode $\sqrt{2}$;
b) $f(x) = x^a$, $a > 0$ je spojitá sprava v čísle 0.

**158.** Nech $f(x) = 1 - x^2$, $g(u) = \begin{cases} 2 & \text{pre} \quad u \geq 1, \\ 0 & \text{pre} \quad u < 1. \end{cases}$

Zistite, či zložená funkcia $g(f)$ je spojitá sprava alebo zľava v bode 0.

**159.** Dokážte, že ak funkcie $f$, $g$ sú spojité na intervale $J$, sú spojité na intervale $J$ aj funkcie $y = \min\,[f(x), g(x)]$, $y = \max\,[f(x), g(x)]$.

**160.** Zistite, či inverzná funkcia k funkcii $y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$ je spojitá.

**161.** Nájdite obraz intervalu $J$ pri funkcii $y = f(x)$, ak

a) $J = \langle 1, 11 \rangle$, $\quad y = x^2 + 4$; $\qquad$ c) $J = \langle -1, 10 \rangle$, $\quad y = \operatorname{sgn} x$.
b) $J = (-\infty, 1)$, $\quad y = 4/(x - 2)$;

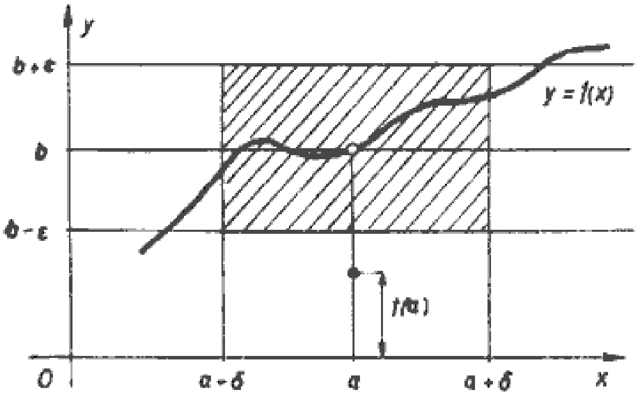
**162.** Nájdite obraz intervalu $J$ pri funkcii $f$, ak je dané:

a) $J = \langle \pi/4, 3\pi/2 \rangle$, $\quad f(x) = \sin 2x$;
b) $J = \langle 1, \infty \rangle$, $\quad f(x) = e^{-x} \operatorname{arccotg} x$;
c) $J = \langle 0, 1 \rangle$, $\quad f(x) = 2 + 3 \arcsin x$;
d) $J = (-10, 89)$, $\quad f(x) = \log (11 + x)$.

**163.** Dokážte, že daná rovnica má v intervale $J$ riešenie:

a) $x^3 - x - 1 = 0$, $\quad J = \langle 1, 2 \rangle$;
b) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = 0$, $\quad J = \langle -1{,}1; -1 \rangle$;
c) $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 7x - 8 = 0$, $\quad J = \langle 1{,}3; 1{,}4 \rangle$.

**164.** Na základe vety 7 vypočítajte približnú hodnotu $\alpha_0$ koreňa $\alpha$ rovnice $x^4 - x - 1 = 0$ tak, aby $|\alpha - \alpha_0| < 0{,}05$.



*Obr. 19*

**165.** Zistite, či daná rovnica má v uvažovanom intervale riešenie, ak

a) $x^3 - 6x^2 + 1/x + 5 = 0$, $\langle 1, 8 \rangle$;
b) $\cos x - kx = 0$, $k \neq 0$, $\langle -\pi, \pi \rangle$;
c) $e^x + x = 0$, $\quad \langle -1, 0 \rangle$;
d) $\ln x - 3 + x = 0$, $\quad \langle 1, e \rangle$.

Riešte úlohu aj graficky.

**166.** Zistite, či funkcia $f$ je ohraničená a či má maximum a minimum, ak

a) $f(x) = 1/x \quad$ pre $\quad x \in \langle 1, \infty)$;
b) $f(x) = \operatorname{tg} 2x \quad$ pre $\quad x \in \langle -\pi/8, \pi/8 \rangle$;
c) $f(x) = \begin{cases} -1/x^2 & \text{pre} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0. \end{cases}$

## 1,5. Limita funkcie

Majme funkciu $f$, ktorá je definovaná v okolí daného bodu $a$, pričom v samotnom bode $a$ prípadne nemusí byť definovaná.

Hovoríme, že číslo $b$ je *limitou* [že $\pm\infty$ je *nevlastnou limitou*] *funkcie $f$ v čísle $a$*, ak postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n), \ldots\}$ konverguje k číslu $b$ [nevlastne konverguje k $\pm\infty$] pre každú postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, ktorá konverguje k číslu $a$, pričom každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je z oboru definície funkcie $f$ a je rôzny od čísla $a$. Limitu funkcie v čísle $a$ označujeme takto

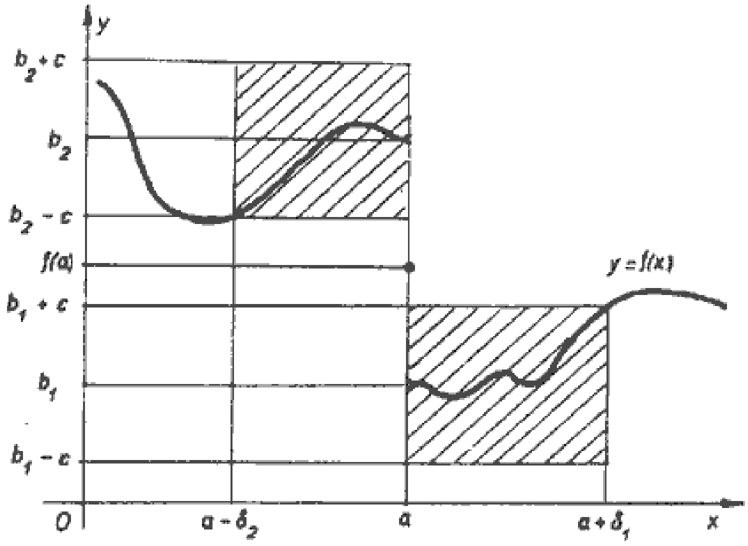
$$\lim_{x\to a} f(x) = b\ [\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty].$$

Ak v definícii limity [nevlastnej limity] žiadame ešte, aby pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platilo $a_n < a$, hovoríme o *limite* [*nevlastnej limite*] *zľava* a označujeme ju

$$\lim_{x\to a^-} f(x).$$

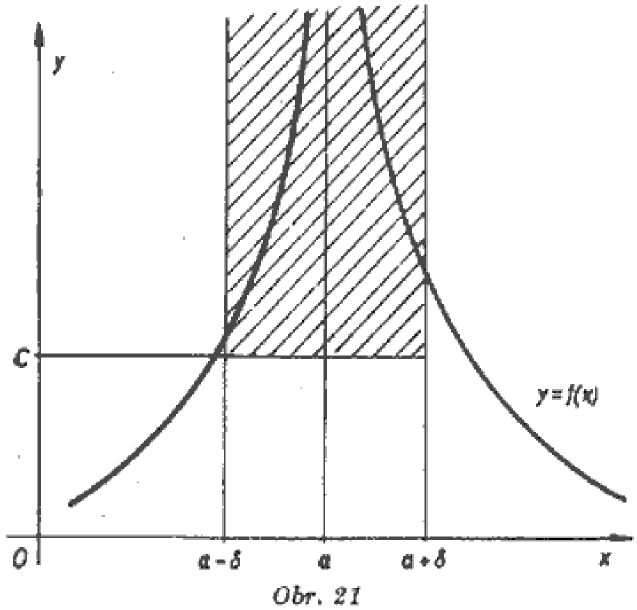
Ak v definícii limity [nevlastnej limity] žiadame ešte, aby pre každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platilo $a_n > a$, hovoríme o *limite* [*nevlastnej limite*] *sprava* a označujeme ju

$$\lim_{x\to a^+} f(x).$$




*Obr. 20*

Majme funkciu $f$, ktorá je definovaná na intervale $(k, \infty)$ [$(-\infty, k)$], *) kde $k$ je číslo. Hovoríme, že číslo $b$ je *limitou* [že $\pm\infty$ je *nevlastnou limitou*] *funkcie v* $\infty$, ak postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots\}$ konverguje k číslu $b$ [nevlastne konverguje $k$ $\pm\infty$] pre každú postupnosť $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, pre ktorú $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pričom každý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je z oboru definície funkcie $f$.




*Obr. 21*

Označujeme to

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Podobne sa definuje *limita funkcie $f$* v nevlastnom čísle $-\infty$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Funkcia $f$ má v čísle $a$ limitu $b$ vtedy a len vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta$ — okolie čísla $a$, že pre každé číslo $x \neq a$ z tohto okolia je $|f(x) - b| < \varepsilon$ (pozri *obr. 19*).

Ak vo vete 1 namiesto okolia čísla $a$ žiadame pravé [ľavé] okolie čísla $a$, t. j. interval $(a, a + \delta)$ [$(a - \delta, a)$], kde $\delta > 0$, potom veta platí pre limitu sprava [zľava] funkcie $f$ v čísle $a$ (pozri *obr. 20*, kde

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b_1, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b_2.$$

**Veta 2.** Funkcia $f$ má v čísle $a$ nevlastnú limitu $\infty$ [$-\infty$] vtedy a len vtedy, keď ku každému číslu $C$ existuje také okolie čísla $a$, že pre každé číslo $x \neq a$ z tohto okolia je $f(x) > C$ [$f(x) < C$] (pozri *obr. 21*).

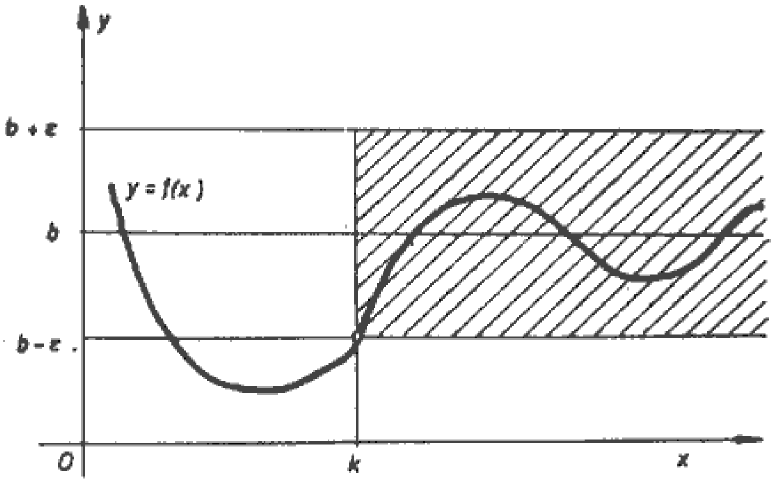
**Veta 3.** Funkcia $f$ má v nevlastnom čísle $\infty$ limitu $b$ vtedy a len vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také okolie $(k, \infty)$ nevlastného čísla $\infty$, že pre všetky $x$ z tohto okolia, t. j. pre všetky $x > k$ platí $|f(x) - b| < \varepsilon$ (pozri *obr. 22*).

*) Tieto intervaly nazývame *okolím nevlastného čísla* $\infty$ [$-\infty$].

Podobné tvrdenie platí pre limitu funkcie v nevlastnom čísle $-\infty$.

**Veta 4.** Funkcia $f$ má v nevlastnom čísle $\infty$ limitu $\infty$ $[-\infty]$ vtedy a len vtedy, ak ku každému číslu $M$ existuje také okolie $(k, \infty)$ nevlastného čísla $\infty$, že pre všetky $x$ z tohto okolia je $f(x) > M$ $[f(x) < M]$.

Podobné tvrdenie platí pre nevlastnú limitu funkcie $f$ v nevlastnom čísle $-\infty$.




*Obr. 22*

**Veta 5.** Funkcia $f$ je spojitá v bode $a$ vtedy a len vtedy, keď $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Podobná veta platí pre spojitosť funkcie zľava [sprava], iba namiesto limity funkcie $f$ v čísle $a$, treba vziať limitu zľava [sprava] funkcie $f$ v čísle $a$.

**Veta 6.** Ak funkcie $f$ a $g$ majú limity v čísle $a$, potom platí:

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)|; \tag{1}$$

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x), \quad \text{kde } c \text{ je číslo}; \tag{2}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x); \tag{3}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)]\, [\lim_{x \to a} g(x)]; \tag{4}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \text{ak } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0. \tag{5}$$

Analogické tvrdenia platia pre limity zľava, sprava a limity v nevlastných číslach.

**Veta 7.** Ak platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ a existuje také okolie čísla $a$, že pre každé číslo $x \neq a$ z tohto okolia je $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$, potom aj funkcia $g$ má v čísle $a$ limitu a platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

**Veta 8.** Ak funkcia $f$ má v čísle $a$ limitu 0 a ak funkcia $g$ je v istom okolí čísla $a$ ohraničená, potom funkcia $fg$ má v čísle $a$ limitu 0.

**Veta 9.** Nech je $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ a nech existuje také okolie čísla $a$, že pre každé číslo $x \neq a$ z tohto okolia je $g(x) > 0$. Potom platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

ak $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ alebo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty,$$

ak $\lim_{x\to a} f(x) < 0$.

Poznámka 1. Ak vo vete 9 namiesto okolia čísla $a$ žiadame ľavé [pravé] okolie čísla $a$, dostaneme podobné vety pre limitu zľava [sprava] funkcie $f$ v čísle $a$.

**Veta 10.** Nech $\lim_{x\to a} g(x) = b$ a $\lim_{u\to b} f(u) = k$. Nech ďalej existuje také $\delta$-okolie čísla $a$, že pre všetky čísla $x \neq a$ z tohto $\delta$-okolia bodu $a$ je $g(x) \neq b$. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = k.$$

**Veta 11.** Platí:

$$\lim_{x\to a} c = c \quad (a, c \text{ ľubovoľné čísla}); \tag{6}$$

$$\lim_{x\to a} x^k = a^k \quad (\text{pre každé číslo } a, \text{ v ktorom je mocninová funkcia } x^k \text{ spojitá}); \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty; \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \text{ je prirodzené číslo}); \tag{10}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a; \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad (a > 1), \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (a > 1). \tag{12}$$

**Príklad 1.** Dokážme, že $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$.

*Riešenie.* Zvoľme si ľubovoľnú postupnosť $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, ktorá konverguje k číslu 2, pričom $a_n \neq 2$ pre každé $n$. K nej zostrojená postupnosť $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n), \ldots\}$ je $a_1^3, a_2^3, a_3^3, \ldots, a_n^3, \ldots\}$ a podľa vety 15 z článku 1,3 konverguje k číslu $2^3 = 8$. Podľa definície limity funkcie teda platí

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8.$$

**Príklad 2.** Ukážme, že $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

*Riešenie.* Podľa vety 1 treba ukázať, že k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta$-okolie čísla 2, že pre každé $x \neq 2$ z tohto okolia je

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Pre $x \neq 2$ platí

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| = |x + 2 - 4| = |x - 2|.$$

Preto nerovnosť (13) je pre $x \neq 2$ ekvivalentná s nerovnosťou

$$|x - 2| < \varepsilon. \tag{14}$$

Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pre všetky čísla rôzne od 2 z tohto okolia $(2 - \delta, 2 + \delta)$ platí

$$0 < |x - 2| < \varepsilon,$$

čiže je splnená nerovnosť (14) a teda aj nerovnosť (13), čo sme mali dokázať.

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x + 2}{x - 2}.$$

*Riešenie.* Na základe vety 6 máme

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x + 2}{x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} (3x + 2)}{\lim\limits_{x \to 4} (x - 2)} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} 3x + \lim\limits_{x \to 4} 2}{\lim\limits_{x \to 4} x - \lim\limits_{x \to 4} 2} = \frac{3 \lim\limits_{x \to 4} x + \lim\limits_{x \to 4} 2}{\lim\limits_{x \to 4} x - \lim\limits_{x \to 4} 2} = \frac{12 + 2}{4 - 2} = \frac{14}{2} = 7.^{*)}$$

Poznámka 2. Pretože funkcia $f(x) = (3x + 2)/(x - 2)$ je v bode $x = 4$ spojitá, podľa vety 5 platí

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x + 2}{x - 2} = f(4) = \frac{3 \cdot 4 + 2}{4 - 2} = 7.$$

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}.$$

*Riešenie.* Keďže limita menovateľa pre $x \to 1$ sa rovná 0, nemôžeme priamo použiť vzťah (5), ale musíme nájsť takú funkciu, ktorá sa pre všetky čísla $x \neq 1$ rovná danej funkcii a v čísle 1 je spojitá. Upravme preto zlomok $(x^3 - 1)/(x^4 - 1)$. Pre $x \neq 1$ platí

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1},$$

pričom posledný zlomok je spojitá racionálna funkcia v čísle $x = 1$. Podľa vety 5 platí

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{3}{4}.$$

**Príklad 5.** Vypočítajme

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}.$$

*Riešenie.* Pri výpočte tejto limity nemôžeme použiť vzťah (5), lebo $\lim\limits_{x \to 0} \sin 4x = 0$. Preto budeme postupovať podobne ako v príklade 4. V tomto príklade upravíme zlomok $(\sin 3x)/(\sin 4x)$ tak, aby sme mohli použiť vzťah (9). Pre všetky čísla $x$ z intervalu $(-\pi, \pi)$, pričom $x \neq 0$, máme

$$\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4} \frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 4x}{4x}}.$$

---

*) O oprávnenosti tohto postupu počítania limity funkcie v tomto a v nasledujúcich príkladoch aj úlohách pozri poznámku 1 z článku 1.3.

Z toho a zo vzťahu (5) vyplýva

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\,\frac{(\sin 3x)/3x}{(\sin 4x)/4x}=\frac{3}{4}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)/3x}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 4x)/4x}.$$

Pri výpočte posledných dvoch limít použijeme vetu 10, ktorej podmienky sú splnené, a vzťah (9). Ak $ax = u$, pričom $a \neq 0$, máme

$$\lim_{x\to 0} ax = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1,$$

čiže

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1.$$

Nakoniec dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{3}{4}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)/3x}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 4x)/4x}=\frac{3}{4}\,\frac{1}{1}=\frac{3}{4}.$$

**Príklad 6.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}.$$

*Riešenie.* Opäť nemôžeme priamo použiť vzťah (5), pretože čitateľ i menovateľ majú nevlastné limity. V takýchto prípadoch, keď sa jedná o limitu racionálnej funkcie v nevlastnom čísle $\infty$ postupujeme tak, že vydelíme čitateľa i menovateľa racionálnej funkcie najvyššou mocninou $x$ v menovateli. V našom prípade vydelíme čitateľa i menovateľa číslom $x$. Máme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{1-1/x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

**Príklad 7.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}.$$

*Riešenie.* Pretože $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 > 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ a pre všetky čísla $x \in (1,\ 1+\delta)$, kde $\delta > 0$, je $(x-1) > 0$, dostaneme podľa vety 9

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = +\infty.$$

Pretože $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2 > 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$ a pre všetky čísla $x \in (1-\delta),\ 1)$, kde $\delta > 0$ je $x - 1 < 0$, dostaneme podľa vety 9

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1} = -\infty.$$

**167.** Dokážte, že platí $\lim\limits_{x\to -1}(1+x^2) = 2$:

a) z definície limity funkcie;

b) pomocou vety 1. K danému číslu $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}000\,1;\ 0{,}000\,001;\ 10^{-n}$, kde $n$ je prirodzené číslo, nájdite príslušné $\delta$.

**168.** Dokážte, že platí
$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$$
a) priamo z definície limity funkcie;
b) pomocou vety 2. K danému číslu $C = 10;\ 100;\ 1\,000;\ 1\,000\,000;\ 10^n$, kde $n$ je prirodzené číslo, nájdite príslušné $\delta$.

**169.** Dokážte, že platí
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$
a) z definície limity funkcie;
b) pomocou vety 3. K danému číslu $\varepsilon$ nájdite príslušné $k$, ak $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 10^{-n}$, kde $n$ je prirodzené číslo.

**170.** Dokážte, že platí
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$$
a) z definície limity funkcie;
b) pomocou vety 4. K danému číslu $M = 10;\ 100;\ 1\,000;\ 10^6;\ 10^n$, kde $n$ je prirodzené číslo, nájdite príslušné $k$.

**171.** Polynóm $P(x)$ je stupňa $m$ a polynóm $Q(x)$ je stupňa $n$, a $P(a) = Q(a) = 0$.
a) Ukážte, že platí:
$$\lim_{x\to\infty} = \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} \pm\infty & \text{pre} \quad n < m, \\ a_0/b_0 & \text{pre} \quad n = m, \\ 0 & \text{pre} \quad n > m. \end{cases}$$
b) Vypočítajte
$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

**172.** Daná je funkcia
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{pre} \quad x \geqq 1, \\ 5x-1 & \text{pre} \quad x < 1. \end{cases}$$
Zostrojte graf tejto funkcie a nájdite jej limitu v čísle 1.

**173.** Daná je funkcia
$$g(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{pre} \quad x \leqq -2, \\ -3x-2 & \text{pre} \quad x > -2. \end{cases}$$
Zostrojte graf tejto funkcie a nájdite jej limitu, limitu zľava a limitu sprava.

V úlohách **174** až **190** vypočítajte limity funkcií:

**174.** a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 3x + 2)$;

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^3 + x^2 - x - 2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

**175.** a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^n}{1-x^m}$,

kde $m$, $n$ sú prirodzené čísla;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x^4-1}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$.

**176.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2+2x+15}{13x^2+6}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+6x^2-4}{x^4+x^3+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^2-x}{x^2-3} - \dfrac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$.

**177.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+0,5}}{x^2-16}$;

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2/3}-1}{x^{3/5}-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{1+4x}-x-1}$.

**178.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$,

kde $m$, $n$ sú prirodzené čísla.

**179.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9})$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3}+x)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1-2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-4x^2+x})$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} [(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}]$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{3x + 4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x+1}}$.

**180.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\sin 9x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$; h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\pi - 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos^2 x}{x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$.

**181.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1})$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{6}} \dfrac{\sin(x+\pi/6)}{2\sin x - 1}$; g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sqrt{\sin x}}{1 - \cos\sqrt{x - \dfrac{\pi}{2}}}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}$.

**182.** a) $\lim\limits_{x\to 0} x.\operatorname{cotg} x$; c) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin a}}$, $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**183.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^2+4}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to -1^+} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$; d) $\lim\limits_{x\to -1^-} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$.

**184.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(-1)^{E(x)}}{x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{5x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-1)^{E(x)}\cos x}{x^2}$.

**185.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin 2\pi x$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x \sin 2\pi x$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$.

**186.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{k}{x}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+4}{2x+5}\right)^{x+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{1/x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+6}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$.

**187.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{4x+3}\right)^{x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; e) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$, $a \neq k\pi$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \dfrac{a}{x}\right)^x$.

**188.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3-2x}{2+5x}\right)^{(\sqrt{x+1}-1)/x}$; c) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{5}+} \left(\dfrac{3-2x}{2+5x}\right)^{(\sqrt{x+1}-1)/x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-} \left(\dfrac{3-2x}{2+5x}\right)^{(\sqrt{x+1}-1)/x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3+2x}{2+5x}\right)^{(\sqrt{x+1}-1)/x}$

**189.** a) $\lim\limits_{x\to 99} \log (x + 1)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln (x + 1) - \ln x]$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \log \dfrac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (1 + ax)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 4} \log \dfrac{x - 4}{\sqrt{x+4} - \sqrt{8}}$; f) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$.

**190.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{5/x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} (1 + 5 \log x)^{1/\log x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{1/x} - 1)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (1 + x)}{3^{2x} - 1}$; g) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{a^x - a^c}{x - c}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\operatorname{tg} x} - 1}{x}$;

**191.** Nájdite limity sprava a limity zľava daných funkcií v bode $a$, ak

a) $f(x) = E(x)$, $a = -2; 1; -1/2; 0$;

b) $f(x) = x/|x|$, $a = 0$; e) $f(x) = xE(2/x)$, $a = 0$;

c) $f(x) = x/x$, $a = 0$; f) $f(x) = 2^{1/(x-a)}$.

d) $f(x) = \sin (2\pi/x)$, $a = 0$;

**192.** Nájdite limity sprava a limity zľava daných funkcií v bode $a$, ak

a) $f(x) = x e^{-1/x}, \quad a = 0;$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}, \quad a = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1+x} & \text{pre} \quad x < 0, \\ 3 & \text{pre} \quad x = 0, \\ 3x & \text{pre} \quad x \in (0, 2), \\ 1 & \text{pre} \quad x \geqq 2, \end{cases}$
$a = -1;\ 0;\ 2;$

d) $f(x) = \dfrac{2^{1/x} + 3}{3^{1/x} + 2}, \quad a = 0;$

e) $f(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & \text{pre } x < 0, \\ \cos(1/x) & \text{pre } x > 0, \end{cases}$
$a = 0;$

f) $f(x) = \dfrac{(x + 2)\, x}{|x + 2|}, \quad a = -2;$

g) $f(x) = \dfrac{x}{|\operatorname{tg} x|}, \quad a = 0.$

**193.** Dokážte, že ak funkcia $f$ je v intervale $(a, \infty)$ definovaná a v každom intervale $(a, b)$ ohraničená, potom platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} [f(x + 1) - f(x)],$$

za predpokladu, že limita na pravej strane tejto rovnosti existuje.

# 2. KOMPLEXNÁ FUNKCIA REÁLNEJ PREMENNEJ

## 2,1. Komplexné čísla

Nech $M$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc $(a, b)$, kde $a$, $b$ sú reálne čísla. Množinu $M$ nazývame *množinou komplexných čísiel*, ak pre každé dva prvky $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ z množiny $M$ je definovaná *rovnosť*, *sčítanie* a *násobenie* takto:

1. $z_1 = z_2$ vtedy a len vtedy, keď $a = c$, $b = d$,
2. $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$,
3. $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)$.

Pre sčítanie a násobenie komplexných čísiel platí asociatívny a komutatívny zákon. Násobenie komplexných čísiel je distributívne vzhľadom na sčítanie komplexných čísiel.

Číslo $a$ nazývame *reálnou časťou*, číslo $b$ *imaginárnou časťou* komplexného čísla $z = (a, b)$ a označujeme takto: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Komplexné číslo $(a, 0)$ stotožňujeme s reálnym číslom $a$, $(a, 0) = a$. Komplexné číslo $(0, b)$, kde $b \neq 0$, nazývame *rýdzo imaginárnym číslom*. Číslo $(0, 1)$ nazývame *imaginárnou jednotkou* a označujeme ho $(0, 1) = \mathrm{i}$. Komplexné číslo $(a, b)$, kde $b \neq 0$, nazývame *imaginárnym číslom*.

Komplexné číslo $z = (a, b)$ píšeme v tvare

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + \mathrm{i}b.$$

*Rozdielom* komplexných čísiel $z_1$, $z_2$ nazývame riešenie rovnice $z_2 + x = z_1$, kde $x$ je komplexné číslo a označujeme ho $z_1 - z_2$.

*Podielom* komplexných čísiel $z_1$ a $z_2 \neq 0$ nazývame riešenie rovnice $z_2 x = z_1$, kde $x$ je komplexné číslo a označujeme ho $z_1/z_2$ alebo $z_1 : z_2$.

Komplexné číslo $a - \mathrm{i}b$ nazývame *konjugovaným* alebo *združeným číslom* ku komplexnému číslu $z = a + \mathrm{i}b$ a označujeme ho $\bar{z}$.

*Absolútnou hodnotou alebo modulom* komplexného čísla $z = a + \mathrm{i}b$ nazývame číslo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Ak pre komplexné číslo $z$ platí $|z| = 1$, nazývame ho *komplexnou jednotkou*. Každú komplexnú jednotku $z$ možno písať v tvare

$$z = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha,$$

kde $\alpha$ je reálne číslo. Toto číslo označujeme aj $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ a platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha. \tag{2}$$

*Amplitúdou* (*argumentom*) komplexného čísla $z = a + \mathrm{i}b$, kde $z \neq 0$, nazývame číslo $\varphi = \operatorname{Arg} z$, pre ktoré platí

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

Ak $z = 0$, tak $\varphi = \operatorname{Arg} z = 2k\pi$, kde $k$ je celé číslo. Ak pre číslo $\varphi$ platí $-\pi < \varphi \leq \pi$, nazývame ho *hlavnou hodnotou argumentu* a označujeme ho $\arg z$.

Každé komplexné číslo $z = a + \mathrm{i}b \neq 0$ možno jednoznačne vyjadriť v *goniometrickom tvare*

$$z = |z| (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{4}$$

kde $\varphi = \arg z$ alebo v *exponenciálnom* tvare

$$z = |z|\, e^{i\varphi}, \tag{5}$$

kde $\varphi = \arg z$.

*n-tou mocninou* komplexného čísla $z$, kde $n$ je prirodzené číslo, nazývame komplexné číslo

$$z^n = \underbrace{z \,.\, z \ldots z}_{n \text{ činiteľov}}. \tag{6}$$

Ak $z$ je komplexné číslo a $n$ prirodzené číslo, *n-tou odmocninou* komplexného čísla $z$ nazývame komplexné číslo $\omega$, pre ktoré platí

$$\omega^n = z \tag{7}$$

a označujeme ho $\omega = \sqrt[n]{z}$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Pre súčet, rozdiel a súčin komplexných čísiel $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ platí

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i\,(b \pm d), \tag{8}$$

$$(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc). \tag{9}$$

Ak $z_2 \neq 0$, pre podiel $z_1/z_2$ platí

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)\,(c - id)}{(c + id)\,(c - id)} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + i\,\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}. \tag{10}$$

**Veta 2.** Pre číslo i platí:

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$

vo všeobecnosti

$$i^{4n} = 1, \qquad i^{4n+1} = i, \qquad i^{4n+2} = -1, \qquad i^{4n+3} = -i, \tag{11}$$

pre každé prirodzené číslo $n$.

Poznámka. S komplexnými číslami formálne počítame ako s dvojčlenmi v algebre, pričom používame vetu 2.

**Veta 3.** Pre súčin komplexných čísiel $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, a $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ platí

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{12}$$

Pre podiel komplexných čísiel $z_1$ a $z_2 \neq 0$ platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{13}$$

Pre $n$-tú mocninu komplexného čísla $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ platí

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{14}$$

kde $n$ je prirodzené číslo (Moivreova veta). Ak $z \neq 0$, potom (14) platí aj pre ľubovoľné celé číslo $n$.

Pre $n$-tú odmocninu komplexného čísla $z$, kde $n$ je prirodzené číslo, platí

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{15}$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Ak

$$z_1 = |z_1|\,e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = |z_2|\,e^{i\varphi_2} \qquad \text{a} \qquad z = |z|\,e^{i\varphi},$$

vzťahy (12) až (15) možno napísať takto:

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{16}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0, \tag{17}$$

$$z^n = |z|^n\,e^{in\varphi}, \tag{18}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,e^{i(\varphi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{19}$$

**Veta 4.** Pre absolútnu hodnotu komplexných čísiel $z_1$, $z_2$ platí:

$$|z_1| \geqq 0, \tag{20}$$

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \tag{21}$$

$$|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|, \tag{22}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{23}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{pre } z_2 \neq 0. \tag{24}$$

**Veta 5.** Pre ľubovoľné komplexné čísla platí:

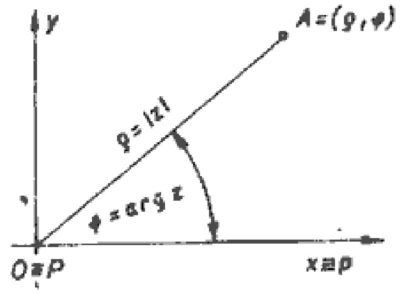
$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \tag{25}$$

$$z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z, \tag{26}$$

$$z\bar{z} = |z|^2, \tag{27}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \tag{28}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \tag{29}$$



*Obr. 23*

Medzi komplexnými číslami *nemôžeme zaviesť vzťahy porovnávania* $<$, $>$, ktoré by mali podobné vlastnosti ako v množine reálnych čísiel.

Znázorňovanie komplexných čísiel. Majme rovinu a v nej zvolený pravouhlý súradnicový systém. Každému komplexnému číslu $z = (a, b) = a + ib$ priraďme bod $A = (a, b)$, kde $a$, $b$ sú pravouhlé súradnice bodu $A$. Rovinu, ktorej body znázorňujú množinu všetkých komplexných čísiel, nazývame *rovinou komplexných čísiel* (*Gaussova rovina*). O bodoch tejto roviny budeme často hovoriť ako o komplexných číslach. Os $o_x$ nazývame *reálnou osou* a os $o_y$ nazývame *imaginárnou osou*.

Komplexné číslo $a + ib$ znázorňujeme aj vektorom $A - O$, kde $A = (a, b)$ a $O = (0, 0)$.

Ak v rovine komplexných čísiel zvolíme polárny súradnicový systém (pozri *obr. 23*) tak, ako sme to urobili v analytickej geometrii, potom pre polárne súradnice bodu $A = (\varrho, \varphi)$ platí $\varrho = |z|$, $\varphi = \arg z$.

**Príklad 1.** Nech $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (2, -1)$. Vypočítajme $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $z_1/z_2$, $|z_1|$ a $\bar{z}_2$.

*Riešenie.* Pretože $z_1 = (1, 2) = 1 + 2i$, $z_2 = (2, -1) = 2 - i$, podľa vety 1 je

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = (1 + 2) + (2 - 1)\,i = 3 + i,$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = (1 - 2) + (2 + 1)\,i = -1 + 3i,$$

$$z_1 z_2 = (1 + 2i)(2 - i) = [1 \,.\, 2 - 2(-1)] + [1(-1) + 2 \,.\, 2]\,i = 4 + 3i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{1 + 2i}{2 - i}\,\frac{2 + i}{2 + i} = \frac{2 + 4i + i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{5i}{5} = i.$$

Podľa vzťahu (1) je $|z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Podľa definície konjugovaného komplexného čísla $\bar{z}_2 = \overline{2 - i} = 2 + i$.

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$z = i^3 + (5 - 3i)(5 + 3i) + \frac{3 + 4i}{4 - 3i} + 17i.$$

*Riešenie.* Podľa vzťahu (11) platí $i^3 = -i$ a podľa vzťahu (9) je

$$(5 - 3i)(5 + 3i) = [5 \,.\, 5 - (-3) \,.\, 3] + [5 \,.\, 3 + (-3) \,.\, 5]\, i = 34.$$

Podľa vzťahu (10) je

$$\frac{3 + 4i}{4 - 3i} = \frac{3 \,.\, 4 + 4(-3)}{16 + 9} + \frac{4 \,.\, 4 - 3(-3)}{16 + 9}\, i = i.$$

Z toho

$$z = -i + 34 + i + 17i = 34 + 17i.$$

**Príklad 3.** Vyjadrime komplexné číslo $z = 1 + i$ v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

*Riešenie.* Vypočítajme najskôr $|z|$ a amplitúdu $\varphi = \arg z$. Podľa vzťahu (1) je $|z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Pre amplitúdu $\varphi$ podľa vzťahu (3) musí platiť

$$\cos \varphi = 1/\sqrt{2}, \qquad \sin \varphi = 1/\sqrt{2}, \qquad -\pi < \varphi \leqq \pi.$$

Z toho vyplýva $\varphi = \pi/4$. Podľa vzťahu (4) goniometrický tvar komplexného čísla $z$ je

$$z = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4).$$

Exponenciálny tvar komplexného čísla $z$ podľa vzťahu (5) je

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$$

**Príklad 4.** Nech $z_1 = 2[\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)]$ a $z_2 = 3[\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)]$. Vypočítajme $z_1 z_2$, $z_1/z_2$ a $z_1^6$.

*Riešenie.* Podľa vzťahu (12) máme

$$z_1 z_2 = 2 \,.\, 3[\cos(\pi/3 + \pi/6) + i \sin(\pi/3 + \pi/6)] =$$
$$= 6[\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)] = 6(0 + i \,.\, 1) = 6i.$$

Pre podiel $z_1/z_2$ podľa vzťahu (14) platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}[\cos(\pi/3 - \pi/6) + i \sin(\pi/3 - \pi/6)] = \frac{2}{3}[\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)] = \frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{1}{3}.$$

Podľa vzťahu (14) resp. podľa vzťahu (18) je

$$z_1^6 = \{2[\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)]\}^6 = [2\, e^{i\pi/3}]^6 = 2^6\, e^{2\pi i} = 64.$$

**Príklad 5.** Riešme rovnicu $x^6 - 1 = 0$.

*Riešenie.* Z danej rovnice dostaneme $x^6 = 1$. Riešením tejto rovnice v množine komplexných čísiel budú všetky šieste odmocniny z komplexného čísla 1, ktoré vypočítame podľa vzorca (15)

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1 + 0 \,.\, i} = \sqrt[6]{1(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i \sin\frac{2k\pi}{6}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Pre $k = 0$ je $\cos 0 + i \sin 0 = 1$,

$k = 1$ je $\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$,

$$k = 2 \quad \text{je} \quad \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2,$$

$$k = 3 \quad \text{je} \quad \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1,$$

$$k = 4 \quad \text{je} \quad \cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3) = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2,$$

$$k = 5 \quad \text{je} \quad \cos(5\pi/3) + \mathrm{i}\sin(5\pi/3) = 1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2.$$

Korene danej rovnice sú $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = 1/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2$, $x_{5,6} = -1/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2$.

**Príklad 6.** V komplexnej rovine nájdime množinu všetkých bodov $z$, pre ktoré platí $|z| \leqq 2$ a $\operatorname{Im} z \geqq 1$.

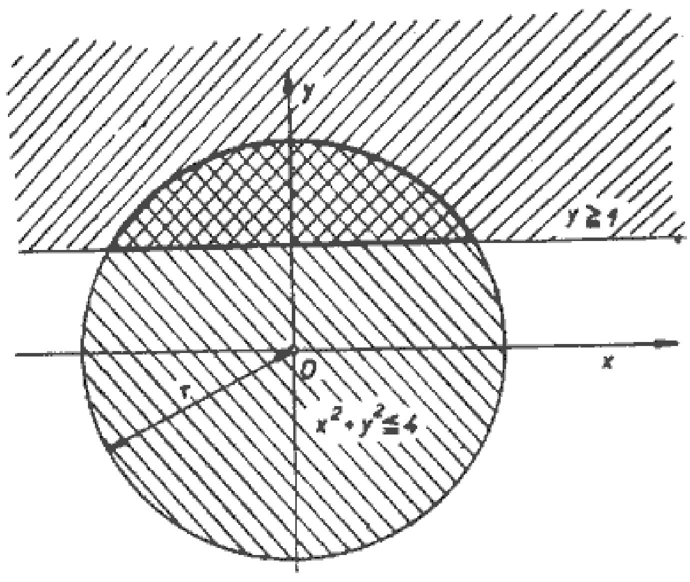
*Riešenie.* Nech $z = x + \mathrm{i}y$, potom uvedené podmienky možno napísať v tvare

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqq 2 \quad \text{a} \quad y \geqq 1$$

alebo

$$x^2 + y^2 \leqq 4, \qquad y \geqq 1.$$

Z analytickej geometrie v rovine vieme, že množina všetkých bodov, ktorých súradnice spĺňajú prvú podmienku, je kruh ohraničený kružnicou so stredom v počiatku a s polomerom $r = 2$. Množina všetkých bodov v rovine, ktoré spĺňajú druhú podmienku, je horná polrovina určená priamkou $y = 1$. Hľadaná množina bodov je prienikom týchto dvoch množín a v komplexnej rovine predstavuje kruhový odsek (pozri *obr. 24*).



*Obr. 24*

**194.** Nájdite:

a) všetky reálne čísla, ktoré sú zároveň 1. komplexné, 2. rýdzo imaginárne, 3. imaginárne;

b) všetky rýdzo imaginárne čísla, ktoré sú zároveň 1. komplexné, 2. reálne, 3. imaginárne.

**195.** Nájdite reálne čísla $a$, $b$ tak, aby komplexné číslo $z = (2 - 3\mathrm{i})\,a + (1 + 4\mathrm{i})\,b$ bolo

a) reálne, b) rýdzo imaginárne.

**196.** Zistite, pre aké komplexné čísla $z = a + \mathrm{i}b$, kde $a$, $b$ sú reálne čísla, platí

a) $z = \bar{z}$; b) $z = -\bar{z}$; c) $z = -z$.

**197.** V komplexnej rovine nájdite vrcholy štvorca, ak jeho jeden vrchol leží v počiatku komplexnej roviny a jedna jeho strana dĺžky 1 je v reálnej osi.

**198.** Nájdite reálne čísla $x$, $y$ tak, aby platilo

a) $(3 - 2\mathrm{i})\,x + (5 - 7\mathrm{i})\,y = 1 - 3\mathrm{i}$;

b) $(1 - \mathrm{i})\,x + (4 + 2\mathrm{i})\,y = 1 + 3\mathrm{i}$.

**199.** Vypočítajte:

a) $(5, 8) + (1, 0)$;
b) $(-5, -3) + (-1, -2)$;
c) $(3, 1) - (-1, -2)$;
d) $(2 + 4i) + (1 + 2i)$;
e) $(2 - 3i) + (-2 + 3i)$;
f) $(-2 - i) - (-3 - 7i)$.

**200.** Zistite, kedy je súčet, rozdiel dvoch komplexných čísiel $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ a) reálny, b) rýdzo imaginárny, c) imaginárny.

**201.** Vypočítajte:

a) $(3, 2)(2, 1)$;
b) $(3, 1)(1, 0)$;
c) $(3, 0)(0, 2)$;
d) $(3 + 2i)\, i$;
e) $(2 + 3i)(4 + 5i)$;
f) $(2 - i)(2 + i)$.

**202.** Vypočítajte:

a) $i^{16}, i^{29}, i^{133}, i^{1037}, i^{-6}, i^{-9}, i^{-15}$; b) $3 - 8i + 3i^2 + 3i^3 - 6i^4$.

**203.** Vypočítajte:

a) $(2 - i)(1 + 2i)(3 - 4i)$;
b) $(1 + 2i)(3 - 2i)^2$;
c) $i(2 + 3i)^4$;
d) $(1 + i)^6$.

**204.** Zistite, aké musia byť komplexné čísla $z_1$, $z_2$, aby ich súčin, podiel bol

a) reálny; b) rýdzo imaginárny; c) imaginárny.

**205.** Vypočítajte:

a) $\dfrac{2 + i}{3 - i}$;
b) $\left(\dfrac{1 + 2i}{3 - i}\right)^2$;
c) $\dfrac{1 + i}{1 - i} - \dfrac{1 - i}{1 + i}$;
d) $\dfrac{(1 - i)^3}{(2 + i)(1 + 2i)}$.

**206.** Vypočítajte bez použitia Moivrovho vzorca:

a) $\dfrac{(1 + i)^9}{(1 + i)^7}$;
b) $\dfrac{(1 - i)^3 - 1}{(1 + i)^3 + 1}$.

**207.** Zistite, pre ktoré reálne čísla $x$, $y$ platí:

a) $(1 + 3i)(2x + iy) = 1 + i$;
b) $\dfrac{x + iy}{1 - i} = 3 + 2i$.

**208.** Nájdite komplexné združené čísla k číslam:

a) $5 + 3i$;
b) $-4 - 2i$;
c) $2i$;
d) $13$;
e) $(1/2i + 3/i - 6/5i)$;
f) $(1/2 + 3i/2)(2i - 5)$.

**209.** Dokážte:

a) $|z + 1| - \operatorname{Re} z \leqq 1$;
b) $|z - 1| \leqq ||z| - 1| + |z| \arg z$;
c) $|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 \leqq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;
d) $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)$.

**210.** Napíšte v goniometrickom a v exponenciálnom tvare:

a) $2$; d) $1 + \mathrm{i}$; g) $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$;

b) $-2$; e) $\sqrt{3} - \mathrm{i}$; h) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$;

c) $2\mathrm{i}$; f) $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; i) $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

**211.** Vypočítajte súčin a podiel komplexných čísiel:

a) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$;

b) $\sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)]$, $\sqrt{8}\,[\cos(5\pi/6) + \mathrm{i}\sin(5\pi/6)]$;

c) $-1 + \mathrm{i}$, $3[\cos(\pi/3) - \mathrm{i}\sin(\pi/3)]$;

d) $\dfrac{1}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}$, $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

**212.** Vypočítajte:

a) $(-1 + \mathrm{i})^7$;

b) $\left(\dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}\right)^{24}$;

c) $(1 - \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)^n$, kde $n$ je prirodzené číslo;

d) $z^k + \dfrac{1}{z^k}$, ak $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$, kde $k$ je prirodzené číslo.

**213.** Ak $z = \cos(2\pi/5) + \mathrm{i}\sin(2\pi/5)$, dokážte, že platí

$$(z^2 - z^3)(z^4 - z) = \sqrt{5}.$$

**214.** Na základe Moivrovho vzorca vyjadrite pomocou mocnín funkcií $\sin x$ a $\cos x$:

a) $\sin 3x$; b) $\cos 4x$; c) $\sin 7x$.

**215.** Vyjadrite pomocou sínusov a kosínusov viacnásobných uhlov:

a) $\cos^3 x$; c) $\sin^5 x$;

b) $\cos^4 x$; d) $\sin^6 x$.

**216.** Pomocou exponenciálneho tvaru komplexnej jednotky nájdite súčty:

a) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

b) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

c) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx$.

**217.** Z definície odmocniny komplexného čísla vypočítajte:

a) $\sqrt{3\mathrm{i}}$; b) $\sqrt{60 - 11\mathrm{i}}$; c) $\sqrt{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}$.

**218.** Nájdite odmocniny komplexných čísiel:

a) $\sqrt{-1}$; e) $\sqrt[5]{32}$; i) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$

b) $\sqrt[3]{i}$; f) $\sqrt[3]{1+i}$;

c) $\sqrt[4]{i}$; g) $\sqrt[5]{2+2i}$;

d) $\sqrt[4]{-16}$; h) $\sqrt[6]{-729}$;

**219.** Nech $z_1$, $z_2$ sú komplexné čísla. Zostrojte v Gaussovej rovine komplexné čísla $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $z_1/z_2$, ak $z_2 \neq 0$.

**220.** Aký je geometrický význam $|z_1 - z_2|$. Vypočítajte vzdialenosť bodov $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 + 7i$.

**221.** Vyšetrite vzájomnú polohu obrazov čísiel v komplexnej rovine:

a) $z$, $-z$; d) $z$, $az$ ($a$ je reálne číslo);

b) $z$, $\bar{z}$; e) $z$, $ze^{i\varphi}$;

c) $z$, $iz$; f) $z$, $\overline{(\bar{z})}$.

**222.** Rovnostranný trojuholník má ťažisko v počiatku komplexnej roviny a jeden jeho vrchol je v bode $A = (1, 0)$. Zistite, aké komplexné čísla odpovedajú vrcholom trojuholníka.

**223.** Nájdite vrcholy pravidelného $n$-uholníka v Gaussovej rovine, ak jeho stred je $z = 0$ a jeden vrchol je $z_1 = 1$.

**224.** Nájdite množinu všetkých bodov v Gaussovej rovine, pre ktorú platí:

a) $\operatorname{Im} z = -3$; d) $\arg z = 1/2$;

b) $|z| = 2$; e) $|z - i| \leqq 1$;

c) $|\operatorname{Re} z| < 1$; f) $\operatorname{Re}(1/z) = 2$.

**225.** Nájdite všetky body, ktoré v komplexnej rovine spĺňajú nerovnosť:

a) $0 < \operatorname{Re} z \leqq \operatorname{Im} z$; e) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right| \geqq 1$;

b) $|z - 1| \leqq \operatorname{Re} z$; f) $\alpha < \arg z < \beta$.

c) $2 \leqq |z| \leqq 3$;

d) $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$;

**226.** Nájdite množinu všetkých bodov v Gaussovej rovine, pre ktoré platí:

a) $|z - 3| + |z - i| = 8$; d) $\arg \dfrac{z-1}{z+1} = \alpha, \quad -\pi < \alpha \leqq \pi$.

b) $|z - 1| - |z + 1| > 4$;

c) $|z - 1|\,|z + 1| \leqq 1$;

## 2,2. Postupnosť komplexných čísiel

Nech $M$ je množina všetkých prirodzených čísiel a $N$ množina všetkých komplexných čísiel. Funkciu $f$ definovanú na množine $M$ s oborom hodnôt z množiny $N$ nazývame *postupnosťou komplexných čísiel*. Postupnosť komplexných čísiel, ktorej členy sú komplexné čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, označujeme

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

*Reálnou časťou postupnosti komplexných čísiel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosť $\{\mathrm{Re}\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Imaginárnou časťou postupnosti komplexných čísiel* (1) nazývame postupnosť $\{\mathrm{Im}\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísiel. Postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je **vybraná** postupnosť z postupnosti (1) podľa postupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť komplexných čísiel (1) je ohraničená, ak pre všetky členy tejto postupnosti platí

$$|a_n| \leq C,$$

kde $C$ je nezáporné číslo.

*ε-okolím komplexného* čísla $a$ nazývame množinu všetkých komplexných čísiel, pre ktoré platí $|z - a| < \varepsilon$. V Gaussovej rovine je to vnútro kruhu s polomerom $\varepsilon$ a so stredom v bode $a$.

**Limita postupnosti komplexných čísiel.** Komplexné číslo $a$ nazývame *limitou postupnosti komplexných čísiel* (1), ak v ľubovoľnom okolí čísla $a$ ležia skoro všetky členy tejto postupnosti, čiže ku každému kladnému číslu $\varepsilon$ existuje prirodzené číslo $N(\varepsilon)$ také, že pre každé prirodzené číslo $n > N(\varepsilon)$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Postupnosť komplexných čísiel, ktorá má limitu, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, nazýva sa *konvergentná*. Postupnosť, ktorá nie je konvergentná, nazýva sa *divergentná*.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Postupnosť komplexných čísiel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ku komplexnému číslu $a$ vtedy a len vtedy, keď postupnosť $\{|a_n - a|\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 0.

**Veta 2.** Postupnosť komplexných čísiel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\mathrm{Re}\, a_n + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ku komplexnému číslu $a = \mathrm{Re}\, a + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, a$ vtedy a len vtedy, keď postupnosť $\{\mathrm{Re}\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $\mathrm{Re}\, a$ a postupnosť $\{\mathrm{Im}\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $\mathrm{Im}\, a$.

**Veta 3.** Postupnosť komplexných čísiel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ku komplexnému číslu $a \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak platí

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Arg}\, a_n = \mathrm{Arg}\, a,$$

kde $\mathrm{Arg}\, a_n$ sú vhodne zvolené hodnoty argumentov čísiel $a_n$.

**Poznámka.** Pre postupnosti komplexných čísiel platia analogické vety k vetám 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 15, 16 z článku 1.3

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

*Riešenie.* Podľa Moivrovej vety dostaneme

$$\left\{\frac{\mathrm{i}}{n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\mathrm{i}}{n}[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)]^n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\mathrm{i}}{n}[\cos(n\,\pi/4) + \mathrm{i}\sin(n\,\pi/4)]\right\}_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{n}\sin(n\,\pi/4) + \mathrm{i}\frac{1}{n}\cos(n\,\pi/4)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Počítajme limity z reálnej a imaginárnej časti danej postupnosti.
Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n}\sin(n\,\pi/4) = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(n\,\pi/4) = 0,$$

keďže postupnosti $\{\sin(n\pi/4)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos(n\,\pi/4)\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené a $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

Z toho vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n = 0\,.$$

**Príklad 2.** Dokážme, že postupnosť

$$\left\{\frac{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3n-2}}{8^n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje k číslu $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/8$.

*Riešenie.* Vypočítame limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3n-2}}{8^n-1}-\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8}\right| = \lim_{n\to\infty}|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}|\left|\frac{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3n-3}}{8^n-1}-\frac{1}{8}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left|\frac{(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})^{3n-3}}{8^n-1}-\frac{1}{8}\right| = 2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{3n-3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(n-1)}}{8^{n-1}-1}-\frac{1}{8}\right| =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8^{n-1}}{8^n-1}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-8^n+1}{8^n-1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8^n-1} = 0.$$

Podľa vety 1 daná postupnosť konverguje k číslu $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/8$.

**227.** Napíšte prvých deväť členov postupnosti komplexných čísiel, ak platí $a_1 = 1$, $a_2 = \mathrm{i}$, $a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ pre $n > 2$. Znázornite tieto členy v Gaussovej rovine.

**228.** Z postupnosti $\{i^n\}_{n=1}^{\infty}$ nájdite vybranú postupnosť pomocou postupnosti:

a) $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$; c) $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$; d) $\{4n+3\}_{n=1}^{\infty}$.

Pomocou toho ukážte, že daná postupnosť je divergentná.

**229.** Nájdite limitu súčtu a súčinu postupností:

$$\left\{2+\mathrm{i}\,\frac{3}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\frac{2}{n+1}+\mathrm{i}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

**230.** Nech postupnosť komplexných čísiel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a) $3\mathrm{i}$; b) $1+\mathrm{i}$. Vypočítajte limitu postupnosti:

a) $\{(3a_n+2)/(a_n+3)\}_{n=1}^{\infty}$, pričom $a_n \neq -3$ pre $n = 1, 2, \ldots$;

b) $\{a_n^2/(a_n-\mathrm{i})\}_{n=1}^{\infty}$, pričom $a_n \neq \mathrm{i}$ pre $n = 1, 2, \ldots$ .

V úlohách **231** až **234** vypočítajte limity postupností.

**231.** a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{n}-\frac{10}{\sqrt{n}}\right)+\frac{\mathrm{i}^{2n+1}}{2n-1}\right]$; d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}n}\right)$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n}+\mathrm{i}\,\frac{2+(-1)^n}{n}\right)$; e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-7+\mathrm{i}3^{2n+1}}{9^n+4}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n+\mathrm{i}\left(\frac{n+5}{n}\right)^n\right]$; f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3\mathrm{i}}{n}\right)\left(2\mathrm{i}-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5\mathrm{i}}{n}-1\right)\right]$.

**232.** a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{n+1}+i^{n+1}}{2^n+i^n}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(1+i)^{2n}}{(2i)^{n+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_n$ je jedna z hodnôt $\sqrt[n]{\dfrac{z}{n}}$ a $z$ je dané komplexné číslo.

**233.** a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\pi i}{n}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1-ki)\,[1-(k+1)\,i]}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{i}{3}\right)^k\right]$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+i}\right)^n$.

**234.** a) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z^n}{1+z^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$;

kde $z$ je dané komplexné číslo.

**235.** Zistite, ktoré z nasledujúcich postupností komplexných čísiel sú ohraničené, ktoré z nich konvergujú a ktoré divergujú. V prípade ohraničenej divergentnej postupnosti komplexných čísiel nájdite aspoň jednu vybranú konvergentnú postupnosť:

a) $\{i(1+i^{n-1})\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\left\{\left(\dfrac{2i}{1+i\sqrt{3}}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\left\{\dfrac{1}{n}+in\right\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\left\{\left(\dfrac{1}{n}+i\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

## 2.3. Komplexná funkcia reálnej premennej

*Komplexná funkcia reálnej premennej* je funkcia, ktorej obor definície je množina reálnych čísiel a obor hodnôt funkcie je množina komplexných čísiel. Komplexnú funkciu $h$ reálnej premennej s oborom definície $M$ možno vždy vyjadriť v tvare

$$h(x) = f(x) + i\,g(x), \tag{1}$$

kde $f$ je reálna časť a $g$ imaginárna časť komplexnej funkcie $h$. Pritom $f$ a $g$ sú reálne funkcie s oborom definície $M$.

Absolútnu hodnotu, súčet, súčin, rozdiel, podiel, ohraničenosť, spojitosť, limitu komplexnej funkcie reálnej premennej definujeme podobne ako pre reálne funkcie, pričom namiesto čísla, okolia čísla, postupnosti uvažujeme o komplexnom čísle, okolí komplexného čísla a postupnosti komplexných čísiel.

*Obrazom komplexnej funkcie reálnej premennej* (1) v Gaussovej rovine nazývame množinu všetkých bodov $X = [f(x), g(x)]$, kde $x$ je z oboru definície $M$.

Dôležitá komplexná funkcia reálnej premennej je

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)], \tag{2}$$

ktorá je definovaná pre všetky reálne $x$, pričom $\alpha$, $\beta$ sú reálne čísla.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Komplexná funkcia $h(x) = f(x) + \mathrm{i}\, g(x)$ má v čísle $a$ limitu vtedy a len vtedy, keď v čísle $a$ majú limitu funkcie $f$ a $g$ a platí

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \mathrm{i} \lim_{x\to a} g(x).$$

**Veta 2.** Komplexná funkcia $h(x) = f(x) + \mathrm{i}\, g(x)$ je spojitá v čísle $a$ vtedy a len vtedy, keď funkcie $f$ a $g$ sú v bode $a$ spojité.

**Veta 3.** Platia *Eulerove vzorce*

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

**Príklad 1.** Daná je funkcia

$$y = x + \mathrm{i} + \frac{1}{x - \mathrm{i}},$$

Nájdime reálnu a imaginárnu časť funkcie, jej obor definície a všetky čísla, v ktorých je daná funkcia spojitá.

*Riešenie.* Úpravou danej funkcie dostaneme

$$y = x + \mathrm{i} + \frac{x + \mathrm{i}}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} + \mathrm{i}\left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right).$$

Reálna časť funkcie je teda $\operatorname{Re} y = x + \frac{x}{x^2 + 1}$, imaginárna časť je $\operatorname{Im} y = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$. Pretože tieto funkcie sú definované a spojité na intervale $(-\infty, \infty)$, je obor definície $(-\infty, \infty)$ a podľa vety 2 aj daná komplexná funkcia je spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$.

**Príklad 2.** Daná je komplexná funkcia

$$h(t) = z_0 + r\, e^{\mathrm{i}t}, \tag{3}$$

kde $z_0$ je komplexné číslo, $r$ reálne číslo a $t \in \langle -\pi, \pi)$. Nájdime jej obraz v Gaussovej rovine.

*Riešenie.* Položme $h = x + \mathrm{i}y$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Podľa vzorca (2) máme $e^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$. Po dosadení do (3) dostaneme $h = x + \mathrm{i}y = x_0 + \mathrm{i}y_0 + r \cos t + \mathrm{i}r \sin t = x_0 + r \cos t + \mathrm{i}\,(y_0 + r \sin t)$
a teda

$$x = x_0 + r \cos t, \qquad y = y_0 + r \sin t. \tag{4}$$

Pretože rovnice (4) sú parametrické rovnice kružnice so stredom v bode $(x_0, y_0)$ a polomerom $r$, obrazom komplexnej funkcie $h$ v Gaussovej rovine je táto kružnica.

**236.** Nájdite hodnoty komplexnej funkcie jednej reálnej premennej:

a) $z(0)$, $z(-1)$, $z(2)$, ak $z = 2 - 3\mathrm{i}t$;

b) $z(0)$, $z(\pi/2)$, $z(-\pi/4)$, ak $z = 3 + 2\mathrm{i} + 3e^{\mathrm{i}t}$;

c) $z(0)$, $z(1)$, $z(\ln a)$, ak $z = e^t + \mathrm{i}e^{-t}$.

**237.** Zistite, či sa funkcie $f$ a $g$ rovnajú, ak

a) $f(t) = 3 \cos t + \mathrm{i}(2 + 3 \sin t)$, $g(t) = e^{\mathrm{i}3t} + 2e^{\mathrm{i}\pi/2}$;

b) $f(t) = \dfrac{e^{2-\mathrm{i}t}}{e^{2+\mathrm{i}t}}$, $g(t) = \cos 2t - \mathrm{i} \sin 2t$;

c) $f(t) = |e^{\mathrm{i}t}| - \mathrm{i}t$, $g(t) = \overline{(1 + \mathrm{i}t)}$;

d) $f(t) = \dfrac{e^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i}}{e^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i}}$, $g(t) = 1$.

**238.** Nájdite reálnu a imaginárnu časť komplexnej funkcie:

a) $z = (t + 2i)^4$;
b) $z = (3t + i^2/t)^3$;
c) $z = (-t + it)^{E(t)}$;
d) $z = (t - i)/(t + i)$;
e) $z = 2 - i + 3e^{it}$;
f) $z = 1/e^{(2+i)t}$.

**239.** V rovine komplexných čísiel znázornite komplexné funkcie jednej reálnej premennej:

a) $z = 3 + i2t$, kde $t \in \langle 0, 3 \rangle$;
b) $z = t - iE(t)$, kde $t \in (-\infty, \infty)$;
c) $z = t^2 + it$, kde $t \in (-\infty, \infty)$;
d) $z = 1/t - it$, kde $t \in (0, \infty)$;
e) $z = a/(1 + e^{it})^2$;
f) $z = ae^{it} + be^{-it}$, kde $a > b > 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
g) $z = e^{(a+ib)t}$.

**240.** Nájdite obor definície komplexnej funkcie jednej reálnej premennej:

a) $z = 1/(i - t)$;
b) $z = e^{(\alpha+i\beta)/t}$;
c) $z = \log(3 - t) + i \arcsin(t + 2)$;
d) $z = \sqrt{6 - t} + i\sqrt{t - 4}$.

**241.** Nájdite body nespojitosti daných funkcií:

a) $z = \dfrac{3}{4 - t^2} + \dfrac{i}{t^2 - 1}$;
b) $z = e^{i/t}$;
c) $z = \operatorname{tg} t + \dfrac{i}{\sin t}$;
d) $z = e^{iE(t)}$.

**242.** Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{t \to 2} \left( \dfrac{t^2 - 4}{t^2 - 2t} + i \dfrac{t}{2} \right)$;
b) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \left( \dfrac{\cos t}{\operatorname{cotg} t} + i \arcsin \dfrac{2t}{\pi} \right)$;
c) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{t}$;
d) $\lim\limits_{t \to 0^-} t e^{(1+i)/t}$;
e) $\lim\limits_{t \to \infty} t e^{(-3-2i)/t}$.

**243.** Ukážte, že harmonický pohyb v priamke možno vyjadriť ako reálnu časť komplexnej funkcie reálnej premennej $z = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$, kde $A$ je amplitúda, $\omega$ kruhová frekvencia a $\varphi$ počiatočná fáza tohto pohybu.

**244.** Na základe výsledku predchádzajúcej úlohy urobte skladanie:

a) harmonických kmitov na priamke s rovnakými frekvenciami;
b) harmonických kmitov navzájom kolmých s rovnakými frekvenciami a amplitúdami.

**245.** Popíšte a znázornite kmitanie v priamke, ktoré je opísané komplexnou funkciou jednej reálnej premennej:

a) $z = A\,e^{i\omega t} + A\,e^{-i\omega t}$;  c) $z = A\,e^{i\omega t} + A\,e^{i(\omega t - \pi/2)}$.

b) $z = A\,e^{i2\omega t} + A\,e^{i\omega t}$;

**246.** Ukážte, že tlmené harmonické kmitanie v priamke možno vyjadriť reálnou časťou funkcie

$$z = A\,e^{[-\alpha t + i(\omega t + \varphi)]}.$$

# 3. DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

## 3,1. Derivácia funkcie

Nech funkcia $f$ je definovaná na množine $M$ a nech je číslo $x_0 \in M$. *Deriváciou* $f'(x_0)$ funkcie $f$ v čísle $x_0$ nazývame číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Deriváciu $f'(x_0)$ označujeme aj $[f(x)']_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, alebo $\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}$, $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}$.

*Derivácia sprava funkcie* $f$ v čísle $x_0$ je číslo

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

*Derivácia zľava funkcie* $f$ v čísle $x_0$ je číslo

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3}$$

Tieto derivácie označujeme aj

$$y'_+(x_0) \qquad \text{a} \qquad y'_-(x_0).$$

Nech $M$ je množina všetkých tých čísiel, v ktorých má funkcia $f$ deriváciu. Ak každému číslu $x_0 \in M$ priradíme deriváciu funkcie $f$ v čísle $x_0$, dostaneme funkciu, ktorej oborom definície je množina $M$ a nazývame ju *deriváciou funkcie f na množine M*. Označujeme ju $f'$, $(f)'$, $y'$ alebo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Vlastnosti:

**Veta 1.** Derivácia funkcie $f$ v čísle $x_0$ existuje vtedy a len v tedy, keď existuje $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Potom $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

**Veta 2.** Ak funkcia $f$ má v čísle $x_0$ deriváciu [deriváciu sprava, deriváciu zľava], je v čísle $x_0$ spojitá [spojitá sprava, spojitá zľava].

**Veta 3.** Nech funkcie $f$ a $g$ majú na množine $M$ deriváciu. Potom platí

$$[cf]' = cf', \quad \text{kde } c \text{ je číslo}, \tag{4}$$

$$[f + g]' = f' + g', \tag{5}$$

$$[f - g]' = f' - g', \tag{6}$$

$$[fg]' = f'g + fg', \tag{7}$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \text{kde} \quad g \neq 0. \tag{8}$$

Poznámka. Pravidlo o derivovaní súčtu dvoch funkcií možno rozšíriť na súčet konečného počtu funkcií.

**Veta 4.** Ak $n$ je prirodzené číslo a funkcie $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ majú na množine $M$ deriváciu, potom platí

$$[f_1 f_2 f_3 \ldots f_n]' = f_1' f_2 f_3 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 f_3 \ldots f_{n-1} f_n'. \tag{9}$$

**Veta 5.** (Derivácia zloženej funkcie.) Nech $u = g(x)$ je funkcia, ktorá má na množine $M$ deriváciu $g'$. Nech $N$ je oborom funkčných hodnôt parciálnej funkcie $g$ definovanej na množine $M$. Nech funkcia $y = f(u)$ má na množine $N$ deriváciu $f'$. Potom aj zložená funkcia $f(g)$ má na množine $M$ deriváciu a platí

$$[f[g(x)]]' = f'[g(x)]\, g'(x). \tag{10}$$

Vzťah (10) zapisujeme aj takto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{11}$$

**Veta 6.** (Derivácia inverznej funkcie.) Nech $f$ je rýdzo monotónna na intervale $(a, b)$ a má v tomto intervale deriváciu $f' \neq 0$. Potom inverzná funkcia $f_{-1}$ k funkcii $f$ má deriváciu $f'_{-1}$ na svojom obore definície a platí

$$f'_{-1}(x) = \frac{1}{[f'(u)]_{u=f_{-1}(x)}} = \frac{1}{f'[f_{-1}(x)]}. \tag{12}$$

**Veta 7.** (Derivácie elementárnych funkcií.) Pre každé $x$ z oboru definície, pokiaľ nie je nič uvedené, platia pre derivácie elementárnych funkcií tieto vzorce:

1. $[c'] = 0$, kde $c$ je číslo;
2. $[x]' = 1$;
3. $[x^a]' = ax^{a-1}$, kde $a$ je reálne číslo;
4. $[e^x]' = e^x$;
5. $[a^x]' = a^x \ln a$;
6. $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$;
7. $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
8. $[\sin x]' = \cos x$;
9. $[\cos x]' = -\sin x$;
10. $[\mathrm{tg}\, x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $[\mathrm{cotg}\, x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pre $|x| < 1$;
13. $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pre $|x| < 1$;
14. $[\mathrm{arctg}\, x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
16. $[\sinh x]' = \cosh x$;
17. $[\cosh x]' = \sinh x$;
18. $[\mathrm{tgh}\, x]' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$;
19. $[\mathrm{cotgh}\, x]' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$.

**Veta 8.** (Logaritmické derivovanie.) Ak funkcia $f$ má na intervale $(a, b)$ deriváciu $f'$, pričom pre všetky $x \in (a, b)$ je $f(x) > 0$, potom platí

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{13}$$

čiže

$$f'(x) = f(x)\,[\ln f(x)]', \tag{14}$$

pre všetky $x \in (a, b)$.

**Príklad 1.** Z definície derivácie vypočítajme $f'(\sqrt{5})$, ak

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

*Riešenie.* Podľa vzťahu (1) je

$$f'(\sqrt{5}) = \lim_{x \to \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{5 - 1}}{x - \sqrt{5}} = \lim_{x \to \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2}{x - \sqrt{5}} =$$

$$= \lim_{x \to \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2}{x - \sqrt{5}} = \lim_{x \to \sqrt{5}} \frac{x + \sqrt{5}}{\sqrt{x^2 - 1} + 2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme $f'(1)$, ak $f(x) = x^3 - x - 13\sqrt{x} + 7$.

*Riešenie.* Najprv nájdeme $f'(x)$. Použijeme poznámku za vetou 3 a vzorce 1, 2, 3 z vety 7. Funkcie $x^3$, $x$, $\sqrt{x}$, 7 majú deriváciu na intervale $(0, \infty)$. Preto je

$$f'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{13}{2\sqrt{x}}, \qquad \text{pre všetky } x \in (0, \infty).$$

Z toho pre $x = 1$ je

$$f'(1) = 3 \,.\, 1^2 - 1 - \frac{13}{2\sqrt{1}} = -\frac{9}{2}.$$

**Príklad 3.** Vypočítajme deriváciu funkcie

$$f(x) = x^4 \cos x.$$

*Riešenie.* Použijeme vetu 3 a vzorce 3, 9 z vety 7. Funkcie $x^4$, $\cos x$ majú derivácie v intervale $(-\infty, \infty)$. Preto platí

$$f'(x) = (x^4)' \cos x + x^4 (\cos x)' = 4x^3 \cos x + x^4(-\sin x) = x^3(4 \cos x - x \sin x),$$

pre všetky čísla $x \in (-\infty, \infty)$.

**Príklad 4.** Vypočítajme $f'$, ak

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

*Riešenie.* Použijeme vetu 3 a vzorce 2, 6 z vety 7. Dostaneme

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{(1/x) x - (\ln x) \,.\, 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

pre každé číslo $x \in (0, \infty)$.

**Príklad 5.** Vypočítajme $f'$, ak

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 12}.$$

*Riešenie.* Daná funkcia je zložená funkcia. Jej zložky sú $u = g(x)$, $g(x) = x^2 - 2x + 12$ a $f(u) = \sqrt{u}$. Obe majú deriváciu. Obor hodnôt funkcie $g(x)$ je interval $\langle 1, \infty)$ a je časťou oboru definície funkcie $f(u)$. Podľa vety 5 dostaneme

$$f'(x) = (\sqrt{u})'_{u=g(x)} g'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)_{u=x^2-2x+12} (2x - 2) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 12}},$$

pre každé číslo $x \in (-\infty, \infty)$.

**Príklad 6.** Vypočítajme deriváciu funkcie

$$f(x) = 4 \operatorname{arctg}^3 (3x - 7).$$

*Riešenie.* Daná funkcia je zložená funkcia definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$. Jej zložky sú $u = g(x)$, $g(x) = 3x - 7$, $y = h(u)$, $h(u) = \operatorname{arctg} u$, $f(y) = 4y^3$. Derivácie zložiek sú $\dfrac{dg}{dx} = 3$ pre všetky čísla $x$, $\dfrac{dh}{du} = \dfrac{1}{1+u^2}$ pre všetky čísla $u$ a $\dfrac{df}{dy} = 12y^2$ pre všetky čísla $y$. Podmienky vety o derivácii zloženej funkcie sú splnené. Preto je

$$f'(x) = \left(\frac{df}{dy}\right)_{y=h(u)} \left(\frac{dh}{du}\right)_{u=g(x)} \left(\frac{dg}{dx}\right) = (12y^2)_{y=h(u)} \left(\frac{1}{1+u^2}\right)_{u=g(x)} . 3,$$

čiže

$$f'(x) = \frac{36}{9x^2 - 42x + 50} \operatorname{arctg}^2 (3x - 7),$$

pre všetky čísla $x$.

**Príklad 7.** Vypočítajme deriváciu funkcie

$$f(x) = (\cos x)^{\operatorname{cotg} x}, \qquad x \in (0, \pi/2).$$

*Riešenie.* Použijeme pravidlo o logaritmickom derivovaní. Pre všetky čísla $x \in (0, \pi/2)$ je

$$\ln f(x) = \operatorname{cotg} x \,.\, \ln \cos x.$$

Podľa vzťahu (13) je

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{\sin^2 x} \ln \cos x + \operatorname{cotg} x \frac{1}{\cos x} (-\sin x).$$

Z toho dostaneme

$$f'(x) = -(\cos x)^{\operatorname{cotg} x} \left(\frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} + 1\right)$$

pre všetky čísla $x \in (0, \pi/2)$.

**247.** Pomocou definície nájdite deriváciu funkcie $f$ v čísle $x_0$.

a) $f(x) = x^3 - 3$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = \pi/4$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x_0 = 2$;
d) $f(x) = (x+2)^2 x(x-5)^3$, $x_0 = -2;\ 0;\ 5$;
e) $f(x) = x^3 \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;
f) $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $x_0 = 1$.

**248.** Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $f$, ak

a) $f(x) = x^2$;
b) $f(x) = 1/\sqrt{x}$;
c) $f(x) = 1/x$;
d) $f(x) = \sqrt{4x+1}$;
e) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
f) $f(x) = E(x)$.

**249.** Daná je funkcia $y = f(x)$. Nájdite $f'(0)$, $f'(-2)$, $f'(x)$, ak

a) $y = x^{13}$;
b) $y = x^{-3}$;
c) $y = 1/x^2$;
d) $y = \sqrt[3]{x^{11}}$;
e) $y = x^{3/5}$;
f) $y = \sqrt[3]{1/x^2}$;
g) $y = x\sqrt{x}$;
h) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;
i) $y = 2x^{-1}/\sqrt[3]{x^4}$.

**250.** Vypočítajte:

a) $y'(0)$, $y'(1/2)$, ak $y = x^4/4 - x^2/2 + 1$;

b) $y'(1)$, $y'(-1)$, ak $y = x^5 - 2x^3/3 + 1{,}5x^2 - 0{,}12$;

c) $y'(0)$, $y'(-1/3)$, ak $y = 3^5 - 3^4 + x^2$;

d) $y'(a)$, ak $y = ax^3 + a^2x^2 + a^3x$.

V úlohách **251** až **255** nájdite derivácie daných funkcií.

**251.** a) $y = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[9]{x}$;

b) $y = x^3 + 4x^3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$;

c) $y = 2{,}5t^{-2/5} - \dfrac{1}{8{,}4t^{2,1}} + \dfrac{11}{\sqrt[11]{t^6}}$;

d) $y = \dfrac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$;

e) $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$;

f) $y = \dfrac{4x^7 + 3x^5 - 2x^4 + 7x - 2}{3x^4}$.

**252.** a) $y = (x^3 + 8)(x - 2)$;

b) $y = (x^3 - 2x + 1)(x^4 - 5x^2 + 10)$;

c) $y = \sqrt{x}(2x^3 - 0{,}5\sqrt[5]{x^4} + \sqrt{7})$;

d) $y = (x - 2)^3 + 0{,}5^2$;

e) $y = x^2(x^3 - 1)^2$;

f) $y = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$;

g) $y = (x \sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$, kde $\alpha$ je číslo

**253.** a) $y = \dfrac{1 - x^4}{\sqrt[3]{\pi}}$;

b) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$;

c) $y = \dfrac{1}{x^3 - 1}$;

d) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

e) $y = \dfrac{3x^4 - 2x\sqrt[4]{x^3} - 0{,}5x^2 - \sqrt{2}}{x^3}$;

f) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 + 2}$;

g) $y = \dfrac{1}{1 + t + t^2}$;

h) $u = \dfrac{av^2 + 1}{v - 1}$, kde $a$ je číslo.

**254.** a) $y = \dfrac{x}{3(x^5+1)} + (x^3-1)(x^3+1)$;

b) $y = \dfrac{3}{2(x^2+1)} + \dfrac{4}{3(x^3+1)} + x(x^2-1)^2$;

c) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$;

d) $y = \dfrac{(x+1)(x^3-2x)}{(x^2+1)(x^3-1)}$.

**255.** a) $y = (2+3x)^{17}$;

b) $y = (5x^4 - 3x^3 + 2x - 11)^6$;

c) $y = (\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})^{100}$;

d) $y = (1 + 2\sqrt{t} - 3t^{-2})^4$;

e) $y = \sqrt{4-x^2}$;

f) $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$;

g) $y = \sqrt[3]{(2x+3)^2}$;

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6s-s^2}}$;

i) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

j) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

**256.** Z rovnosti

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

nájdite súčet $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

V úlohách 257 až 261 nájdite deriváciu funkcie.

**257.** a) $y = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x}$;

b) $y = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$;

c) $y = \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$.

**258.** a) $y = x\sqrt{1+x^2}$;

b) $y = (3t^4+4)\sqrt[4]{9t^4-3}$;

c) $y = (4s-7)(3s+7)\sqrt[3]{3s+7}$;

d) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$;

e) $y = \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}}$;

f) $y = \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

**259.** a) $y = \cos(5x+3)$;

b) $y = 2\sin x + \sin 2x$;

c) $y = (1-x^2)\sin x + x\cos x$;

d) $y = \sin 2x^2$;

e) $y = \sin ax \cos bx$;

f) $y = 1/\cos x$;

g) $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

h) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{2\sin 2x}$;

i) $y = \dfrac{\cos x^2}{\cos^2 x}$.

**260.** a) $y = 3\sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x$; b) $y = 3\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^3 x$; c) $y = \operatorname{tg}[(1+x)/x]$; d) $y = \operatorname{cotg}\sqrt{x}$; e) $y = \cos\sqrt{1/(1+x)}$; f) $y = \operatorname{tg}(x^2+1)$; g) $y = (1+\operatorname{tg}^2 x)^{10}$; h) $y = \operatorname{cotg}\sqrt[5]{1+x^5}$; i) $y = \sqrt{\sin(2x/3)}$; j) $y = 2\sin^3\sqrt{3/x}$.

**261.** a) $y = \dfrac{3\operatorname{cosec} x - 2\sin x}{5\cos^5 x} - \dfrac{16}{5}\operatorname{cotg} 2x$; b) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^7 x} - \dfrac{3\cos^2 x}{\sin^3 x}$; c) $y = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$; d) $y = \sin[\sin(\sin x)]$; e) $y = \sin^3[\cos^2(\operatorname{tg} x)]$.

**262.** Pomocou rovnosti

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)}$$

nájdite súčet $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx$.

**V úlohách 263 až 273 nájdite derivácie funkcií.**

**263.** a) $y = 4^{3x}$; b) $y = 7^{-1/4x}$; c) $y = 3^{x^3}$; d) $y = 4^x - x^4$; e) $y = 2^{1/\cos x}$; f) $y = x10^{-x}$.

**264.** a) $y = e^{-x/3}$; b) $y = e^{x^5}$; c) $y = e^{ax}\cos bx$; d) $y = (\cos x)/e^x$; e) $y = e^x(x^2+2x-2)$; f) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

**265.** a) $y = e^{\sqrt{x^2+x+1}}$; b) $y = e^{\sqrt{\cos x}}$; c) $y = e^{\operatorname{arctg} 2x}$; d) $y = e^{x/\ln x}$; e) $y = \operatorname{tg} e^{x^2+2x-1}$; f) $y = CTe^{-L/RT}$, kde $C$, $L$, $R$ sú čísla.

**266.** a) $y = \ln(2x+3)$; b) $y = \log(x+2x^2)$; c) $y = \ln^4 x$; d) $y = \log_2^2 x$; e) $y = x^3\log_2 x$; f) $y = \ln\dfrac{5+4x}{3+7x}$; g) $y = \ln\sin 2x$; h) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$; i) $y = \ln(13e^x + x^3)$; j) $y = x\ln x - x$.

**267.** a) $y = \ln\operatorname{arccotg} x$; b) $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; c) $y = \ln\cos\sqrt{e^x+1}$; d) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

e) $y = \ln^4 (\operatorname{tg} x)$;
f) $y = \sqrt{\ln x^2}$;
g) $y = \sqrt[4]{\ln \operatorname{cotg} \dfrac{2x+1}{3}}$;
h) $y = \ln [\ln (\ln x)]$;
i) $y = \sqrt[3]{\ln \cos x}$;
j) $y = 3^{\ln(x^2+x+1)}$.

**268.** a) $y = \ln \dfrac{x}{1 - x^4}$;
b) $y = \ln \sqrt{\dfrac{\sqrt{3} - x\sqrt{7}}{\sqrt{3} + x\sqrt{7}}}$;
c) $y = \ln \dfrac{x^2(2x+4)^7}{(6 + 7x + 2x^2)(2x+3)^7}$.

**269.** a) $y = \arcsin \dfrac{x}{7}$;
b) $y = \arccos \dfrac{3x-1}{4}$;
c) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$;
d) $y = \operatorname{arccotg} mx$;
e) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$;
f) $y = \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{1+x^2}$.

**270.** a) $y = (\arcsin x^2 + \arccos x^2)^3$;
b) $y = \operatorname{arctg} (x - \sqrt{1 + x^2})$;
c) $y = \arcsin (\sin x)$;
d) $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$;
e) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$;
f) $y = \arccos^3 5x$.

**271.** a) $y = \arcsin^2 \dfrac{1}{x-1}$;
b) $y = \operatorname{tg} (\arcsin x)$;
c) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$;
d) $y = 2 \arcsin \sqrt{(x-2)/4}$.

**272.** a) $y = \sinh (3x + 5)$;
b) $y = x \sinh x - \cosh x$;
c) $y = \cosh x \cos x + \sinh x \sin x$;
d) $y = \dfrac{\cosh x - \cos x}{\sinh x + \sin x}$;
e) $y = \sinh^2 x + \cosh^2 x$.

**273.** a) $y = \sinh x + (\sinh^3 x)/3$;
b) $y = \ln \sinh x$;
c) $y = \sinh (\cosh x)$;
d) $y = \cos (\cosh x)$;
e) $y = e^{\operatorname{tgh} x}$;
f) $y = \operatorname{tgh}^4 x^2$;
g) $y = \sqrt[4]{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$;
h) $y = \sqrt{(1 + \operatorname{tgh}^2 x)^3}$;
i) $y = \ln \cosh x + \dfrac{1}{2 \cosh^2 x}$.

V úlohách 274 až 276 vypočítajte logaritmickým derivovaním deriváciu funkcie.

**274.** a) $y = x^x$;
b) $y = 9x^{-3x}$;
c) $y = x^{x^2}$;
d) $y = x^{e^x}$;
e) $y = x^{\sin x}$;
f) $y = x^{1/\ln x}$;
g) $y = x^{x^x}$;
h) $y = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x, \quad a \neq 0$;
i) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

**275.** a) $y = (\mathrm{tg}\, x)^{1/\cos x}$; d) $y = \log_x a$;
b) $y = (x^2 + 1)^{\mathrm{arctg}\, x}$; e) $y = (\ln x)^x$;
c) $y = (\cosh x)^{\ln x}$; f) $y = x^{\ln x}$.

**276.** a) $y = (x + 5)^2(2x + 7)^3(x - 2)(x - 3)$; d) $y = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt[6]{(7x + 4)^5}\sqrt{(x - 1)^3}}$;
b) $y = \dfrac{(x + 5)^2(x - 4)^3}{(x + 2)^5(x + 4)^2}$;
c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}}$; e) $y = \dfrac{5x^2}{x^2 + 1}\sin^3 x \cos^4 x$;

V úlohách 277 až 279 vypočítajte deriváciu funkcie.

**277.** a) $y = \ln \sin e^{2x}$; f) $y = \ln \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
b) $y = x/\mathrm{tg}\, e^x$;
c) $y = e^{\sin x} \sin x$;
d) $y = e^{ax} (\sin x + a \cos x)$; g) $y = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{x^8 - 1}{x^8 + 1}$;
e) $y = \mathrm{arccotg} \ln \dfrac{1}{x}$; h) $y = \arccos \ln x$.

**278.** a) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$;

b) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^6} - \mathrm{arctg}\, x^3$;

c) $y = \ln (1 + \mathrm{tg}^2 x) - 2 \,\mathrm{cotg}\, x \,\mathrm{arctg}\, (\mathrm{cotg}\, x)$;

d) $y = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\, \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

**279.** a) $y = x \ln (x - \sqrt{x^2 - 1}) + \sqrt{x^2 - 1}$;

b) $y = \dfrac{1}{3(1 + x^3)} + \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{x^3}{1 + x^3}$;

c) $y = \mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{2} + \ln \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$;

d) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \dfrac{\sqrt{2 + 2x^2} - x}{\sqrt{2 + 2x^2} + x} + \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

e) $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} \mathrm{arctg}\, \dfrac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}$.

**280.** Vypočítajte $f'$ a v bodoch, v ktorých derivácia neexistuje, vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava:

a) $f(x) = |x - 2|$; d) $f(x) = \ln |3 - x|$;
b) $f(x) = |x^3|$; e) $f(x) = |x - 4| - |x - 2| - |x + 1|$.
c) $f(x) = \sqrt{|x - 1|}$;

**281. Nájdite $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, ak pre funkciu $f$ platí:**

a) $f(x) = E(x) \sin \pi x$;

b) $f(x) = |\sin x^2|$;

c) $f(x) = x \sin (1/x)$ pre $x \neq 0$ a $f(0) = 0$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$ pre $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.

**282.** Nájdite deriváciu a zostrojte graf funkcie, ak

a) $y = x|x|$;

b) $y = x - E(x)$;

c) $y = (-1)^{E(x)}$;

d) $y = E(x) |\sin \pi x|$;

e) $y = |\cos x|$;

f) $y = x^2\chi(x)$, kde $\chi(x)$ je Dirichletova funkcia.

**283.** Nájdite derivácie a zostrojte graf funkcie, ak

a) $y = \begin{cases} x^2 \sin (1/x) & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0; \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x \sin (1/x) & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0; \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x & \text{pre } x < 0, \\ \ln (1 + x) & \text{pre } x \geqq 0; \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{pre } x < 1, \\ 2 - 3x + x^2 & \text{pre } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ x - 2 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$

**284.** Daný je graf funkcie $f$. Zostrojte približne graf funkcie $f'$.

**285.** Dokážte, že:

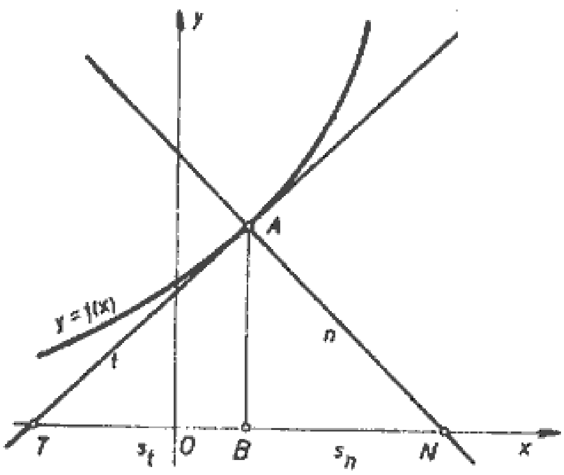
a) derivácia párnej funkcie je nepárna funkcia;

b) derivácia nepárnej funkcie je párna funkcia;

c) derivácia periodickej funkcie s periódou $l$, je periodická funkci a s periódou $l$.

## 3,2. Geometrický a fyzikálny význam derivácie

**Geometrický význam derivácie.** Derivácia funkcie $f'(x_0)$ v čísle $x_0$ je *smernica dotyčnice ku grafu funkcie* $y = f(x)$ v bode $A = (x_0, f(x_0))$. Nech $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$.




*Obr. 25*

Rovnica tejto *dotyčnice* je

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Ak $f'(x_0) \neq 0$, *rovnica normály* ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $A$ je

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

Ak dotyčnica (1) pretína os $o_x$ v bode $T$ a normála v bode $N$ (*obr. 25*), potom pre *dĺžku dotyčnice* $t = \varrho(A, T)$ a *dĺžku normály* $n = \varrho(A, N)$ platí

$$t = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right| \sqrt{1 + y_0'^2},$$

$$n = |y_0| \sqrt{1 + y_0'^2}. \tag{3}$$

Ak bod $B$ je priemet bodu $A$ do osi $o_x$ (*obr. 25*), potom pre *dĺžku subtangenty* $s_t = \varrho(B, T)$ a *dĺžku subnormály* $s_n = \varrho(B, N)$ platí

$$s_t = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|, \qquad s_n = |y_0 y_0'|. \tag{4}$$

**Fyzikálny význam derivácie.** a) Ak sa teleso pohybuje priamočiaro a pre jeho polohu $x$ v čase $t$ platí

$$x = x(t), \tag{5}$$

tak jeho *rýchlosť v čase $t$* je

$$v = \frac{dx}{dt}, \tag{6}$$

a *zrýchlenie v čase $t$* je

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{7}$$

b) Ak priebeh fyzikálnej veličiny je daný funkciou času $m = m(t)$, tak *rýchlosť zmeny tejto fyzikálnej veličiny* v čase $t$ je

$$v = \frac{dm}{dt}. \tag{8}$$

Ako príklady možno uviesť: rýchlosť rozpadu množstva rádioaktívnej látky, rýchlosť chemickej reakcie, rýchlosť rastu, intenzitu elektrického prúdu atď.,...

c) Nech fyzikálna veličina je daná funkciou $m = m(x)$, kde $x \in \langle 0, a \rangle$. *Lineárna hustota* tejto veličiny v bode $x \in (0, a)$ je

$$\varrho = \frac{dm}{dx}. \tag{9}$$

Ako príklady možno uviesť lineárnu hustotu hmoty tyče, lineárnu hustotu elektrického náboja nabitej tyče, atď.

**Príklad 1.** Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie

$$y = \ln x,$$

ak dotyčnica je rovnobežná s priamkou $x - y + 5 = 0$.

*Riešenie.* Nech $A = (x_0, y_0)$ je bod, v ktorom zostrojená dotyčnica je rovnobežná s danou priamkou. Z podmienky rovnobežnosti pre smernicu $k_1$ dotyčnice a smernicu $k_2$ danej priamky vyplýva

$$k_1 = k_2,$$

čiže

$$(\ln x)'_{x=x_0} = 1$$

a

$$\frac{1}{x_0} = 1.$$

Z toho je $x_0 = 1$ a $y_0 = \ln x_0$, čiže $y_0 = 0$.

Rovnica dotyčnice v bode $A = (1, 0)$ je

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

alebo

$$x - y - 1 = 0.$$

Rovnica normály je

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x - 1),$$

čiže

$$x + y - 1 = 0.$$

**Príklad 2.** Raketa odpálená zo Zeme sa pohybuje kolmo nahor tak, že pre jej vzdialenosť $x$ [km] od Zeme platí

$$x = 20 + 110t - 18t^2,$$

kde $t$ je čas v minútach počítaný od okamihu, keď motory rakety prestali pôsobiť.

Nájdime rýchlosť rakety v čase $t = 3$ min, čas, v ktorom sa pohyb rakety nahor skončí a najväčšiu výšku, ktorú raketa dosiahne.

*Riešenie.* Rýchlosť rakety v čase $t$ vyjadrená v km/min je

$$v = x'(t) = 110 - 36t. \tag{10}$$

Pre $t = 3$ min je $v = 2$ km/min $= 33,\dot{3}$ m/s. Pohyb nahor sa skončí v čase $t_0$, pre ktorý je $v_0 = 0$. Zo vzťahu (10) dostaneme

$$110 - 36t_0 = 0,$$

$$t_0 = 3,05 \text{ min.}$$

Zároveň v tomto čase dosiahne raketa najväčšiu výšku

$$x_{\max} = 20 + 110 \,.\, 3,0\dot{5} - 18 \,.\, 3,0\dot{5}^2 = 188,0\dot{5} \text{ km}.$$

**Príklad 3.** Kondenzátor s kapacitou $C$ sa vybíja cez odpor $R$. Nájdime intenzitu prúdu v čase $t$, ak pre náboj na doskách kondenzátora platí

$$Q = 0,001 \text{ e}^{-t/5},$$

kde náboj $Q$ je vyjadrený v coulomboch a čas $t$ v sekundách. Zistime, za aký čas klesne intenzita prúdu na polovicu svojej počiatočnej hodnoty.

*Riešenie.* Intenzita elektrického prúdu v ampéroch je

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = (0,001 \text{ e}^{-t/5})' = -0,000\,2 \text{ e}^{-t/5}.$$

Pre $t = 0$ máme

$$i_0 = -0,000\,2 \text{ A} = -0,2 \text{ mA}.$$

Čas v sekundách, za ktorý klesne intenzita elektrického prúdu na polovicu, nájdeme z podmienky

$$\frac{i_0}{2} = -0,000\,2 \text{ e}^{-t/5},$$

čiže

$$\frac{1}{2} = \text{e}^{-t/5}$$

alebo

$$t = 5 \ln 2 \doteq 3,47.$$

**286.** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku:

a) parabole $y = x^2$ v bode $P = (2, ?)$;

b) hyperbole $y = 12/x$ v bode $P = (3, ?)$;

c) parabole $y = x^2 + 4x + 1$ v bode $P = (0, ?)$.

**287.** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $A$, ak

a) $y = \sqrt{x}$, $A = (5, ?)$; b) $y = x^3 + 2x$, $A = (1, ?)$;

c) $y = \dfrac{3x - 4}{2x - 3}$, $A = (2, ?)$; e) $y = \ln(x + 1)$, $A = (0, ?)$;

d) $y = 2\sqrt{2} \sin x$, $A = (\pi/4, ?)$; f) $y = e^{-x} \cos 2x$, $A = (0, ?)$.

**288.** Zistite, v ktorom bode je dotyčnica ku grafu funkcie $y = f(x)$ rovnobežná:

a) s osou $o_x$, ak $y = x^3 - 3x$;

b) s osou $o_x$, ak $y = (\ln x)/x$;

c) s priamkou $y = 5x - 2$, ak $y = 10^x$.

**289.** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, ak dotyčnica:

a) je rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$;

b) je kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$;

c) zviera s priamkou $2x + y - 2 = 0$ uhol $\pi/4$.

**290.** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = f(x)$, pričom dotyčnica je rovnobežná s priamkou:

a) $2x - y - 3 = 0$ a $f(x) = \ln x$; c) $x - y - 5 = 0$ a $f(x) = \sinh x$.

b) $x - 2y + 1 = 0$ a $f(x) = e^x/2 + 1$;

**291.** Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie:

a) $y = x \ln x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $2x - 2y + 3 = 0$;

b) $y = x^2 - 2x + 3$, ktorá je kolmá na spojnicu vrcholu danej paraboly s bodom $A = (2, 0)$.

**292.** Vysokonapäťové elektrické vedenie má rozpätie medzi stožiarmi 80 m. Tvar zaveseného vodiča udáva parabola $y = 0{,}001x^2$, pričom jej vrchol je rovnako vzdialený od oboch stožiarov. Nájdite uhol medzi vodičom a stožiarom.

**293.** Nájdite také číslo $a$, aby sa priamka $y = x$ dotýkala grafu funkcie $y = a^x$. Nájdite dotykový bod.

**294.** Dokážte, že dotykový bod k hyperbole $y = c/x$ je stredom úsečky určenej priesečníkmi tejto dotyčnice so súradnicovými osami.

**295.** Dokážte, že pri hyperbole $xy = a$ sa obsah trojuholníka vytvoreného dotyčnicou hyperboly a súradnicovými osami rovná obsahu štvorca, ktorého dva susedné vrcholy sú stred a jeden vrchol hyperboly.

**296.** Zistite, v ktorom bode dotyčnica ku kubickej parabole $y = x^3/3$ zviera s osou $o_x$ uhol:

a) $\pi/4$; b) $\pi/6$; c) 0.

**297.** Vypočítajte uhol, pod ktorým pretína graf funkcie $y = f(x)$ os $o_x$, ak

a) $y = \sin x$; d) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$;

b) $y = \ln(x - 1)$; e) $y = e^x - 1$.

c) $y = \operatorname{tg} 2x$;

**298.** Nájdite také číslo $b$, aby graf funkcie $y = (bx - x^3)/4$ pretínal os $o_x$ pod uhlom $\pi/4$.

**299.** Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú grafy funkcií:

a) $y = x^2$, $y = x^3$; c) $y = \sin x$, $y = \cos x$;

b) $y = 1/\sqrt{x}$, $y = 2 - \sqrt{x}$; d) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

**300.** Určte dĺžku dotyčnice, normály, subnormály a subtangenty ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $A$, ak

a) $y = 2\sqrt{x}$, $A = (1, ?)$; c) $y = 2^x$, $A = (1, ?)$.

b) $y = x^3 - 2x$, ak $A = (1, ?)$;

**301.** Dokážte, že súčet subtangenty a dĺžky dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = \ln (x^2 - 1)$ v jeho ľubovoľnom bode $M = (x_0, y_0)$ sa rovná súčinu $|x_0 y_0|$.

**302.** Nájdite dĺžku normály ku grafu funkcie $f(x) = a \cosh (x/a)$ [reťazovka] v jeho ľubovoľnom bode $A = (x_0, y_0)$.

**303.** Dokážte, že dĺžka subnormály paraboly $y^2 = x$ v jej ľubovoľnom bode je konštantná.

**304.** Dokážte, že dĺžka subtangenty grafu funkcie $f(x) = ba^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, kde $b$, $c$ sú čísla, je konštantná.

**305.** Dokážte, že dĺžka subtangenty paraboly $n$-tého rádu $y = x^n$ je $(1/n)$-násobná časť absolútnej hodnoty $x$-ovej súradnice dotykového bodu. Na základe tohto navrhnite konštrukciu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^n$.

**306.** Na grafe funkcie $f(x) = x^2 - 2x + 5$ nájdite bod, v ktorom $y$-ová súradnica rastie štyrikrát rýchlejšie ako $x$-ová súradnica.

**307.** Balón guľového tvaru v dôsledku porušenia svojho obalu zmenšuje rovnomerne svoj priemer o 2 cm za sekundu. Vypočítajte, akou rýchlosťou sa zmenšuje jeho objem, keď polomer balóna je $r = 16$ m.

**308.** Priamočiary pohyb telesa je určený rovnicou $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$, kde $s$ je vyjadrené v metroch a $t$ v sekundách. Zistite, v ktorom čase je rýchlosť telesa nulová.

**309.** Lietadlo sa pohybuje priamočiare tak, že jeho vzdialenosť v km od miesta štartu je $s = 16(t^4 - 16t^3 + 64t^2)$, $0 \leqq t \leqq 8$, kde $t$ je čas v hodinách. Nájdite jeho vzdialenosť, rýchlosť a zrýchlenie v čase $t_1 = 2$ h a $t_2 = 5$ h. Kedy sa lietadlo zastaví a zmení smer letu? Akú najväčšiu vzdialenosť dosiahne od miesta štartu?

**310.** Keď teleso vyhodíme zvisle nahor s počiatočnou rýchlosťou $v_0$ ms$^{-1}$, výška telesa nad povrchom počítaná v metroch je $s = v_0 t - 4{,}9t^2$, kde $t$ je čas v sekundách. Ak $v_0 = 100$ ms$^{-1}$, nájdite:

a) rýchlosť v čase $t = 2$ s;

b) rýchlosť v čase $t = 15$ s;

c) za aký čas dosiahne teleso najväčšiu výšku;

d) akú najväčšiu výšku teleso dosiahne.

**311.** Vlak vychádza zo stanice, pričom jeho pohyb je určený rovnicou $s = at^2 + bt + c$, kde $s$ je dĺžka dráhy v km, $t$ čas v hodinách. Po uplynutí jednej minúty vlak dosiahne rýchlosť 60 km/h. Akú veľkú dráhu prejde, kým dosiahne túto rýchlosť?

**312.** Teleso prejde za čas 10 s po naklonenej rovine dráhu dlhú 50 m. Ak predpokladáme, že dráha je kvadratická funkcia času a že počiatočná rýchlosť telesa sa rovná nule, vypočítajte, aká je jeho konečná rýchlosť.

**313.** Teleso kmitá v priamke, pričom pre jeho výchylku z rovnovážnej polohy platí $u = 2 \cos 2\pi t - 3 \sin 2\pi t$, kde $u$ je v cm a $t$ v sekundách. Nájdite jeho rýchlosť, zrýchlenie a výchylku v čase 1,75 s. Nájdite čas, v ktorom má teleso nulovú rýchlosť, a najväčšiu výchylku z rovnovážnej polohy.

**314.** Z mimoúrovňovej križovatky s výškovým rozdielom 6 m štartujú naraz dve autá. Prvé sa pohybuje priamo na sever, druhé priamo na východ. Zistite akou rýchlosťou sa vzďaľujú od seba, keď prvé má rýchlosť 30 km/h a druhé 40 km/h.

**315.** Na mori križujú dve lode svoju dráhu pod pravým uhlom. Keď prvá z nich je v priesečníku ich dráh, druhá je ešte od neho vzdialená 20 km. Prvá loď sa pohybuje rýchlosťou $v = 30$ km/h, druhá loď rýchlosťou $v = 50$ km/h. Vypočítajte a) rýchlosť, s akou sa vzďaľujú, b) rýchlosť, s akou sa mení ich vzdialenosť, ak ich pohyby sú rovnomerné priamočiare. Nájdite ich najmenšiu vzdialenosť.

**316.** Brankár, ktorý stojí pri pravej žrdi bránky, hodil sa po lopte rýchlosťou 6 m/s vo chvíli, keď lopta vystrelená zo vzdialenosti 20 m od bránky letela kolmo na bránku k jej ľavej žrdi rýchlosťou 30 m/s. Zistite, akou rýchlosťou sa mení vzdialenosť medzi loptou a brankárom, ak dĺžka bránky je 7,25 m.

**317.** Pouličná lampa visí 6 m nad zemou. Človek 1,80 m vysoký kráča rýchlosťou 1,6 m/s. Zistite:

a) akou rýchlosťou sa pohybuje tieň jeho hlavy;
b) akou rýchlosťou sa mení dĺžka jeho tieňa.

**318.** Rebrík 13 m dlhý sa jedným koncom $A$ opiera o stenu, druhým koncom $B$ o podlahu. Bod $B$ sa vzďaľuje od steny rýchlosťou 1,6 m/min. Zistite akou rýchlosťou sa pohybuje bod $A$ v čase, keď bod $B$ je vzdialený od steny 5 m.

**319.** Maják je 5 km vzdialený od brehu. Jeho reflektor sa otáča vo vodorovnej rovine o 360° za jednu minútu. Vypočítajte rýchlosť $v$ svetelného lúča, ktorý sa pohybuje po brehu v čase, keď lúč zviera s pobrežím uhol 60°. Predpokladáme, že breh je priamočiary.

**320.** Množstvo elektrického náboja, ktorý prechádza vodičom, mení sa podľa vzťahu $Q = Q(t)$, kde $Q$ je dané v coulomboch a $t$ v sekundách. Vypočítajte intenzitu elektrického prúdu v čase $t_0$ a zistite, kedy sa bude rovnať intenzite $i_1$, ak

| | | |
|---|---|---|
| a) $Q(t) = 3t^2 + 2t + 2$, | $t_0 = 0;\ 1;\ 5$ s, | $i_1 = 20$ A; |
| b) $Q(t) = 2te^{-t}$, | $t_0 = 0$ s, | $i_1 = 0$ A; |
| c) $Q(t) = 0{,}05t + 0{,}04 \sin(100\pi t + 20)$, | $t_0 = 7{,}5$ s, | $i_1 = 0{,}9$ A. |

**321.** V indukčnej cievke preteká prúd $i$, pre ktorý platí $i = 15 \sin^5 3t$, kde prúd $i$ je v ampéroch a čas $t$ v sekundách. Vypočítajte indukovanú elektromotorickú silu $e_i = -L \dfrac{di}{dt}$ v čase $t = 2\pi/9$ s, ak $L = 0{,}03$ H.

**322.** Nájdite rýchlosť chemickej reakcie, ak pre množstvo látky, ktorá vzniká pri reakcii, platí:

a) $x = A(1 - e^{-kt})$;  b) $x = AB \dfrac{e^{Akt} - e^{Bkt}}{Ae^{Akt} - Be^{Bkt}}$,

pričom $A$, $B$, $k$ sú konštanty a $t$ je čas v sekundách.

**323.** Roztok modrej skalice je v trubici s konštantným prierezom $q = 1$ cm². Množstvo modrej skalice, ktoré je medzi dnom $x = 0$ a prierezom vo výške $x$ nad dnom, je dané vzťahom $m(x) = 2x + 32(1 - e^{-3x})$, $0 \leq x \leq 1$, kde $m$ je v gramoch a výška $x$ v metroch. Nájdite koncentráciu roztoku v polovičnej výške trubice, $x = 0{,}5$ m.

**324.** Na jednoduchý nosník dĺžky $l = 10$ m, pôsobí rovnomerné zaťaženie $q = 1$ Mp/m. Ohybový moment v priereze vzdialenom od ľavého konca o $x$ metrov je $M = qx(l - x)/2$, $0 \leqq x \leqq 10$. Nájdite posúvajúcu silu v priereze, pre ktorý je $x = 8$ m. Zistite, v ktorom priereze je ohybový moment najväčší.

**325.** Pri prestupe tepla múrom hrúbky 40 cm je teplota v mieste, ktoré je vzdialené od vonkajšej strany múra $x$ m, daná vzťahom $T = 20[\sinh x + \sinh (x - 0{,}4)]$, $0 \leqq x \leqq 0{,}4$, kde teplota $T$ je v °C. Zistite tepelný spád pre:

a) $x = 10$ cm; b) $x = 20$ cm; c) $x = 30$ cm.

Konštanta tepelnej vodivosti muriva je $\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$ kcal . cm$^{-1}$ . s$^{-1}$ . deg$^{-1}$.

## 3,3. Derivácie vyšších rádov

Nech funkcia $(f')'$ je definovaná na množine $M$. *Deriváciou druhého rádu* alebo *druhou deriváciou funkcie* $y = f(x)$ nazývame funkciu $(f')'$, t. j. deriváciu prvej derivácie funkcie $y = f(x)$. Označujeme ju $f''$ alebo $y''$ alebo $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

*Deriváciou n-tého rádu* alebo *n-tou deriváciou* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) funkcie $y = f(x)$ nazývame deriváciu $(n - 1)$-ej derivácie funkcie $y = f(x)$, ak tieto existujú. Derivácie vyšších rádov označujeme takto

$$f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}$$

alebo

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}$$

alebo

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{dy^5}{dx^5}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Vlastnosti:

**Veta 1.** (Leibnizova formula.) Ak funkcie $u$, $v$ majú derivácie až po rád $n$ vrátane, potom platí

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

**Veta 2.** Platí:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{pre} \quad x(-\infty, \infty);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{pre} \quad x(-\infty, \infty);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m - 1)(m - 2) \ldots (m - n + 1)\, x^{(m-n)},$$

kde $m$ je prirodzené číslo, pričom $m \geqq n$; ak $m < n$, tak $(x^m)^{(n)} = 0$;

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (a > 0);$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}, \quad \text{pre} \quad x \in (0, \infty).$$

**Príklad 1.** Daná je funkcia $y = e^{-x^2}$. Vypočítajme $y''(0)$.

*Riešenie.* Vypočítajme najprv prvú deriváciu $y'$. Máme

$$y' = -2x\, e^{-x^2} \quad \text{pre} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Podľa definície druhej derivácie je

$$y'' = [y']' = [-2x\,e^{-x^2}]' = -2\,e^{-x^2} + 4x^2\,e^{-x^2} = (4x^2 - 2)\,e^{-x^2}$$

pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$. Pre $x = 0$ platí $y''(0) = -2$.

**Príklad 2.** Vypočítajme deriváciu $n$-tého rádu funkcie

$$y = \ln(1 + 2x).$$

*Riešenie.* Pre všetky čísla $x > -1/2$ platí

$$y' = \frac{2}{1 + 2x},$$

$$y'' = \left[\frac{2}{1 + 2x}\right]' = \frac{-2^2}{(1 + 2x)^2},$$

$$y''' = (y'')' = \left[\frac{-2^2}{(1 + 2x)^2}\right]' = \frac{2^3 \,.\, 2!}{(1 + 2x)^3},$$

$$y^{(4)} = (y)''' = \left[\frac{2^3 \,.\, 2!}{(1 + 2x)^3}\right]' = \frac{-2^4 \,.\, 3!}{(1 + 2x)^4}.$$

Úplnou indukciou dokážeme, že

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}\,2^n(n - 1)!}{(1 + 2x)^n}. \tag{1}$$

1. Vzťah (1) platí pre $n = 1$.
2. Predpokladajme, že vzťah (1) platí pre $n = k$, ukážeme, že potom platí aj pre $n = k + 1$. Máme

$$y^{(k+1)} = [y^k]' = \left[\frac{(-1)^{k+1}\,2^k(k - 1)!}{(1 + 2x)^k}\right]' = \frac{(-1)^{k+1}\,2^k(k - 1)!}{(1 + 2x)^{k+1}}(-2k) = \frac{(-1)^{k+2}\,2^{k+1}k!}{(1 + 2x)^{k+1}},$$

čo je vzťah (1) pre $n = k + 1$. Z vety o matematickej indukcii vyplýva, že (1) platí pre každé prirodzené číslo $n$.

**Príklad 3.** Vypočítajme deriváciu deviateho rádu funkcie

$$y = x^3 \sin x.$$

*Riešenie.* Položme $u = \sin x$, $v = x^3$. Keďže $v^{(n)} = 0$ pre $n = 4, 5, 6, \ldots$, podľa vety 1 a vety 2 dostaneme

$$y^{(9)} = (uv)^{(9)} = (\sin x)^{(9)}\,x^3 + \binom{9}{1}(\sin x)^{(8)}\,(x^3)' + \binom{9}{2}(\sin x)^{(7)}\,(x^3)'' + \binom{9}{3}(\sin x)^{(6)}\,(x^3)''' =$$
$$= x^3 \sin(x + 9\pi/2) + 27x^2 \sin(x + 8\pi/2) + 216x \sin(x + 7\pi/2) + 504 \sin(x + 6\pi/2) =$$
$$= x^3 \cos x + 27x^2 \sin x - 216\,x \cos x - 504 \sin x,$$

pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$.

**326.** Vypočítajte $y''(0)$, $y''(1)$, ak

a) $y = x^5 - 7x^2 + 12$;

b) $y = x\sqrt{x^2 + 3}$;

c) $y = \operatorname{tg} 2x$;

d) $y = x e^{-x^2}$.

**327.** Vypočítajte $y''$, ak

a) $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$;

b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

c) $y = x(\ln x - 1)$;

d) $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

**328.** Daná je funkcia $f$. Nájdite $f''$ a zistite, či existuje $f''(0)$, ak

a) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, ak $x \neq 0$ a $f(0) = 0$; b) $f(x) = |x^3|$.

**329.** Nájdite druhú a tretiu deriváciu funkcie $y = f[g(x)]$, ak funkcie $f$ a $g$ majú na príslušných množinách tretiu deriváciu.

**330.** Ukážte, že pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y^{(4)} + 4y = 0$, ak $y = e^{-x} \cos x$;
b) $y'' = 1 - (y')^2$, ak $y = \ln |c_1 e^x + c_2 e^{-x}|$;
c) $y'' + y = 1/\cos x$, ak $y = x \sin x + \cos x \,.\, \ln \cos x$.

**331.** Funkcia $f$ má na množine $M$ derivácie $f'$, $f''$, $f'''$. Inverzná funkcia $f_{-1}$ k funkcii $f$ existuje a má na množine $N$ derivácie $f'_{-1}$, $f''_{-1}$, $f'''_{-1}$. Vyjadrite $f''_{-1}$, $f'''_{-1}$ pomocou $f'$, $f''$, $f'''$.

**332.** Vypočítajte:

a) $f^{(4)}$, ak $f(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^2$;
b) $f^{(4)}$, ak $f(x) = 3/x^{11}$;
c) $f''$, ak $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$;
d) $f^{(7)}$, ak $f(x) = x^2(1 - 3x)^4(x + 1)$;
e) $f'''$, ak $f(x) = (1 + x)^6$;
f) $f^{(200)}$, ak $f(x) = (1 - x)/\sqrt{1 + x}$.

**333.** Vypočítajte:

a) $y^{(6)}$, ak $y = a^x$;
b) $y^{(4)}$, ak $y = \log_a x$;
c) $y''$, ak $y = \operatorname{tg} x$;
d) $y'''$, ak $y = \operatorname{arctg} x$.

**334.** Vypočítajte:

a) $f^{(4)}$, ak $f(x) = x^3 e^x$;
b) $f^{(5)}$, ak $f(x) = x^4 \ln x$;
c) $f'''$, ak $f(x) = x^2 \sin 2x$;
d) $f^{(100)}$, ak $f(x) = x \cosh x$;
e) $f^{(20)}$, ak $f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x$.

**335.** Pomocou Leibnizovej formuly vypočítajte:

a) $y^{(5)}$, ak $y = e^x \cos x$;
b) $y^{(6)}$, ak $y = x^4 e^{2x}$;
c) $y^{(n)}$, ak $y = x^2 e^x$;
d) $y^{(5)}$, ak $y = e^{4x} \sin 3x$.

**336.** Nájdite $y^{(n)}$, ak

a) $y = \sqrt{x}$;
b) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$;
c) $y = x^{n-1} \ln x$;
d) $y = \sin^2 x$;
e) $y = \cos^3 x$;
f) $y = x \cos 2x$;
g) $y = \cosh^4 x - \sinh^4 x$.

**337.** Nájdite $f^{(n)}(0)$, ak

a) $f(x) = \arcsin x$;
b) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$.

**338.** Vypočítajte deriváciu $n$-tého rádu funkcie $f$, ak

a) $f(x) = (a + bx)^m$; c) $f(x) = 1/\sqrt{a + bx}$;

b) $f(x) = 1/(a + bx)$; d) $f(x) = \sin px$.

**339.** Dokážte, že platí

$$(x^{n-1} e^{1/x})^{(n)} = \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}} \quad \text{pre všetky} \quad x \neq 0.$$

**340.** Dokážte, že pre funkciu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pre} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0 \end{cases}$$

platí $f^{(n)}(0) = 0$.

**341.** Vypočítajte rýchlosť a zrýchlenie telesa, ktoré sa pohybuje po priamke, ak jeho poloha je daná vzťahom $x = A e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$. Ukážte, že pre rýchlosť a zrýchlenie platí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0.$$

**342.** Nájdite zrýchlenie lode a silu pôsobiacu na loď, ktorá pláva priamočiare k brehu po vypnutí motorov iba svojou zotrvačnosťou. Jej vzdialenosť od brehu sa mení podľa vzťahu

$$x = h - \frac{m}{r} \ln \left(1 + \frac{rv_0}{m} t\right),$$

kde $h$ je vzdialenosť lode od brehu, $v_0$ rýchlosť lode pri vypnutí motorov, $m$ hmotnosť lode a $r$ súčiniteľ odporu vody.

## 3,4. Diferenciál a diferenciály vyšších rádov funkcie jednej reálnej premennej

Nech čísla $x_0, x_1$ sú z oboru definície funkcie $f$. Rozdiel $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ nazývame *diferenciou funkcie $f$ patriacou k číslam $x_0$ a $x_1$*, alebo *prírastkom funkcie $f$* pre prírastok $h = x_1 - x_0$ v čísle $x_0$. Platí

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0). \tag{1}$$

Nech funkcia $f$ má v čísle $x_0$ deriváciu. *Diferenciálom funkcie $f$ v čísle $x_0$ pre prírastok $x - x_0$* nazývame výraz $f'(x_0)(x - x_0)$ a označujeme ho $df(x_0, x)$ alebo $df(x_0)$, niekedy len $df$. Platí

$$df(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Ak funkcia $f$ má v čísle $x_0$ diferenciál, potom hovoríme, že je diferencovateľná v čísle $x_0$.

**Geometrický význam diferencie a diferenciálu $f$ v čísle $x_0$** (pozri *obr. 26*). Diferencia funkcie $f$ v čísle $x_0$ pre prírastok $x - x_0$ je rozdiel $y$-ových súradníc bodov $P = (x, f(x))$ a $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Zostrojme dotyčnicu ku grafu funkcie $f$ v bode $P_0$. Diferenciál $df(x_0, x)$ je rozdiel $y$-ovej súradnice bodu $T = (x, y)$ na dotyčnici a $y$-ovej súradnice bodu $P_0 = (x_0, f(x_0))$ na grafe funkcie.

Ak funkcia $f$ má v čísle $x_0$ deriváciu $f^{(n)}(x_0)$, potom *diferenciálom rádu $n$ funkcie $f$ v čísle $x_0$ pre prírastok $x - x_0$* nazývame výraz $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ a označujeme ho $d^n f(x_0)$ alebo niekedy len $d^n f$. Teda je

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \tag{3}$$

Vlastnosti:

**Veta 1.** Diferenciál funkcie $f(x) = x$ v ľubovoľnom čísle $x_0$ je

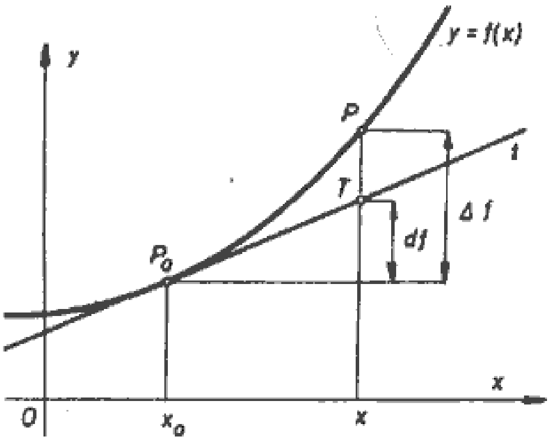
$$dx = x - x_0.$$

**Veta 2.** Ak funkcia $f$ má v čísle $x$ deriváciu $f'(x)$, potom platí

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{4}$$

**Veta 3.** Ak funkcia $f$ má v čísle $x$ deriváciu $f^{(n)}(x)$, potom platí

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,(dx)^n. \tag{5}$$




*Obr. 26*

Poznámka. Pre diferenciál súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcií $f$ a $g$ platia podobné vzťahy ako pre deriváciu ich súčtu, rozdielu, súčinu a podielu, pričom namiesto derivácií vystupujú diferenciály týchto funkcií.

**Veta 4.** Ak funkcia $f$ má v čísle $x_0$ deriváciu, potom platí

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \varrho(x)\,(x - x_0), \tag{6}$$

pričom $\varrho(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$, $\varrho(0) = 0$ a $\lim\limits_{x \to x_0} \varrho(x) = 0$.

*Dôsledok.* Platí

$$\Delta f(x) \doteq df(x)$$

čiže

$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0) \tag{7}$$

s absolútnou chybou $\delta = |f(x) - f(x_0) - df(x_0)| = |\Delta f(x_0) - df(x_0)|$ a *relatívnou chybou* $\varepsilon = \dfrac{\delta}{|f(x_0)|}$.

**Príklad 1.** Vypočítajme diferenciu a diferenciál funkcie $f(x) = 2x^2 - 2$ v čísle $x_0 = 3$ pre prírastok $x - x_0 = 0{,}01$.

*Riešenie.* Vypočítajme najskôr diferenciu. Z rovnosti $x - x_0 = 0{,}01$ máme $x = x_0 + 0{,}01 = 3{,}01$. Potom

$$\Delta f = f(3{,}01) - f(3) = [2(3{,}01)^2 - 2] - [2 \,.\, 3^2 - 2] = 16{,}1202 - 16 = 0{,}1202.$$

Keďže $f'(3) = (2x^2 - 2)'_{x=3} = (4x)_{x=3} = 12$, dostaneme podľa vzťahu (2)

$$df(3;\, 0{,}01) = f'(3) \,.\, 0{,}01 = 12 \,.\, 0{,}01 = 0{,}12.$$

**Príklad 2.** Ak funkcia $f(x) = \sin x$, vypočítajme:

a) $d^{13}f$ v bode $\pi/6$ pre prírastok $\pi/2$;

b) $d^{13}f$ v bode $x$ pre prírastok $dx$;

c) $d^n f$ v bode $x$ pre prírastok $dx$.

*Riešenie.* Podľa vety 2 z článku 3,3 platí:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2),$$

pre $n$ prirodzené. Pre $n = 13$ je

$$(\sin x)^{(13)} = \sin(x + 13\pi/2).$$

a) Podľa vzťahu (3) je

$$d^{13}f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right) . \left(\frac{\pi}{2}\right)^{13} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{13} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\pi^{13}}{2^{13}} = \frac{\sqrt{3} \,.\, \pi^{13}}{2^{14}};$$

b) podľa vzťahu (5) je

$$\mathrm{d}^{13} \sin x = \sin (x + 13\pi/2) (\mathrm{d}x)^{13} = \cos x (\mathrm{d}x)^{13};$$

c) podľa vzťahu (5) pre ľubovoľné prirodzené číslo $n$ je

$$\mathrm{d}^n \sin x = \sin (x + n\pi/2) (\mathrm{d}x)^n.$$

**Príklad 8.** Vypočítajme približne arctg 0,97.

*Riešenie.* Z dôsledku vety 4 vyplýva

$$\operatorname{arctg} x \doteq \operatorname{arctg} x_0 + (\operatorname{arctg} x)'_{x=x_0}(x - x_0). \tag{8}$$

Nech $x = 0{,}97$ a $x_0 = 1$, potom $\mathrm{d}x = x - x_0 = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$.
Po dosadení do vzťahu (8) dostaneme

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 \doteq \operatorname{arctg} 1 + \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)_{x=1} \cdot (-0{,}03) = \frac{\pi}{4} - \frac{0{,}03}{2} \doteq 0{,}785 - 0{,}015 = 0{,}770.$$

**343.** Nájdite prírastok funkcie $f$ a diferenciál funkcie $f$ v čísle $x_0$ pre prírastok $\Delta x$, ak:

a) $f(x) = 3x^2, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 10^{-1};$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10x - 12, \quad x_0 = 0, \quad \Delta x = 0{,}2;$

c) $f(x) = \operatorname{arccotg} x, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}2;$

d) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 2x}, \quad x_0 = 3, \quad \Delta x = -0{,}02.$

**344.** Vypočítajte diferenciál funkcie $f$ v bode $x$ pre prírastok $\mathrm{d}x$, ak platí:

a) $f(x) = 4x^2 + \sqrt[3]{x};$ c) $f(x) = x \sin 2x;$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}};$ d) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\sin x}.$

**345.** Vypočítajte diferenciál funkcie $f$ v bode $x$ pre prírastok $\mathrm{d}x$, ak platí:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x;$ c) $f(x) = 2^{-(\ln x)/x};$

b) $f(x) = x^2 a^x;$ d) $f(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}).$

**346.** Nájdite diferenciál druhého rádu súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií $f$ a $g$, ak tieto majú druhé derivácie a $g(x) \neq 0$.

**347.** Vypočítajte diferenciály vyšších rádov danej funkcie $f$ v bode $x_0$ pre prírastok $\Delta x$, ak

a) $f(x) = x^3, \quad \mathrm{d}^3 f(1), \quad \Delta x = -0{,}2;$ c) $f(x) = x^x, \quad \mathrm{d}^2 f(1), \quad \Delta x = 0{,}1;$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \mathrm{d}^2 f(0), \quad \Delta x = 0{,}1;$ d) $f(x) = \log x, \quad \mathrm{d}^4 f(2), \quad \Delta x = 0{,}25.$

**348.** Nájdite diferenciály vyšších rádov funkcie $f$ v čísle $x$ pre prírastok $\mathrm{d}x$, ak

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \mathrm{d}^3 f;$ d) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x, \quad \mathrm{d}^4 f;$

b) $f(x) = x \sin x, \quad \mathrm{d}^{10} f;$ e) $f(x) = x^n \mathrm{e}^x, \quad \mathrm{d}^n f;$

c) $f(x) = x^3 \ln \dfrac{x}{a}, \quad a > 0, \quad \mathrm{d}^4 f;$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x(1 - x)}, \quad \mathrm{d}^n f.$

**349.** Dokážte približný vzťah $\sqrt[n]{a^n + b} \doteq a + \frac{b}{na^{n-1}}$, kde $a > 0$ a $|b| \ll a$. Nájdite:

a) $\sqrt{82}$; b) $\sqrt[3]{244}$; c) $\sqrt[11]{2\,000}$.

**350.** Dokážte, že pre malé $h$ platí $(1 + h)^n \doteq 1 + nh$ a potom vypočítajte:

a) $\sqrt[4]{267}$; b) $(1{,}04)^5$; c) $\frac{5}{0{,}999\,7}$.

**351.** Pomocou diferenciálu vypočítajte približne:

a) ln 25,02; ln 24,6 ak ln 25 $\doteq$ 3,2189; d) arctg 1,1;
b) log 1 001; e) arcsin 0,2;
c) tg 46°; f) $2^{1{,}002}$.

**352.** Nájdite absolútnu a relatívnu chybu pri približnom počítaní $f(x)$ z hodnoty $f(x_0)$, ak

a) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$, $x = 1{,}2$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$, $x = -0{,}01$.

**353.** Vypočítajte, o koľko sa zmení objem kocky, keď dĺžka hrany kocky sa zmení zo 6 cm na 6,1 cm. Vypočítajte to: a) presne; b) približne pomocou diferenciálu. Získané výsledky porovnajte.

**354.** Guľa má polomer $r$. Nájdite prírastok a diferenciál: a) objemu; b) povrchu gule ako funkcie polomeru $r$ pre polomer $r = R$ a diferenciu $\Delta r$.

**355.** Tiažové zrýchlenie $g_h$ nadmorskej výšky $h$ sa udáva vzorcom $g_h = \frac{gR^2}{(R + h)^2}$, kde $g$ je tiažové zrýchlenie na hladine mora, $R$ je polomer Zeme. Dokážte, že približne platí $g_h \doteq g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$.

**356.** Doba kmitu matematického kyvadla je $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, kde $l$ je dĺžka kyvadla, $g$ tiažové zrýchlenie, $g = 9{,}806\,5$ m/s². O koľko treba zmeniť približne dĺžku kyvadla $l = 30$ cm, aby sa doba kmitu $T$ zmenila o 0,01 s.

**357.** Pri zahrievaní pevných telies zmena objemu je úmerná tretej mocnine ich dĺžkovej rozťažnosti. Ak $\alpha$ je koeficient dĺžkovej rozťažnosti, $\beta$ koeficient objemovej rozťažnosti a $t$ teplota, potom platí $1 + \beta t = (1 + \alpha t)^3$. Dokážte, že platí približne $\beta \doteq 3\alpha$.

**358.** Výška ortuťového stĺpca v barometri pri teplote $t$ °C redukuje sa na výšku pri teplote na 0 °C podľa vzorca $p_0° = p(1 + \alpha' t)/(1 + \alpha t)$, kde $\alpha$ je koeficient rozťažnosti ortuti a $\alpha'$ je koeficient rozťažnosti mosadznej stupnice. Nahraďte vzťah pre $p_0°$ približným vzťahom pomocou diferenciálu $dp_0$.

**359.** Objem plynu $V$ a tlak plynu $p$ sa menia podľa vzťahov:

a) $pV = p_0V_0$ pri izotermických zmenách (Boyleov zákon);
b) $pV^\varkappa = p_0V_0^\varkappa$ pri adiabatických zmenách (Poissonov zákon).

Nájdite diferenciu a diferenciál tlaku pre objem $V_0$ a prírastok $\Delta V$, ak $V_0 = 1\ \mathrm{m}^3$, $\Delta V = 0{,}1\ \mathrm{m}^3$ a $\varkappa = 1{,}5$.

**360.** V elektrickom obvode s konštantným napätím $U$ zmení sa odpor $R$ o $\Delta R$. Vypočítajte, o koľko sa zmení prúd: a) presne; b) približne.

## 3,5. Vety o prírastku funkcie

**Veta 1.** (Rolleho veta.) Ak funkcia $f$ je spojitá v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$ a má deriváciu v otvorenom intervale $(a, b)$, pričom $f(a) = f(b)$, potom existuje číslo $c$ z intervalu $(a, b)$ také, že $f'(c) = 0$.

**Veta 2.** (Lagrangeova veta, veta o strednej hodnote.)

Ak funkcia $f$ je spojitá v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$ a má deriváciu v otvorenom intervale $(a, b)$, potom existuje číslo $c$ z intervalu $(a, b)$ také, že

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a). \tag{1}$$

**Veta 3.** (Cauchyho veta.) Nech funkcie $f$ a $g$ sú spojité v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, majú derivácie v otvorenom intervale $(a, b)$, pričom pre všetky $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$.

Potom existuje číslo $c$ z intervalu $a$, $b$ také, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

**Príklad 1.** Odhadnite číslo ln 27.

*Riešenie.* Pretože $e < 3$, platí $e^3 < 27$. Funkcia $y = \ln x$ je v intervale $\langle e^3, 27\rangle$ spojitá a má v tomto intervale deriváciu $y' = 1/x$. Z vety o strednej hodnote vyplýva podľa (1)

$$\ln 27 - \ln e^3 = \frac{1}{c}\,(27 - e^3),$$

pričom $e^3 < c < 27$. Z toho dostaneme

$$\frac{1}{27} < \frac{1}{c} < \frac{1}{e^3},$$

a

$$\frac{1}{27}\,(27 - e^3) < \ln 27 - 3 < \frac{1}{e^3}\,(27 - e^3).$$

Po úpravách dostaneme

$$4 - \frac{e^3}{27} < \ln 27 < 2 + \frac{27}{e^3}.$$

Ale $e^3 = (2{,}718\,28\ldots)^3 = 20{,}085\,5\ldots$ Preto platí

$$4 - \frac{20{,}1}{27} < \ln 27 < 2 + \frac{27}{20},$$

$$3{,}28 < \ln 27 < 3{,}35.$$

**361.** Zistite, či pre funkciu $y = f(x)$ v intervale $\langle a, b\rangle$ platí Rolleho veta a nájdite čísla $c$, pre ktoré je $f'(c) = 0$, ak

a) $y = (x + 1)(x - 2)\,x$ v intervale $\alpha$) $\langle 0, 1\rangle$; $\beta$) $\langle -1, 2\rangle$; $\gamma$) $\langle -1, 0\rangle$; $\delta$) $\langle 0, 2\rangle$;

b) $y = |x^3|$ v intervale $\langle -1, 1\rangle$;

c) $y = \begin{cases} x \sin(\pi/x) & \text{pre} \quad x \in (0, 1\rangle, \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0. \end{cases}$

**362.** Zistite, prečo neplatí Rolleho veta pre funkciu $y = f(x)$ v intervale $\langle a, b\rangle$, ak

a) $y = \begin{cases} x & \text{pre} \quad 0 < x \leqq 1, \\ 1 & \text{pre} \quad x = 0; \end{cases}$  b) $y = 1 - \sqrt[5]{x^2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$;

c) $y = |x| - 1$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

**363.** Ukážte, že nasledujúce rovnice majú iba jediný reálny koreň a nájdite interval, v ktorom tento reálny koreň leží:

a) $x^3 - 3x^2 + 6x + 1$;

b) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ak $a^2 - 3b < 0$;

c) $2e^x - 3e^{-x} + x^2 + 18x - 6 = 0$.

**364.** Nech $f(x) = (x + 4)(x + 3)(x - 1)$. Dokážte bez výpočtu, že rovnica $f''(x) = 0$ v intervale $(-4, 1)$ má koreň.

**365.** Pomocou Rolleho vety dokážte, že ak algebraická rovnica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

má všetky korene reálne, potom aj rovnica

$$na_0x^{n-1} + (n-1)\, a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

má všetky korene reálne.

**366.** Zistite, či platí Langrangeova veta pre funkciu $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$. Nájdite príslušné číslo $c$, pre ktoré platí $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, ak

a) $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$, $\langle 0, 2\rangle$;
b) $y = x + 1/x$, $\langle 1, 2\rangle$;
c) $y = \ln x$, $\langle 1, e\rangle$;
d) $y = \arcsin x$, $\langle -1, 1\rangle$.

**367.** Dokážte, že platí:

a) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b - a$, ak $b > a$;

b) $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x$, ak $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

c) $1 + \dfrac{1}{1 + e} < \ln(1 + e) < 1 + \dfrac{1}{e}$;

d) $na^{n-1} \leqq \dfrac{b^n - a^n}{b - a} \leqq nb^{n-1}$, ak $0 < a < b$ a $n$ je prirodzené číslo.

**368.** Pomocou vety o strednej hodnote odhadnite:

a) $\operatorname{tg} 2{,}1$;
b) $\log_3 18$;
c) $\ln\left(0{,}4 + \sqrt{1{,}16}\right)$;
d) $\arcsin 0{,}5$;
e) $\operatorname{arctg} 1{,}5$;
f) $e^{-2} \cos 2$.

**369.** Zistite, či pre funkcie $f$, $g$ na intervale $\langle a, b\rangle$ platí Cauchyho veta a nájdite číslo $c$, pre ktoré platí $[f(b) - f(a)]/[g(b) - g(a)] = f'(c)/g'(c)$:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $\langle -1, 1\rangle$; c) $f(x) = |x^3|$, $g(x) = x^2 + 1$, $\langle -1, 1\rangle$;

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $\langle 0, 1\rangle$; d) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $\langle 0, \pi/2\rangle$.

## 3,6. Taylorova veta

Nech funkcia $f$ má na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$ spojité derivácie $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ a deriváciu $f^{(n+1)}$ v otvorenom intervale $(a, b)$. Potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}, \tag{1}$$

kde zvyšok $R_{n+1}$ možno vyjadriť v tvare

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}[a + \vartheta(x - a)]}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1 \quad \text{(Lagrangeov tvar zvyšku)} \tag{2}$$

alebo

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}[a + \vartheta(x - a)]}{n!}(1 - \vartheta)^n(x - a)^{n+1}, \ 0 < \vartheta < 1 \ \text{(Cauchyho tvar zvyšku)}. \tag{3}$$

Poznámka. Polynóm

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

nazývame Taylorov polynóm funkcie $f$ v čísle $a$.

Pomocou zvyšku $R_{n+1}$ odhadujeme presnosť, s akou Taylorov polynóm $n$-tého stupňa aproximuje danú funkciu.

Ak zvolíme v Taylorovej vete $a = 0$, dostaneme tzv. *Maclaurinov vzorec*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}, \tag{4}$$

kde $R_{n+1}$ je zvyšok a dostaneme ho zo vzťahu (2) alebo zo vzťahu (3), keď položíme $a = 0$.

**Príklad 1.** Nájdime Taylorov polynóm $T_n(f, a, x)$ funkcie $f(x) = \ln(1 + 2x)$, zvyšok $R_{n+1}$ a napíšte Maclaurinov vzorec pre funkciu $f$.

*Riešenie.* Ak použijeme vypočítané derivácie z príkladu 2 odseku 3,3 a vzťah (1), dostaneme

$$f(x) = T_n[\ln(1 + 2x), a, x] + R_{n+1} =$$

$$= \ln(1 + 2a) + \frac{2}{1 + 2a}(x - a) - \frac{1}{2!}\frac{2^2}{(1 + 2a)^2}(x - a)^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{2^{n-1}(n - 1)!}{(1 + 2a)^n}(x - a)^n + R_{n+1}, \tag{5}$$

kde

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n + 1)!}\frac{2^n \,.\, n!}{[1 + 2(a + \vartheta(x - a)]^{n+1}}(x - a)^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1$$

je Lagrangeov tvar zvyšku.

Ak položíme $a = 0$ do vzťahu (5), po úprave dostaneme

$$f(x) = 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{4}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1},$$

kde

$$R_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{2^n}{(1 + 2\vartheta x)^{n+1}}x^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme približne sin 20° a odhadnime chybu.

*Riešenie.* Podľa vzťahu (4) pre funkciu $y = \sin x$ dostaneme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5, \tag{6}$$

kde podľa vzťahu (2) je

$$R_5 = \frac{\cos \vartheta x}{5!} x^5, \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{7}$$

Keďže 20° v oblúkovej miere je $\pi/9$ a $|\cos \vartheta x| \leq 1$, zo vzťahu (7) dostaneme

$$|R_5| \leq \left|\frac{1}{5!}(\pi/9)^5\right| < \frac{(0,4)^5}{5!} < 10^{-4}. \tag{8}$$

Dosadením za $x$ do vzťahu (6) dostaneme

$$\sin 20° = \sin(\pi/9) \pm \pi/9 - (\pi/9)^3/3 \doteq 0,3420,$$

pričom chyba podľa vzťahu (8) je menšia ako $10^{-4}$.

**370.** Rozviňte podľa mocnín $(x - a)$ polynóm:

a) $y = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$, ak $a = 2$;

b) $y = x^3 - 2x + 5$, ak $a = 100$.

**371.** Napíšte $T_n(f, a, x)$ pre funkciu

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$, ak $a = 1$, $n = 3$;

b) $y = x^x - 1$, ak $a = 1$, $n = 3$;

c) $y = 1/x$, ak $a = 2$, $n = 4$;

d) $y = \ln x$, ak $a = 4$, $n = 4$.

**372.** Napíšte $T_n(f, 0, x)$ pre funkciu:

a) $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$, $n = 3$;

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 5$;

c) $f(x) = \sin^3 x$, $n = 5$;

d) $f(x) = x e^{-x}$, $n = 4$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, pre $x \neq 0$ a $f(0) = 1$, $n = 4$;

f) $f(x) = \ln \cos x$, $n = 6$.

**373.** Napíšte $T_n(f, 0, x)$ pre funkciu:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$;

c) $f(x) = \cosh x$;

d) $f(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

**374.** Dokážte, že pre mnohočlen $P(x)$ $n$-tého stupňa platí

$$P(x + h) = P(x) + \frac{h}{1!}P'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}P^{(n)}(x).$$

**375.** Nájdite Taylorove polynómy $T_1(f, 0, x)$, $T_3(f, 0, x)$, $T_5(f, 0, x)$ pre funkciu $f(x) = \sin x$ a nakreslite ich grafy na intervale $\langle -3\pi/2, 3\pi/2 \rangle$.

**376.** Pomocou Taylorovej vety dokážte, že polynóm $n$-tého stupňa $P_n(x)$ je deliteľný výrazom

a) $(x - x_0)$ vtedy a len vtedy, keď $f(x_0) = 0$;

b) $(x - x_0)^k$ vtedy a len vtedy, keď $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(x_0) = 0$.

**377.** Nájdite $T_2(f, 1, x)$ pre polynóm $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ a vypočítajte jeho hodnotu v čísle $y = 0{,}987$. Dokážte, že $|f(0{,}987) - T_2(f;\ 1;\ 0{,}987)| < 0{,}002$.

**378.** Dokážte, že funkcia $y = x$ aproximuje funkciu $y = \sin x$ s chybou menšou ako 0,001, ak $|x| < 0{,}18$.

**379.** Koľko členov Maclaurinovho vzorca musíme vziať pre funkciu $f(x) = e^x$, aby sme vypočítali číslo e s chybou menšou ako $10^{-5}$?

**380.** Zistite, koľko nenulových členov Maclaurinovho vzorca musíme vziať pre funkciu $f(x) = 1/(1 + x^2)$, aby sme ju aproximovali v intervale $\langle 0, 1/2 \rangle$ s chybou menšou ako 0,005.

**381.** Pre aké kladné $x$ možno aproximovať funkciu:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$; b) $f(x) = \ln(1 + x)$

prvými dvoma nenulovými členmi Maclaurinovho vzorca s chybou menšou ako 0,001.

**382.** Pomocou Maclaurinovho vzorca vypočítajte približne:

a) $\sqrt[10]{1\,010}$; c) $(1{,}1)^{1,2}$;

b) $\sqrt{\pi}$; d) arctg 1,7

s chybou menšou ako $10^{-4}$.

**383.** Pomocou Maclaurinovho vzorca vypočítajte približne

a) ln 2 s chybou menšou ako 0,1; c) e s chybou menšou ako 0,001;

b) $\sqrt[5]{1{,}5}$ s chybou menšou ako 0,01.

**384.** Zistite, koľko členov vhodného Taylorovho polynómu musíme vziať, aby sme vypočítali približnú hodnotu:

a) $\cos 5°$; c) $\sqrt[4]{83}$;

b) $\sin 49°$; d) $\sqrt[3]{121}$

s chybou menšou ako $10^{-6}$.

## 3,7. L'Hospitalovo pravidlo

**Veta 1.** (L'Hospitalovo pravidlo.) Nech

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$;

b) v istom okolí čísla $a$ majú funkcie $f$ a $g$ derivácie $f'$, $g'$ (v čísle $a$ prípadne nemusia tieto derivácie existovať);

c) existuje limita, alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje limita alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

**Veta 2.** Nech

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = \ldots = \lim\limits_{x\to a} f^{(k-1)}(x) = \lim\limits_{x\to a} g^{(k-1)}(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g'(x)| = \ldots = \lim\limits_{x\to a} |g^{(k-1)}(x)| = \infty$;

b) v istom okolí čísla $a$ majú funkcie $f$, $g$ derivácie až do $k$-teho rádu vrátane (v čísle $a$ prípadne nemusia tieto funkcie mať deriváciu);

c) existuje limita alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$.

Potom existuje limita alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}. \tag{2}$$

Poznámka 1. Podobné vety platia pre limitu zľava, limitu sprava v čísle $a$ a pre limitu v nevlastných číslach.

Pomocou vety 1 a vety 2 počítame limity tvaru $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ktoré pri nesprávnom použití viet o limitách z čl. 1,5 vedú k výrazom typu $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$. Na tieto typy limít možno previesť vhodnými úpravami limity: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, ktoré pri nesprávnom použití viet o limitách vedú k výrazom typu: $0.\infty$; $\infty - \infty$; $1^\infty$; $\infty^0$, $0^0$.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - x - 2}.$$

*Riešenie.* Položme $f(x) = x^3 - 2x - 4$, $g(x) = x^2 - x - 2$. Je $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2 - 2}{2x - 1} = \dfrac{10}{3}$. Predpoklady vety 1 sú splnené, preto

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{10}{3}.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}.$$

*Riešenie.* Položme $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^3$. Potom je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ a limity derivácií $g'(x) = 3x^2$, $g''(x) = 6x$ sú tak isto nevlastné, $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g''(x) = \infty$. Keďže existuje nevlastná limita $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8\,e^{2x}}{6} = \infty$, je podľa vety 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\,e^{2x}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{4\,e^{2x}}{6x} = \lim_{x\to\infty}\frac{8\,e^{2x}}{6} = \infty.$$

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right).$$

*Riešenie*. Daná limita je typu $\infty - \infty$. Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}.$$

Táto limita je typu $\frac{0}{0}$, pričom funkcie $f(x) = \ln x - (x-1)$, $g(x) = (x-1)\ln x$ spĺňajú predpoklady vety 2. Preto platí

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{\ln x+1-1/x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{1/x+1/x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Teda

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=-\frac{1}{2}.$$

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x).$$

*Riešenie*. Daná limita je typu $0 . \infty$. Po úprave a použití vety 1 dostaneme

$$\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/2x\sqrt{x}}.$$

Poslednú limitu vypočítame spôsobom uvedeným v článku 1,5. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/(2x\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0^+}(-2\sqrt{x})=0.$$

Preto je $\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x)=0.$

**Príklad 5.** Vypočítajme

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{cotg}^2 x},\qquad x\in(-\pi/2,\pi/2).$$

*Riešenie*. Uvedená limita je typu $1^\infty$. Úpravou dostaneme

$$\cos x^{\operatorname{cotg}^2 x}=e^{\operatorname{cotg}^2 x\,.\,\ln\cos x}=e^{\cos^2 x\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}.$$

Podľa vety o limite zloženej funkcie platí

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{cotg}^2 x}=\lim_{x\to 0}e^{\cos^2 x\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}=e^{\lim_{x\to 0}\cos^2 x\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}=e^{\lim_{x\to 0}\cos x^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}}=e^{1\,.\,\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}$$

za predpokladu, že $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}$ existuje. Táto limita je typu $\frac{0}{0}$. Použitím vety 1, ktorej predpoklady sú splnené, dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)/\cos x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/\cos x}{2\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

Preto je

$$\lim_{x\to 0}\cos x^{\operatorname{cotg}^2 x}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

V úlohách **385** až **395** vypočítajte dané limity.

**385.** a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - x}{x^n - 1}$; e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$.

**386.** a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi x/4)}{1-x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-3(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x2^x}{2^x-1}$;

**387.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$; c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{\ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\operatorname{tg} x}}{x^3}$, $a>0$;

**388.** a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^m}{a^x}$, $m$ – prirodzené číslo; c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2\operatorname{tg} 3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$; d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.

**389.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)+\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{cotg} \pi x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{tg} ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$; d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\pi/2-x)}{\operatorname{tg} x}$.

**390.** a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(x \operatorname{tg} x - \dfrac{\pi \sec x}{2}\right)$.

**391.** a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{2\ln x}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x-1}{2x^2}+\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^{2x}-1)}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

**392.** a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon > 0$; d) $\lim\limits_{x\to a} [\arcsin(x-a) \,.\, \operatorname{cotg}(x-a)]$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} [\ln x \,.\, \log(1-x)]$; e) $\lim\limits_{x\to 1} [\sec(\pi x/2) \,.\, \ln(1/x)]$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \operatorname{cotgh} x$; f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2} \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

**393.** a) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$; c) $\lim\limits_{x\to1} x^{1/(1-x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$; d) $\lim\limits_{x\to0} (1+mx)^{1/x}$.

**394.** a) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln^x (1/x)$; c) $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0^+} (1/2x)^{\operatorname{tg} x}$; d) $\lim\limits_{x\to0} (\cos 2x)^{1/x^2}$.

**395.** a) $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\log x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$; d) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cotgh} x}$

**396.** Zistite, či možno použiť L'Hospitalovo pravidlo v týchto prípadoch:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x+\sin 2x}{x+e^{\sin x}\sin 2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$;

**397.** Odporom $R = 5\ \Omega$ tečie prúd $i = 2t\sin(3/t)$. Vypočítajte okamžitý výkon prúdu na odpore $R$. Nájdite hodnotu výkonu pre $t\to\infty$.

**398.** Pre atómové teplo $C_v$ prvku platí vzťah

$$C_v = 3R\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2},$$

kde $x = T^*/T$, pričom $T^*$ je charakteristická teplota a $T$ je absolútna teplota v Kelvinových stupňoch. $R$ je plynová konštanta, $R = 8{,}314$ J/deg. Vypočítajte, akú hodnotu bude mať atómové teplo prvku, keď $T\to0$.

## 3,8. Algebraické rovnice

*Algebraická rovnica* je rovnica tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

kde prirodzené číslo $n$ nazývame stupňom tejto rovnice a ľubovoľné komplexné čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, pričom $a_0 \neq 0$, nazývame *koeficientmi rovnice* (1).

Ak $P$ je polynóm stupňa $n \geq 1$,

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

potom algebraická rovnica (1) má tvar

$$P(x) = 0. \tag{2}$$

Riešenie rovnice (1) je také číslo $\alpha$, že $P(\alpha) = 0$, ktoré nazývame *koreňom algebraickej rovnice* (1).

Nech $k$ je prirodzené číslo. Číslo $\alpha$ je *k-násobným koreňom* rovnice (1), ak $P(x) = (x-\alpha)^kR(x)$ a pre polynóm $R$ platí $R(\alpha) \neq 0$. Ak $k = 1$, potom $\alpha$ je *jednoduchý koreň* rovnice (2). Ak $\alpha$ je koreň rovnice (2), potom dvojčlen $x - \alpha$ sa nazýva *koreňový činiteľ* polynómu $P$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** (Fundamentálna veta algebry.) Každá algebraická rovnica má aspoň jeden koreň.

**Veta 2.** Číslo $\alpha$ je koreňom rovnice (2) vtedy a len vtedy, keď dvojčlen $x - \alpha$ delí polynóm $P$ bez zvyšku.

**Veta 3.** Nech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; sú všetky rôzne korene rovnice (2). Nech $\alpha_1$ je $k_1$-násobný koreň, $\alpha_2$ je $k_2$-násobný, ..., $\alpha_r$ je $k_r$-násobný koreň rovnice (2). Potom platí

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n,$$

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r}. \tag{3}$$

Poznámka. Súčin (3) nazývame rozkladom polynómu $P$ na koreňové činitele.

**Veta 4.** Nech koeficienty polynómu sú reálne čísla. Ak rovnica (1) má $k$-násobný koreň $\alpha = a + bi$, potom má aj $k$-násobný koreň $\bar{\alpha} = a - bi$.

**Veta 5.** Každý polynóm s reálnymi koeficientmi $n \geqq 1$ možno rozložiť na súčin polynómov prvého a druhého stupňa s reálnymi koeficientmi, pričom polynómy druhého stupňa sa už nedajú rozložiť na koreňové činitele s reálnymi koeficientmi.

**Veta 6.** Každá algebraická rovnica s reálnymi koeficientmi nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň.

**Veta 7.** Ak rovnica (1) má celočíselné koeficienty, potom každý celočíselný koreň je deliteľom čísla $a_n$ a pre každý racionálny koreň $p/q$, ($p$, $q$ sú nesúdeliteľné celé čísla) platí, že koeficient $a_n$ je deliteľný číslom $p$ a koeficient $a_0$ je deliteľný číslom $q$.

**Veta 8.** Číslo $\alpha$ je $r$-násobným koreňom rovnice $P(x) = 0$ vtedy a len vtedy, ak platí

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{a} \quad P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

**Veta 9.** Ak $\alpha$ je $r$-násobným koreňom rovnice $P(x) = 0$, potom je aj $(r - 1)$-násobným koreňom rovnice $P'(x) = 0$.

**Veta 10.** Ak rovnica $P(x) = 0$ má viacnásobný koreň, potom polynómy $P, P'$ majú spoločného deliteľa aspoň prvého stupňa.

**Veta 11.** Nech $q$ je najväčší spoločný deliteľ polynómov $f$ a $f'$, pričom $f(x) = q(x)\,F(x)$. Potom rovnica $F(x) = 0$ má tie isté korene ako rovnica $f(x) = 0$, ale každý z nich je len jednoduchý.

**Príklad 1.** Napíšte algebraickú rovnicu tretieho stupňa s reálnymi koeficientmi, ktorá má korene $x_1 = 2$, $x_2 = 3 - 5i$, pričom $a_0 = 1$.

*Riešenie.* Hľadaná rovnica musí mať reálne koeficienty, preto podľa vety 4 má okrem koreňa $x_2 = 3 - 5i$ aj koreň komplexný združený ku $x_2$, $x_3 = 3 + 5i$. Tým dostávame koreňové činitele $x - 2$, $x - 3 + 5i$, $x - 3 - 5i$ a podľa vety 3 hľadaná rovnica je

$$(x - 2)(x - 3 + 5i)(x - 3 - 5i) = 0,$$

čiže

$$x^3 - 8x^2 + 46x - 68 = 0.$$

**Príklad 2.** Riešte rovnicu

$$x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x - 6 = 0, \tag{4}$$

ak viete, že jej jeden koreň je $x_1 = 1 - i$ a aspoň jeden koreň je racionálny. Napíšte rozklad polynómu na ľavej strane tejto rovnice na koreňové činitele.

*Riešenie.* Rovnica má reálne koeficienty, preto podľa vety 4 má i koreň komplexný združený ku koreňu $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 1 + i$. Podľa vety 2 polynóm $x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x - 6$ je deliteľný bez zvyšku dvojčlenmi $x - 1 + i$, $x - 1 - i$ a teda aj ich súčinom $(x - 1 + i)(x - 1 - i) = x^2 - 2x + 2$.

Delením dostaneme

$$x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x - 6 = (x^2 - 2x + 2)(x^3 - x^2 - 5x - 3),$$

čiže rovnicu (4) môžeme písať v tvare

$$(x^2 - 2x + 2)(x^3 - x^2 - 5x - 3) = 0.$$

Ďalšie korene rovnice (4) dostaneme preto riešením rovnice

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0. \tag{5}$$

To je rovnica s celočíselnými koeficientmi. Ak táto rovnica má racionálne korene, potom sú tieto korene celočíselné, pretože $a_0 = 1$. Keďže $a_3 = 3$, podľa vety 7 môžu byť koreňmi rovnice (5) iba čísla 1, $-1$, 3 a $-3$. Dosadením do ľavej strany rovnice (5) dostaneme

$$P(1) = -8, \quad P(-1) = 0, \quad P(3) = 0, \quad P(-3) = -24,$$

kde $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$. Rovnica (5) a teda aj (4) má dva celočíselné korene $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

Zistíme, či tieto korene nie sú viacnásobné. Pretože platí $P'(x) = 3x^2 - 2x - 5$ a $P'(3) = 16$, $P'(-1) = 0$ má rovnica (5) a teda aj (4) dvojnásobný koreň $x_{4,5} = -1$.

Riešením danej rovnice sú korene

$$x_1 = 1 - i, \quad x_2 = 1 + i, \quad x_3 = 3, \quad x_{4,5} = -1.$$

Rozklad polynómu na ľavej strane rovnice (4) na koreňové činitele je $(x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - 3)(x + 1)^2$.

**399.** Riešte rovnice:

a) $x^3 - 1 = 0$; c) $x^4 + 1 = 0$; e) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$;
b) $x^3 + 1 = 0$; d) $x^8 - 16 = 0$; f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

**400.** Ukážte, že rovnica $x^4 + x^2 + 1 = 0$ nemá reálne korene.

**401.** Napíšte rovnicu najnižšieho stupňa s reálnymi koeficientmi ($a_0 = 1$), ktorej korene sú čísla:

a) $-2, 0, 2$; c) $2 + i\sqrt{3},\ 3 + \sqrt{2}$;
b) $3, 2, -i$; d) $1 - i,\ 2 + i\sqrt{3}$.

**402.** Nájdite taký polynóm $P$ najnižšieho stupňa, aby rovnica $P(x) = 0$ mala korene

a) 1 dvojnásobný, 3, $-2$, $5 - i$ jednoduché;
b) $3 - i$ trojnásobný;
c) i dvojnásobný a $2 + i$ jednoduchý.

Úlohu riešte aj tak, aby hľadaný polynóm mal reálne koeficienty.

**403.** Nájdite čísla $a$, $b$ tak, aby polynóm:

a) $4x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 16x + a$ bol deliteľný dvojčlenom $x - i$;
b) $6x^5 + 11x^4 + 5x^3 + 5x^2 + ax + b$ bol deliteľný dvojčlenom $x^2 + 1$;
c) $x^3 + 8x^2 + 5x + a$ bol deliteľný polynómom $x^2 + 3x + b$.

**404.** Riešte danú rovnicu, ak

a) číslo $2 - 3i$ je koreňom rovnice $x^2 - (5 + 2i)x + 21 + i = 0$;
b) číslo 2 je koreňom rovnice $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$;
c) číslo $-2 + i$ je koreňom rovnice $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = 0$;
d) číslo i je koreňom rovnice $x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$.

**405.** Ako treba zvoliť v rovnici $x^3 + 2x^2 - ax + 6 = 0$ číslo $a$, aby číslo 2 bolo jej koreňom. Riešte túto rovnicu!

**406.** Ako treba zvoliť v rovnici $x^3 + ax^2 + bx + 7{,}5 = 0$ reálne koeficienty $a$, $b$, aby rovnica mala koreň $(1 + i\sqrt{5})/2$. Riešte túto rovnicu.

**407.** Dokážte, že polynóm $f$ s celočíselnými koeficientmi nemá celočíselný koreň, ak $f(0)$ a $f(1)$ sú nepárne čísla.

**408.** Nájdite najskôr racionálne korene rovnice a potom ju riešte:

a) $x^3 - x - 6 = 0$;
b) $14x^3 - 15x^2 + 6x - 1 = 0$;
c) $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0$;
d) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0$;
e) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

**409.** Zistite násobnosť koreňa $x_1$ danej algebraickej rovnice, ak

a) $x_1 = 2$ a $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16 = 0$;
b) $x_1 = -2$ a $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$;
c) $x_1 = 1$ a $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1 = 0$.

**410.** Nájdite viacnásobné korene rovnice a riešte ju:

a) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$;
c) $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 = 0$.

**411.** Daná je algebraická rovnica $P(x) = 0$. Nájdite algebraickú rovnicu, ktorá má všetky korene jednoduché a rovnaké ako daná rovnica.

a) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$;
b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 = 0$;
c) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$.

**412.** Nájdite číslo $a$ tak, aby rovnica

a) $x^3 - 27x - a = 0$ mala viacnásobný koreň;
b) $x^5 - ax^2 - ax + 1 = 0$ mala koreň $x_1 = -1$ aspoň dvojnásobný.

**413.** Nájdite rozklad polynómu $P$ na koreňové činitele:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$;
b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$;
c) $9x^4 - 4$;
d) $x^4 - 6x^2 + 2$.

**414.** Rozložte daný polynóm na súčin polynómov prvého a druhého stupňa s reálnymi koeficientmi, pričom polynómy druhého stupňa nemajú koreňové činitele s reálnymi koeficientmi:

a) $x^4 + 4$;
b) $x^6 + 64$;
c) $x^3 + 3x^2 - 8x + 10$;
d) $x^{2n} + x^n + 1$.

**415.** Riešte rovnicu $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$, ak viete, že tri korene má rovnaké ako rovnica $x^3 - 1 = 0$.

**416.** Súčet dvoch koreňov rovnice

$$2x^3 - x^2 - 7x + c = 0,$$

sa rovná 1. Nájdite $c$ a riešte túto rovnicu.

**417.** Nájdite $c$ tak, aby sa jeden z koreňov rovnice $x^3 - 7x + c = 0$ rovnal dvojnásobku druhého koreňa. Riešte danú rovnicu.

## 3,9. Monotónnosť funkcie

**Veta 1.** Nech funkcia $f$ je spojitá na intervale $J$ a nech vnútri tohto intervalu existuje $f'$. Ak pre každé $x$ znútra intervalu $J$ je $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$, $f'(x) \geqq 0$, $f'(x) \leqq 0$], funkcia $f$ je na intervale $J$ rastúca [klesajúca, neklesajúca, nerastúca]. Ak pre každé $x$ znútra intervalu $J$ je $f'(x) \geqq 0$ [$f'(x) \leqq 0$], pričom rovnosť platí len pre konečný počet bodov tohto intervalu, tak funkcia $f$ je na intervale $J$ rastúca [klesajúca].

**Veta 2.** Nech funkcie $f$ a $g$ sú spojité na intervale $\langle a, b\rangle$ a na intervale $(a, b)$ majú deriváciu, pre ktorú platí $f'(x) \leqq g'(x)$, pričom rovnosť platí len v konečnom počte bodov. Ak $f(a) \leqq g(a)$, tak na intervale $(a, b\rangle$ platí $f(x) < g(x)$.

**Príklad 1.** Nájdime intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$ rýdzo monotónna.

*Riešenie.* Daná funkcia má v každom čísle deriváciu $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Zistíme intervaly najväčšej dĺžky, v ktorých je:

a) $f'(x) > 0$; b) $f'(x) < 0$.

Máme:

a) $6(x^2 + x - 2) > 0$ pre všetky $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$;

b) $6(x^2 + x - 2) < 0$ pre všetky $x \in (-2, 1)$.

Podľa vety 1 je daná funkcia na intervaloch $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$ rastúca a na intervale $(-2, 1)$ klesajúca.

**Príklad 2.** Dokážme, že pre všetky $x > 0$ platí nerovnosť $\ln(1 + x) < x$.

*Riešenie.* Funkcie $f(x) = \ln(1 + x)$ a $g(x) = x$ sú spojité na intervale $\langle 0, \infty)$ a majú tam deriváciu $f'(x) = 1/(1 + x)$ a $g'(x) = 1$.

Keďže platí

$$f'(0) = 1 \quad \text{a} \quad g'(0) = 1$$

a pre každé $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} < 1 = g'(x),$$

podľa vety 2 platí

$$\ln(1 + x) < x$$

pre všetky $x \in (0, \infty)$.

**418.** Zistite, či funkcia:

a) $y = x - E(x)$; b) $y = E(x)$; c) $y = E(1/x)$

je monotónna.

**419.** Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia

a) $f(x) = x^3 - x$;
b) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 3$;
c) $f(x) = x/(1 + x^2)$;
d) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$;
e) $f(x) = 4/x + 1/(1 - x)$;
f) $f(x) = x + x/(x^2 - 1)$;
g) $f(x) = (x - 1)^3/(x + 1)^2$;
h) $f(x) = x^2 - 1 + |x^2 - 1|$

rastúca, klesajúca, nerastúca a neklesajúca.

V úlohách **420**, **421**, **422** nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých sú dané funkcie rýdzo monotónne:

**420.** a) $y = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$;

b) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$;

c) $y = x|x|$.

**421.** a) $y = x + \cos x$;
b) $y = \sin x + \cos x$;
c) $y = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$;
d) $y = \cos x + (\cos 2x)/2$.

**422.** a) $y = x^2 e^{-x}$;
b) $y = e^x/x$;
c) $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$;
d) $y = \ln |x|$;
e) $y = 2x^2 - \ln x$;
f) $y = (1 + 1/x)^x$.

**423.** Dokážte, že platí:

a) $\sin x > 2x/\pi$, ak $0 < x < \pi/2$;
b) $\sin x > x - x^3/6$, ak $x > 0$;
c) $\cos x < 1 - x^2/2 + x^4/24$, ak $x > 0$;
d) $\cosh x \geqq 1 + x^2/2$.

**424.** Dokážte, že platí:

a) $x^\alpha - \alpha x \leqq 1 - \alpha$, pre $x \geqq 0$ a $0 < \alpha < 1$;
b) $(a + b)^p \leqq a^p + b^p$, kde $a$, $b$ sú nezáporné čísla a $0 \leqq p \leqq 1$.

**425.** Dokážte, že platí:

a) $e^x \geqq 1 + x$;
b) $x - x^2/2 < \ln(1 + x) < x$, ak $x > 0$.

**426.** Dokážte, že rovnica $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10 = 0$ má jeden záporný koreň a dva kladné. Pre každý koreň nájdite dve celé čísla, medzi ktorými leží.

**427.** Nech funkcia $f$ je spojitá na intervale $\langle a, \infty)$ a nech je $f'(x) \geqq C > 0$ pre $x \in (a, \infty)$, kde $C$ je konštanta. Dokážte, ak $f(a) < 0$, rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden reálny koreň, ktorý leží v intervale $(a, a - f(a)/C)$.

**428.** Zistite, či derivácia každej monotónnej funkcie musí byť monotónna. Ako príklad zoberte funkciu $y = x + \sin x$.

**429.** Pre atómové teplo prvku platí

$$C_v = 3R\,\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

kde $x = T^*/T$, $T$ je absolútna teplota v K. Konštanta $T^*$ je tzv. charakteristická teplota a $R$ je plynová konštanta. Dokážte, že atómové teplo prvku je rastúca funkcia teploty $T$.

**430.** Stavovú rovnicu reálneho plynu možno popísať van der Waalsovou rovnicou

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

kde $p$ je tlak, $V$ objem plynu, $R$ plynová konštanta, $T$ teplota v K a $a$, $b$ sú konštanty charakterizujúce príslušný plyn. Dokážte, že pre teplotu $T > T_k$, kde $T_k$ je tzv. kritická teplota $T_k = 8a/27bR$, je tlak klesajúcou funkciou objemu $V$. Znázornite túto funkciu, ak $b = 1\ \text{cm}^3$, $a = 810\ \text{at cm}^6$ a $RT = 240\ \text{at cm}^3$.

## 3,10. Maximum a minimum funkcie

Nech funkcia $f$ je definovaná v intervale $(a, b)$ a $x_0 \in (a, b)$. Funkcia $f$ má v čísle $x_0$ *lokálne maximum* [*lokálne minimum*], ak existuje také okolie $O(x_0)$, že pre všetky $x \in O(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$]. Ak pre všetky $x \in O(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$ [$f(x) > f(x_0)$], hovoríme, že funkcia $f$ má v čísle $x_0$ *ostré lokálne maximum* [*ostré lokálne minimum*]. Lokálne maximum a lokálne minimum nazývame aj lokálnymi extrémami.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Nech funkcia $f$ je v čísle $x_0$ spojitá. Nech existuje také ľavé okolie čísla $x_0$, v ktorom je funkcia $f$ *neklesajúca* [*nerastúca, rastúca, klesajúca*] a také pravé okolie čísla $x_0$, v ktorom je funkcia $f$ *nerastúca* [*neklesajúca, klesajúca, rastúca*]. Potom funkcia $f$ má v čísle $x_0$ *lokálne maximum* [*lokálne minimum, ostré lokálne maximum, ostré lokálne minimum*].

**Veta 2.** Ak funkcia $f$ má v čísle $x_0$ lokálny extrém a má v tom čísle deriváciu, potom $f'(x_0) = 0$.

Dôsledok. Funkcia $f$ môže mať lokálny extrém len v tých číslach, v ktorých je $f'(x) = 0$ alebo $f'(x)$ neexistuje.

*Stacionárnymi bodmi funkcie* $f$ nazývame všetky čísla z oboru definície funkcie $f$, v ktorých je $f'(x) = 0$ alebo $f'$ neexistuje.

**Veta 3.** (Postačujúca podmienka I pre lokálne extrémy.) Nech funkcia $f$ je v čísle $x_0$ spojitá. Nech existuje také ľavé okolie čísla $x_0$, že pre všetky $x$ z tohto okolia je $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$] a také pravé okolie čísla $x_0$, že pre všetky $x$ z tohto okolia je $f'(x) \leq 0$ [$f'(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$]. Potom funkcia $f$ má v čísle $x_0$ *lokálne maximum* [*lokálne minimum, ostré lokálne maximum, ostré lokálne minimum*].

**Veta 4.** (Postačujúca podmienka II pre lokálne extrémy.) Nech funkcia $f$ má v čísle $x_0$ prvých $n$ derivácií až po rád $n$ vrátane, pričom $n \geq 2$. Nech $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ak je číslo $n$ nepárne, funkcia $f$ nemá v čísle $x_0$ lokálny extrém. Ak je číslo $n$ párne, funkcia $f$ má v čísle $x_0$ ostrý lokálny extrém, a to ostré lokálne maximum, ak je $f^{(n)}(x_0) < 0$ a ostré lokálne minimum, ak je $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Poznámka 1. Pri hľadaní lokálnych extrémov $f$ postupujeme tak, že:

a) nájdeme všetky stacionárne body funkcie $f$,

b) použitím postačujúcich podmienok I alebo II rozhodneme, či v stacionárnom bode funkcia $f$ má lokálny extrém.

Poznámka 2. Ak funkcia $f$ má spojitú deriváciu $f'$ v intervaloch, na ktoré všetky stacionárne body rozdelia obor definície funkcie $f$ (tak, že vo vnútri každého intervalu už nie je žiaden stacionárny bod), potom derivácia $f'$ na každom takomto intervale nemení znamienko. Preto pri používaní vety 3 namiesto okolí stacionárnych bodov možno uvažovať uvedené intervaly.

Poznámka 3. Maximum [minimum] spojitej funkcie $f$ na intervale $\langle a, b\rangle$ hľadáme tak, že nájdeme:

a) lokálne extrémy funkcie v intervale $(a, b)$;

b) maximum $M$ [minimum $m$] z týchto lokálnych maxím [lokálnych miním] a čísiel $f(a)$, $f(b)$.

Takto nájdené číslo $M$ [$m$] je maximum [minimum] funkcie $f$ na intervale $\langle a, b\rangle$.

Ak interval, na ktorom hľadáme maximum [minimum] funkcie $f$, je *otvorený*, nemusí existovať maximum [minimum] tejto funkcie na tom intervale. Ak maximum [minimum] existuje, tak je to maximum [minimum] z lokálnych maxím [lokálnych miním] funkcie $f$ v intervale $(a, b)$.

**Príklad 1.** Nájdime všetky lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{(2 - x)^2}.$$

*Riešenie.* Oborom definície funkcie $f$ je interval $(-\infty, \infty)$. Derivácia tejto funkcie je

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{2 - x}} = \frac{2\sqrt[3]{2 - x} - 2}{\sqrt[3]{2 - x}}, \quad x \neq 2.$$

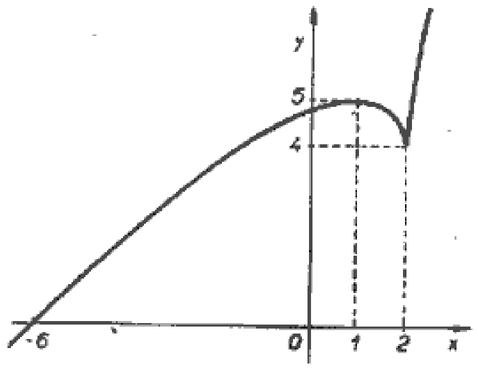
Derivácia funkcie sa rovná nule v čísle 1 a neexistuje v čísle 2. Stacionárnymi bodmi danej funkcie sú čísla $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Pri zisťovaní lokálnych extrémov použijeme vetu 3. Podľa poznámky 2 stacionárne body funkcie $f$ rozdeľujú jej obor definície na intervaly $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$, v ktorých derivácia funkcie $f'$ je spojitá. Keďže derivácia v týchto intervaloch nemení znamienko, stačí zistiť jej hodnotu v jednom čísle z každého tohto intervalu, aby sme zistili jej znamienko. Počítajme preto $f'(-6)$, $f'(15/8)$, $f'(3)$. Máme $f'(-6) = 1 > 0$, $f'(15/8) = -2 < 0$, $f'(3) = 4 > 0$. Znamienka derivácie funkcie $f$ v jednotlivých intervaloch sú uvedené v tabuľke.

| $x$ | $(-\infty, 1)$ | 1 | $(1, 2)$ | 2 | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | — | neexistuje | + |

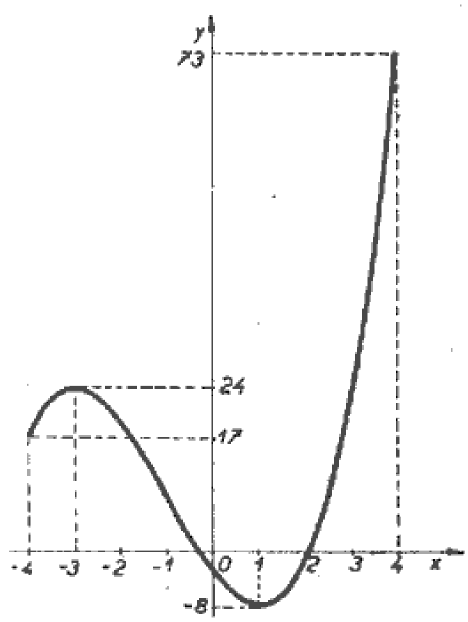
Z vety 3 vyplýva, že v čísle $x_1 = 1$ má funkcia $f$ ostré lokálne maximum $f(1) = 5$ a v čísle $x_2 = 2$ má funkcia $f$ ostré lokálne minimum $f(2) = 4$ (pozri *obr. 27*).

**Príklad 2.** Nájdime maximum a minimum funkcie $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ na intervale $\langle -4, 4\rangle$.

*Riešenie.* Daná funkcia je definovaná v intervale $(-\infty, \infty)$. Nájdime najprv čísla, v ktorých sa derivácia $f'$ rovná nule a čísla, v ktorých derivácia $f'$ neexistuje. Derivácia funkcie je $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3)$. Táto derivácia existuje v každom čísle intervalu $(-4, 4)$ a rovná sa nule v čísle $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$. Pretože pre všetky čísla $x$ je $f''(x) = 6x + 6$, platí $f''(-3) = -12$ a $f''(1) = 12$. Funkcia $f$ má v čísle $x = -3$ lokálne maximum $f(-3) = 24$ a v čísle $x = 1$ lokálne minimum $f(1) = -8$. Nájdime teraz hodnoty funkcie v čísle $-4$ a 4. Máme $f(-4) = 17$ $f(4) = 73$. Teda $\max\limits_{\langle -4, 4\rangle} f(x) = \max\{17, 24, 73\} = 73$ nadobúda daná funkcia v čísle $x = 4$ a $\min\limits_{\langle -4, 4\rangle} f(x) = \min\{17, -8, 73\} = -8$ nadobúda v čísle $x = 1$ (*obr. 28*).



*Obr. 27*



*Obr. 28*

**Príklad 3.** Nájdime rotačný kužeľ s najmenším objemom opísaný danému rotačnému valcu, ak ich základne ležia v jednej rovine a majú spoločnú os.

*Riešenie.* Nech daný valec má polomer $r$ a výšku $h$. Potom pre každý kužeľ opísaný valcu tak, že ich základne ležia v jednej rovine (ich osový rez pozri *obr. 29*), platí

$$H : R = (H - h) : r,$$

kde $H$ je výška a $R$ polomer základne kužeľa. Pre objem kužeľa platí

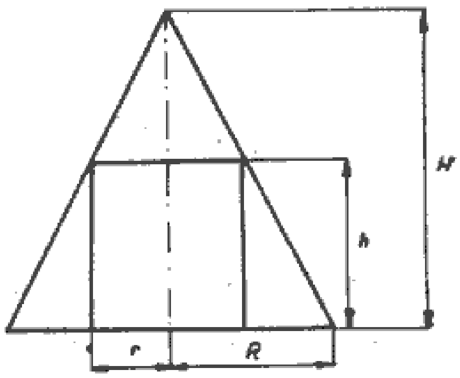
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{Rh}{R-r} = \frac{1}{3}\pi h \frac{R^3}{R-r}.$$

Hľadajme najmenšiu hodnotu tejto funkcie pre $R > r$. Derivovaním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = \frac{\pi h}{3}\,\frac{3R^2(R-r) - R^3}{(R-r)^2} = \frac{\pi h(2R^3 - 3rR^2)}{3(R-r)^2}.$$

Derivácia $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 0$, ak je $2R_0^3 - 3rR_0^2 = 0$, pričom $R_0 > r$. Z toho vyplýva $R_0 = \dfrac{3r}{2}$. Keďže pre $R < R_0$ je $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} < 0$ a pre $R > R_0$ je $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} > 0$, má daná funkcia podľa vety 3 v čísle $R = R_0$ ostré lokálne minimum. Hľadaný kužeľ má výšku $H = 3h$ a polomer $R = 3r/2$.

V úlohách 431 až 437 nájdite všetky lokálne extrémy funkcie $y = f(x)$:



*Obr. 29*

**431.** a) $y = x^2(x-6)$;
b) $y = x^3 - 12x - 6$;
c) $y = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$;
d) $y = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 5$;
e) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$;
f) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

**432.** a) $y = x - 1/x$;
b) $y = x^2/2 + 8/x^3$;
c) $y = x + 2x/(1 + x^2)$;
d) $y = 10/(4x^3 - 9x^2 + 6x)$.

**433.** a) $y = 4|x+4| - 5|x| + 2|x-1|$;
b) $y = x - E(x)$;
c) $y = x^3 - 2|x|$;
d) $y = 1 + \sqrt{|x|}$.

**434.** a) $y = \sqrt{6x - x^2}$;
b) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$;
c) $y = (x^2 - 1)^{2/3}$;
d) $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$.

**435.** a) $y = \sin x + \cos x$;
b) $y = 4x - \operatorname{tg} x$;
c) $y = (1/2 - x)\cos x + \sin x - (x^2 - x)/4$;
d) $y = \operatorname{arctg}|x - 1|$.

**436.** a) $y = x^2 e^{-x}$;
b) $y = e^{-x}\sin x$;
c) $y = x e^{1/x}$;
d) $y = |x|\, e^{|x-1|}$.

**437.** a) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;
b) $y = x - \ln(1 + x)$;
c) $y = \ln(1 + x - 4x^2)$;
d) $y = \ln \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$;
e) $y = \log^2 x - 3\log x + 2$;
f) $y = \operatorname{arctg} x - (1/2)\ln(1 + x^2)$.

**438.** Dokážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

má jediný lokálny extrém, a to lokálne minimum v čísle $x = 0$, hoci $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$.

**439.** Zistite, či funkcia $f$ má pre $x = 0$ lokálny extrém, ak

$$f(x) = \begin{cases} |x| \, [2 + \cos(1/x)] & \text{pre} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0. \end{cases}$$

**440.** Zistite, či funkcia $f$ má pre $x = 0$ lokálny extrém, ak

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2(1/x) & \text{pre } x > 0, \\ -x & \text{pre } x \leq 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{pre } x > 0, \\ -x & \text{pre } x \leq 0. \end{cases}$

**V úlohách 441, 442 nájdite maximum a minimum funkcií na danom intervale.**

**441.** a) $y = x^2 - 6x + 10$, $\langle -1, 5 \rangle$;

b) $y = x^3 - 3x + 20$, $\langle -3, 3 )$;

c) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $\langle -2, 1 \rangle$;

d) $y = |x^2 - 6x + 5|$, $\langle -5, 5 )$;

e) $y = x + 1/(x - 1)$, $( -4, 0 \rangle$;

f) $y = x + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$, $\langle 1{,}01; 2 \rangle$.

**442.** a) $y = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$, $(-3, 2)$; d) $y = x^x$, $(0, \infty)$;

b) $y = x - 2 \ln x$, $\langle 1, e \rangle$; e) $y = 2 \sin x + \cos 2x$, $\langle 0, \pi/2 \rangle$;

c) $y = x^2 \ln x$, $\langle 1, e \rangle$; f) $y = \cos 2x - 2x$, $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

**443.** Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby ich súčin bol najväčší.

**444.** Nájdite také kladné číslo, aby súčet tohto čísla a jeho prevrátenej hodnoty bol najmenší.

**445.** Nájdite:

a) najmenšiu hodnotu súčtu $n$-tých mocnín;

b) najväčšiu hodnotu súčinu $n$-tých mocnín

dvoch kladných čísiel, ktorých súčet sa rovná číslu $a$.

**446.** Pri určovaní hodnoty fyzikálnej veličiny sa nameralo $n$ hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nájdite takú hodnotu $x$ meranej fyzikálnej veličiny, aby súčet $S = (x - x_1)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$ bol najmenší.

**447.** Do trojuholníka $ABC$ vpíšte pravouhlý rovnobežník tak, aby jedna jeho strana bola v základni $AB$ a jeho obsah bol najväčší.

**448.** Dané sú čísla $a$, $s$ $(0 < a < s)$. Medzi všetkými trojuholníkmi, ktoré majú obvod $2s$ a stranu $a$, nájdite trojuholník s najväčším obsahom.

**449.** Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvodu $s$, aby jeho uhlopriečka bola najmenšia?

**450.** Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov daného obsahu má štvorec najmenší obvod.

**451.** Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov daného obvodu má štvorec najväčší obsah.

**452.** Do kružnice s polomerom $r$ vpíšte rovnoramenný trojuholník najväčšieho obsahu.

**453.** Medzi všetkými kruhovými výsekmi obvodu $2s$ nájdite ten, ktorý má najväčší obsah.

**454.** Do elipsy s polosami $a$, $b$ je vpísaný obdĺžnik so stranami rovnobežnými s osami elipsy. Aké musia byť jeho rozmery, aby jeho obsah bol najväčší.

**455.** Dokážte, že valec najväčšieho objemu, ktorý možno vpísať do danej gule, má objem rovnajúci sa 0,5773... násobku objemu gule.

**456.** Kruhový valec má daný objem $2\pi a^3$. Aké musia byť jeho rozmery, aby jeho povrch bol najmenší?

**457.** Do rotačného kužeľa s polomerom $r$ vpíšte súosí valec, ktorý má a) najväčší plášť, b) najväčší objem.

**458.** Do gule s polomerom $r$ vpíšte rotačný kužeľ, ktorý má:

a) najväčší objem; b) najväčší plášť; c) najväčší povrch.

**459.** Do gule s polomerom $r$ vpíšte valec tak, aby mal najväčší plášť.

**460.** Rotačný paraboloid, ktorý vznikne otočením paraboly $y^2 = 4ax$ okolo osi $o_x$, je zrezaný rovinou kolmou na os rotácie vo vzdialenosti $h$ od vrcholu. Aké rozmery musí mať rotačný valec s osou v osi $x$ vpísaný do tohto telesa, aby jeho objem bol najväčší?

**461.** Na priamke $y = 3x - 1$ nájdite taký bod, aby jeho vzdialenosť od bodu $A = (1, -2)$ bola najmenšia.

**462.** Na elipse $x^2/18 + y^2/8 = 1$ nájdite bod $M$ tak, aby dotyčnica k elipse v tomto bode tvorila so súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému trojuholník s najmenším obsahom.

**463.** Nech body $P$, $Q$ sú priesečníky ľubovoľnej dotyčnice elipsy $x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1$ so súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému. Dokážte, že najmenšia dĺžka úsečky $PQ$ sa rovná súčtu polosí elipsy.

**464.** Na parabole $y = 4x - x^2$ nájdite bod, ktorý je najbližšie k bodu $A = (-1, 4)$.

**465.** Kus drôtu s dĺžkou $a$ máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do tvaru štvorca a druhá do tvaru kruhu. Na ktorom mieste treba urobiť rez, aby súčet obsahu štvorca a obsahu kruhu bol najmenší?

**466.** Kartón tvaru obdĺžnika má rozmery 60 cm $\times$ 28 cm. V rohoch sa nastrihnú štvorce a zvyšok sa zahne do otvorenej škatule. Aká veľká musí byť strana nastrihnutých štvorcov, aby objem škatule bol najväčší?

**467.** Silážna jama má tvar pravouhlého rovnobežnostena a objem 200 m$^3$. Dĺžka má byť štvornásobok šírky a 1 m$^2$ základne je 2-krát lacnejší ako 1 m$^2$ steny. Aké musia byť rozmery, aby stavba silážnej jamy bola najlacnejšia?

**468.** Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca pozostávajúceho z obdĺžnika a polkruhu nad jednou jeho stranou, má obvod $a$. Aké musia byť rozmery obdĺžnika, aby okno malo najväčší plošný obsah?

**469.** Dva splavné kanály, ktoré sú na seba kolmé, majú šírku 4 m a 6 m. Vypočítajte, aké najdlhšie brvno možno splaviť týmito kanálmi.

**470.** Z guľatiny kruhového prierezu priemeru $d$ vypíli sa trám s pravouhlým prierezom, ktorého výška je $h$ a základňa $b$. Aké musia byť rozmery prierezu trámu, aby jeho pevnosť v ohybe bola najväčšia (pevnosť trámu v ohybe je úmerná odporovému momentu prierezu trámu $W = bh^2/6$)?

**471.** Zistite, ktoré miesto na spojnici dvoch svetelných zdrojov so svietivosťou $I_1$ a $I_2$ je najmenej osvetlené.

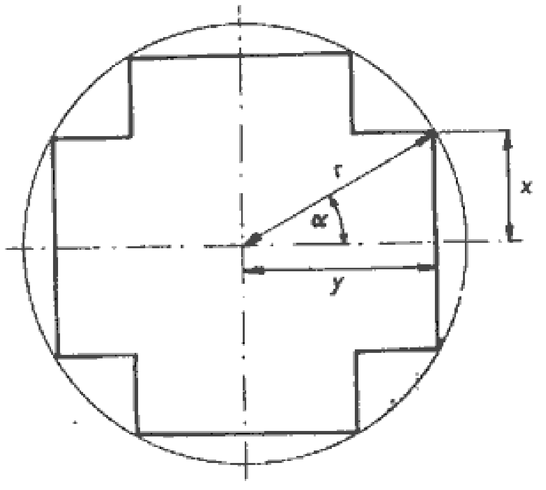
**472.** Nad ľadovou plochou klziska je umiestnený svetelný zdroj. V akej výške musí byť umiestnený, aby dva protiľahlé okraje ľadovej plochy, ktoré sú rovnako ďaleko od svetelného zdroja, pričom ich vzdialenosť je $d$, mali najlepšie osvetlenie.

**473.** Dopravný podnik usporiada zájazd. Ak počet účastníkov zájazdu je 100 alebo menej, cena zájazdu pre jedného účastníka je 600 Kčs. Pri väčšom počte účastníkov ako 100 sa za každého účastníka naviac zníži cena zájazdu o 2,50 Kčs. Koľko účastníkov sa musí prihlásiť, aby podnik mal najväčší príjem?

**474.** Muž v loďke je vzdialený 9,5 km od pobrežia v bode $C$. Chce sa dostať do miesta $A$ na pobreží, ktoré je od neho vzdialené 16 km. Vie veslovať rýchlosťou 3,2 km/h a kráčať rýchlosťou 6,4 km/h. Zistite, kde sa musí vylodiť, aby dosiahol bod $A$ v najkratšom čase. Ako dlho mu to potrvá?

**475.** Parník pohybujúci sa rovnomerne rýchlosťou $v$ (v km/h) spotrebuje za hodinu $0{,}3 + 0{,}000\,02v^3$ nafty (v m³). Akou rýchlosťou sa má pohybovať, aby na danej dráhe spotreboval čo najmenej nafty?

**476.** Priemyselný závod $Z$ je vzdialený 5 km od autostrády idúcej do mesta $M$, pričom vzdialenosť závodu $Z$ od mesta $M$ je 13 km. Zistite, pod akým uhlom $\alpha$ treba vybudovať cestu k autostráde, aby transport materiálu zo $Z$ do $M$ bol najlacnejší, ak cena prepravy 1 t materiálu na 1 km po autostráde je 0,5 Kčs a po vybudovanej ceste 1,5 Kčs.



*Obr. 30*

**477.** Nádoba naplnená vodou so zvislou stenou výšky $h$ stojí na vodorovnej rovine. Vypočítajte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda striekala čo najďalej.

**478.** Nájdite takú koncentráciu kyslíka v zmesi pozostávajúcej z NO a $O_2$, pri ktorej sa NO obsiahnutý v zmesi oxiduje s najväčšou rýchlosťou.

**479.** Pri konštrukcii transformátora je dôležité zaplniť vnútro cievky železným jadrom (obyčajne v tvare kríža, pozri *obr. 30*) tak, aby plošný obsah rezu jadra bol maximálny. Vypočítajte, aké majú byť rozmery $x$ a $y$, ak polomer cievky je $r$.

## 3,11. Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexný bod

**Konvexnosť a konkávnosť funkcie.** Majme funkciu $f$, ktorá je definovaná v intervale $J$. Ak pre každé tri čísla $x_1$, $x_2$, $x_3$ z intervalu $J$, pričom $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ pod [nad] priamkou*), ktorá prechádza bodmi $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_3 = (x_3, f(x_3))$ alebo leží na tejto priamke; hovoríme, že funkcia $f$ je *konvexná* [*konkávna*] na intervale $J$.

---

*) Ak je daná priamka $p$, ktorej rovnica je
$$y = y_0 + k(x - x_0),$$
hovoríme, že bod $P = (x, y)$ leží nad priamkou $p$, ak
$$y > y_0 + k(x - x_0)$$
a leží pod priamkou $p$, ak
$$y < y_0 + k(x - x_0).$$

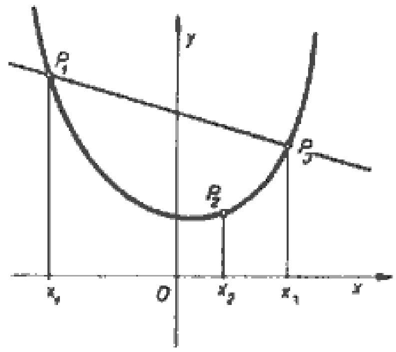
Ak bod $P_2$ leží vždy pod [nad] priamkou, určenou bodmi $P_1$, $P_3$, potom funkcia $f$ je na intervale $J$ rýdzo *konvexná* [*rýdzo konkávna*] (pozri *obr. 31a, 31b*).

Vlastnosti:

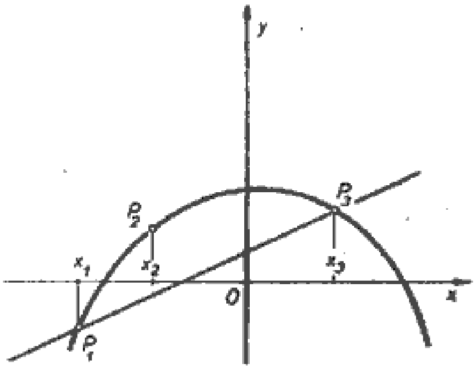
**Veta 1.** Nech funkcia $f$ má deriváciu na intervale $J$. Funkcia $f$ je rýdzo konvexná [konvexná, rýdzo konkávna, konkávna] vtedy a len vtedy, ak derivácia $f'$ je na intervale rastúca [neklesajúca, klesajúca, nerastúca].

**Veta 2.** Nech funkcia $f$ je spojitá na intervale $J$ a vnútri intervalu $J$ má druhú deriváciu $f''$. Funkcia $f$ je na intervale $J$ konvexná [konkávna] vtedy a len vtedy, keď platí $f''(x) \geqq 0$ [$f''(x) \leqq 0$] pre každé $x$ znútra intervalu $J$.

Funkcia $f$ je na intervale $J$ rýdzo konvexná [rýdzo konkávna] vtedy a len vtedy, keď platí $f''(x) \geqq 0$, [$f''(x) \leqq 0$] pre každé $x$ znútra intervalu $J$ a v každom intervale $J_1 \subset J$ je aspoň jeden bod $x$, pre ktorý platí $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$].




*Obr. 31a*




*Obr. 31b*

**Inflexný bod funkcie.** Nech funkcia $f$ má v čísle $x_0$ deriváciu $f'(x_0)$. Nech existuje také pravé okolie čísla $x_0$, že pre všetky čísla $x$ z tohto okolia bod $P = (x, f(x))$ leží nad [pod] dotyčnicou ku grafu funkcie v čísle $x_0$ a také ľavé okolie čísla $x_0$, že pre všetky čísla $x$ z tohto okolia leží bod $P = (x, f(x))$ pod [nad] dotyčnicou ku grafu funkcie v čísle $x_0$. Potom hovoríme, že funkcia $f$ má v čísle $x_0$ *inflexný bod* alebo že graf funkcie $y = f(x)$ má v bode $P = (x_0, f(x_0))$ inflexný bod.

Vlastnosti:

**Veta 3.** Ak funkcia $f$ má v čísle $x_0$ inflexný bod, potom $f''(x_0) = 0$ alebo $f''(x_0)$ neexistuje.

**Veta 4.** Nech funkcia $f$ má v pravom a ľavom okolí čísla $x_0$ druhú deriváciu $f''$ a v čísle $x_0$ prvú deriváciu $f'(x_0)$. Ak pre všetky $x$ z pravého okolia čísla $x_0$ platí $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$] a pre všetky $x$ z ľavého okolia čísla $x_0$ platí $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$], funkcia $f$ má v čísle $x_0$ inflexný bod.

**Veta 5.** Nech funkcia $f$ má v čísle $x_0$ derivácie až do $n$-tého rádu vrátane, $n > 2$ a platí $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ak $n$ je nepárne číslo, potom funkcia $f$ má v čísle $x_0$ inflexný bod. Ak $n$ je párne číslo, funkcia $f$ v istom okolí bodu $x_0$ je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(x_0) > 0$ a rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

**Príklad 1.** Nájdime intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia

$$y = x^5 - 5x^3 + 4x$$

konvexná, a v ktorých je konkávna. Nájdime všetky jej inflexné body.

*Riešenie.* Nájdime druhú deriváciu danej funkcie. Pre všetky čísla $x$ platí

$$y' = 5x^4 - 15x^2 + 4, \quad y'' = 20x^3 - 30x.$$

Hľadané intervaly nájdeme podľa vety 2 tak, že zistíme, v ktorých intervaloch druhá derivácia $y''$ nemení znamienko. Pretože druhá derivácia $y''$ je spojitá funkcia v intervale $(-\infty, \infty)$, budeme postupovať pri určovaní znamienka $y''$ podobne ako v článku 3,10 pri určovaní znamienka $y'$.

Nájdeme najskôr body, kde $y'' = 0$ alebo $y''$ neexistuje. Keďže $y''$ existuje v každom čísle, pre hľadané body platí

$$20x^3 - 30x = 0.$$

Z toho dostaneme

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Znamienko druhej derivácie $y''$ v intervaloch $(-\infty, -\sqrt{3/2})$, $(-\sqrt{3/2}, 0)$, $(0, \sqrt{3/2})$, $(\sqrt{3/2}, \infty)$ zistíme tak, že si zvolíme vhodné číslo z každého intervalu a v ňom vypočítame druhú deriváciu. Dostaneme $y''(-2) = -100$, $y''(-1) = 10$, $y''(1) = -10$, $y''(2) = 100$. Pre $y''$ platí:

| $x$ | $(-\infty, -\sqrt{3/2})$ | $-\sqrt{3/2}$ | $(-\sqrt{3/2}, 0)$ | $0$ | $(0, \sqrt{3/2})$ | $\sqrt{3/2}$ | $(\sqrt{3/2}, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Podľa vety 2 je daná funkcia v intervaloch $(-\infty, \sqrt{3/2})$, $(0, \sqrt{3/2})$ rýdzo konkávna a v intervaloch $(-\sqrt{3/2}, 0)$, $(\sqrt{3/2}, \infty)$ rýdzo konvexná.

Tým sme našli aj inflexné body. Keďže daná funkcia $f$ má v okolí čísiel $-\sqrt{3/2}$, $0$, $\sqrt{3/2}$ druhú deriváciu, ktorá v týchto číslach mení znamienko, má podľa vety 4 funkcia $f$ v bodoch $x_1 = -\sqrt{3/2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3/2}$ inflexné body.

**Príklad 2.** Nájdime všetky inflexné body funkcie

$$y = e^{-x^2}.$$

*Riešenie.* Z vety 3 vyplýva, že inflexné body danej funkcie môžu byť v číslach, pre ktoré $y'' = 0$ alebo kde daná funkcia nemá druhú deriváciu. Keďže je

$$y'' = (e^{-x^2})'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$ môže mať daná funkcia inflexné body v číslach, pre ktoré platí

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$$

alebo

$$2x^2 - 1 = 0.$$

Z toho máme

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Počítajme tretiu deriváciu $y'''$, dostaneme

$$y''' = -4\, e^{-x^2}(2x^3 - 3x)$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$. Ale je

$$y'''(1/\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\, e^{-1/2} \neq 0, \qquad y'''(-1/\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}\, e^{-1/2} \neq 0.$$

Preto podľa vety 5 má funkcia $y = e^{-x^2}$ v číslach $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = -1/\sqrt{2}$ inflexné body $M_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, $M_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$.

V úlohách 480 až 485 nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých dané funkcie sú konvexné, konkávne a nájdite všetky ich inflexné body, ak

**480.** a) $y = 5x^2 + 20x + 7$; d) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$;

b) $y = x(1 - x)^2$; e) $y = 2 - |x^2 - 2|$;

c) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$; f) $y = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$.

**481.** a) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$; c) $y = x + \dfrac{2x}{1 - x^2}$;

b) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$; d) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 27}$.

**482.** a) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$; c) $y = 4(x - 1)^{5/2} + 20(x - 1)^{3/2}$;

b) $y = 3 - (x + 2)^{7/5}$; d) $y = (x - 1)^{1/3}(x + 1)^{2/3}$.

**483.** a) $y = x \ln x$; b) $y = 1 - \ln (x^2 - 9)$; c) $y = x^x$.

**484.** a) $y = x - \cos x$; b) $y = x \operatorname{arctg} x$; c) $y = \operatorname{arctg} (1/x)$.

**485.** a) $y = |x - 1| + |x + 1|$; b) $y = \arcsin (\sin x)$; c) $y = e^{|x|}$.

**486.** Nájdite intervaly, v ktorých je funkcia $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x + 2(x - 1)^2 \operatorname{sgn} (x - 1)$ rýdzo konvexná a rýdzo konkávna.

**487.** Dokážte, že funkcia $f(x) = 1/\sin^2 x + 4/\cos^2 x$ je na intervale $(0, \pi/2)$ rýdzo konvexná.

**488.** Dokážte, že funkcia $y = (x - 2)^4$ nemá inflexné body.

**489.** Nájdite všetky inflexné body funkcie:

a) $y = e^{-x^2} + 2x$; b) $y = \dfrac{\ln (x + 2)}{\sqrt{x + 2}}$; c) $y = \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^4$.

**490.** Dokážte, že všetky inflexné body funkcie $y = (x + 1)/(x^2 + 1)$ ležia na priamke $x - 4y + 3 = 0$.

**491.** Dokážte, že pre pravouhlé súradnice všetkých inflexných bodov funkcie $y = x \sin x$ platí $(x^2 + 4)\, y^2 = 4x^2$.

**492.** Pre aké hodnoty čísiel $a$, $b$ je bod $(2, 8)$ inflexným bodom funkcie $y = ax^3 + bx^2$.

**493.** Nech $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a > 0$. Dokážte, že funkcia $f$ je konkávna na intervale $(-\infty, -b/3a\rangle$ a konvexná na intervale $\langle -b/3a, \infty)$.

**494.** Pre aké číslo $b$ má funkcia $y = e^x + bx^3$ inflexný bod?

**495.** Dokážte, že každý polynóm nepárneho stupňa, $n > 1$, má aspoň jeden inflexný bod.

**496.** Dokážte, že každý polynóm s kladnými koeficientmi, ktorý je párnou funkciou, je konvexný na intervale $(-\infty, \infty)$ a má jediné lokálne minimum.

**497.** Dokážte:

a) Ak funkcia $f$ je v intervale $J$ konvexná a $c > 0$, potom aj funkcia $cf$ je v intervale $J$ konvexná.

b) Súčet dvoch funkcií $f$, $g$ konvexných na intervale $J$ je opäť funkcia konvexná na intervale $J$.

c) Ak funkcie $f$, $g$ sú na intervale $J$ konvexné a funkcia $g$ je na intervale $J$ rastúca, potom aj zložená funkcia $f(g)$ je na intervale $J$ konvexná.

**498.** Dokážte, že funkcia $f$ je konvexná [konkávna] na intervale $J$ vtedy a len vtedy, ak pre každú trojicu čísiel $x_1$, $x_2$, $x_3$ z intervalu $J$, pričom $x_1 < x_2 < x_3$, je determinant

$$\begin{vmatrix} x_1, & f(x_1), & 1 \\ x_2, & f(x_2), & 1 \\ x_3, & f(x_3), & 1 \end{vmatrix}$$

nezáporný [nekladný].

**499.** Dokážte, že pre funkciu $f$ konvexnú na intervale $J$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

pre ľubovoľné čísla $x_1$, $x_2$ z intervalu $J$.

**500.** Na základe predchádzajúcej úlohy dokážte nerovnosť

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x + y}{2}\right)^n,$$

kde $x > 0$, $y > 0$ a $n > 1$.

## 3,12. Asymptoty

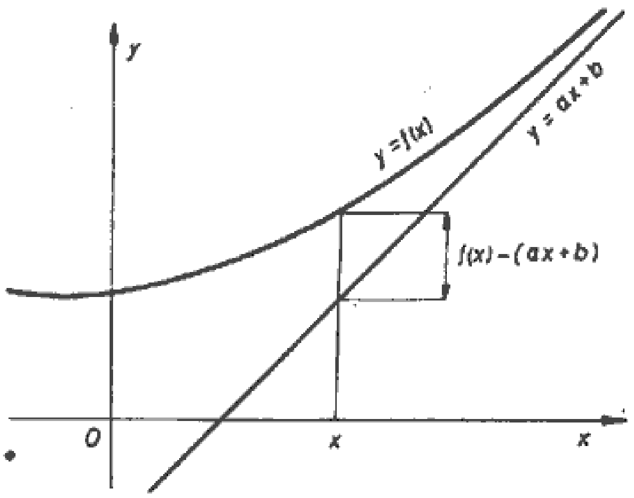
Priamku, ktorá má rovnicu $x = a$, nazývame *asymptotou bez smernice* grafu funkcie $f$, ak funkcia $f$ má v čísle $a$ nevlastnú limitu alebo nevlastnú limitu zľava alebo nevlastnú limitu sprava.

Priamku, ktorá má rovnicu $y = ax + b$, nazývame *asymptotou so smernicou* grafu funkcie $f$, ak platí

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

alebo

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (obr.\ 32).$$




*Obr. 32*

**Veta 1.** Ak existujú limity

$$a = \lim_{x \to \infty} [f(x)/x], \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

alebo

$$a = \lim_{x \to -\infty} [f(x)/x], \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax],$$

potom priamka $y = ax + b$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie $f$.

**Príklad 1.** Nájdime asymptoty grafu funkcie

$$y = x + \frac{1}{x - 1}$$

*Riešenie.* Keďže platí

$$\lim_{x \to 1^+} \left(x + \frac{1}{x - 1}\right) = \infty,$$

priamka $x = 1$ je asymptotou bez smernice danej funkcie. Iné asymptoty bez smernice neexistujú, lebo daná funkcia je spojitá pre každé $x \neq 1$.

Hľadajme asymptoty so smernicou. Vypočítajme limity

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2 - x}\right) = 1,$$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2 - x}\right) = 1$$

a

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1} = 0.$$

Podľa vety 1 priamka, ktorej rovnica je $y = x$, je asymptotou so smernicou grafu danej funkcie.

**501.** Dokážte z definície asymptoty, že priamka $y = 2x + 1$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $y = (2x^3 + x^2 + 3)/x^2$.

**502.** Nájdite také číslo $a$, aby priamka $y = x + a$ bola asymptotou grafu funkcie $y = x^3/(x^2 - x - 2)$.

V úlohách **503** až **509** napíšte rovnice asymptot grafu danej funkcie:

**503.** a) $y = \dfrac{x}{x-1}$;

b) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

c) $y = 3x + \dfrac{3}{x-2}$;

d) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

**504.** a) $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$;

b) $y = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$.

**505.** a) $y = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$;

b) $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1}$.

**506.** a) $y = \sec x$;

b) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

c) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$;

d) $y = \dfrac{x \sin x}{1 + x^2}$.

**507.** a) $y = e^{1/x}$;

b) $y = x e^{1/x^2}$;

c) $y = (x + 1)\, e^{-1/x}\sqrt{x}$;

d) $y = \begin{cases} 1 - x e^{-1/|x| - 1/x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 1 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

**508.** a) $y = x \ln(e + 1/x)$;

b) $y = x + (\ln x)/x$.

**509.** a) $y = x \operatorname{arctg} x$;

b) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$;

c) $y = bx + \operatorname{arctg}(x/b)$, $b \neq 0$;

d) $y = x \operatorname{tgh} x$.

## 3,13. Priebeh funkcie

Pri určovaní priebehu danej funkcie najčastejšie zisťujeme:

1. obor definície funkcie,
2. párnosť, nepárnosť, periódu funkcie,
3. všetky body nespojitosti funkcie, jednostranné limity funkcie v nich a intervaly spojitosti,

4. všetky nulové body funkcie,
5. všetky intervaly, kde je funkcia monotónna,
6. všetky intervaly, kde je funkcia konkávna, konvexná,
7. všetky lokálne extrémy funkcie,
8. všetky inflexné body funkcie,
9. všetky asymptoty grafu funkcie,
10. ďalšie vlastnosti, ako napr. body, v ktorých derivácia funkcie nie je definovaná, spojitá atď.

Pomocou tohto zostrojíme graf danej funkcie.

**Príklad 1.** Treba zistiť priebeh funkcie

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

*Riešenie.* 1. Funkcia $f$ je definovaná pre všetky čísla $x$, pre ktoré je $2(x+1)^2 \neq 0$, t. j. pre $x \neq -1$. Oborom definície funkcie $f$ je množina $M = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

2. Pretože pre každé $x \in M$ je $f(x) \neq f(-x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$, funkcia $f$ nie je ani párna ani nepárna. Ak $l \neq 0$, neplatí $f(x+l) = f(x)$ pre každé $x \in M$. Teda funkcia $f$ nie je periodická.

3. Funkcia $f$ je spojitá v každom čísle $x \in M$. Je nespojitá v čísle $x = -1$. Pre limity funkcie $f$ v čísle $x = -1$ platí

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Ďalej platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

4. Všetky nulové body funkcie $f$ nájdeme riešením rovnice $x^3/2(x+1)^2 = 0$. Jej jediným riešením je číslo $x = 0$.

5 až 8. Vypočítajme $f'$ a $f''$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}, \qquad x \neq -1;$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{3x}{(x+1)^4}, \qquad x \neq -1.$$

Prvá derivácia $f'$ sa rovná nule, keď $x^2(x+3) = 0$, t. j. keď $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ a nie je definovaná pre $x = -1$. Druhá derivácia $f''$ sa rovná nule, keď $3x = 0$, t. j. keď $x = 0$ a nie je definovaná v čísle $x = -1$.

Stacionárnymi bodmi funkcie $f$ sú čísla $0, -3$. Tieto a číslo $-1$, kde nie je funkcia $f$ definovaná, rozdeľujú obor definície $M$ funkcie $f$ na intervaly

$$(-\infty, -3), \quad (-3, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, \infty).$$

Keďže je $f'(-4) = 8/27$, $f''(-4) = -4/27$, $f'(-2) = -2$, $f''(-2) = -6$, $f'(-1/2) = 5/2$, $f''(-1/2) = -24$, $f'(1) = 1/4$ a $f''(1) = 3/16$, podľa poznámky 2 v článku 3,10 pre $f'$ a $f'' = (f')'$ platí

| $x$ | $(-\infty, -3)$ | $-3$ | $(-3, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | N | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-\frac{9}{16}$ | $-$ | N*) | $-$ | $0$ | $+$ |

*) N znamená, že funkcia nie je definovaná.

5. Podľa viet z článku 3,9 je funkcia $f$ rastúca na intervaloch $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-3, -1)$.

6. Podľa viet z článku 3,11 funkcia $f$ je konkávna na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ a je konvexná na intervale $(0, \infty)$.

7. Podľa viet z článku 3,10 má funkcia $f$ v čísle $x = -3$ maximum $f(-3) = -27/8$ a v čísle $x = 0$ nenadobúda extrém.

8. Funkcia $f$ v čísle $x = 0$ má inflexný bod. Jeho súradnice sú $(0, 0)$.

9. Asymptota bez smernice grafu funkcie $f$ je $x = -1$. Pre čísla $a$, $b$ asymptoty so smernicou $y = ax + b$ platí:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = 1/2,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right] = -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + x}{2(x+1)^2} = -1.$$

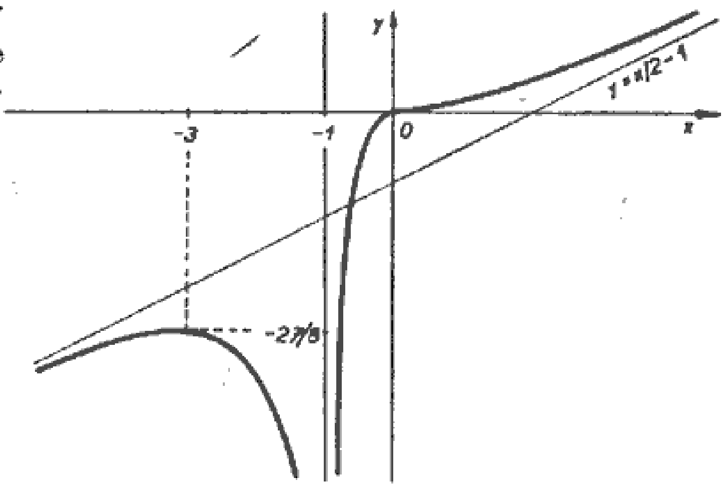
Teda asymptota so smernicou je $y = x/2 - 1$.

Nájdené výsledky zhrňme do tabuľky:

| $x$ | $(-\infty, -3)$ | $-3$ | $(-3, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $N$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-\frac{9}{16}$ | $-$ | $N$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-\frac{27}{8}$ | $\searrow$ | $N$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| | $\cap$ | max. | $\cap$ | asymptota bez smernice | $\cap$ | infl. bod | $\cup$ *) |

*) Znak $\nearrow$ [$\searrow$] znamená, že funkcia rastie [klesá]. Znak $\cup$ [$\cap$] znamená, že funkcia je konvexná [konkávna].

Graf danej funkcie $f$ pozri na *obr. 33*.



*Obr. 33*

**V úlohách 510 až 553 zistite priebeh funkcie $y = f(x)$ a zostrojte jej graf.**

**510.** $y = x^3 + 3x$.

**511.** $y = 16x(x - 1)^3$.

**512.** $y = x(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)/10$.

**513.** $y = |16 - x^2|$.

**514.** $y = x^2 - 2|x|$.

**515.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

**516.** $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1} + x.$

**517.** $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}.$

**518.** $y = \dfrac{x^4}{(1 + x)^3}.$

**519.** $y = \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1}.$

**520.** $y = \sqrt{|x - 1|}.$

**521.** $y = \sqrt{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}.$

**522.** $y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$

**523.** $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}.$

**524.** $y = (x + 1)^{2/3} - (x - 1)^{2/3}.$

**525.** $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$

**526.** $y = 2(x + 1) - 3\sqrt[3]{(x + 1)^2}.$

**527.** $y = e^{1/x}.$

**528.** $y = e^{-x^2}.$

**529.** $y = x^2 e^{1/x}.$

**530.** $y = x e^{-x^2/2}.$

**531.** $y = x + e^{-x}.$

**532.** $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

**533.** $y = x \ln x.$

**534.** $y = \ln (4 - x^2).$

**535.** $y = \ln \dfrac{x + 1}{1 - x}.$

**536.** $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$

**537.** $y = \sin x + \cos x.$

**538.** $y = x + \dfrac{\sin x}{x}.$

**539.** $y = e^{-2x} \sin 3x.$

**540.** $y = x - |\sin x|.$

**541.** $y = \cos x - \ln \cos x.$

**542.** $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}.$

**543.** $y = \arcsin |x|.$

**544.** $y = x - 2 \operatorname{arctg} x.$

**545.** $y = x \operatorname{arctg} x.$

**546.** $y = \arcsin \dfrac{1 - x}{1 + x}.$

**547.** $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}.$

**548.** $y = \arcsin (\sin x).$

**549.** $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x).$

**550.** $y = x^{1/x}.$

**551.** $y = \sinh x + \sinh (1 - x).$

**552.** $y = \operatorname{cotgh} \dfrac{1 - x}{1 + x}.$

**553.** $y = \begin{cases} (\operatorname{tgh} x)/x & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

## 3,14. Funkcia určená parametrickými rovnicami

Nech funkcie $\varphi$ a $\psi$ sú definované na množine $M$, pričom

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

pre každé $t \in M$. Nech funkcia $x = \varphi(t)$ je na množine $M$ jednojednoznačná s oborom hodnôt $N$. Potom zložená funkcia

$$f(x) = \psi[\varphi_{-1}(x)] \tag{2}$$

definovaná na množine $N$ sa nazýva *funkciou určenou parametrickými rovnicami* (1), pričom $\varphi_{-1}$ je inverzná funkcia k $\varphi$. Premennú $t$ nazývame *parametrom* a prechod od systému funkcií (1) k funkcii $f$ nazývame *elimináciou parametra*.

Majme funkciu $y = f(x)$. Jej vyjadrenie pomocou parametrických rovníc (1) nazývame *parametrizáciou funkcie f*.

Každú funkciu $y = f(x)$, kde $x \in N$, možno parametrizovať aspoň jedným spôsobom $x = t$, $y = f(t)$, pričom $t \in N$.

**Rovinná krivka.** Majme funkcie (1) spojité na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$. Nech pre každú dvojicu čísiel $t_1, t_2$, pričom $t_1 \neq t_2$, platí aspoň jedna z nerovností $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$. Ďalej majme daný v rovine pravouhlý súradnicový systém. Množinu $K$ všetkých bodov $M = (\varphi(t), \psi(t))$ roviny, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ nazývame *jednoduchým oblúkom*. Body $A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $B = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$ nazývame *koncovými bodmi* jednoduchého oblúka $K$.

Dva jednoduché oblúky nazývame *spojenými*, ak sa aspoň jeden koncový bod jedného oblúka zhoduje s koncovým bodom druhého oblúka.

*Rovinnou krivkou* *) nazývame takú množinu bodov v rovine, ktorá je jednoduchým oblúkom alebo sa skladá z konečného počtu alebo z postupnosti jednoduchých oblúkov navzájom pospájaných.

Ak krivka $K$ je daná rovnicami (1), potom tieto rovnice nazývame *parametrickými rovnicami krivky*.

Ak funkcie $\varphi$ a $\psi$ v systéme (1) sú spojité v intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$, potom graf funkcie určenej parametricky rovnicami (1) je krivka.

Poznámka. Krivka však nemusí byť vždy grafom funkcie určenej parametrickými rovnicami (1).

Majme v rovine polárny súradnicový systém a funkciu $\varrho = f(\varphi)$, ktorá je spojitá a jedno-jednoznačná na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom množina bodov $M = (f(\varphi), \varphi)$ v rovine určuje krivku, ktorej parametrické rovnice v pravouhlom súradnicovom systéme**) sú

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \qquad y = f(\varphi) \sin \varphi, \tag{3}$$

kde $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Nech funkcie $\varphi$, $\psi$ zo systému (1) majú prvé derivácie na intervale $(\alpha, \beta)$ a nech $\varphi'(t) \neq 0$ pre každé $t$ z tohto intervalu. Potom systém (1) určuje funkciu $f$, ktorá má na obore hodnôt funkcie $\varphi$ deriváciu

$$f'(x) = \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]_{t = \varphi_{-1}(x)}. \tag{4}$$

Derivácia $f'$ je opäť funkcia určená parametrickými rovnicami

$$x = \varphi(t), \qquad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{5}$$

kde $t \in (\alpha, \beta)$.

**Veta 2.** Nech funkcie $\varphi$, $\psi$ zo systému (1) majú derivácie $n$-tého rádu, $n > 1$ na intervale $(\alpha, \beta)$ a nech $\varphi'(t) \neq 0$ pre každé $t \in (\alpha, \beta)$. Potom systém funkcií (1) určuje funkciu danú parametricky, ktorá na obore hodnôt funkcie $x = \varphi(t)$ má $n$-tú deriváciu

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)\right]_{t = \varphi_{-1}(x)} \frac{dt}{dx}. \tag{6}$$

Táto derivácia je opäť funkciou určenou parametrickými rovnicami

$$x = \varphi(t), \qquad y = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right] \frac{1}{\varphi'(t)}, \tag{7}$$

pre $t \in (\alpha, \beta)$.

---

*) V ďalšom texte, ak nebude nič výslovne uvedené, budeme pod krivkou rozumieť rovinnú krivku.
**) Pravouhlý a polárny súradnicový systém v rovine sme zvolili tak ako v článku 4,10/I.

Ak $n = 2$, platí

$$f''(x) = \left[\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}\right]_{t=\varphi_{-1}(x)}. \tag{8}$$

Ak $n = 3$, platí

$$f'''(x) = \left[\frac{\psi'''(t)\,\varphi'^2(t) - 3\psi''(t)\,\varphi''(t)\,\varphi'(t) + 3\psi'(t)\,\varphi''^2(t) - \psi'(t)\,\varphi'(t)\,\varphi'''(t)}{\varphi'^5(t)}\right]_{t=\varphi_{-1}(x)}. \tag{9}$$

Priebeh funkcie určenej parametricky zisťujeme podobne ako v článku 3,13. Pritom niekedy s výhodou použijeme tieto vety:

**Veta 3.** Nech funkcia $f$ určená parametrickými rovnicami (1) má v čísle $x_0 = \varphi(t_0)$ prvú a druhú deriváciu a platí $\psi'(t_0) = 0$, $\psi''(t_0) > 0$ $[\psi''(t_0) < 0]$. Potom funkcia $f$ má v čísle $x_0$ ostré lokálne maximum [minimum].

**Veta 4.** Nech pre funkciu $f$ určenú parametrickými rovnicami (1), kde $t \in (\alpha, \beta)$, platí

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = a, \qquad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \infty \; [-\infty],$$

kde $t_0$ znamená $\alpha^+$ alebo $\beta^-$. Potom priamka $x = a$ je asymptotou bez smernice ku grafu funkcie $f$.

Ak platí

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \infty \; [-\infty], \qquad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = b,$$

kde $t_0$ znamená $\alpha^+$ alebo $\beta^-$, potom priamka $y = b$ je asymptotou ku grafu funkcie $f$.

Nech platí

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \pm\infty,$$

kde $t_0$ znamená $\alpha^+$ alebo $\beta^-$, potom priamka $y = ax + b$ je asymptotou ku grafu funkcie $f$ vtedy a len vtedy, keď je

$$a = \lim_{t\to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \qquad b = \lim_{t\to t_0} [\psi(t) - a\varphi(t)]. \tag{10}$$

Pri zisťovaní priebehu krivky určíme najskôr intervaly, v ktorých je funkcia $x = \varphi(t)$ rýdzo monotónna. V týchto intervaloch určuje systém (1) funkciu danú parametricky, ktorej priebeh sa nájde podľa článku 3,13.

**Fyzikálny význam parametrických rovníc krivky.** Pohyb bodu v rovine je popísaný parametrickými rovnicami (1), kde pre čas $t$ platí $t \in (0, \infty)$ resp. $t \in (0, t_0)$ a funkcie $\varphi$, $\psi$ majú druhé derivácie na tomto intervale.

Krivka určená rovnicami (1), po ktorej sa bod pohybuje sa nazýva *trajektória* bodu.

Pre rýchlosť a zrýchlenie tohoto bodu platí

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v} &= \varphi'(t)\,\mathbf{i} + \psi'(t)\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{a} &= \varphi''(t)\,\mathbf{i} + \psi''(t)\,\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

alebo

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \varphi'(t), \\ v_y &= \psi'(t) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

a

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \varphi''(t), \\ a_y &= \psi''(t), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

kde $v_x$, $v_y$ a $a_x$, $a_y$ sú príslušné zložky rýchlosti a zrýchlenia.

**Príklad 1.** Nájdite priebeh cykloidy, ktorá má parametrické rovnice

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

kde je $a > 0$ a $t \in (-\infty, \infty)$.

*Riešenie.* Najskôr nájdeme intervaly, v ktorých je funkcia

$$\varphi(t) = a(t - \sin t), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{15}$$

rýdzo monotónna. Keďže prvá derivácia tejto funkcie

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$$

je v každom konečnom intervale kladná s výnimkou konečného počtu čísiel $k\pi$, kde $k$ je celé číslo, daná funkcia (15) je rastúca. Z toho vyplýva, že táto funkcia $\varphi$ je jednojednoznačná, a teda rovnice (14) udávajú funkciu $f$ určenú parametricky.

1. Obor definície tejto funkcie $f$ je obor hodnôt funkcie (15), čo je množina $(-\infty, \infty)$. Funkcia (15) je spojitá a jednojednoznačná na intervale $(-\infty, \infty)$, preto k nej existuje inverzná funkcia $t = \varphi_{-1}(x)$ spojitá v intervale $(-\infty, \infty)$. Z toho vyplýva, že i zložená funkcia $f(x) = \psi[\varphi_{-1}(x)]$, pričom $\psi(t) = a(1 - \cos t)$, je spojitá v intervale $(-\infty, \infty)$*).

2. Funkcia $\varphi$ je nepárna funkcia, preto i inverzná funkcia $\varphi_{-1}$ je nepárna. Keďže $\psi$ je párna funkcia, platí $f(x) = \psi[\varphi_{-1}(x)] = \psi[-\varphi_{-1}(x)] = \psi[\varphi_{-1}(-x)] = f(-x)$, pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a funkcia $f$ určená parametrickými rovnicami (14) je párna.

Ukážme ešte, že $f$ je periodická funkcia. Zo vzťahu (15) vyplýva

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2a\pi,$$

čiže

$$t + 2\pi = \varphi_{-1}(x + 2a\pi).$$

Z toho dostaneme

$$f(x + 2a\pi) = \psi[\varphi_{-1}(x + 2a\pi)] = \psi(t + 2\pi) = \psi(t) = \psi[\varphi_{-1}(x)] = f(x).$$

Pri hľadaní priebehu funkcie $f$ stačí sa teda obmedziť na interval $\langle 0, 2a\pi)$.

3. Funkcia $f(x) = \psi[\varphi_{-1}(x)]$ je spojitá v intervale $(-\infty, \infty)$, pozri odsek 1.

4. Nulové body funkcie $f$ určíme z podmienky $\psi(t) = 0$. Máme

$$(1 - \cos t) = 0$$

a

$$\cos t = 1.$$

Z toho vyplýva, že $t = 2k\pi$, čiže $x = 2ka\pi$, kde $k$ je ľubovoľné celé číslo.

5 až 8. Pre deriváciu $f'$ dostaneme podľa vety 1

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

kde $t \in (0, 2\pi)$.

Pre druhú deriváciu $f''$ určenú parametricky máme

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \,.\, \sin t}{a(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}, \tag{17}$$

kde $t \in (0, 2\pi)$. Hľadajme čísla z intervalu $(0, 2\pi)$, v ktorých $f'(x) = 0$. Z rovníc (16) máme

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} = 0,$$

kde $0 < t < 2\pi$. Odtiaľ je $\sin t = 0$ a $t = \pi$, čiže $x = a\pi$. Zistime, či funkcia $f$ určená parametricky má deriváciu sprava v čísle $x = 0$ a deriváciu zľava v čísle $x = 2a\pi$. Dostaneme

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\psi[\varphi_{-1}(x)] - \psi(0)}{x - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)},$$

---

*) Funkciu $f$ nevieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií v tvare $f(x) = \psi[\varphi_{-1}(x)]$, pretože $\varphi_{-1}$ nie je elementárna funkcia.

čiže
$$f'_-(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{(1-\cos t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0^+} \operatorname{cotg} t = \infty,$$

kde sme použili L'Hospitalovo pravidlo. Podobne nájdeme
$$f'_-(2a\pi) = \lim_{t\to 2\pi^-} \operatorname{cotg} t = -\infty.$$

Keďže funkcia $f$ je periodická s periódou $2a\pi$, z vypočítaných derivácií vyplýva, že derivácia $f'$ v číslach $0, \pm 2a\pi, \ldots, \pm 2ak\pi, \ldots$, kde $k$ je prirodzené číslo, neexistuje.

Ostáva určiť znamienka derivácií $f'$, $f''$ v okolí čísiel 0 a $\pi$. Zvoľme $t = \pm\pi/2$ čiže $x = \pm a(\pi/2 - 1)$, máme $f'[-a(\pi/2 - 1)] = -1$, $f'[a(\pi/2 - 1)] = 1$. Podobne je pre $t = 3\pi/2$, $x = a(3\pi/2 + 1)$ a $f'[a(3\pi/2 + 1)] = -1$. Zo vzťahu (17) vyplýva, že $f''(x) < 0$ pre všetky čísla $x \neq 2ka\pi$, kde $k$ je celé číslo. Úhrnom máme

| $t$ | $(-\pi, 0)$ | $0$ | $(0, \pi)$ | $\pi$ | $(\pi, 2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $(-a\pi, 0)$ | $0$ | $(0, a\pi)$ | $a\pi$ | $(a\pi, 2a\pi)$ |
| $f'$ | $-$ | $N$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''$ | $-$ | $N$ | $-$ | $-$ | $-$ |

5. Funkcia $f$ je v intervale $\langle 0, a\pi\rangle$ rastúca, v intervale $\langle a\pi, 2a\pi\rangle$ klesajúca.

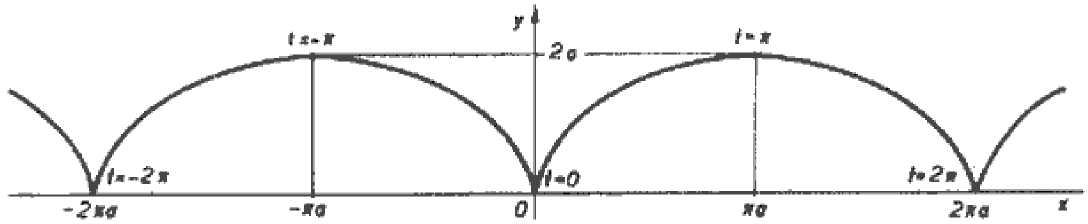
6. Funkcia $f$ je konkávna v intervale $(0, 2a\pi)$, teda aj v každom intervale $(2ka\pi, 2(k+1)\,a\pi)$, kde $k$ je celé číslo.

7. Lokálne minimum funkcie $f$ v čísle 0, a teda aj v každom čísle $2ka\pi$ rovná sa 0, kde $k$ je celé číslo. Lokálne maximum funkcie $f$ v čísle $a\pi$, a teda aj v každom čísle $(2k+1)\,a\pi$ rovná sa $2a$, kde $k$ je celé číslo.

8. Inflexné body funkcia $f$ nemá.

9. Pretože ani jedna z limít
$$\lim_{t\to t_0^+} \varphi(t), \qquad \lim_{t\to t_0^+} \psi(t)$$
(resp. $t \to t_0^-$) nie je nevlastná, funkcia $f$ nemá asymptotu.

Graf funkcie $f$ je krivka, ktorá sa nazýva cykloida (*obr. 34*).




*Obr. 34*

**554.** Nájdite funkciu danú parametricky a zostrojte jej graf:

a) $x = t + 1, \quad y = 1 - 2t - t^2, \quad$ ak $t \in (1, 4)$;
b) $x = 3\cosh t, \quad y = 2\sinh t, \quad$ ak $t \in \langle 0, \infty)$;
c) $x = 4\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad$ ak $t \in \langle 0, \pi\rangle$;
d) $x = 8\cos^2 t, \quad y = 9\sin^2 t, \quad$ ak $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

**555.** Nájdite množiny všetkých hodnôt parametra $t$ tak, aby dané parametrické rovnice určovali spojitú funkciu $y = f(x)$. Elimináciou parametra $t$ z týchto rovníc nájdite funkciu $f$, ktorá je určená rovnicami:

a) $x = 8t^2 - 7$, $y = 16t^2 - 1$;
b) $x = 5t^2$, $y = 3t$;
c) $x = 6\sin(\pi t/3)$, $y = 3\cos(\pi t/3)$;
d) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

**556.** Zistite, či dané parametrické rovnice určujú krivku a zostrojte ju:

a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$;
b) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$;
c) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

**557.** Zistite, aké krivky sú dané parametrickými rovnicami:

a) $x = t^2 + t + 1$, $y = t^2 - t + 1$, $t \in (-\infty, \infty)$; b) $x = a\sin^2 t$, $y = b\cos^2 t$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

**558.** Daná je rovnica krivky v pravouhlom súradnicovom systéme, nájdite jej parametrické rovnice tým, že položíte $y = tx$:

a) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$ (Descartov list);
b) $x^2 + y^2 = x^3 + y^3$.

**559.** Nájdite parametrické rovnice krivky a znázornite ju, ak v polárnom súradnicovom systéme má rovnicu:

a) $\varrho = 3\varphi$, (Archimedova špirála);
b) $\varrho = 2\sin\varphi$, (kružnica);
c) $\varrho = 2\cos 3\varphi$, (trojlístok);
d) $\varrho = \pi/\varphi$, (hyperbolická špirála);
e) $\varrho = 2(1 + \cos\varphi)$, (kardioida);
f) $\varrho = 2^{\varphi/\pi}$, (logaritmická špirála).

**560.** Nájdite deriváciu funkcie danej parametricky v čísle $t_0$, ak

a) $x = \dfrac{2}{3} 2t^3$, $y = \dfrac{1}{2} t^2$, $t_0 = 4$;
b) $x = \dfrac{2\sin t}{1 + 3\cos t}$, $y = \dfrac{4\cos t}{1 + 3\cos t}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

**561.** Vypočítajte deriváciu funkcie danej parametricky:

a) $x = \dfrac{1-t}{1+t}$, $y = \dfrac{2t}{1+t}$;
b) $x = a(t - \cos t)$, $y = a(1 + \sin t)$;
c) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$;

d) $x = e^{2t}\cos^2 t,\quad y = e^{2t}\sin^2 t,\quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$; f) $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

e) $x = a\cosh t,\quad y = b\sinh t,\quad t > 0$;

**562.** Nájdite $f'$, $f''$, $f'''$, ak pre funkciu $f$ určenú parametricky platí:

a) $x = 4t + t^2,\quad y = t^3 + t,\quad$ pre $t \geqq 0$; d) $x = e^{-t}\cos t,\quad y = e^{-t}\sin t$;

b) $x = a\sin t,\quad y = a\cos t,\quad$ pre $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; e) $x = \ln t,\quad y = \sin 2t,\quad$ pre $t > 0$;

c) $x = 3\cos^3 t,\quad y = 3\sin^3 t,\quad$ pre $t \in \langle 0, \pi\rangle$; f) $x = e^t,\quad y = \arcsin t,\quad$ pre $t \in (-1, 1)$.

**563.** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie určenej parametricky:

a) $x = t^2 - 4t + 4,\quad y = t^2 - 3t + 2,\quad t \leqq 2$, v bode $A = (1, 0)$; c) $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$, v bode $t_0 = 3\pi/2$;

b) $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t,\quad 0 \leqq t \leqq \pi$, v bode $t_0 = \pi/4$; d) $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t),\quad y = a\sin t$, $t \in (0, \pi)$ v ľubovoľnom bode.

**564.** Nájdite inflexné body funkcie danej parametricky:

a) $x = 3t + t^3,\quad y = t^2$; b) $x = \sin t,\quad y = e^t,\quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

**565.** Pre aké čísla $a$, $b$ je bod $A = (1, 4)$ inflexným bodom krivky $x = bt^2$, $y = at + t^3$, $t \geqq 0$?

**566.** Nájdite asymptoty krivky:

a) $x = \frac{te^t}{t-1},\quad y = \frac{2e^t}{t-1}$; b) $x = \frac{3at}{1+t^3},\quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

**567.** Zistite priebeh krivky, ktorá je určená parametrickými rovnicami:

a) $x = 2t - t^2,\quad y = 3t - t^3$; d) $x = \cos^4 t,\quad y = \sin^4 t$;

b) $x = (\ln t)/t,\quad y = t\ln t$; e) $x = te^t,\quad y = te^{-t}$;

c) $x = \frac{t^2}{1-t^2},\quad y = \frac{1}{1+t^2}$; f) $x = \frac{3t}{1+t^3},\quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

**568.** Zistite priebeh krivky danej v polárnom súradnicovom systéme:

a) $\varrho = a + b \sin \varphi, \quad 0 < a \leqq b$; b) $\varrho = a \sin 3\varphi, \quad a > 0$.

**569.** Strela opustila hlaveň, ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha = \pi/3$, rýchlosťou $v_0 = 600$ m/s. Nájdite dráhu strely, jej rýchlosť a zrýchlenie v čase $t_0 = 2$ s; $t_1 = 5$ s. Vypočítajte veľkosť a smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t$.

**570.** Vypočítajte rýchlosť a zrýchlenie v čase $t_0 = 2$ s, ak pohyb bodu je určený rovnicami

$$x = 4 \sin 2\pi t - 3 \cos 2\pi t,$$
$$y = 3 \sin 2\pi t + 4 \cos 2\pi t.$$

Nájdite trajektóriu bodu.

**571.** Rovinný pohyb bodu je určený rovnicami $x = t^2$, $y = t^2 - t^4/4$, $t \in \langle 0, \infty)$. Nájdite trajektóriu tohto bodu. Zostrojte túto trajektóriu s vektormi rýchlosti a zrýchlenia pre $t = 0$ s, 1 s, 2 s. Nájdite polohu bodu v čase, keď sa pohybuje rovnobežne s osou $o_x$. Nájdite jeho polohu, pre ktorú absolútna hodnota zrýchlenia nadobúda minimum.

**572.** Bod sa pohybuje tak, že platí $x = 2 \sin t$, $y = 2(1 - \cos t)$. Ukážte, že absolútne hodnoty rýchlosti a zrýchlenia sú konštantné. Nájdite trajektóriu bodu a opíšte bližšie tento jednoduchý pohyb.

## 3,15. Derivácia komplexnej funkcie reálnej premennej

Nech $h(x) = f(x) + \mathrm{i}\, g(x)$ je komplexná funkcia reálnej premennej definovaná pre všetky $x$ z okolia $O(x_0)$ čísla $x_0$. *Derivácia funkcie* $h$ v čísle $x_0$ je limita

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Označujeme ju aj $\left[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}$.

Nech $M$ je množina bodov, kde funkcia $h$ má deriváciu. Potom funkciu $h'$, definovanú na množine $M$ tak, že číslu $x_0$ je priradené číslo $h'(x_0)$, nazývame *deriváciou funkcie* $h$.

**Veta 1.** Nech $h(x) = f(x) + \mathrm{i}\, g(x)$ je komplexná funkcia reálnej premennej, pričom $f$ je jej reálna a $g$ jej imaginárna časť. Funkcia $h$ má na množine $M$ deriváciu vtedy a len vtedy, ak tam majú deriváciu funkcie $f$ a $g$. Platí

$$h'(x) = f'(x) + \mathrm{i}\, g'(x). \tag{2}$$

**Veta 2.** Pre funkciu $h(x) = \mathrm{e}^{ax}$, kde $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, platí

$$[\mathrm{e}^{ax}]' = a\, \mathrm{e}^{ax}. \tag{3}$$

Pre funkciu definovanú rovnosťou $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$, kde $x > 0$, $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, platí

$$[x^a]' = a x^{a-1}. \tag{4}$$

Poznámka. Keďže pre limitu súčtu, súčinu, podielu komplexných funkcií reálnej premennej platia tie isté vety ako pre reálne funkcie reálnej premennej, budú platiť pre derivácie súčtu, súčinu a podielu komplexných funkcií reálnej premennej tie isté vety ako pre reálne funkcie. Veta o derivovaní zloženej funkcie reálnej premennej platí aj pre komplexné funkcie reálnej premennej.

Derivácie vyšších rádov komplexnej funkcie reálnej premennej sú definované podobne ako pre reálne funkcie, teda

$$h^{(n)} = (h^{(n-1)})' \qquad (n > 1).$$

**Príklad 1.** Vypočítajme deriváciu funkcie

$$h(x) = e^{ix}(\cos x + i \sin 3x).$$

*Riešenie.* Podľa vety o derivovaní súčinu a súčtu funkcií dostaneme

$$h'(x) = [e^{ix}(\cos x + i \sin 3x)]' = i\, e^{ix}(\cos x + i \sin 3x) +$$
$$+ e^{ix}(-\sin x + 3i \cos 3x) = e^{ix}[-\sin x - \sin 3x + i(\cos x + 3 \cos 3x)].$$

**Príklad 2.** Vypočítajme druhú deriváciu funkcie

$$y = e^{2x} \cos 3x.$$

*Riešenie.* Uvažujme o funkcii

$$h(x) = e^{2x} \cos 3x + i\, e^{2x} \sin 3x = e^{(2+3i)x}.$$

Vypočítajme $h'(x)$:

$$h'(x) = (2 + 3i)\, e^{(2+3i)x}$$

a z toho

$$h''(x) = (2 + 3i)^2\, e^{(2+3i)x}.$$

Hľadajme reálnu a imaginárnu časť funkcie $h''(x)$, máme:

$$h''(x) = (-5 + 12i)\, e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x)$$

čiže

$$h''(x) = e^{2x}[(-5 \cos 3x - 12 \sin 3x) + i\,(12 \cos 3x - 5 \sin 3x)].$$

Keďže $y = \mathrm{Re}[h(x)]$, z vety 1 vyplýva

$$y'' = \mathrm{Re}\,[h''(x)] = -e^{2x}\,(5 \cos 3x + 12 \sin 3x).$$

**573.** Vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x) + ig(x)$ v čísle $x_0$, ak

a) $y = x^2 - i(x + 1), \quad x_0 = 2$;

b) $y = \cos x + i \sin x, \quad x_0 = \pi/2$.

V úlohách 574 až 576 vypočítajte deriváciu funkcie:

**574.** a) $z = 2 - 3it$;
b) $z = (t + 2i)^4$;
c) $z = \dfrac{t - i}{t + i}$.

**575.** a) $z = e^{it} + ie^{-t}$;
b) $z = e^{2-it}/e^{2+it}$;
c) $z = |e^{it}| - it$;
d) $z = (2 - it)^2 \cos 2t$.

**576.** a) $y = x^{3+5i}$;
b) $y = \dfrac{x^{3i} \ln 2x}{(2x + i \ln 2x)}$.

**577.** Nájdite deriváciu $n$-tého rádu funkcie:

a) $y = e^{2ix}$; b) $y = e^{(a+bi)x}$; c) $y = \sin x + i \cos x$.

**578.** Odvoďte vzorec pre derivovanie súčtu, rozdielu, súčinu a podielu komplexných funkcií reálnej premennej.

**579.** Pomocou derivácie komplexnej funkcie reálnej premennej nájdite $n$-tú deriváciu funkcie:

a) $y = \cos^3 x$;

b) $y = \sin ax \cos bx$, kde $a$, $b$ sú reálne čísla;

c) $y = P(x) \cos ax$, kde $P(x)$ je polynóm a $a$ je reálne číslo.

**580.** Nájdite $n$-tú deriváciu funkcie $f(x) = \sin^{2p} x$, kde $p$ je prirodzené číslo, tak, že vyjadrite danú funkciu v tvare súčtu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx.$$

**581.** Podobne ako v predchádzajúcej úlohe nájdite $n$-tú deriváciu funkcie:

a) $y = \sin^{2p+1} x$, kde $p$ je prirodzené číslo;

b) $y = \cos^{2p} x$, kde $p$ je prirodzené číslo;

c) $y = \cos^{2p+1} x$, kde $p$ je prirodzené číslo.

**582.** Dokážte rovnosti:

$$[e^{ax} \sin (bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{n/2} \sin (bx + c + n\varphi),$$
$$[e^{ax} \cos (bx + c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{n/2} \cos (bx + c + n\varphi),$$

kde

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{a} \qquad a^2 + b^2 > 0.$$

# 4. NEURČITÝ INTEGRÁL

## 4,1. Pojem primitívnej funkcie a elementárne metódy integrovania

Funkciu $F$ nazývame *primitívnou funkciou* k funkcii $f$ v intervale $(a, b)$, ak pre všetky čísla $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

**Veta 1.** Ak $F$ je primitívnou funkciou k $f$ v intervale $(a, b)$ a $C$ je číslo, aj funkcia $G(x) = F(x) + C$ je primitívnou funkciou k funkcii $f$ v intervale $(a, b)$.

**Veta 2.** Nech $F$ je primitívna funkcia k $f$ v intervale $(a, b)$. Funkcia $G$ je primitívnou funkciou k $f$ vtedy a len vtedy, ak existuje také číslo $C$, že pre všetky čísla $x \in (a, b)$ je $G(x) = F(x) + C$.

**Veta 3.** Každá spojitá funkcia v intervale $(a, b)$ má primitívnu funkciu.

Množinu všetkých primitívnych funkcií funkcie $f$ nazývame *neurčitým integrálom* a označujeme $\int f \, \mathrm{d}x$. Ak $F$ je primitívnou funkciou k $f$, tak

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C,$$

kde $C$ je ľubovoľné číslo, ktoré nazývame integračnou konštantou.

**Veta 4.** Ak k funkciám $f$ a $g$ existujú primitívne funkcie, tak platí

$$\int [f(x) \pm g(x)] \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

a

$$\int [cf(x)] \, \mathrm{d}x = c \int f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \text{kde } c \neq 0 \text{ je číslo.}$$

*Dôsledok.* Ak k funkciám $f_1, f_2, \ldots, f_n$ existujú primitívne funkcie a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú čísla z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, platí

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)] \, \mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x) \, \mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x) \, \mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

**Veta 5.** (Základné vzorce integrovania.)

1. $\displaystyle\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{pre} \quad a \neq -1.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C.$

3. $\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{pre} \quad a \neq 1.$

5. $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

6. $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C.\text{*)} \end{cases}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C.$

13. $\displaystyle\int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$

14. $\displaystyle\int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$

(Vzorce 1 až 17 platia pre tie intervaly, v ktorých sú funkcie za integrálom definované.)

**Príklad 1.** Vypočítajme neurčitý integrál

$$\int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx.$$

*Riešenie.* Ak použijeme vetu 4 a vzorec 1 z vety 5, dostaneme

$$\int (3x^2 - 2x + 1/\sqrt{x^3}) \, dx = 3 \int x^2 \, dx - 2 \int x \, dx + \int x^{-3/2} \, dx = x^3 - x^2 - 2x^{-1/2} + C = \\ = x^3 - x^2 - 2/\sqrt{x} + C.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme neurčitý integrál

$$\int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x} dx.$$

*Riešenie.* Zlomok vydelíme a použijeme vetu 4 a vzorce 4 a 7 z vety 5, dostaneme

$$\int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x} dx = \int \left(3^x - \frac{5}{\cos^2 x}\right) dx = \int 3^x \, dx - 5 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{3^x}{\ln 3} - 5 \operatorname{tg} x + C.$$

**Príklad 3.** Vypočítajme neurčitý integrál

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx.$$

*Riešenie.* Funkciu $\operatorname{cotg} x$ vyjadríme pomocou funkcií $\sin x$ a $\cos x$ a použijeme vzorec 17 z vety 5, dostaneme

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C.$$

**583.** Zistite, či funkcia $F$ je primitívna k funkcii $f$ v danom intervale $J$, ak

a) $F(x) = \cos x, \quad f(x) = -\sin x, \quad J = (-\infty, \infty);$

b) $F(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}, \quad J = (-1, 1);$

c) $F(x) = E(x), \quad f(x) = 0, \quad J = (0, 2);$

d) $F(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = 1/\cos^2 x, \quad J = (-\pi/2, 3\pi/2).$

---

*) Niekedy namiesto $\int \frac{1}{f(x)} dx$ používame aj znak $\int \frac{dx}{f(x)}$.

**584.** Dokážte, že dané funkcie $f$ a $g$ sú primitívne k tej istej funkcii, ak

a) $f(x) = 2\cos^2 x, \quad g(x) = \cos 2x$;

b) $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x, \quad g(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1)$;

c) $f(x) = e^x \sinh x, \quad g(x) = e^x \cosh x$.

V úlohách **585** až **608** vypočítajte neurčité integrály*):

**585.** $\int (3x^2 + 2x - 4)\, dx$.

**586.** $\int (1/\sqrt[3]{x^2} - 1/\sqrt[5]{x})\, dx$.

**587.** $\int (\sqrt{x^3} - 1/\sqrt{x})\, dx$.

**588.** $\int x^2(x^2 - 2x + 2)\, dx$.

**589.** $\int (x^2 - 2x + 1)^2\, dx$.

**590.** $\int x(x-2)(x-3)\, dx$.

**591.** $\int \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x\sqrt{x}} + x^2 - 2}{x^2}\, dx$.

**592.** $\int \dfrac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3}\, dx$.

**593.** $\int \dfrac{x(\sqrt[3]{x} - x^3\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\, dx$.

**594.** $\int \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx$.

**595.** $\int [5\cos x - \sqrt{3}x^5 + 3/(1 + x^2)]\, dx$.

**596.** $\int [10^{-x} + (x^2 + 2)/(1 + x^2)]\, dx$.

**597.** $\int \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$.

**598.** $\int e^x a^x\, dx, \quad ea \neq 1$.

**599.** $\int \dfrac{(2^x - 3^x)^2}{6^x}\, dx$.

**600.** $\int \sinh^2 x\, dx$.

**601.** $\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx$.

**602.** $\int \left(1 + \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}\right) dx$.

**603.** $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

**604.** $\int \dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}\, dx$.

**605.** $\int \dfrac{x}{x^2 - 3}\, dx$.

**606.** $\int \dfrac{1}{x \ln x}\, dx$.

**607.** $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)\, dx$.

**608.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x}\, dx$.

**609.** Zrýchlenie priamočiareho pohybu hmotného bodu v m/s² je dané vzťahom

$$a = 10t^2 + 6\sin t - 3,$$

kde $t$ je čas v sekundách. Nájdite rýchlosť pohybu bodu ako funkciu času, ak pre $= 0$ je $v = 8$ m/s. Nájdite aj rovnicu pohybu $x = x(t)$, ak v čase $t = 0$ je $x = 5$ m.

## 4,2. Substitučná metóda

**Veta 1.** Nech funkcia $F$ je primitívna funkcia k funkcii $f$ v intervale $(\alpha, \beta)$. Nech funkcia $\varphi$ má v intervale $(a, b)$ deriváciu $\varphi'$. Nech pre každé $x \in (a, b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$. Potom v intervale $(a, b)$ platí

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\, dx = \left[\int f(t)\, dt\right]_{t=\varphi(x)} = [F(t)]_{t=\varphi(x)} + C = F[\varphi(x)] + C. \qquad (1)$$

*) V daných úlohách počítajte neurčité integrály v intervaloch, v ktorých existujú.

**Veta 2.** Nech funkcia $x = \varphi(t)$ má v intervale $(\alpha, \beta)$ deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ a nech funkcia $t = \psi(x)$ definovaná na intervale $(a, b)$ je inverzná k funkcii $x = \varphi(t)$ na intervale $(\alpha, \beta)$. Nech funkcia $f$ je definovaná v intervale $(a, b)$ a nech $G$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi]\,\varphi'$ na intervale $(\alpha, \beta)$. Potom pre všetky $x \in (a, b)$ platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = [\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t]_{t=\psi(x)} + C = G[\psi(x)] + C. \tag{2}$$

Poznámka. Vety 1 a 2 sú základom tzv. substitučnej metódy, ktorá tkvie v tomto: neurčité integrály, ktoré sa nachádzajú na pravej strane rovnosti (1) [prípadne (2)], môžeme, ak sú splnené predpoklady vety 1 [prípadne vety 2], previesť substitúciou $t = \varphi(x)$, $[x = \varphi(t)]$ na neurčité integrály, ktoré sa nachádzajú na ľavej strane rovnosti (1) [prípadne rovnosti (2)]. Pritom vzorec (1) dostaneme formálne tak, že v integráli na ľavej strane rovnosti (1) píšeme $t$ namiesto $\varphi(x)$ a $\mathrm{d}t$ namiesto $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Podobne vzorec (2) dostaneme formálne tak, že v integráli na ľavej strane rovnosti (2) píšeme $\varphi(t)$ namiesto $x$ a $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ namiesto $\mathrm{d}x$.

Pri počítaní integrálov substitučnou metódou zvyčajne počítame formálne podľa vzorca (1), resp. (2), kým nenájdeme primitívnu funkciu a len potom skontrolujeme, či sú splnené predpoklady vety 1, resp. vety 2. Niekedy sa jednoducho presvedčíme o správnosti výsledku derivovaním nájdenej primitívnej funkcie.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int (4x - 2)^{13}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Použijeme substitúciu $t = \varphi(x)$, $\varphi(x) = 4x - 2$. Funkcia $\varphi$ má v intervale $(-\infty, \infty)$ deriváciu $\varphi'(x) = 4$ a pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ je $\varphi(x) \in (-\infty, \infty)$. Funkcia $f(t) = t^{13}$ je spojitá funkcia na intervale $(-\infty, \infty)$ a podľa článku 4.1 má primitívnu funkciu. Preto podľa vety 1 pre $t = 4x - 2$ máme

$$\int (4x - 2)^{13}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (4x - 2)^{13}\,4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int t^{13}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,\frac{t^{14}}{14} + C = \frac{1}{56}(4x - 2)^{14} + C,$$

pre všetky $x$ z intervalu $(-\infty, \infty)$.

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Použime substitúciu $t = \varphi(x)$, $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$. V intervale $(-\infty, \infty)$ má funkcia $\varphi$ deriváciu $\varphi'(x) = 1/(1 + x^2)$. Pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ je $\operatorname{arctg} x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Podľa vzorca (1) pre $t = \operatorname{arctg} x$ máme

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\,t^{4/3} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\operatorname{arctg} x)^4} + C$$

pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$. Pri počítaní sme zistili, že funkcia $\sqrt[3]{t}$ má primitívnu funkciu $3t^{4/3}/4$ na intervale $(-\pi/2, \pi/2)$, preto všetky predpoklady vety 1 sú splnené, nájdený výsledok je správny.

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int \frac{1}{4x^2 + 8x + 13}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Upravme najskôr kvadratický trojčlen $4x^2 + 8x + 13$ na súčet štvorcov. Máme $4x^2 + 8x + 13 = 4(x^2 + 2x) + 13 = 4[(x + 1)^2 - 1] + 13 = 4(x + 1)^2 + 9$. Po dosadení a úprave dostaneme

$$\int \frac{1}{4x^2 + 8x + 13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4(x + 1)^2 + 9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2(x + 1)}{3}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Zaveďme substitúciu $t = \varphi(x)$, $\varphi(x) = 2(x+1)/3$. Derivácia je $\varphi'(x) = 2/3$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$. Podľa (1) pre $t = 2(x+1)/3$ je

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2(x+1)}{3}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{2(x+1)}{3}\right)^2 + 1}\,\frac{2}{3}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+2}{3} + C, \quad \text{pre} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$$

*Riešenie.* Zaveďme substitúciu $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) = \sin t$. Funkcia $\varphi$ má v intervale $(0, \pi/2)$ deriváciu $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$. Preto k funkcii $\varphi$ existuje inverzná funkcia $t = \psi(x) = \arcsin x$ v intervale $(0, 1)$. Podľa (2) pre $t = \arcsin x$, kde $x \in (0, 1)$, platí:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt =$$

$$= -\operatorname{cotg} t - t + C = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

Keďže sme zistili, že funkcia $G(t) = -\operatorname{cotg} t - t + C$ je primitívna k funkcii $g(t) = 1/\sin^2 t - 1$ a všetky predpoklady vety 2 sú splnené, nájdený výsledok je správny.

V úlohách **610** až 727 vypočítajte neurčité integrály:

**610.** $\int (3x-11)^9\,dx.$

**611.** $\int (a+bx)^n\,dx, \quad n \neq -1, \quad b \neq 0.$

**612.** $\int x(a+bx)^n\,dx,$
$b \neq 0$ a $n$ je prirodzené číslo.

**613.** $\int (x^2+2)^3\,2x\,dx.$

**614.** $\displaystyle\int \frac{3}{2-5x}\,dx.$

**615.** $\displaystyle\int \frac{x^6}{x-1}\,dx.$

**616.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1-x)^{25}}\,dx.$

**617.** $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^4}\,dx.$

**618.** $\displaystyle\int \frac{1}{(a+bx)^n}\,dx, \quad b \neq 0, \quad n \neq 1.$

**619.** $\displaystyle\int \frac{x}{(a+bx)^n}\,dx, \quad b \neq 0, \quad n \neq 1,$
$n \neq 2.$

**620.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a+bx)^n}\,dx, \quad b \neq 0, \quad n \neq 1,$
$n \neq 2, \quad n \neq 3.$

**621.** $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4}.$

**622.** $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2}.$

**623.** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$

**624.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x+x^2}.$

**625.** $\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx.$

626. $\int \frac{1}{x^2 + 5x + 11}\, dx.$

627. $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 12}\, dx.$

628. $\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20}\, dx.$

629. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}, \quad a \neq 0.$

630. $\int \frac{x}{(a^2 + x^2)^2}\, dx.$

631. $\int \frac{x^2}{a^2 + x^2}\, dx, \quad a \neq 0.$

632. $\int \frac{x^4}{1 + x^2}\, dx.$

633. $\int \frac{x}{(x^2 + 4)^6}\, dx.$

634. $\int \frac{x}{6 + 5x^4}\, dx.$

635. $\int \frac{x^2}{1 + x^6}\, dx.$

636. $\int \frac{x}{(1 + x^2)^3}\, dx.$

637. $\int \frac{x^2}{a^3 + x^3}\, dx.$

638. $\int \sqrt{x - 2}\, dx.$

639. $\int \sqrt{7 - 3x}\, dx.$

640. $\int \sqrt[8]{2x + 5}\, dx.$

641. $\int \sqrt{a + bx}\, dx, \quad b \neq 0.$

642. $\int x \sqrt[3]{x + 2}\, dx.$

643. $\int x\sqrt{1 - x^2}\, dx.$

644. $\int x^2\sqrt[3]{x^3 + 3}\, dx.$

645. $\int \frac{1}{\sqrt{(2x + 3)^5}}\, dx.$

646. $\int \frac{1}{(3x - 2)\sqrt{3x - 2}}\, dx.$

647. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}.$

648. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}.$

649. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx.$

650. $\int \frac{x}{\sqrt{4 - 5x^2}}\, dx.$

651. $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$

652. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}.$

653. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 6x - 9x^2}}.$

654. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$

655. $\int \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x + 1}}\, dx.$

656. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}}\, dx.$

657. $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}\, dx.$

658. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 4}}\, dx.$

659. $\int \frac{x^5}{\sqrt{8 - x^6}}\, dx.$

660. $\int \frac{4ax^3}{\sqrt[4]{(1 + ax^4)^5}}\, dx.$

661. $\int \frac{dx}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}.$

662. $\int e^{-2x+3}\,dx$.

663. $\int \frac{e^x}{4+e^x}\,dx$.

664. $\int \frac{1}{3^x+1}\,dx$.

665. $\int e^x\sqrt{2-3e^x}\,dx$.

666. $\int \frac{4^x}{1+4^{2x}}\,dx$.

667. $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$.

668. $\int \frac{dx}{\sqrt{2^x+1}}$.

669. $\int a^{x^2}x\,dx,\quad a \neq 1$.

670. $\int 2e^{x^3}x^2\,dx$.

671. $\int e^{\sinh x}\cosh x\,dx$.

672. $\int e^{x^2+4x+5}(x+2)\,dx$.

673. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

674. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x\,dx$.

675. $\int x\ln(2+x^2)\,dx$.

676. $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$.

677. $\int \frac{\sqrt{2+\ln|x|}}{x}\,dx$.

678. $\int \frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}}\,dx$.

679. $\int \frac{\ln x-2}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

680. $\int \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$.

681. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

682. $\int \sin(8x-3)\,dx$.

683. $\int \cos\frac{x}{4}\,dx$.

684. $\int \operatorname{cotg}(2x+1)\,dx$.

685. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-2)}$.

686. $\int e^x\operatorname{cotg} e^x\,dx$.

687. $\int \frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

688. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$.

689. $\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx,\quad a^2+b^2>0$.

690. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}\,dx$.

691. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

692. $\int \frac{\cos x}{a^2+\sin^2 x}\,dx,\quad a \neq 0$.

693. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,dx$.

694. $\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3+1)}\,dx$.

695. $\int x\sin(x^2+4)\,dx$.

696. $\int x\operatorname{tg}(1-x^2)\,dx$.

697. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

698. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

699. $\int \cos^2 x\sin x\,dx$.

700. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,\mathrm{d}x$.

701. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

702. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

703. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

704. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3}\,\mathrm{d}x$.

705. $\int \frac{1}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

706. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

707. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\cos x + \sin x}}\,\mathrm{d}x$.

708. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

709. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

710. $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

711. $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

712. $\int \frac{x^2}{\sin x^3}\,\mathrm{d}x$.

713. $\int \cos 3x \sin 4x\,\mathrm{d}x$.

714. $\int \cos 2x \cos 6x\,\mathrm{d}x$.

715. $\int \sin x \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

716. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

717. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x \,.\, \ln^2 \sin x}$.

718. $\int \frac{1}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x$.

719. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$.

720. $\int \frac{\pi - \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$.

721. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$.

722. $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

723. $\int \frac{\operatorname{arctg}(2x/3)}{9 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$.

724. $\int \frac{\mathrm{e}^x \sqrt{\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

725. $\int \frac{1}{\cosh x}\,\mathrm{d}x$.

726. $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x$.

727. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 (x/3)}$.

## 4,3. Metóda per partes

**Veta 1.** Nech funkcie $f$ a $g$ majú na intervale $(a, b)$ deriváciu a funkcia $f'g$ má primitívnu funkciu na intervale $(a, b)$. Potom platí

$$\int f(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

pre každé $x \in (a, b)$.

Poznámka. Hľadanie neurčitých integrálov pomocou vzťahu (1) nazývame *integrovaním per partes* (po častiach). Táto metóda tkvie v tom, že podľa (1) namiesto neurčitého integrálu $\int f(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x$ počítame integrál $\int f'(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x$, ktorý pri vhodnej voľbe funkcií $f$, $g$ môže byť jednoduchší ako pôvodný. Keď je to potrebné, možno metódu per partes viackrát zopakovať.

**Príklad 1.** Vypočítajte $\int x \cos x \, dx$ na intervale $(-\infty, \infty)$.

*Riešenie.* Položme $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ na intervale $(-\infty, \infty)$. Potom $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$ pre každé $x$ z tohto intervalu. Keďže predpoklady vety 1 sú splnené, platí

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$.

**Príklad 2.** Vypočítajte $\int \ln x \, dx$ v intervale $(0, \infty)$.

*Riešenie.* Položme $f(x) = \ln x$ a $g'(x) = 1$ v intervale $(0, \infty)$. Potom platí $f'(x) = 1/x$ a $g(x) = x$ v intervale $(0, \infty)$. Keďže predpoklady vety 1 sú splnené, dostaneme

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$$

pre $x \in (0, \infty)$.

**Príklad 3.** Vypočítajme $\int (x^2 + 2x + 17) e^x \, dx$.

*Riešenie.* Položme $f(x) = x^2 + 2x + 17$ a $g'(x) = e^x$. Dostávame $f'(x) = 2x + 2$ a $g(x) = e^x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Pretože $f'(x) g(x) = 2(x + 1) e^x$ je v intervale $(-\infty, \infty)$ spojitá funkcia, má podľa článku 4,1 primitívnu funkciu v intervale $(-\infty, \infty)$ a podľa (1) platí:

$$\int (x^2 + 2x + 17) e^x \, dx = (x^2 + 2x + 17) e^x - 2 \int (x + 1) e^x \, dx.$$

Použime ešte raz metódu per partes. Položme opäť $f(x) = x + 1$ a $g'(x) = e^x$. Máme $f'(x) = 1$ a $g(x) = e^x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Pretože predpoklady vety 1 sú opäť splnené, dostaneme

$$\int (x^2 + 2x + 17) e^x \, dx = (x^2 + 2x + 17) e^x - 2(x + 1) e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 + 17) e^x + C$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$.

Poznámka. Metódu per partes často používame pri hľadaní tzv. *rekurentných vzorcov.*

**Príklad 4.** Vypočítajme $\int \ln^n x \, dx$ v intervale $(0, \infty)$, pri čom $n$ je prirodzené číslo.

*Riešenie.* Označme daný integrál znakom $I_n$. Položme $f(x) = \ln^n x$ a $g'(x) = 1$ v intervale $(0, \infty)$. Z toho vyplýva, že $f'(x) = (n \ln^{n-1} x)/x$ a $g(x) = x$ pre $x \in (0, \infty)$. Keďže predpoklady vety 1 sú splnené, podľa (1) je

$$I_n = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx = x \ln^n x - n I_{n-1}, \quad n > 1.$$

Tento vzťah platí pre $n > 1$ a nazývame ho rekurentným vzorcom pre integrál $I_n$. Opakovaním tohto vzorca dostaneme sa po konečnom počte krokov k neurčitému integrálu $I_1 = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$ (pozri príklad 2).

Napríklad pre $n = 3$ platí

$$I_3 = x \ln^3 x - 3 I_2 = x \ln^3 x - 3(x \ln^2 x - 2 I_1) = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6(x \ln x - x) + C.$$

Máme

$$\int x \ln^3 x \, dx = x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + C, \quad \text{pre} \quad x \in (0, \infty).$$

V úlohách 728 až 773 vypočítajte neurčité integrály:

728. $\int x e^{2x} \, dx.$

729. $\int x \sin x \, dx.$

730. $\int x \ln x \, dx.$

731. $\int x \, a^x \, dx, \quad a \neq 1.$

732. $\int x \cosh x \, dx.$

733. $\int x \cosh x \sinh x \, dx.$

734. $\int x \ln^2 x \, dx$.

735. $\int x \ln (x^2 + 3) \, dx$.

736. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

737. $\int x (\operatorname{arccotg} x)^2 \, dx$.

738. $\int x^2 e^{-x} \, dx$.

739. $\int x^2 \ln x \, dx$.

740. $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

741. $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$.

742. $\int (x^2 + x) \ln (x + 1) \, dx$.

743. $\int (x^2 + 6x + 3) \cos 2x \, dx$.

744. $\int x^n e^x \, dx$, $n$ je prirodzené číslo.

745. $\int x^n \ln x \, dx$, $n$ je prirodzené číslo

746. $\int x^n \sin x \, dx$, $n$ je prirodzené číslo

747. $\int x^k \ln^n x \, dx$, $n$ je prirodzené číslo.

748. $\int \ln x \, dx$.

749. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

750. $\int \arcsin x \, dx$.

751. $\int \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx$.

752. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$.

753. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx$.

754. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

755. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

756. $\int \sinh^2 x \, dx$.

757. $\int \cos (\ln x) \, dx$.

758. $\int e^{\arcsin x} \, dx$.

759. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n$ je prirodzené číslo.

760. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} \, dx$.

761. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$.

762. $\int \frac{\ln (\ln x)}{x} \, dx$.

763. $\int \frac{x e^x}{(1 + x)^2} \, dx$.

764. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$.

765. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2} \, dx$.

766. $\int e^x \sin x \, dx$.

767. $\int e^{2x} \cos x \, dx$.

768. $\int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad a^2 + b^2 > 0$.

769. $\int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad a^2 + b^2 > 0$.

770. $\int \sin x \,.\, \ln (\operatorname{tg} x) \, dx$.

771. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

772. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} \, dx$.

773. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} \, dx$.

## 4,4. Integrovanie racionálnych funkcií*)

### A. Rozklad racionálnej funkcie na elementárne zlomky

Každú nerýdzo racionálnu funkciu možno vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie. Ak $f(x) = P(x)/Q(x)$ je nerýdzo racionálna funkcia, delením dostaneme

$$f(x) = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

kde $Z/Q$ je už rýdzo racionálna funkcia, $R$ je príslušný podiel a $Z$ zvyšok.

*Elementárnymi zlomkami* nazývame racionálne funkcie tvaru

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{alebo} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$

kde $A, B, C, p, q$ sú reálne čísla, $n$ prirodzené číslo a polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene.

**Veta 1.** Nech $f(x) = P(x)/Q(x)$ je rýdzo racionálna funkcia a $Q(x) = a_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots \dots (x-k)^\varkappa(x^2+px+q)^\lambda(x^2+rx+s)^\mu \dots (x^2+ux+v)^\omega$ (pozri vetu 5, článok 3,8), pričom $a_0 \neq 0, a, b, \dots, k, p, q, \dots, u, v$ sú čísla, $\alpha, \beta, \dots, \varkappa, \lambda, \mu, \omega$ sú prirodzené čísla a všetky činitele na pravej strane poslednej rovnosti sú navzájom rôzne, pričom kvadratické trojčleny nemajú reálne korene. Potom funkciu $f$ možno rozložiť na súčet elementárnych zlomkov takto

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \\
& + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + \frac{K_\varkappa}{(x-k)^\varkappa} + \frac{K_{\varkappa-1}}{(x-k)^{\varkappa-1}} + \dots + \frac{K_1}{x-k} + \\
& + \frac{P_\lambda x + Q_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{P_{\lambda-1}x + Q_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \\
& + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{R_{\mu-1}x + S_{\mu-1}}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + \frac{U_\omega x + V_\omega}{(x^2+ux+v)^\omega} + \frac{U_{\omega-1}x + V_{\omega-1}}{(x^2+ux+v)^{\omega-1}} + \dots + \frac{U_1x+V_1}{x^2+ux+v},
\end{aligned} \tag{2}$$

pričom $A_i, B_i, \dots, K_i, P_i, Q_i, R_i, S_i, \dots, U_i, V_i$ sú reálne čísla.

Poznámka 1. Čísla $A_i, \dots, V_i$, možno nájsť napríklad metódou „*neurčitých koeficientov*" (pozri príklad 1), „*dosadzovacou*" metódou (pozri príklad 2) alebo metódou uvedenou v poznámke 2 pred príkladom 3.

**Príklad 1.** Rozložme na elementárne zlomky funkciu

$$f(x) = \frac{24x^2 - 15x + 71}{(x-1)(x^2+4)}.$$

*) O racionálnych funkciách pozri článok 1,2.

*Riešenie.* Podľa vety 1 dostaneme

$$\frac{24x^2 - 15x + 71}{(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \tag{3}$$

pre všetky $x$ rôzne od koreňov menovateľa $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 4)$. Násobme rovnosť (3) menovateľom $Q(x) \neq 0$, dostaneme

$$24x^2 - 15x + 71 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x - 1) \tag{4}$$

pre všetky $x$, pre ktoré $Q(x) \neq 0$. Avšak z vety o rovnosti dvoch polynómov vyplýva, že vzťah (4) platí pre všetky $x$ a koeficienty pri rovnakých mocninách v oboch polynómoch sa rovnajú. Teda z rovnosti (4) porovnaním dostaneme

$$\begin{aligned} 24 &= A + B, \\ -15 &= -B + C, \\ 71 &= 4A - C. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému je $A = 16$, $B = 8$, $C = -7$. Ak toto riešenie dosadíme do rovnosti (3), dostaneme hľadaný rozklad

$$\frac{24x^2 - 15x + 71}{(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{16}{x - 1} + \frac{8x - 7}{x^2 + 4}.$$

**Príklad 2.** Rozložme na elementárne zlomky funkciu

$$f(x) = \frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x - 1)^2 (x^2 + 4)^2}. \tag{5}$$

*Riešenie.* Podľa vety 1 dostaneme

$$\frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x - 1)^2 (x^2 + 4)^2} = \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_1}{x - 1} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2 + 4)^2} + \frac{P_1 x + Q_1}{x^2 + 4} \tag{6}$$

pre všetky $x$ rôzne od koreňov menovateľa

$$Q(x) = (x - 1)^2 (x^2 + 4)^2.$$

Koeficienty $A_2, A_1, P_2, Q_2, P_1, Q_1$ určíme takto. Násobime rovnosť (6) menovateľom $Q(x) \neq 0$, máme

$$\begin{gathered} 3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13 = A_2(x^2 + 4)^2 + \\ + A_1(x - 1)(x^2 + 4)^2 + (P_2 x + Q_2)(x - 1)^2 + (P_1 x + Q_1)(x - 1)^2 (x^2 + 4) \end{gathered} \tag{7}$$

pre všetky $x$, pre ktoré $Q(x) \neq 0$. Avšak podľa vety o rovnosti dvoch polynómov vyplýva, že táto rovnosť platí pre všetky $x$, teda aj pre korene polynómu $Q$. Ak dosadíme do rovnosti (7) postupne za $x$ korene menovateľa 1, 2i, dostaneme

$$75 = 25A_2,$$

čiže

$$A_2 = 3$$

a

$$-11 - 2i = 8P_2 - 3Q_2 + i(-6P_2 - 4Q_2).$$

Z podmienky rovnosti dvoch komplexných čísiel máme

$$\begin{aligned} 8P_2 - 3Q_2 &= -11, \\ -6P_2 - 4Q_2 &= 2. \end{aligned}$$

Riešením posledného systému je $P_2 = -1$, $Q_2 = 1$.

Aby sme určili koeficienty $A_1$, $P_1$, $Q_1$, zderivujeme rovnosť (7), do ktorej sme predtým dosadili vypočítané hodnoty $A_2$, $P_2$, $Q_2$. Dostaneme

$$\begin{aligned}15x^4 - 8x^3 + 66x^2 - 4x + 41 = 12x(x^2 + 4) + A_1(x^2 + 4)^2 + \\ + A_1(x - 1)\, 2(x^2 + 4)\, 2x - (x - 1)^2 + (-x + 1)\, 2(x - 1) + \\ + P_1(x - 1)^2 (x^2 + 4) + (2P_1x + 2Q_1)(x - 1)(x^2 + 4) + (P_1x + Q_1)(x - 1)^2\, 2x. \qquad (8)\end{aligned}$$

Ak dosadíme do rovnosti (8) dvojnásobný koreň $x = 1$, máme

$$110 = 60 + 25A_1$$

a z toho

$$A_1 = 2.$$

Ak dosadíme do rovnosti (8) dvojnásobný koreň $2i$, dostaneme

$$8 + 44i = 24P_1 + 16Q_1 + i(32P_1 - 12Q_1)$$

a z podmienky rovnosti komplexných čísiel máme

$$8 = 24P_1 + 16Q_1,$$
$$44 = 32P_1 - 12Q_1.$$

Riešením tohto systému je $P_1 = 1$, $Q_1 = -1$.

Hľadaný rozklad funkcie (5) je

$$\frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x - 1)^2 (x^2 + 4)^2} = \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} + \frac{-x + 1}{(x^2 + 4)^2} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}.$$

**Poznámka 2.** Ak v rýdzo racionálnej funkcii $f(x) = P(x)/Q(x)$ má polynóm $Q$ číslo $a$ za $k$-násobný koreň, tak platí $Q(x) = (x - a)^k Q_1(x)$ a rozklad podľa (2) má tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x - a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - a} + \dots .$$

Koeficienty $A_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) možno vypočítať podľa vzorca

$$A_{k-r} = \frac{1}{r!}\left[\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)^{(r)}\right]_{x=a}. \qquad (9)$$

**Príklad 8.** Rozložme na elementárne zlomky funkciu

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x}{2x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x - 4}.$$

*Riešenie.* Keďže daná funkcia $f(x)$ nie je rýdzo racionálna, upravíme ju delením na tvar (1); dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}.$$

Funkciu $1/(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2)$ rozložíme na elementárne zlomky. Keďže menovateľa môžeme upraviť na tvar $(x - 1)^3 (x + 2)$, podľa vety 1 platí

$$\frac{1}{(x - 1)^3 (x + 2)} = \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_1}{x - 1} + \frac{B_1}{x + 2}.$$

Koeficienty $A_3$, $A_2$, $A_1$, $B_1$ vypočítame podľa (9):

$$A_3 = A_{3-0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{x + 2}\right]_{x=1} = \frac{1}{3}.$$

$$A_2 = A_{3-1} + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{1}{x + 2}\right)'\right]_{x=1} = \left[-\frac{1}{(x + 2)^2}\right]_{x=1} = -\frac{1}{9}.$$

$$A_1 = A_{3-2} = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{1}{x+2}\right)''\right]_{x=1} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(x+2)^3}\right]_{x=1} = \frac{1}{27},$$

$$B_1 = \left[\frac{1}{(x-1)^3}\right]_{x=-2} = -\frac{1}{27}.$$

Hľadaný rozklad je

$$\frac{x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x}{2x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x - 4} = \frac{1}{2} + \frac{1/3}{(x-1)^3} + \frac{-1/9}{(x-1)^2} + \frac{1/27}{x-1} + \frac{-1/27}{x+2}.$$

**B. Integrovanie racionálnej funkcie** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Neurčitý integrál racionálnej funkcie $f(x)$ hľadáme takto: Rýdzo racionálnu funkciu rozložíme podľa vety 1 na súčet elementárnych zlomkov a nájdeme ich neurčité integrály.

Nerýdzo racionálnu funkciu pomocou vzťahu (1) vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie a potom integrujeme.

*Integrály elementárnych zlomkov*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x-a} = \ln|x-a| + C$ pre $x \neq a$. (10)

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$ pre $x \neq a$ a prirodzené číslo $n > 1$. (11)

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{B - Ap/2}{\sqrt{q^2 - p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$ (12)

4. Položme

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x,$$

potom platí

$$I_n = \frac{x+p/2}{2(n-1)(q-p^2/4)}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)(q-p^2/4)}\,I_{n-1}. \qquad (13)$$

5. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)I_n.$ (14)

**Príklad 4.** Vypočítajme neurčitý integrál

$$I = \int \frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x-1)^2(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Neurčitý integrál danej funkcie vypočítame tak, že ju najskôr rozložíme na elementárne zlomky a použijeme vetu o integrovaní súčtu funkcií. Dostaneme (pozri príklad 2)

$$\int \frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x-1)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x+1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x-1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Vypočítajme najskôr integrály na pravej strane poslednej rovnosti, máme:

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -3\frac{1}{x-1} + C_1,$$

$$\int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + C_2,$$

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C_3,$$

$$\int \frac{-x+1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4} + \frac{x}{8}\,\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C_4.$$

Hľadaný integrál $I$ je

$$I = \frac{-3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+4} +$$

$$+ \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{-23x^2+3x-100}{8(x-1)(x^2+4)} + 2\ln|x-1| +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{7}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C, \quad \text{pričom} \quad C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

**Ostrogradského metóda**

Nech v rýdzo racionálnej funkcii $f(x) = P(x)/Q(x)$ polynóm $Q$ má viacnásobné korene a nech

$$Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-k)^\varkappa (x^2+px+q)^\lambda \dots (x^2+ux+v)^\omega.$$

Potom platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{15}$$

kde

$$Q_1(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\dots(x-k)^{\varkappa-1}(x^2+px+q)^{\lambda-1}\dots(x^2+ux+v)^{\omega-1},$$
$$Q_2(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-k)(x^2+px+q)\dots(x^2+ux+v)$$

a $P_1$, $P_2$ sú polynómy stupňa o jednotku nižšieho ako $Q_1$, $Q_2$, ktorých koeficienty určíme metódou neurčitých koeficientov z rovnosti

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

ktorú sme dostali derivovaním rovnosti (15).

**Príklad 5.** Ostrogradského metódou vypočítajme neurčitý integrál

$$I = \int \frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x-1)^2(x^2+4)^2}\,dx.$$

*Riešenie.* Podľa vzťahu (15) dostaneme

$$\int \frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x-1)^2(x^2+4)^2}\,dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+4)} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{(x-1)(x^2+4)}\,dx \tag{16}$$

Derivujeme rovnosť (16), dostaneme

$$\frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x-1)^2(x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x-1)(x^2+4) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+4)}{(x-1)^2(x^2+4)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{(x-1)(x^2+4)}.$$

Ak vynásobíme poslednú rovnosť spoločným menovateľom a usporiadame podľa mocnín $x$, dostaneme

$$3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13 = Dx^5 + (-A - D + E)x^4 +$$
$$+ (-2B + 4D - E + F)x^3 + (4A + B - 3C - 4D + 4E - F)x^2 +$$
$$+ (-8A + 2C - 4E + 4F)x - 4B - 4C - 4F.$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme

$$\begin{aligned}
&D = 3, && 4A + B - 3C - 4D + 4E - F = -2,\\
-A &- D + E = -2, && -8A + 2C - 4E + 4F = 41,\\
&-2B + 4D - E + F = 22, && -4B - 4C - 4F = 13.
\end{aligned}$$

Riešením tohto systému je $A = -23/8$, $B = 3/8$, $C = -25/2$, $D = 3$, $E = -15/8$, $F = 71/8$. Zo vzťahu (16) dostaneme

$$\int \frac{3x^5 - 2x^4 + 22x^3 - 2x^2 + 41x + 13}{(x-1)^2 (x^2+4)^2}\, dx =$$

$$= \frac{-23x^2 + 3x - 100}{8(x-1)(x^2+4)} + \frac{1}{8}\int \frac{24x^2 - 15x + 71}{(x-1)(x^2+4)}\, dx. \tag{17}$$

Integrál na pravej strane vypočítame rozkladom na elementárne zlomky. Máme (pozri príklad 1)

$$\int \frac{24x^2 - 15x + 71}{(x-1)(x^2+4)}\, dx = \int \frac{16}{x-1}\, dx + \int \frac{8x-7}{x^2+4}\, dx.$$

Neurčité integrály na pravej strane vypočítame použitím vzťahov (10) a (12). Dostaneme

$$16 \int \frac{1}{x-1}\, dx = 16 \ln|x-1| + C_1,$$

$$\int \frac{8x-7}{x^2+4}\, dx = 4 \ln(x^2+4) - \frac{7}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C_2.$$

Hľadaný integrál $I$ je

$$I = \frac{-23x^2 + 3x - 100}{8(x-1)(x^2+4)} + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{7}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

V úlohách 774 až 823 vypočítajte neurčité integrály:

**774.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 5x - 12}$.

**775.** $\displaystyle\int \frac{11x - 12}{3x^2 - 11x + 6}\, dx$.

**776.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a + bx)}$, $a \neq 0$.

**777.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

**778.** $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 30x - 120}{(x-2)(x+2)(x-5)}\, dx$.

**779.** $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 15x^2 + 15x - 3}{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}\, dx$.

**780.** $\displaystyle\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}\, dx$.

**781.** $\displaystyle\int \frac{9x^4 + 3x^3 - 23x^2 + x}{9x^3 - 6x^2 - 5x + 2}\, dx$.

**782.** $\displaystyle\int \frac{9x - 14}{9x^2 - 24x + 16}\, dx$.

**783.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$.

**784.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a + bx)^2}$, $a \neq 0$.

**785.** $\displaystyle\int \frac{x - 1}{(x+1)(x+2)^2}\, dx$.

**786.** $\displaystyle\int \frac{3x - 4}{(x-2)(x-1)^3}\, dx$.

**787.** $\displaystyle\int \frac{x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 46x + 25}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}\, dx$.

**788.** $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 14x^2 + 27x - 16}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x)}\, dx$.

**789.** $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\, dx$.

790. $\int \frac{5x^2 - 14x + 17}{(x-5)^2(x-1)^2}\,dx.$

791. $\int \frac{x^4}{x^2+3}\,dx.$

792. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\,dx.$

793. $\int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)}\,dx.$

794. $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx.$

795. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}.$

796. $\int \frac{x^2-2x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)}\,dx.$

797. $\int \frac{dx}{(x^2-6x+8)(x^2+2x+2)}.$

798. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

799. $\int \frac{dx}{a^4-x^4}, \quad a > 0.$

800. $\int \frac{dx}{x^6-1}.$

801. $\int \frac{2x^3-7x^2+12x-10}{x^4-4x^3+8x^2-8x+12}\,dx.$

802. $\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

803. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx.$

804. $\int \frac{x}{(x^2+3x+3)^2}\,dx.$

805. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+3x+3)^2}.$

806. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$

807. $\int \frac{4x^2-16x+12}{(x-2)^2(x^2-2x+2)^2}\,dx.$

808. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$

809. $\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3}\,dx.$

810. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$

811. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, kde $n$ je přirodzené číslo.

V úlohách 812 až 824 vypočítajte Ostrogradského metódou:

812. $\int \frac{x^3-6x^2+10x-2}{(x-3)^2(x^2-4x+5)}\,dx.$

813. $\int \frac{x^3-5x^2+7x+1}{(x-1)^3(x-3)^2}\,dx.$

814. $\int \frac{x^6-2x^4-3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx.$

815. $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x+3)^3}.$

816. $\int \frac{4+3x^4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx.$

817. $\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)}.$

818. $\int \frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)^2}\,dx.$

819. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}.$

820. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^4}.$

821. $\int \frac{x^6-12x^5+55x^4-137x^3+194x^2-148x+48}{(x-1)(x-2)^3(x^2-2x+2)^2}\,dx.$

822. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx.$

823. $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{(x-1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$, kde $P_n(x)$ je polynóm $n$-tého stupňa.

824. Pre aké čísla $a$, $b$, $c$ je neurčitý integrál

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

racionálna funkcia.

## 4,5. Integrovanie iracionálnych funkcií

**A. Neurčitý integrál**

$$\int R(x, x^{1/k_1}, x^{1/k_2}, \ldots, x^{1/k_n})\,\mathrm{d}x,^{*)}$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú prirodzené čísla, možno upraviť na integrál z racionálnej funkcie $R_1$ substitúciou

$$t = x^{1/k}, \tag{1}$$

pričom $k$ je najmenší spoločný násobok čísiel $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Platí

$$\int R(x, x^{1/k_1}, \ldots, x^{1/k_n})\,\mathrm{d}x = \int R(t^k, t^{k/k_1}, \ldots, t^{k/k_n})\,kt^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int R_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad x \in (0, \infty).$$

*Riešenie.* Funkcia $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt{x}}$ vznikne racionálnymi operáciami z funkcií $x$, $x^{1/2}$, $x^{1/3}$. Najmenší spoločný násobok čísiel 1, 2, 3 je $k = 6$. Zaveďme preto substitúciu $t = x^{1/6}$. Z toho dostaneme $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) = t^6$, $\varphi'(t) = 6t^5$, $x^{1/2} = t^3$, $x^{1/3} = t^2$ pre každé $t \in (0, \infty)$. Potom pre $= \sqrt[6]{x}$ je

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt[3]{t^6}}{t^6+\sqrt{t^6}}\,6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2}{t^6+t^3}\,t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^4}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = \\
&= 6\int \left(t - \frac{t}{t^3+1}\right)\mathrm{d}t = \int \left(6t + \frac{2}{t+1} - \frac{2t+2}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t = \\
&= 3t^2 + 2\ln|t+1| - \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \\
&= 3t^2 + 2\ln|t+1| - \ln|t^2-t+1| - 2\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C = \\
&= 3\sqrt[3]{x} + \ln\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1} - 2\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C,
\end{aligned}$$

kde $x$ je z intervalu $(0, \infty)$.

---

*) V ďalšom texte znakom $R[f_1(x), \ldots, f_n(x)]$ budeme rozumieť funkciu, ktorá vznikne konečným počtom racionálnych operácií (sčítaním, odčítaním, násobením a delením) z konštánt a z funkcií $f_1, \ldots, f_n$, definovaných na tejže množine $M$.

**B. Neurčitý integrál**

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_n}\right] dx,$$

kde $k_1, \ldots, k_n$ sú prirodzené čísla, $a, b, c, d$ sú reálne čísla a platí $ad - bc \neq 0$, možno substitúciou

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k}, \tag{2}$$

pričom $k$ je *najmenší spoločný násobok* čísiel $k_1, \ldots, k_n$ previesť na integrál z racionálnej funkcie $R_1$.

Platí

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_n}\right] dx =$$

$$= \int R\left[\frac{b - dt^k}{ct^k - a}, t^{k/k_1}, \ldots, t^{k/k_n}\right] \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} \, dt = \int R_1(t) \, dt.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad \text{pre} \quad x \in (-1, 1).$$

*Riešenie.* Položme $t = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, pre $x \in (-1, 1)$. V intervale $(-1, 1)$ je táto funkcia klesajúca, preto k nej existuje inverzná funkcia $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ v intervale $(0, \infty)$. Zaveďme substitúciu $x = \varphi(t)$, z toho potom dostaneme

$$\varphi'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \quad \text{a} \quad (1+x)^2 = \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

pre všetky $t \in (0, \infty)$. Po dosadení a úpravách pre $t = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ máme

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int \sqrt{\frac{1 - \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}} \frac{1}{\dfrac{4}{(1+t^2)^2}} \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= -\int t^2 \, dt = -t^3/3 + C = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} + C$$

pre $x \in (-1, 1)$.

**C. Neurčitý integrál**

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx,$$

kde $a \neq 0$, možno pomocou *Eulerových substitúcií* previesť na integrál z racionálnej funkcie.

Ak $a > 0$, položíme

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}. \tag{3}$$

Ak $c \geqq 0$, položíme

$$xt = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c}. \tag{4}$$

Ak $\alpha$, $\beta$ sú reálne korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, položíme

$$t = \sqrt{a\frac{x - \beta}{x - \alpha}}. \tag{5}$$

Zo vzťahov (3), resp. (4), resp. (5) možno určiť $x = \varphi(t)$ ako racionálnu funkciu. Potom substitúciou $x = \varphi(t)$ môžeme daný integrál previesť na integrál z racionálnej funkcie.

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx, \qquad x \in (1, \infty).$$

*Riešenie.* Keďže máme prípad $a = 1 > 0$, položme

$$t = \sqrt{x^2 - 1} + x \qquad \text{pre} \qquad x \in (1, \infty). \tag{6}$$

Pretože táto funkcia je v danom intervale rastúca, existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nájdeme takto

$$t - x = \sqrt{x^2 - 1},$$

čiže

$$x^2 - 2xt + t^2 = x^2 - 1.$$

Odtiaľ je

$$x = \frac{(t^2+1)}{2t} \qquad \text{pre} \qquad t > 0.$$

Zavedme substitúciu $x = \varphi(t)$. Máme

$$\varphi'(t) = \frac{(t^2-1)}{2t^2}.$$

Podľa vety 2 z článku 4,2 pre $t = \sqrt{x^2-1} + x$ dostaneme

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{\dfrac{(t^2+1)^2}{4t^2}}{\sqrt{\dfrac{(t^2+1)^2}{4t^2} - 1}}\,\frac{t^2-1}{2t^2}\,dt = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int (t + 2/t + 1/t^3)\,dt = \frac{1}{4}(t^2/2 + 2\ln t - 1/2t^2) + C =$$

$$= \frac{1}{8}(x + \sqrt{x^2-1})^2 + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$$

pre $x \in (1, \infty)$.

**Poznámka 1.** Integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \qquad a \neq 0$$

môžeme úpravou kvadratického trojčlena na úplný štvorec a vhodnou substitúciou previesť na základný integrál 11, resp. 12 z čl. 4,1.

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx, \qquad x \in (-\infty, 1).$$

*Riešenie.* Keďže $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$, zavedme substitúciu $t = \varphi(x)$, $\varphi(x) = x - 2$ pre $x \in (-\infty, 1)$. Potom $\varphi'(x) = 1$. Podľa vety 1 z článku 4,2 pre $t = x - 2$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt =$$

$$= \ln|t + \sqrt{t^2-1}| + C = \ln|x - 2 + \sqrt{(x-2)^2-1}| + C =$$

$$= \ln|x - 2 + \sqrt{x^2-4x+3}| + C \qquad \text{pre} \qquad x \in (-\infty, 1).$$

**Poznámka 2.** Integrál $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$, $a \neq 0$ možno substitúciou $x = a\sin t$ alebo $x = a\cos t$ upraviť postupne na integrál z racionálnej funkcie.

Integrál $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx$, $a \neq 0$, možno substitúciou $x = a \operatorname{tg} t$ alebo $x = a \operatorname{cotg} t$ upraviť postupne na integrál z racionálnej funkcie.

Integrál $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx$, $a \neq 0$, možno substitúciou $x = a/\cos t$, alebo $x = a/\sin t$ upraviť postupne na integrál z racionálnej funkcie.

**Príklad 5.** Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(4x - x^2)^3}}\,dx, \qquad x \in (-2, 2).$$

*Riešenie.* Zaveďme substitúciu $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) = 2 \sin t$ pre všetky $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Potom je $\varphi'(t) = 2 \cos t$. Pretože v intervale $(-\pi/2, \pi/2)$ je funkcia $\varphi$ rastúca, existuje k nej inverzná funkcia $t = \arcsin (x/2)$. Pre $t = \arcsin (x/2)$ máme

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}\,dx = \int \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{(4 - 4 \sin^2 t)^3}}\, 2 \cos t\,dt =$$

$$= \int \frac{(1 - \cos^2 t) \cos t}{\cos^3 t}\,dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \operatorname{tg} t - t + C = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} - t + C =$$

$$= \frac{x/2}{\sqrt{1 - x^2/4}} - \arcsin \frac{x}{2} + C = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{2} + C \quad \text{pre} \quad x \in (-2, 2).$$

**D. Neurčitý integrál**

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx,$$

kde $m$, $n$, $p$ sú racionálne čísla, sa nazýva *binomický integrál*. Tento neurčitý integrál je elementárna funkcia vtedy, keď jedno z čísiel

$$p, \quad \frac{m + 1}{n}, \quad \frac{m + 1}{n} + p$$

je celé číslo. Pomocou substitúcií: $x = t^s$, ak $p$ je celé číslo a $m = q/s$, $n = r/s$,

$$a + bx^n = t, \quad \text{ak} \quad \frac{m + 1}{n} \quad \text{je celé číslo},$$

$$ax^{-n} + b = t, \quad \text{ak} \quad \frac{m + 1}{n} + p \quad \text{je celé číslo},$$

možno ho upraviť na prv uvedené integrály.

**Príklad 6.** Vypočítajme

$$\int x^3 (1 - x^2)^{-3/2}\,dx, \qquad x \in (0, 1).$$

*Riešenie.* V danom príklade $m = 3$, $n = 2$, $p = -3/2$. Pretože $(m + 1)/n = 2$ je celé číslo, použijeme substitúciu $t = 1 - x^2$, pre $x \in (0, 1)$. Keďže táto funkcia je klesajúca v intervale $(0, 1)$, existuje k nej inverzná funkcia $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) = \sqrt{1 - t}$ pre $t \in (0, 1)$. Z toho vyplýva $\varphi'(t) = -1/2\sqrt{1 - t}$ a pre $t = 1 - x^2$ dostaneme

$$\int x^3 (1 - x^2)^{-3/2}\,dx = \int (1 - t)^{3/2} t^{-3/2} \frac{-1}{2\sqrt{1 - t}}\,dt = -\frac{1}{2} \int (1 - t)\, t^{-3/2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^{-3/2}\,dt + \frac{1}{2} \int t^{-1/2}\,dt = t^{-1/2} + t^{1/2} + C = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + C = \frac{2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + C$$

pre $x \in (0, 1)$.

**E. Metóda neurčitých koeficientov.** Majme neurčitý integrál

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \,\mathrm{d}x,$$

kde $P$ je polynóm stupňa $n \geqq 1$. Pre každý polynóm $P$ stupňa $n \geqq 1$ existuje polynóm $Q$ stupňa $n - 1$ a číslo $k$ také, že platí

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \,\mathrm{d}x = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + k \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Koeficienty polynómu $Q$ a číslo $k$ určíme metódou neurčitých koeficientov z rovnosti polynómov

$$P(x) = [Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c}]' \sqrt{ax^2 + bx + c} + k,$$

ktorú sme dostali derivovaním rovnosti (7) a násobením odmocninou $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

**Príklad 7.** Vypočítajme

$$I = \int \frac{4x^4 + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \,\mathrm{d}x, \qquad x \in (-\infty, 1). \tag{8}$$

*Riešenie.* Integrál (8) budeme počítať metódou neurčitých koeficientov. Podľa vzťahu (7) plat

$$I = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \sqrt{x^2 - 4x + 3} + k \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Aby sme určili koeficienty $a, b, c, d, k$, derivujeme rovnosť (9). Máme

$$\frac{4x^4 + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = (3ax^2 + 2bx + c) \sqrt{x^2 - 4x + 3} +$$

$$+ (ax^3 + bx^2 + cx + d) \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

Ak vynásobíme poslednú rovnosť výrazom $\sqrt{x^2 - 4x + 3}$, dostaneme

$$4x^4 + 2 = (3ax^2 + 2bx + c)(x^2 - 4x + 3) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x - 2) + k.$$

Po úprave máme

$$4x^4 + 2 = 4ax^4 + (-14a + 3b)\,x^3 + (9a - 10b + 2c)\,x^2 + (6b - 6c + d)\,x + 3c - 2d + k.$$

Odtiaľ porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme

$$\begin{aligned} 4 &= 4a, \\ 0 &= -14a + 3b, \\ 0 &= 9a - 10b + 2c, \\ 0 &= 6b - 6c + d, \\ 2 &= 3c - 2d + k. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému je $a = 1$, $b = 14/3$, $c = 113/6$, $d = 85$ a $k = 231/2$. Po dosadení do (9) je

$$I = \left(x^3 + \frac{14}{3} x^2 + \frac{113}{6} x + 85\right) \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \frac{231}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \,\mathrm{d}x.$$

Posledný integrál sme vypočítali v príklade 4. Po dosadení máme

$$I = \left(x^3 + \frac{14}{3} x^2 + \frac{113}{6} x + 85\right) \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \frac{231}{2} \ln |x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}| + C$$

pre $\quad x \in (-\infty, 1)$.

**Poznámka 3.** Integrál

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $n$ je prirodzené číslo, upravíme pomocou substitúcie $t = 1/(x-\alpha)$ na integrál

$$\int \frac{t^{n-1}}{\sqrt{kt^2+lt+m}}\,\mathrm{d}t,$$

ktorý riešime metódou neurčitých koeficientov.

**Poznámka 4.** Integrál

$$\int \frac{1}{(ax^2+b)\sqrt{px^2+q}}\,\mathrm{d}x, \qquad a^2+b^2>0, \qquad p^2+q^2>0,$$

upravíme pomocou substitúcie $xt = \sqrt{px^2+q}$ na integrál z racionálnej funkcie.

V úlohách 825 až 884 vypočítajte neurčité integrály:

**825.** $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

**826.** $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

**827.** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$

**828.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x.$

**829.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x.$

**830.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{2(x+\sqrt[6]{x^7})}\,\mathrm{d}x.$

**831.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,\mathrm{d}x.$

**832.** $\displaystyle\int \frac{1}{2(\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[10]{x^7}+\sqrt[20]{x^{13}})}\,\mathrm{d}x.$

**833.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$

**834.** $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x.$

**835.** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,\mathrm{d}x.$

**836.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x.$

**837.** $\displaystyle\int \frac{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

**838.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x.$

**839.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$

**840.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$

**841.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,\mathrm{d}x.$

**842.** $\displaystyle\int \frac{3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x.$

**843.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^3(x-3)}}\,\mathrm{d}x.$

**844.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(x-1)^3}}.$

**845.** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx.$

**846.** $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 5x + 8}}\,dx.$

**847.** $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - 5x^2}}\,dx.$

**848.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}\,dx.$

**849.** $\int \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}\,dx.$

**850.** $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}}\,dx.$

**851.** $\int \frac{1}{x\sqrt{3 + 2x + x^2}}\,dx.$

**852.** $\int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - x - 1}}\,dx.$

**853.** $\int \frac{1}{(a - x)\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx,\ a > 0.$

**854.** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}\,dx.$

**855.** $\int \frac{2}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\,dx.$

**856.** $\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}\,dx.$

**857.** $\int \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 5x + 6}}\,dx.$

**858.** $\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx.$

**859.** $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}\,dx.$

**860.** $\int \frac{1}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}}\,dx.$

**861.** $\int \frac{2ax^2 + 1}{\sqrt{ax^2 + 2x + 1}}\,dx,\ a > 1.$

**862.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx.$

**863.** $\int \frac{2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx,\quad a \neq 0.$

**864.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}\,dx.$

**865.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}\,dx.$

**866.** $\int \frac{3x^4}{\sqrt{3 + 2x + x^2}}\,dx.$

**867.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx.$

**868.** $\int \frac{x^6}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$

**869.** $\int \sqrt{3 + 4x + x^2}\,dx.$

**870.** $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx.$

**871.** $\int \sqrt{1 - 2x - 3x^2}\,dx.$

**872.** $\int (4x - 10)\sqrt{2 + 3x - x^2}\,dx.$

**873.** $\int 2x^2\sqrt{4x - x^2}\,dx.$

**874.** $\int \frac{1}{(x - 1)^3\sqrt{3 - 2x^2}}\,dx.$

**875.** $\int \frac{1}{x^4\sqrt{3 - 2x + x^2}}\,dx.$

**876.** $\int \frac{1}{x^{11}\sqrt{1 + x^2}}\,dx.$

**877.** $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1 + x^4}}\,dx.$

**878.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$

879. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

880. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

881. $\int x\sqrt{2x-8}\,dx.$

882. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{2+x^{2/3}}\,dx.$

883. $\int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}}\,dx.$

884. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

## 4,6. Integrovanie trigonometrických funkcií

**A. Neurčitý integrál**

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,\text{*)} \tag{1}$$

možno upraviť substitúciou

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

čiže

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, \qquad x \in (-\pi, \pi) \tag{2}$$

na neurčitý integrál z racionálnej funkcie. Pritom platí

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \tag{3}$$

pre $t \in (-\infty, \infty)$.

Ak pre funkciu $R$ z integrálu (1) platí

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

(t. j. funkcia $R$ je nepárna vzhľadom na $\cos x$) pre každé $x$ z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, potom integrál (1) možno upraviť substitúciou

$$x = \arcsin t, \qquad t \in (-1, 1)$$

čiže

$$t = \sin x, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2) \tag{4}$$

na neurčitý integrál z racionálnej funkcie.

Ak pre funkciu $R$ z integrálu (1) platí

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

(t. j. funkcia $R$ je nepárna vzhľadom na $\sin x$) pre každé $x$ z intervalu $(0, \pi)$, potom integrál (1) možno substitúciou

$$x = \arccos t, \qquad t \in (-1, 1)$$

čiže

$$t = \cos x, \qquad x \in (0, \pi) \tag{5}$$

upraviť na neurčitý integrál z racionálnej funkcie.

Ak pre funkciu $R$ z (1) platí

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

(t. j. funkcia $R$ je párna vzhľadom na $\sin x$ a $\cos x$ pre každé $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, potom substitúciou

$$x = \mathrm{arctg}\,t, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

čiže

$$t = \mathrm{tg}\,x, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{6}$$

možno integrál (1) upraviť na neurčitý integrál z racionálnej funkcie.

*) Funkcia $R$ má rovnaký význam ako v článku 4,5.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int \frac{1}{4\sin x - 7\cos x - 7}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

*Riešenie.* Daný integrál má tvar (1). Zavedieme substitúciu $t = \operatorname{tg}(x/2)$, máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x - 7\cos x - 7} = \int \frac{1}{\dfrac{8t}{1+t^2} - \dfrac{7-7t^2}{1+t^2} - 7}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{2}{8t - 7 + 7t^2 - 7 - 7t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{4t-7}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln|4t-7| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|4\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 7\right| + C \quad \text{pre} \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in (0, \pi/2).$$

*Riešenie.* Keďže funkcia $f(x) = \dfrac{\cos^5 x}{\sin^4 x}$ je nepárna vzhľadom na $\cos x$, preto zaveďme substitúciu $t = \sin x$, $x \in (0, \pi/2)$, čiže $x = \arcsin t$ pre $t \in (0, 1)$. Dostaneme

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^4 x}\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C \quad \text{pre} \quad x \in (0, \pi/2).$$

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}.$$

*Riešenie.* Po jednoduchej úprave a substitúcii $t = \operatorname{tg} x$ pre $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ dostaneme

$$\int \frac{1}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(3\operatorname{tg}^2 x + 5)\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+5} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2 + \frac{5}{3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right) + C$$

pre $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

**B. Neurčitý integrál**

$$\int R(\sin kx, \cos mx)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

kde $k$, $m$ sú celé čísla, možno upraviť na neurčitý integrál (1) pomocou vzťahov

$$\sin kx = \binom{k}{1}\cos^{k-1} x \sin x - \binom{k}{3}\cos^{k-3} x \sin^3 x + \ldots, \tag{8}$$

$$\cos mx = \binom{m}{0}\cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2} x \sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4} x \sin^4 x - \ldots. \tag{9}$$

**Poznámka.** Ak čísla $k$, $m$ v integráli (7) sú racionálne, potom nájdeme spoločného menovateľa $q$ zlomkov $k = p_1/q_1$, $m = p_2/q_2$ a zavedieme substitúciu

$$x = qt. \tag{10}$$

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin 2x}\,dx, \qquad x \in (0, \pi/2).$$

*Riešenie.* Zo vzťahov (8) a (9) máme

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x,$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

pre každé číslo $x$. Preto platí

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin 2x}\,dx = \int \frac{\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}\,dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 3 \sin x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sin x} - 4 \sin x\right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x}\,dx + 2 \cos x + C.$$

Zavedme substitúciu $t = \operatorname{tg}(x/2)$, dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Úhrnom máme

$$\int \frac{\cos 3x}{\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2 \cos x + C \qquad \text{pre} \qquad x \in (0, \pi/2).$$

**C. Neurčitý integrál**

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx \qquad \left[\int R(\operatorname{cotg} x)\,dx\right] \tag{11}$$

možno substitúciou $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, čiže $x = \operatorname{arctg} t$, $t \in (-\infty, \infty)$ [$t = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$, čiže $x = \operatorname{arccotg} t$, $t \in (-\infty, \infty)$], upraviť na integrál z racionálnej funkcie.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

*Riešenie.* Položme $t = \operatorname{tg} x$ pre $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, potom je $x = \operatorname{arctg} t$ a $dx = [1/(1 + t^2)]\,dt$. Po dosadení dostaneme

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int t^3\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + C =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C \qquad \text{pre} \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

**D. Neurčité integrály tvaru**

$$\int \sin mx \cos nx\,dx, \qquad \int \cos mx \cos nx\,dx, \qquad \int \sin mx \sin nx\,dx, \tag{12}$$

kde $m$, $n$ sú čísla, možno upraviť na neurčité integrály uvedené vo vete 5 z čl. 4,1 pomocou vzťahov

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

**Príklad 6.** Vypočítajme

$$\int \sin 2x \cos 6x \, dx.$$

*Riešenie.* Pomocou vzťahu (13) máme

$$\int \sin 2x \cos 6x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 8x + \sin(-4x)] \, dx =$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{8} \cos 4x + C = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - \cos 8x) + C.$$

**E. Neurčitý integrál**

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx, \tag{14}$$

kde $m$, $n$ sú celé čísla, možno upraviť pomocou rekurentných vzorcov

$$I_{m,n} = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, \quad m \neq n, \tag{15}$$

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n}, \quad m \neq -1, \tag{16}$$

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}, \quad m \neq n, \tag{17}$$

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2}, \quad n \neq -1, \tag{18}$$

na výpočet jedného z neurčitých integrálov

$$\int \sin x \, dx, \quad \int \cos x \, dx, \quad \int dx, \quad \int \sin x \cos x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx, \quad \int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx,$$

ktoré možno vypočítať priamo.

Vo zvláštnych prípadoch možno tento postup zjednodušiť:

a) ak $m$ alebo $n$ je nepárne číslo, dostávame integrál z odseku A tohto článku;

b) ak $m$ a $n$ sú kladné a párne čísla, dostávame integrál z odseku A tohto článku. V tomto prípade možno postupovať aj tak, že zavedieme trigonometrické funkcie násobných argumentov;

c) ak $m = -n \geq 2$, dostávame integrály z odseku C tohto článku. Pritom platí

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx, \tag{19}$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} x - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \, dx; \tag{20}$$

d) ak $m$, $n$ sú párne čísla a majú rôzne znamienka alebo sú to záporné čísla, potom opäť máme integrál z odseku A. Ak $m$, $n$ sú záporné čísla, je výhodné položiť $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, pričom $k = \max\{m/2, n/2\}$.

**Príklad 7.** Vypočítajme

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}, \qquad x \in (0, \pi/2).$$

*Riešenie.* Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3}{\sin^6 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x}{\sin^6 x \cos^2 x} + \right.$$

$$\left. + \frac{3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x}{\sin^6 x \cos^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + 3 \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx +$$

$$+ \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx = \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x + 3 \int \operatorname{cotg}^2 x \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \operatorname{cotg}^4 x \frac{1}{\sin^2 x} dx.$$

Zavedením substitúcie $t = \operatorname{cotg} x$ dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x + 3 \int (-t^2)\, dt + \int (-t^4)\, dt =$$

$$= \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x - t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C = \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{cotg}^5 x + C.$$

Poznámka. Pri integrovaní hyperbolických funkcií postupujeme celkom analogicky ako pri integrovaní trigonometrických funkcií. Pritom používame najmä tieto vzťahy

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$2 \sinh^2 x = \cosh 2x - 1, \qquad 2 \cosh^2 x = \cosh 2x + 1,$$

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x.$$

**Príklad** 8. Vypočítajme

$$\int \sinh^5 x\, dx.$$

*Riešenie.* Po jednoduchých úpravách a zavedení substitúcie $t = \cosh x$ máme:

$$\int \sinh^5 x\, dx = \int \sinh^4 x \sinh dx = \int (1 + \cosh^2 x)^2 \sinh x\, dx = \int (1 + t^2)^2\, dt =$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4)\, dt = t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = \cosh x + \frac{2}{3} \cosh^3 x + \frac{1}{5} \cosh^5 x + C.$$

V úlohách **885** až **994** vypočítajte neurčité integrály:

**885.** $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \sin x} dx.$

**886.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx.$

**887.** $\displaystyle\int \frac{1}{4 - 5 \sin x} dx.$

**888.** $\displaystyle\int \frac{1}{3 - 5 \cos x} dx.$

**889.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx.$

**890.** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x - 2 \sin x + 3} dx.$

**891.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x - 1} dx.$

**892.** $\displaystyle\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} dx.$

**893.** $\displaystyle\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx.$

**894.** $\displaystyle\int \frac{1}{4 - 3 \sin^2 x} dx.$

**895.** $\displaystyle\int \frac{1}{2 + 2 \cos^2 x} dx.$

**896.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2} dx.$

**897.** $\int \frac{dx}{1 - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x}$.

**898.** $\int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$.

**899.** $\int \frac{2 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}\, dx$.

**900.** $\int \frac{1 + \sin x \cos x}{(2 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x)}\, dx$.

**901.** $\int \frac{2\cos^3 x + 2\sin^3 x}{1 - \sin x \cos x}\, dx$.

**902.** $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}\, dx$.

**903.** $\int \sqrt{1 + \frac{1}{\sin x}}\, dx$.

**904.** $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$.

**905.** $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^3}\, dx$.

**906.** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 6\sin x + 5}\, dx$.

**907.** $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx$.

**908.** $\int \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx$.

**909.** $\int \frac{1}{\sqrt{\sin^7 x \cos x}}\, dx$.

**910.** $\int \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}\, dx$.

**911.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1 + 2\cos x}}\, dx$.

**912.** $\int \sin^2 x\, dx$.

**913.** $\int \cos^2 x\, dx$.

**914.** $\int \sin^4 x\, dx$.

**915.** $\int \cos^5 x\, dx$.

**916.** $\int \sin^6 3x\, dx$.

**917.** $\int \sin^7 x\, dx$.

**918.** $\int \cos^2 x \sin x\, dx$.

**919.** $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

**920.** $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

**921.** $\int \sin^5 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}\, dx$.

**922.** $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$.

**923.** $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$.

**924.** $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\, dx$.

**925.** $\int \frac{1}{\sin^6 x}\, dx$.

**926.** $\int \frac{1}{\cos^5 x}\, dx$.

**927.** $\int \frac{1}{\cos^8 x}\, dx$.

**928.** $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}\, dx$.

**929.** $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}\, dx$.

**930.** $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}\, dx$.

**931.** $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\, dx$.

**932.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$.

**933.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$.

**934.** $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

**935.** $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx.$

**936.** $\int \frac{1}{\operatorname{cotg}^8 x}\,dx.$

**937.** $\int \sin 3x \sin 5x\,dx.$

**938.** $\int \cos 3x \cos 4x\,dx.$

**939.** $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4}\,dx.$

**940.** $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx.$

**941.** $\int \sinh^3 x\,dx.$

**942.** $\int \cosh^4 x\,dx.$

**943.** $\int \operatorname{tgh} x\,dx.$

**944.** $\int \operatorname{cotgh}^2 x\,dx.$

## 4,7. Integrovanie transcendentných funkcií

1. Integrál $\int R(e^x)\,dx$, kde $R$ je racionálna funkcia, upravíme substitúciou $t = e^x$ na integrál z racionálnej funkcie.

2. Integrál $\int P(\ln x)\,dx$, kde $P$ je polynóm, upravíme substitúciou $t = \ln x$ na integrál $\int P(t)\,e^t\,dt$, ktorý vypočítame metódou per partes.

3. Integrál $\int P(\arcsin x)\,dx$, kde $P$ je polynóm, upravíme substitúciou $t = \arcsin x$ na integrál $\int P(t) \cos t\,dt$, ktorý vypočítame metódou per partes.

Analogicky počítame integrál $\int P(\arccos x)\,dx$.

4. Integrály typu $\int P(x) \arcsin x\,dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x) \sin(ax+b)\,dx$, $\int P(x) \cos(ax+b)\,dx$, $\int P(x) e^{ax+b}\,dx$, $\int P(x) \ln R(x)\,dx$, kde $P$ je polynóm a $R$ racionálna funkcia, prevedieme metódou per partes na integrály iracionálnych alebo racionálnych funkcií.

Poznámka 1. Integrál typu $\int e^{ax+b} P(x)\,dx$, kde $P$ je polynóm $n$-tého stupňa, možno riešiť aj metódou neurčitých koeficientov. Platí

$$\int e^{ax+b} P(x)\,dx = Q(x)\,e^{ax+b} + C, \tag{1}$$

kde $Q$ je polynóm $n$-tého stupňa, ktorého koeficienty určíme tak, že vzťah (1) zderivujeme a použijeme metódu neurčitých koeficientov.

Poznámka 2. Integrál typu $\int [P(x) \cos kx + Q(x) \sin kx]\,dx$, kde pylonómy $P$, $Q$ majú stupne $m$, $n$, možno riešiť metódou neurčitých koeficientov. Platí

$$\int [P(x) \cos kx + Q(x) \sin kx]\,dx = S(x) \cos kx + T(x) \sin kx + C, \tag{2}$$

pričom $S$ a $T$ sú polynómy stupňa $s = \max\{m, n\}$. Ich koeficienty určíme tak, že vzťah (2) zderivujeme a porovnáme koeficienty na oboch stranách rovnosti pri funkciách $x^r \cos kx$, $x^r \sin kx$, $r = 0, 1, 2, \ldots, k$.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int \frac{2\,e^{3x} + 3\,e^x}{e^{2x} + 1}\,dx.$$

*Riešenie.* Použijeme substitúciu $t = e^x$. Dostaneme

$$\int \frac{2\,e^{3x} + 3\,e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \int \frac{2\,e^{2x} + 3}{e^{2x} + 1} \cdot e^x\,dx = \int \frac{2t^2 + 3}{t^2 + 1}\,dt =$$

$$= \int \left(2 + \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = 2t + \operatorname{arctg} t + C = 2\,e^x + \operatorname{arctg} e^x + C$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$.

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int (3x^2 + 1) \arcsin x \,dx, \qquad x \in (0, 1).$$

*Riešenie.* Integrovaním per partes dostaneme

$$\int (3x^2 + 1) \arcsin x \,dx = (x^3 + x) \arcsin x - \int \frac{x^3 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

Vypočítajme integrál

$$I = \int \frac{x^3 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

Použitím substitúcie $t = \varphi(x)$, $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x = \sqrt{1 - t^2}$ pre $t \in (0, 1)$ dostaneme

$$I = \int (x^2 + 1) \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = -\int (1 - t^2 + 1)\,dt.$$

$$I = -\int (2 - t^2)\,dt = -2t + \frac{t^3}{3} + C = -2\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(1 - x^2)^3} + C \quad \text{pre} \quad x \in (0, 1).$$

Preto platí

$$\int (3x^2 + 1) \arcsin x \,dx = (x^3 + x) \arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1 - x^2)^3} + C \quad \text{pre} \quad x \in (0, 1).$$

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int (\ln^3 x + \ln x)\,dx, \qquad x \in (0, \infty).$$

*Riešenie.* Substitúciou $t = \ln x$, čiže $x = e^t$ dostaneme

$$\int (\ln^3 x + \ln x)\,dx = \left[\int (t^3 + t)\,e^t\,dt\right]_{t = \ln x}.$$

Tento integrál vypočítame použitím vzťahu (1) metódou neurčitých koeficientov. Máme

$$\int (t^3 + t)\,e^t\,dt = (At^3 + Bt^2 + Ct + D)\,e^t + C_1. \tag{3}$$

Ak poslednú rovnosť zderivujeme a vydelíme $e^t$, dostaneme

$$t^3 + t = At^3 + Bt^2 + Ct + D + 3At^2 + 2Bt + C.$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách $t$ máme

$$\begin{aligned} 1 &= A, & 1 &= 2B + C, \\ 0 &= 3A + B, & 0 &= C + D. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému je

$$A = 1, \qquad B = -3, \qquad C = 7, \qquad D = -7.$$

Po dosadení za čísla $A$, $B$, $C$, $D$ a $t = \ln x$ do (3) dostaneme

$$\int (\ln^3 x + \ln x)\,dx = (\ln^3 x - 3\ln^2 x + 7\ln x - 7)\,x + C_1$$

pre $x \in (0, \infty)$.

## V úlohách 945 až 969 vypočítajte neurčité integrály:

**945.** $\displaystyle\int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4}\,dx.$

**946.** $\displaystyle\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1}\,dx.$

**947.** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^x + 1}.$

**948.** $\displaystyle\int \sqrt{1 - a^x}\,dx, \quad a \neq 1.$

**949.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^{-x/2} + e^{-x/3} + e^{-x/6}}.$

**950.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - e^x}{1 + e^x}}\,dx.$

**951.** $\int \sqrt{e^{-2x} + 4e^{-x} - 1}\, dx.$

**952.** $\int x^2 e^{-5x}\, dx.$

**953.** $\int (x^3 + x^2 - x + 4)\, e^{2x}\, dx.$

**954.** $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx.$

**955.** $\int x^7 e^{-x^2}\, dx.$

**956.** $\int \ln^4 x\, dx.$

**957.** $\int (\ln^3 x - 2 \ln x + 3)\, dx.$

**958.** $\int (4x + 5) \ln^2 x\, dx.$

**959.** $\int x^3 \ln^3 x\, dx.$

**960.** $\int (\ln^2 x)/x^3\, dx.$

**961.** $\int x^3 \ln (x^2 + 2)\, dx.$

**962.** $\int (\arcsin x)^2\, dx.$

**963.** $\int x \arcsin x\, dx.$

**964.** $\int x^6 \operatorname{arctg} x\, dx.$

**965.** $\int x^4 \sin x\, dx.$

**966.** $\int x^5 \cos x\, dx.$

**967.** $\int (x^2 + 5x + 9) \cos (2x + 2)\, dx.$

**968.** $\int (x - \sin x)^3\, dx.$

**969.** $\int x^2 e^{-x} \cos x\, dx.$

**970.** Ak $P(x)$ je polynóm $n$-tého stupňa a číslo $a \neq 0$, dokážte

a) $\int P(x) e^{ax}\, dx = e^{ax} \left[ \frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C;$

b) $\int P(x) \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} Q(x) + \frac{\cos ax}{a^2} R(x) + C;$

c) $\int P(x) \sin ax = -\frac{\cos ax}{a} Q(x) + \frac{\sin ax}{a^2} R(x) + C,$

kde $Q(x) = P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots$, $R(x) = P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \ldots$.

**971.** Dokážte, že neurčitý integrál $\int R(x)\, e^{ax}\, dx$, kde $R$ je racionálna funkcia, ktorej menovateľ má iba reálne korene, rovná sa súčtu elementárnych funkcií a transcendentnej funkcie $\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C$, kde funkcia $\operatorname{li} x$ sa nazýva integrálny logaritmus a platí pre ňu $\operatorname{li} x = \int \frac{1}{\ln x}\, dx$, kde $x \in (0, 1)$, resp. $(1, \infty)$.

Na základe úlohy 971 vypočítajte úlohy 972 až 974:

**972.** $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^x\, dx.$

**973.** $\int \frac{x e^x}{(x + 1)^2}\, dx.$

**974.** $\int \frac{e^{-2x}}{x^2 + 3x + 2}\, dx.$

## 4,8. Rozličné úlohy

Úlohy 975 až 1042 riešte niektorou z metód uvedených v predchádzajúcich článkoch, alebo kombináciou týchto metód:

975. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

976. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}.$

977. $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^8-1}\,\mathrm{d}x.$

978. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^3+x^6}}\,\mathrm{d}x.$

979. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

980. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}.$

981. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{(4x^2+2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x.$

982. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$

983. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x.$

984. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}\,\mathrm{d}x.$

985. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}.$

986. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

987. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,\mathrm{d}x.$

988. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x.$

989. $\displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}\,\mathrm{d}x.$

990. $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$

991. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x.$

992. $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x.$

993. $\displaystyle\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x.$

994. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$

995. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

996. $\displaystyle\int \frac{2}{x(1+\ln^2|x|)}\,\mathrm{d}x.$

997. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

998. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}\,\mathrm{d}x.$

999. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,.\,\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$

1000. $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

1001. $\displaystyle\int x^2\ln\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$

1002. $\displaystyle\int \frac{\ln\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

1003. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4\mathrm{e}^x}}.$

1004. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+a)^n}\,\mathrm{d}x,\quad n\neq 1.$

1005. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}.$

1006. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}}.$

1007. $\int 2\,e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

1008. $\int \dfrac{a+b\sin x+c\cos x}{\sin 2x}\,dx$.

1009. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1010. $\int \dfrac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x}}\,dx$.

1011. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$.

1012. $\int \dfrac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$.

1013. $\int \dfrac{dx}{\sin x\cos^2 x}$.

1014. $\int \dfrac{\cos(x+1)}{\cos(3x+3)}\,dx$.

1015. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1016. $\int \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x\,dx$.

1017. $\int \dfrac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx$.

1018. $\int \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx$.

1019. $\int \operatorname{cosec}^5 5x\,dx$.

1020. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}}$.

1021. $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx$.

1022. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

1023. $\int \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^4}\,dx$.

1024. $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1025. $\int \dfrac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

1026. $\int \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

1027. $\int \dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1028. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$.

1029. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$.

1030. $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

1031. $\int \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

1032. $\int \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{(x^2-1)^2}\,dx$.

1033. $\int \dfrac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx$.

1034. $\int x\operatorname{arctg}(2x+3)\,dx$.

1035. $\int \dfrac{\sinh x\cosh x}{\sinh^2 x+\cosh^2 x}\,dx$.

1036. $\int \dfrac{\sinh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1037. $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx$.

1038. $\int |x|\,dx$.

1039. $\int x|x|\,dx$.

1040. $\int e^{-|x|}\,dx$.

1041. $\int \min\left(1,\dfrac{1}{x}\right)dx$, $x\in(0,\infty)$.

1042. $\int E(x)\,|\sin\pi x|\,dx$, $x\in(0,\infty)$.

## 4,9. Neurčitý integrál komplexnej funkcie reálnej premennej

Komplexnú funkciu reálnej premennej $F$ nazývame *primitívnou funkciou ku komplexnej funkcii reálnej premennej* $f$ v intervale $(a, b)$, ak pre všetky $x \in (a, b)$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Množinu všetkých primitívnych funkcií nazývame *neurčitým integrálom komplexnej funkcie reálnej premennej* $f$ a označujeme ju $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vlastnosti:

**Veta 1.** Komplexná funkcia reálnej premennej $F$ je primitívnou funkciou ku komplexnej funkcii reálnej premennej $f$ na intervale $(a, b)$ vtedy a len vtedy, keď $\operatorname{Re} F(x)$ je primitívnou funkciou k funkcii $\operatorname{Re} f(x)$ na intervale $(a, b)$ a $\operatorname{Im} F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $\operatorname{Im} f(x)$ na intervale $(a, b)$.

Poznámka 1. Pre neurčitý integrál komplexnej funkcie reálnej premennej platia podobné vety ako pre neurčitý integrál funkcie reálnej premennej, napr. veta o metóde per partes, veta o substitúcii.

**Veta 2.** Pre komplexné číslo $a \neq 0$ a pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} + C,$$

kde $C$ je ľubovoľné komplexné číslo.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int \frac{1}{x + 2 + 3\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Najskôr upravme funkciu za integračným znakom. Platí rovnosť

$$\frac{1}{x + 2 + 3\mathrm{i}} = \frac{(x + 2) - 3\mathrm{i}}{(x + 2)^2 + 9} = \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + 9} - \mathrm{i}\,\frac{3}{(x + 2)^2 + 9}$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$. Ďalej je

$$\int \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + 9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left[(x + 2)^2 + 9\right] + C_1,$$

$$\int \frac{3}{(x + 2)^2 + 9}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{x + 2}{3} + C_2.$$

Podľa vety 1 máme

$$\int \frac{1}{x + 2 + 3\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left[(x + 2)^2 + 9\right] - \mathrm{i}\operatorname{arctg}\frac{x + 2}{3} + C$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$, pričom $C = C_1 - \mathrm{i}\,C_2$ je ľubovoľné komplexné číslo.

Poznámka 2. Niekedy môžeme integrál z reálnej funkcie výhodne počítať pomocou neurčitého integrálu vhodne vybranej komplexnej funkcie reálnej premennej.

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

kde $a$, $b$ sú reálne čísla, ktoré sa súčasne nerovnajú nule.

*Riešenie.* Podľa článku 2,3 vieme, že

$$\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx).$$

Z toho vyplýva

$$\mathrm{e}^{ax}\cos bx = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x},$$
$$\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}.$$

Podľa vety 2 je

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{1}{a+ib}\,e^{(a+ib)x} + C = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\,e^{(a+ib)x} + C =$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + C_1 + i\,C_2 =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C_1 + i\left[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C_2\right],$$

kde $C = C_1 + i\,C_2$, pričom $C_1$, $C_2$ sú ľubovoľné reálne čísla. Podľa vety 1 je

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C_1,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C_2.$$

V úlohách **1043** až **1059** vypočítajte neurčité integrály z komplexnej funkcie reálnej premennej.

**1043.** $\int [x^2 + i(x-3)]\,dx.$ **1044.** $\int (\cos x + i\sin x)\,dx.$

**1045.** $\int (x-2i)(x+3-3i)\,dx.$ **1046.** $\int (x+3i)^3\,dx.$

**1047.** $\int \frac{x-i}{x+i}\,dx.$ **1048.** $\int \frac{1}{x-(3+i)}\,dx.$

**1049.** $\int \frac{1}{(x-2i)(x+1-i)}\,dx.$ **1050.** $\int \frac{1}{[x-(2+i)]^2}\,dx.$

**1051.** $\int \frac{2x+i}{x^3+4x}\,dx.$ **1052.** $\int \frac{1}{x^2-4ix-4}\,dx.$

**1053.** $\int \frac{2}{(x^2-6ix-9)(x+1-i)}\,dx.$ **1054.** $\int \frac{3x}{(x^2+1)+2i}\,dx.$

**1055.** $\int x e^{2-ix^2}\,dx.$ **1056.** $\int x e^{(3+2i)x}\,dx.$

**1057.** $\int (2-ix)^2\sin 2x\,dx.$ **1058.** $\int x^{3+5i}\,dx.$

**1059.** $\int (e^{ix} + ie^{-x})\,dx.$

V úlohách **1060** až **1067** vypočítajte daný neurčitý integrál pomocou neurčitého integrálu z komplexnej funkcie reálnej premennej:

**1060.** $\int x^2 e^{3x}\cos 2x\,dx.$ **1061.** $\int x^2 e^{3x}\sin 2x\,dx.$

**1062.** $\int \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$ **1063.** $\int \cos^n x \,.\, \cos nx\,dx.$

**1064.** $\int \sin^n x \,.\, \sin nx\,dx.$ **1065.** $\int e^{-ax}\cos^{2n} x\,dx.$

**1066.** $\int \frac{\cos 2nx}{\cos x}\,dx.$ **1067.** $\int \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

# 5. URČITÝ INTEGRÁL

## 5,1. Pojem a základné vlastnosti určitého integrálu

### A. Definícia určitého integrálu

**Delenie intervalu.** Majme interval $\langle a, b\rangle$. Ak je dané $m + 1$ čísiel $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$, pre ktoré platí

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b,$$

hovoríme, že je dané *delenie* $D$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Čísla $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ nazývame *deliacimi bodmi* a intervaly $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{m-1}, x_m\rangle$ *čiastočnými intervalmi* delenia $D$. Dĺžku $i$-tého čiastočného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, m$ označujeme $\Delta x_i$. Množinu všetkých týchto čiastočných intervalov nazývame delením $D$.

Číslo $\|D\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m\}$ nazývame *normou delenia* $D$.

Ak pre každé prirodzené číslo $n$ je dané jedno delenie $D_n$ intervalu $\langle a, b\rangle$, hovoríme o postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$.

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ je *normálna*, ak platí

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n \| = 0.$$

**Integrálny súčet.** Nech funkcia $f$ je definovaná a ohraničená v intervale $\langle a, b\rangle$ a pre reálne čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ platí $\xi_1 \in \langle x_0, x_1\rangle, \xi_2 \in \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \xi_m \in \langle x_{m-1}, x_m\rangle$.

*Integrálnym súčtom funkcie* $f$ pre delenie $D$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a pre danú voľbu čísiel $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ nazývame číslo

$$S_f(D) = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_m)\,\Delta x_m = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \qquad (1)$$

Nech $m_i$ je infimum a $M_i$ je supremum funkcie $f$ v $i$-tom čiastočnom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ delenia $D$.

Dolným integrálnym súčtom funkcie $f$ pre delenie $D$ intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame číslo

$$\underline{S}_f(D) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_m\Delta x_m = \sum_{i=1}^{m} m_i\Delta x_i.$$

Horným integrálnym súčtom funkcie $f$ pre delenie $D$ intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame číslo

$$\overline{S}_f(D) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_m\Delta x_m = \sum_{i=1}^{m} M_i\Delta x_i.$$

**Geometrický význam.** Ak funkcia $f$ je v intervale $\langle a, b\rangle$ kladná, potom číslo $S_f(D)$ udáva obsah obdĺžnikov so základňami $\Delta x_i$ a výškami $f(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Číslo $\underline{S}_f(D)$ udáva obsah vpísaných obdĺžnikov so základňami $\Delta x_i$ a výškami $m_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Číslo $\overline{S}_f(D)$ udáva obsah opísaných obdĺžnikov so základňami $\Delta x_i$ a výškami $M_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (pozri *obr. 35*).

**Určitý integrál.** Nech funkcia $f$ je ohraničená v intervale $\langle a, b\rangle$. Funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$, ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, delení intervalu $\langle a, b\rangle$ je postupnosť $\{S_f(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie $f$ pre delenie $D_n$ a ľubovoľné voľby čísiel $\xi$ konvergentná.

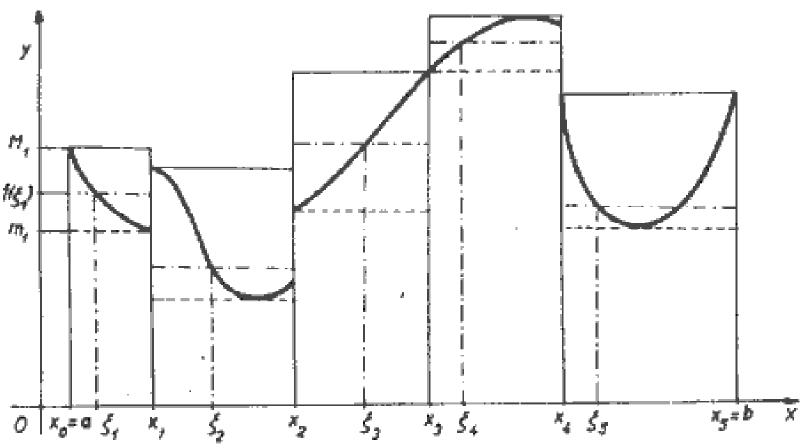
*Určitým integrálom* funkcie $f$ v intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame limitu všetkých postupností $\{S_f(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie $f$ pre všetky normálne postupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ a pre všetky voľby čísiel $\xi$ a označujeme ju znakom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Číslo $a$ nazývame *dolnou hranicou*, číslo $b$ *hornou hranicou* určitého integrálu (2).

Ak funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$




*Obr. 35*

Pre každé číslo $a$, v ktorom je funkcia definovaná, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

**B. Vlastnosti určitého integrálu**

**Veta 1.** Nech funkcie $f$, $g$ sú integrovateľné v intervale $\langle a, b\rangle$ a $c$ je číslo. Potom funkcie $|f|$, $cf$, $f+g$, $f-g$, $fg$ sú integrovateľné v intervale $\langle a, b\rangle$ a platí:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

*Dôsledok*. Ak funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sú v intervale $\langle a, b\rangle$ integrovateľné a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú čísla, potom platí

$$\int_a^b [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= c_1\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

**Veta 2.** Nech pre integrovateľné funkcie $f, g$ v intervale $\langle a, b\rangle$ platí $f(x) > g(x)$. Potom je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Dôsledok 1. Ak pre integrovateľné funkcie $f, g$ v intervale $\langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geqq g(x)$, potom je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Dôsledok 2. Pre integrovateľnú a nezápornú funkciu $f$ v intervale $\langle a, b\rangle$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0. \tag{12}$$

**Veta 3.** (Prvá veta o strednej hodnote.) Nech funkcie $f, g$ sú integrovateľné v intervale $\langle a, b\rangle$ a funkcia $g$ je nekladná alebo nezáporná. Potom existuje také číslo $\mu$ z intervalu $\langle m, M\rangle$, pričom $m = \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, že platí

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Dôsledok 3. Nech sú splnené predpoklady vety 3 a $g(x) \geqq 0$, potom platí

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Dôsledok 4. Nech sú splnené predpoklady vety 3 a funkcia $f$ je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$, potom existuje také číslo $c$ z intervalu $\langle a, b\rangle$, že platí

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Dôsledok 5. Nech pre integrovateľnú funkciu $f$ v intervale $\langle a, b\rangle$ platí $m \leqq f(x) \leqq M$, potom je

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a). \tag{16}$$

Dôsledok 6. Ak funkcia $f$ je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$, potom existuje také číslo $c$, že je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a). \tag{17}$$

Číslo $f(c)$ nazývame *strednou hodnotou funkcie* $f$ na intervale $\langle a, b\rangle$.

**Veta 4.** Nech funkcia $f$ je integrovateľná v uzavretom intervale $J$ a čísla $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n$ sú z tohto intervalu. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx. \tag{18}$$

**Veta 5.** (Newton—Leibnizov vzorec.) Nech funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$ a má primitívnu funkciu $F$ v otvorenom intervale $(a, b)$, ktorá je spojitá v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{19}$$

**Veta 6.** Funkcia $f$ je v intervale $\langle a, b\rangle$ integrovateľná vtedy a len vtedy, ak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_f(D_n)$ aj $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_f(D_n)$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_f(D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_f(D_n)$.

**Veta 7.** Každá spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ je integrovateľná v tomto intervale.

**Veta 8.** Každá ohraničená funkcia, ktorá má v intervale $\langle a, b\rangle$ iba konečný počet bodov nespojitosti, je v tomto intervale integrovateľná.

**Veta 9.** Každá monotónna funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ je v tomto intervale integrovateľná.

### C. Integrál ako funkcia hornej [dolnej] hranice

Nech funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$ a $c$ je číslo z tohto intervalu. Potom funkciu

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \tag{20}$$

definovanú v intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame *integrál ako funkcia hornej hranice.*

Podobne funkciu

$$G(x) = \int_x^c f(t)\,dt, \tag{21}$$

definovanú v intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame *integrál ako funkcia dolnej hranice.*

Pre každé číslo $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$G(x) = -F(x). \tag{22}$$

**Veta 10.** Ak funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$, potom funkcia $F$ je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$.

**Veta 11.** Ak funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$ a v čísle $x_0 \in (a, b)$ je spojitá, potom existuje derivácia funkcie $F$ v čísle $x_0$,

$$F'(x_0) = \Big[\int_c^x f(t)\,dt\Big]'_{x=x_0} = f(x_0). \tag{23}$$

**Príklad 1.** Vypočítajme pomocou definície určitý integrál

$$\int_1^2 x^6\,dx.$$

*Riešenie.* Funkcia $y = x^6$ je spojitá v intervale $\langle 1, 2\rangle$ a podľa vety 7 je integrovateľná v intervale $\langle 1, 2\rangle$. Preto nemusíme pri počítaní daného integrálu pomocou definície zostrojovať všetky normálne postupnosti delení intervalu $\langle 1, 2\rangle$ a k nim všetky možné postupnosti integrálnych súčtov pre všetky voľby čísiel $\xi$. Stačí zostrojiť iba jednu takú postupnosť integrálnych súčtov s vhodne volenými číslami $\xi$, pretože všetky ostatné postupnosti integrálnych súčtov pre normálne postupnosti delení majú tú istú limitu.

Zvoľme delenie $D_n$ intervalu $\langle 1, 2\rangle$, ktoré je určené deliacimi bodmi

$$x_0 = 1, \quad x_1 = q, \quad x_2 = q^2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = q^{n-1}, \quad x_n = q^n = 2,$$

kde $q = \sqrt[n]{2}$ a $n$ je prirodzené číslo, t. j. deliace body tvoria prvých $n + 1$ členov geometrickej postupnosti. Dĺžky čiastočných intervalov sú

$$\Delta x_1 = q - 1, \quad \Delta x_2 = q(q - 1), \quad \ldots, \quad \Delta x_n = q^{n-1}(q - 1).$$

Pretože je $q > 1$, norma delenia $D_n$ je

$$\|D_n\| = q^{n-1}(q - 1) = q^n \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Uvažujme teraz o postupnosti takýchto delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle 1, 2\rangle$, kde $n = 1, 2, \ldots$. Táto postupnosť je normálna postupnosť delení intervalu $\langle 1, 2\rangle$, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = 2(1 - 1) = 0.$$

Zvoľme body $\xi$ tak, aby $\xi_1 = x_0, \xi_2 = x_1, \ldots, \xi_n = x_{n-1}$. Potom integrálny súčet je

$$S_f(D_n) = 1^6(q - 1) + q^6 q(q - 1) + q^{12} q^2(q - 1) + \ldots + q^{6n-6} q^{n-1}(q - 1) =$$

$$= (q - 1)(1 + q^7 + q^{14} + \ldots + q^{7n-7}) = (q - 1)\frac{q^{7n} - 1}{q^7 - 1} = \frac{q - 1}{q^7 - 1}(2^7 - 1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Z toho dostaneme

$$\int_1^2 x^6\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_f(D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{q - 1}{q^7 - 1}(2^7 - 1) =$$

$$= (2^7 - 1)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1} = \frac{2^7 - 1}{7} = \frac{127}{7}.$$

Pritom sme použili vzťah $\lim\limits_{n\to\infty} q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Pretože funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá, a teda integrovateľná v intervale $\langle 0, \pi/2\rangle$, má spojitú primitívnu funkciu $F(x) = \sin x$, podľa vety 5 platí

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int_{-3}^{1} |x|\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Keďže funkcia $y = |x|$ je spojitá a pre $x \geq 0$ je $|x| = x$, pre $x < 0$ je $|x| = -x$, podľa vety 4 máme

$$\int_{-3}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} |x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x.$$

Podľa vety 5 dostaneme

$$\int_{-3}^{1} |x| \, dx = -\int_{-3}^{0} x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.$$

**Príklad 4.** Odhadnime určitý integrál

$$\int_0^1 \frac{x^{11}}{\sqrt[5]{1 + x + x^2}} \, dx.$$

*Riešenie.* Funkcia $f(x) = x^{11}/\sqrt[5]{1 + x + x^2}$ je v intervale $\langle 0, 1\rangle$ spojitá, a teda integrovateľná. Keďže platí

$$0 < \frac{x^{11}}{\sqrt[5]{1 + x + x^2}} < x^{11}$$

pre všetky $x$ z intervalu $(0, 1)$, podľa vety 2 dostaneme

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{11}}{\sqrt[5]{1 + x + x^2}} \, dx < \int_0^1 x^{11} \, dx = \left[\frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12} = 0,833\ldots.$$

**Príklad 5.** Nájdime deriváciu $f'$ funkcie

$$f(x) = \int_1^{x^3} e^{2t} \cos t^2 \, dt.$$

*Riešenie.* Máme nájsť deriváciu zloženej funkcie

$$f(x) = g[h(x)], \quad \text{kde} \quad g(u) = \int_1^u e^{2t} \cos t^2 \, dt \quad \text{a} \quad u = h(x), \quad h(x) = x^3.$$

Keďže všetky predpoklady vety o derivovaní zloženej funkcie sú splnené a funkcia $G(t) = e^{2t} \cos t^2$ je spojitá, podľa vety 11 dostávame:

$$f'(x) = \left[\int_1^u e^{2t} \cos t^2 \, dt\right]'_{u=x^3} (x^3)' = (e^{2u} \cos u^2)_{u=x^3} 3x^2 = e^{2x^3} (\cos x^6)\, 3x^2 = 3x^2 e^{2x^3} \cos x^6.$$

**1068.** Delenie $D$ intervalu $\langle 2, 5\rangle$ je dané číslami 2; 2,5; 3,1; 3,5; 3,9; 4,2; 4,5; 4,7; 5. Nájdite dĺžku čiastočných intervalov a normu delenia $D$.

**1069.** Nájdite aspoň dve normálne postupnosti delení intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

**1070.** Nájdite integrálny súčet $S_f(D)$ funkcie $f(x) = 1 - x^2$ v intervale $\langle -3, 2\rangle$, ak interval $\langle -3, 2\rangle$ je rozdelený na 10 rovnakých čiastočných intervalov a body $\xi$ sú stredy týchto intervalov. Nájdite aj $\underline{S}_f(D)$ a $\overline{S}_f(D)$ pre dané delenie intervalu.

**1071.** Z definície určitého integrálu dokážte, že daná funkcia $f$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = x^2$.

**1072.** Zistite, či Dirichletova funkcia $\chi$ je integrovateľná v intervale $J = \langle 0, 1\rangle$, ak

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \text{ je iracionálne číslo}, \\ 1 & \text{pre} \quad x \text{ je racionálne číslo}. \end{cases}$$

**1073.** Vypočítajte určitý integrál ako limitu postupnosti integrálnych súčtov:

a) $\int_a^b c\,dx$; c) $\int_a^b x^2\,dx$; e) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$;

b) $\int_a^b x\,dx$; d) $\int_a^b e^x\,dx$; f) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

**1074.** Na základe výsledkov predchádzajúcej úlohy a základných vlastností určitého integrálu bez použitia Newton—Leibnizovho vzorca vypočítajte:

a) $\int_{-2}^{5} \frac{3x+7}{2}\,dx$; c) $\int_0^1 (3^x + x)\,dx$;

b) $\int_{-2}^{1} (x+1)^2\,dx$; d) $\int_1^e \frac{x^2+2x+2}{x}\,dx$.

V úlohách **1075** až **1105** vypočítajte pomocou Newton—Leibnizovho vzorca určité integrály:

**1075.** $\int_1^4 (3x - 11)\,dx$. **1076.** $\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx$.

**1077.** $\int_0^3 |1 - 3x|\,dx$. **1078.** $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x}\,dx$.

**1079.** $\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}\,dx$. **1080.** $\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,dx$.

**1081.** $\int_0^1 \frac{1}{(5x+1)^3}\,dx$. **1082.** $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

**1083.** $\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x^2-4}\,dx$. **1084.** $\int_0^1 \frac{1}{2x^2+11x+12}\,dx$.

**1085.** $\int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$. **1086.** $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

**1087.** $\int_0^3 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x})\,dx$. **1088.** $\int_3^5 \sqrt{x-3}\,dx$.

**1089.** $\int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$. **1090.** $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1091. $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1092. $\int\limits_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx.$

1093. $\int\limits_{-1}^1 e^x\,dx.$

1094. $\int\limits_0^1 (e^x+1)^3 e^{2x}\,dx.$

1095. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx.$

1096. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$

1097. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx.$

1098. $\int\limits_0^\pi \cos x\,dx.$

1099. $\int\limits_0^\pi \cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$

1100. $\int\limits_0^\pi \sin^3 x\,dx.$

1101. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx.$

1102. $\int\limits_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx.$

1103. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\,dx.$

1104. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx.$

1105. $\int\limits_0^\pi \sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx.$

**1106.** Dokážte, že formálne použitie Newton—Leibnizovho vzorca vedie k nesprávnemu výsledku a zdôvodnite to.

a) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{x+1}\,dx;$ b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x}\,dx;$ c) $\int\limits_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg}\frac{2}{x}\right)'\,dx.$

**1107.** Pomocou určitých integrálov nájdite limity súčtov:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right);$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right);$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{a}{n}\pi+\sin\frac{a}{n}2\pi+\ldots+\sin\frac{a}{n}(n-1)\pi\right)\right];$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}, \quad p>0.$

**1108.** Bez výpočtu daných určitých integrálov rozhodnite, ktorý z nich je väčší

a) $\int_{-1}^{1} x^2 \, dx, \quad \int_{-1}^{1} x^4 \, dx$; c) $\int_{0}^{\pi/2} x \, dx, \quad \int_{0}^{\pi/2} \sin x \, dx$;

b) $\int_{0}^{1} \sqrt{2 + x^2} \, dx, \quad \int_{0}^{1} x \, dx$; d) $\int_{1}^{2} e^{x^2} \, dx, \quad \int_{1}^{2} e^{x} \, dx$.

V úlohách **1109** až **1117** odhadnite určité integrály:

**1109.** $\int_{0}^{1} x(1 - x)^2 \, dx$.

**1110.** $\int_{8}^{18} \frac{x + 1}{x + 2} \, dx$.

**1111.** $\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$.

**1112.** $\int_{1}^{2} \sqrt{4 + x^2} \, dx$.

**1113.** $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \, dx$.

**1114.** $\int_{0}^{1} e^{x^2} \, dx$.

**1115.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

**1116.** $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} \, dx$.

**1117.** $\int_{0}^{1} x^x \, dx$.

V úlohách **1118** až **1125** nájdite strednú hodnotu funkcie v danom intervale:

**1118.** $f(x) = x(1 - x), \quad \langle 0, 1 \rangle$.

**1119.** $f(x) = 2x - 1, \quad \langle -3, 2 \rangle$.

**1120.** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \quad \langle 0, 0{,}5 \rangle$.

**1121.** $f(x) = \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}, \quad \langle 2, 5 \rangle$.

**1122.** $f(x) = \sin x, \quad \langle 0, \pi \rangle$.

**1123.** $f(x) = \sin^2 x, \quad \langle 0, \pi \rangle$.

**1124.** $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}, \quad \langle 0, \pi/2 \rangle$

**1125.** $f(x) = 3^x + x - 2, \quad \langle 0, 1 \rangle$.

**1126.** Na základe vety o strednej hodnote odhadnite integrály:

a) $\int_{0}^{1} \frac{x^{10}}{\sqrt{1 + x}} \, dx$; b) $\int_{0}^{100} \frac{e^{-2x}}{x^2 + 100} \, dx$.

**1127.** Dokážte, že stredná hodnota funkcie $f$, spojitej v intervale $\langle a, b \rangle$, je limita pre $n \to \infty$ z aritmetického priemeru hodnôt tejto funkcie v číslach $a + k(b - a)/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

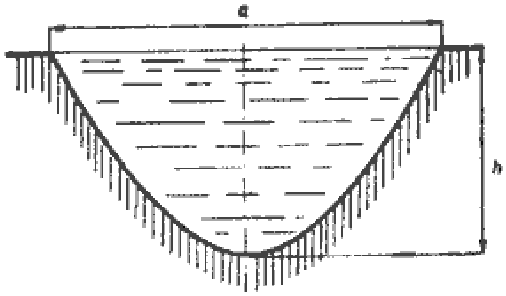
**1128.** Teleso padá z výšky $h$ bez počiatočnej rýchlosti. Po prebehnutí dráhy $s$ je jeho rýchlosť $v = \sqrt{2gs}$, ($g \doteq 9{,}81 \text{ m s}^{-2}$). Vypočítajte strednú rýchlosť telesa na tejto dráhe.

**1129.** Profil žľabu má tvar parabolického úseku (pozri *obr. 36*). Jeho základňa je $a$ a hĺbka $h$. Nájdite strednú hĺbku žľabu.

**1130.** Pre napätie striedavého prúdu platí

$$e = E_0 \sin 2\pi f t,$$

kde amplitúda $E_0$ je 380 V a frekvencia je $f = 50$ Hz. Nájdite strednú hodnotu napätia $e$ a efektívnu hodnotu napätia počas jednej periódy.



*Obr. 36*

V úlohách **1131, 1132, 1133** nájdite funkciu určenú integrálom:

**1131.** $\int_1^x \frac{1}{x}\, dx$.

**1132.** $\int_x^0 \sin x \, dx$.

**1133.** $\int_a^x x^2 \, dx$.

V úlohách **1134** až **1137** nájdite deriváciu funkcie $F$:

**1134.** $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt, \quad x > 0$.

**1135.** $\int F(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^4}\, dt$.

**1136.** $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

**1137.** $F(x) = \int_x^1 e^t \cos 2t \, dt$.

**1138.** Vypočítajte:

a) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\, dt\right)$;

b) $\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{\cos x} \arcsin t \, dt\right)$, $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$

**1139.** Zistite, či funkcia $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ je klesajúca alebo rastúca.

**1140.** Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad x > 0.$$

**1141.** Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 \, dt}{t}$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(\int_0^x 2^{t^2}\, dt\right)^2}{\int_0^x 4^{t^2}\, dt}$.

**1142.** Vypočítajte určitý integrál z funkcie $f$ v intervale $\langle 0, 3\rangle$, ak:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{pre} \quad x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0 & \text{pre} \quad x \in \langle 1, 2\rangle, \\ (2 - x)^2 & \text{pre} \quad x \in \langle 2, 3\rangle. \end{cases}$$

**1143.** Dokážte, že funkcia $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, kde $f$ je funkcia z príkladu **1142,** je spojitá v intervale $(0, 3)$ a $F'(x) = f(x)$ pre každé $x$ z intervalu $(0, 3)$.

V úlohách **1144** až **1147** vypočítajte určité integrály:

**1144.** $\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x.$

**1145.** $\int\limits_{2}^{5} (-1)^{E(x)}\,\mathrm{d}x.$

**1146.** $\int\limits_{-2}^{3} E(x)\,\mathrm{d}x.$

**1147.** $\int\limits_{0}^{2} E(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x.$

## 5,2. Substitučná metóda a metóda per partes pre určité integrály

**Veta 1.** Nech

a) funkcia $f$ je spojitá na intervale $\langle c, d\rangle$,
b) funkcia $\varphi$ a jej derivácia $\varphi'$ je spojitá na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$,
c) pre každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ je $\varphi(t) \in \langle c, d\rangle$,
d) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, pričom $\langle a, b\rangle \subset \langle c, d\rangle$,

potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Veta 2.** Nech funkcie $f$ a $g$ majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{(x/2 + 2)^4}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Funkcia $f(x) = x^2(x/2 + 2)^4$ je na intervale $\langle 0, 2\rangle$ spojitá. Nech $x/2 + 2 = t$, čiže $x = 2t - 4$. Zaveďme substitúciu $x = \varphi(t) = 2t - 4$. Nové hranice $\alpha$ a $\beta$ určitého integrálu dostaneme podľa vety 1 riešením rovníc $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, čiže $0 = 2\alpha - 4$ a $2 = 2\beta - 4$. Z toho je $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Funkcia $\varphi(t) = 2t - 4$ a jej derivácia $\varphi'(t) = 2$ sú v intervale $\langle 2, 3\rangle$ spojité a pre $t \in \langle 2, 3\rangle$ je $\varphi(t) \in \langle 0, 2\rangle$. Preto podľa vety 1 je

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{(x/2 + 2)^4}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{(2t - 4)^2}{t^4}\,2\,\mathrm{d}t = 8\int\limits_2^3 \frac{t^2 - 4t + 4}{t^4}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 8\int\limits_2^3 (t^{-2} - 4t^{-3} + 4t^{-4})\,\mathrm{d}t = 8[-t^{-1} + 2t^{-2} - 4t^{-3}/3]_2^3 = 4/81.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

*Riešenie.* Funkcia $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je na intervale $\langle 0,\ 2\rangle$ spojitá. Zaveďme substitúciu $x = \varphi(t) = 2 \sin t$. Hranice $\alpha$ a $\beta$ určitého integrálu dostaneme podľa vety 1 riešením rovníc $0 = 2 \sin \alpha$ a $2 = 2 \sin \beta$. Z prvej rovnice dostaneme $\alpha = k\pi$ a z druhej $\alpha = \pi/2 + 2k\pi$, pre $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Zvoľme $k = 0$, dostaneme $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$. Funkcia $\varphi(t) = 2 \sin t$ a jej derivácia $\varphi'(t) = 2 \cos t$ sú na intervale $\langle 0, \pi/2\rangle$ spojité. Pre $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$ je $\varphi(t) = 2 \sin t \in \langle 0, 2\rangle$. Preto podľa vety 1 je

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t}\, 2 \cos t\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = 2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

**Príklad 3.** Vypočítajme

$$\int_0^{a\pi} x \cos \frac{x}{a}\, dx, \qquad a \neq 0.$$

*Riešenie.* Ak položíme $f(x) = x$ a $g'(x) = \cos \dfrac{x}{a}$, potom $f'(x) = 1$ a $g(x) = a \sin \dfrac{x}{a}$. Keďže funkcie $f$ a $g$ majú spojité derivácie v intervale $\langle 0, a\pi\rangle$, podľa vety 2 platí

$$\int_0^{a\pi} x \cos \frac{x}{a}\, dx = \left[xa \sin \frac{x}{a}\right]_0^{a\pi} - \int_0^{a\pi} a \sin \frac{x}{a}\, dx =$$

$$= \left[xa \sin \frac{x}{a}\right]_0^{a\pi} + a^2 \left[\cos \frac{x}{a}\right]_0^{a\pi} = -2a^2.$$

V úlohách **1148** až **1166** vypočítajte určité integrály:

**1148.** $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4}\, dx.$

**1149.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

**1150.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx.$

**1151.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$

**1152.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx.$

**1153.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{x - 1}{\sqrt{4x - 2}}\, dx.$

**1154.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x + 1}\, dx.$

**1155.** $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x^2}}\, dx.$

**1156.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}\, dx.$

**1157.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$

**1158.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

**1159.** $\int\limits_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2 + 9}\, dx$.

**1160.** $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx$.

**1161.** $\int\limits_{1}^{e} \frac{1 + \ln x}{x}\, dx$.

**1162.** $\int\limits_{0}^{5/2} \cos x \,.\, \sin^2 x\, dx$.

**1163.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x}\, dx, \quad a^2 \neq b^2$.

**1164.** $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{3\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$.

**1165.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\sin x}$.

**1166.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin \varphi}{6 - 5\cos \varphi + \cos^2 \varphi}\, d\varphi$.

**1167.** Zistite, prečo pri počítaní daného určitého integrálu daná substitúcia $x = \varphi(t)$ vedie k nesprávnemu výsledku:

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx, \quad t = x^{2/3}$;

b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{4 + x^2}, \quad x = \frac{1}{t}$;

c) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}, \quad t = \operatorname{tg} x$.

**1168.** Dokážte, že pre integrovateľnú funkciu $f$ platí:

a) $\int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$;

b) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{a} f(-x)\, dx$;

c) $\int\limits_{a}^{b} f(x + b)\, dx = \int\limits_{a}^{b} f(a + 2b - x)\, dx$.

**1169.** Dokážte, že pre integrovateľnú párnu funkciu $f$ platí

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

**1170.** Dokážte, že pre integrovateľnú nepárnu funkciu $f$ platí

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0, \qquad \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

**1171.** Dokážte, že pre spojitú periodickú funkciu $f$ platí

$$\int\limits_{a}^{a+l} f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{l} f(x)\, dx,$$

kde $l$ je perióda funkcie $f$.

V úlohách **1172** až **1181** vypočítajte určité integrály:

**1172.** $\int_0^1 x e^{-x} \, dx$.

**1173.** $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$.

**1174.** $\int_1^e \ln x \, dx$.

**1175.** $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

**1176.** $\int_0^1 x^3 e^{2x} \, dx$.

**1177.** $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x \, dx$.

**1178.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} x \sin^{-2} x \, dx$.

**1179.** $\int_{-1}^{1} \arccos x \, dx$.

**1180.** $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$.

**1181.** $\int_0^{\ln 2} x \cosh x \, dx$.

**1182.** Nájdite rekurentný vzorec pre určitý integrál $I_n$, kde $n$ je prirodzené číslo, a vypočítajte $I_8$, ak

a) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$;

b) $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx$;

c) $I_n = \int_{1/e}^{1} x^m \ln^n x \, dx$.

**1183.** Dokážte, že $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \, . \cos (m + 2) x \, dx = 0$.

**1184.** Dokážte, že $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \, . \sin (m + 2) x \, dx = \dfrac{1}{m + 1}, \quad m \neq -1$.

## 5,3. Obsah rovinných útvarov

A. Nech funkcie $f$ a $g$ sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech v intervale $(a, b)$ je $g(x) < f(x)$. Množinu všetkých bodov $A = (x, y)$ roviny, pre pravouhlé súradnice ktorých platí

$$\left.\begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ g(x) \leq y \leq f(x), \end{array}\right\} \tag{1}$$

nazývame *elementárnou oblasťou* určenou funkciami $f$, $g$ a intervalom $\langle a, b \rangle$ (pozri *obr. 37*).

Ak je funkcia $g$ konštantná, t. j. $g(x) = k$, kde $k$ je číslo, potom sa elementárna oblasť nazýva *krivočiary lichobežník* a platí

$$\left.\begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ k \leq y \leq f(x), \end{array}\right\} \tag{2}$$

(pozri *obr. 38*).

Pre obsah $P$ krivočiareho lichobežníka (2) platí

$$P = \int_a^b [f(x) - k] \, dx. \tag{3}$$

Pre obsah $P$ elementárnej oblasti (1) platí

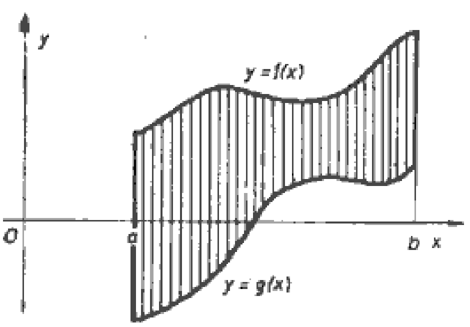
$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Poznámka. Pre obsah krivočiareho lichobežníka z *obr. 39* ($k = 0$), platí

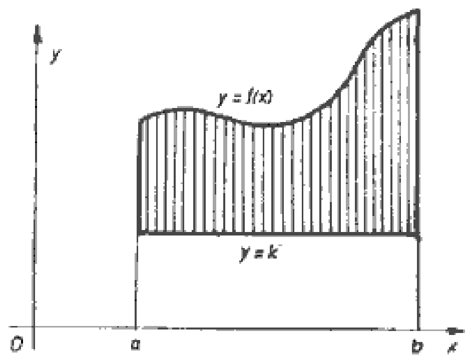
$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Pre obsah elementárnej oblasti z *obr. 40* ($f(x) = 0$, $x \in \langle a, b\rangle$), platí

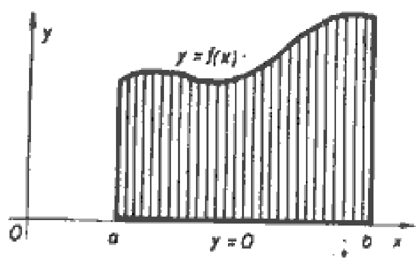
$$P = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$



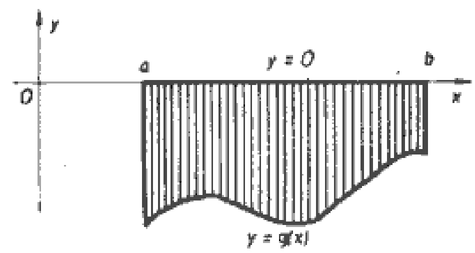
*Obr. 37*



*Obr. 38*



*Obr. 39*



*Obr. 40*

**Príklad 1.** Vypočítajme obsah množiny $M$ v rovine ohraničenej grafom funkcie $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ na intervale $\langle -3, 3\rangle$ a osou $o_x$ (pozri *obr. 41*).

*Riešenie.* Množina bodov, ktorej obsah máme počítať, nie je ani elementárna oblasť, ani krivočiary lichobežník, dá sa však vyjadriť ako súčet elementárnych oblastí. Tieto určíme tak, že najskôr nájdeme nulové body funkcie $f$. Upravme rovnicu

$$x^3 + x^2 - 6x = 0,$$

na tvar

$$x(x^2 + x - 6) = 0.$$

Korene tejto rovnice sú $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$. Graf funkcie $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ je na *obr. 41*. Z toho vyplýva, že množina $M$ je súčtom elementárnych oblastí $M_1$, $M_2$, $M_3$ určených nerovnosťami

$$-3 \leqq x \leqq 0, \qquad 0 \leqq x \leqq 2, \qquad 2 \leqq x \leqq 3,$$
$$0 \leqq y \leqq f(x); \qquad f(x) \leqq y \leqq 0; \qquad 0 \leqq y \leqq f(x).$$

Preto obsah $P$ množiny $M$ je súčet obsahov $P_1$, $P_2$, $P_3$ elementárnych oblastí $M_1$, $M_2$, $M_3$ a platí

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (x^3 + x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x =$$

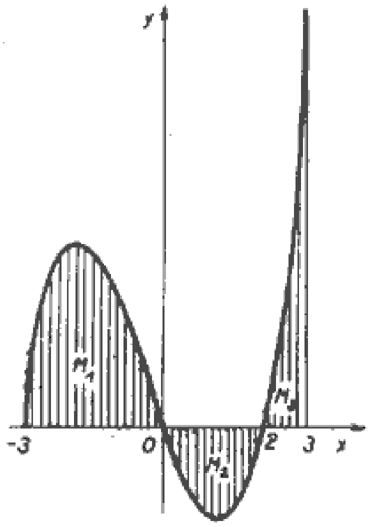
$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-3}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{0}^{2} + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{2}^{3} =$$

$$= 0 - \left(\frac{81}{4} - 9 - 27\right) - \left[\left(\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 12\right) - 0\right] + \left(\frac{81}{4} + 9 - 27\right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 12\right) =$$

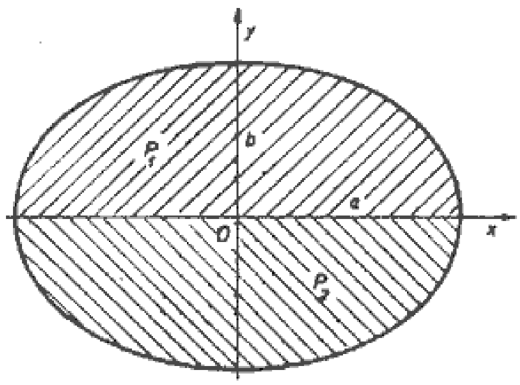
$$= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{3} = 28\,\frac{2}{3}\,.$$

B. Nech funkcia $f$ je daná parametrickými rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, pričom funkcie $\varphi$ a $\psi$ sú spojité na intervale $\langle t_1, t_2\rangle$. Nech funkcia $\varphi$ je rýdzo monotónna a má spojitú deriváciu v intervale $\langle t_1, t_2\rangle$, pričom $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$. Nech funkcia $\psi$ je nezáporná v intervale $\langle t_1, t_2\rangle$. Pre obsah krivočiareho lichobežníka (2), kde $k = 0$, platí

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$




Obr. 41




Obr. 42

Pre obsah elementárnej oblasti $a \leqq x \leqq b$, $f(x) \leqq y \leqq 0$ platí

$$P = -\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

pričom funkcia $\psi$ nie je kladná v intervale $\langle t_1, t_2\rangle$.

**Príklad 2.** Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného elipsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > 0$, $b > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (pozri *obr. 42*).

*Riešenie.* Daná množina je súčtom dvoch elementárnych oblastí

$$\begin{array}{ll} -a \leqq x \leqq a & \qquad -a \leqq x \leqq a \\ 0 \leqq y \leqq f(x), & \qquad g(x) \leqq y \leqq 0, \end{array}$$

kde pre funkciu $f$ platí $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a pre funkciu $g$ platí $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle \pi, 2\pi\rangle$.

V intervale $0 \leqq t \leqq \pi$ je funkcia $x = a \cos t$ klesajúca, funkcia $y = b \sin t$ je kladná. Obsah $P_1$ prvej elementárnej oblasti podľa vzorca (7) je

$$P_1 = \int_0^{\pi} b \sin t \, |-a \sin t| \, dt = ab \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt.$$

Pretože v intervale $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ je funkcia $x = a \cos t$ rastúca a funkcia $y = b \sin t$ záporná, obsah $P_2$ druhej elementárnej oblasti podľa vzorca (8) je

$$P_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} b \sin t \, |-a \sin t| \, dt = ab \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t \, dt.$$

Obsah $P$ danej množiny je

$$P = P_1 + P_2 = ab \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt + ab \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t \, dt = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = ab \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

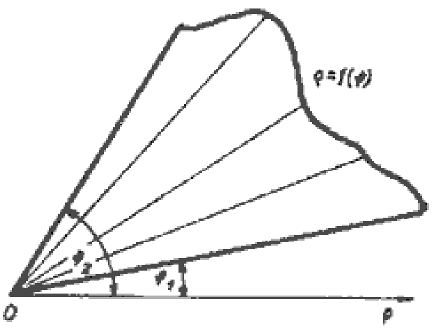
C. Množinu všetkých bodov, ktorých polárne súradnice $\varrho$, $\varphi$ vyhovujú nerovnostiam

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2,$$
$$0 \leqq \varrho \leqq f(\varphi),$$

kde $f$ je spojitá funkcia na intervale $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ $(0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqq 2\pi)$, nazývame *segmentom* určeným funkciou $f$ a intervalom $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ (pozri *obr. 43*).

Pre obsah $P$ segmentu platí

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) \, d\varphi. \tag{9}$$



*Obr. 43*

**Príklad 3.** Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej kardioidou $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, kde $a > 0$ a $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

*Riešenie.* Funkcia $f(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ je na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ spojitá. Časť roviny určená nerovnosťami

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$
$$0 \leqq \varrho \leqq a(1 + \cos \varphi)$$

tvorí segment. Podľa vzorca (9) obsah $P$ tohto segmentu je

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos \varphi)]^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

**1185.** Znázornite elementárnu oblasť a vypočítajte jej obsah:

a) $1 \leqq x \leqq 3$, $\quad -x \leqq y \leqq x + 2$; c) $1 \leqq x \leqq e$, $\quad 0 \leqq y \leqq \ln x$.

b) $0 \leqq x \leqq \pi$, $\quad 0 \leqq y \leqq \sin x$;

V úlohách 1186 až 1202 nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkami:

**1186.** $y = 6x - x^2, \quad y = 0.$ **1187.** $y = x^2 - 2x, \quad y = x.$

**1188.** $x + y = 2, \quad y = -x^2 + 4x - 2.$ **1189.** $y = x^2, \quad y^2 = x.$

**1190.** $y = x^2 - x - 6,$
$y = -x^2 + 5x + 14.$

**1191.** $y = x^2/4, \quad y = 2\sqrt{x}.$ **1192.** $y = 2x^2, \quad y = x^2, \quad y = 1.$

**1193.** $y = x^3, \quad y = 4x.$ **1194.** $y = 2x^3, \quad y^2 = 4x.$

**1195.** $xy = 4, \quad x + y = 5.$ **1196.** $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = \ln 2.$

**1197.** $x = 0, \quad x = 1/2, \quad y = 0, \quad y = xe^{-2x}.$

**1198.** $y = \ln x, \quad y = \ln^2 x.$

**1199.** $y = a \cosh (x/a), \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0.$

**1200.** $x = \pi/2, \quad x = \pi, \quad y = 0, \quad y = x \cos (x/3).$

**1201.** $y = x, \quad y = x + \sin^2 x, \quad x = 0, \quad x = \pi$

**1202.** $y = e^{-x} \sin x, \quad y = 0,$ pre $x \in \langle 0, \pi \rangle.$

**1203.** Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = (1, 3)$, $B = (4, 0)$.

**1204.** Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného osou $o_x$ a krivkou $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$ v intervale $\langle 0, 6 \rangle$.

**1205.** Vypočítajte obsah roviny ohraničenej krivkou $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ a priamkami $y = x - 1$, $y = 2x - 2$.

**1206.** Nájdite obsah častí roviny ohraničenej kružnicou $x^2 + y^2 = 8$ a parabolou $y^2 = 2x$.

**1207.** Nájdite obsah časti roviny ohraničenej parabolou $y^2 = 2px$ a kružnicou $x^2 + y^2 = 4px$.

**1208.** Nájdite obsah časti roviny ohraničenej parabolou $y^2 = x$, hyperbolou $xy = 8$ a polpriamkou $x = 8$, $y \leqq 1$.

V úlohách **1209** až **1214** vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkou danou parametrickými rovnicami:

**1209.** $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3, \quad t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle.$

**1210.** $x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3.$

**1211.** $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ a úsečkou $x = a\,t, y = 0, a > 0. \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$

**1212.** $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad a > 0.$

**1213.** $x = (c^2 \cos^3 t)/a, \quad y = (c^2 \sin^3 t)/b, \quad c^2 = a^2 - b^2.$

**1214.** $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$ a polpriamkou $x = a, \quad y \leqq 0.$

V úlohách **1215** až **1223** nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkami, ktorých rovnice v polárnom súradnicovom systéme sú:

**1215.** $\varrho = a\varphi, \quad a > 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a polpriamkou $\varphi = 0.$

**1216.** $\varrho = a \cos \varphi, \quad a > 0.$

**1217.** $\varrho = a|\sin 2\varphi|, \quad a > 0.$

**1218.** $\varrho = 3|\sin 3\varphi|$

**1219.** $\varrho = a \cos n\varphi, \quad a > 0,$ kde $n$ je prirodzené číslo.

**1220.** $\varrho = 2a(2 + \cos \varphi), \quad a > 0.$

**1221.** $\varrho = 4 \sin^2 \varphi.$

**1222.** $\varrho = \dfrac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0, \quad \varphi = \pi/4, \quad \varphi = \pi/2.$

**1223.** $\varrho = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi}.$

V úlohách **1224, 1225** a **1226** použite polárne súradnice a nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkami:

**1224.** $x^2/9 + y^2/4 = 1, \quad x^2/4 + y^2/9 = 1,$ pričom $\varrho \leq 6\sqrt{2/13}.$

**1225.** $x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$

**1226.** $x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0.$

## 5,4. Objem telies

### A. Objem rotačných telies

1. Majme v priestore danú rovinu a v nej pravouhlý súradnicový systém. Nech funkcie $f$, $g$ sú spojité na intervaloch $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$, $\langle \alpha, \beta\rangle$ a platí $0 \leq g(u) \leq f(u)$ pre každé $u$ z týchto intervalov.

Majme elementárnu oblasť

$$\left.\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ g(x) \leq y \leq f(x). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Pre objem rotačného telesa, ktoré opíše elementárna oblasť (1) pri rotácii okolo osi $o_x$, platí

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

a pri rotácii okolo osi $o_y$ platí

$$V = 2\pi \int_a^b \{x[f(x) - g(x)]\}\,\mathrm{d}x \quad \text{pre} \quad a \geq 0. \tag{3}$$

Ak elementárna oblasť (1) je krivočiary lichobežník

$$\left.\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ 0 \leq y \leq f(x), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

potom pre objem rotačného telesa, ktoré opíše krivočiary lichobežník (4) pri rotácii okolo osi $o_x$ platí

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

a pri rotácii okolo osi $o_y$ platí

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pre} \quad a \geq 0. \tag{6}$$

Ak je elementárna oblasť určená funkciami $x = f(y)$, $x = g(y)$ v intervale $\langle c, d\rangle$, t. j. platí

$$\left.\begin{aligned} c \leq y \leq d, \\ g(y) \leq x \leq f(y), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

potom pre objem rotačného telesa, ktoré opíše táto oblasť pri rotácii okolo osi $o_x$, je

$$V = 2\pi \int_c^d \{y[f(y) - g(y)]\}\, \mathrm{d}y \qquad \text{pre} \qquad c \geqq 0 \tag{8}$$

a pri rotácii okolo osi $o_y$ je

$$V = \pi \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)]\, \mathrm{d}y. \tag{9}$$

2. Nech funkcia $f$ určujúca elementárnu oblasť (4) je daná parametricky

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

pre $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pričom funkcia $\varphi$ má spojitú deriváciu v intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$ a spojitá funkcia $\psi$ je nezáporná pre všetky $t$ z intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Pre objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leqq \varphi(\alpha) \leqq x \leqq \varphi(\beta), & [0 \leqq \varphi(\beta) \leqq x \leqq \varphi(\alpha)] \\ 0 \leqq y \leqq \psi(t) & \end{array}\right\} \tag{10}$$

okolo osi $o_x$ platí

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\, |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t \tag{11}$$

a pri rotácii okolo osi $o_y$ je

$$V = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\, |\varphi(t)\, \varphi'(t)|\, \mathrm{d}t. \tag{12}$$

3. Objem rotačného telesa, ktoré opíše elementárna oblasť daná v polárnom súradnicovom systéme

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqq \alpha \leqq \varphi \leqq \beta \leqq \pi, \\ g(\varphi) \leqq \qquad \varrho \leqq f(\varphi) \end{array}\right\} \tag{13}$$

pri rotácii okolo polárnej osi, je

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta [f^3(\varphi) - g^3(\varphi)] \sin \varphi\, \mathrm{d}\varphi. \tag{14}$$

**Príklad 1.** Nájdime objem telesa, ktoré opíše elementárna oblasť ohraničená parabolami $y = x^2 + 2$, $y = 2x^2 + 1$ pri rotácii okolo osi $o_x$.

*Riešenie.* Paraboly sa pretínajú v bodoch $M$, $N$, ktorých súradnice určíme riešením sústavy rovníc

$$y = x^2 + 2,$$
$$y = 2x^2 + 1.$$

Z toho dostaneme

$$x^2 = 1$$

a

$$x_{1,2} = \pm 1, \qquad y_{1,2} = 3,$$

čiže $M = (-1, 3)$, $N = (1, 3)$.

Daná elementárna oblasť je určená nerovnosťami

$$-1 \leqq x \leqq 1,$$
$$2x^2 + 1 \leqq y \leqq x^2 + 2.$$

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou tejto oblasti okolo osi $o_x$, podľa vzorca (2) je

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [(x^2 + 2)^2 - (2x^2 + 1)^2] \, dx = 3\pi \int_{-1}^{1} (1 - x^4) \, dx = 3\pi \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{24}{5} \pi.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme objem telesa, ktoré opíše elementárna oblasť ohraničená hyperbolou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

osou $o_y$, polpriamkami $y = h$, $x \geq 0$ a $y = -h$, $x \geq 0$ $(h > 0)$ pri rotácii okolo osi $o_y$.

*Riešenie.* Daná elementárna oblasť je určená nerovnosťami

$$-h \leq y \leq h,$$

$$0 \leq x \leq a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Táto oblasť vytvorí pri rotácii okolo osi $o_y$ teleso ohraničené jednodielnym hyperboloidom a dvoma rovnobežnými rovinami, kolmými na os rotácie. Pre objem tohto telesa platí podľa vzorca (9)

$$V = \pi \int_{-h}^{h} a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \left[y + \frac{y^3}{3b^2}\right]_{-h}^{h} = 2\pi a^2 \left(h + \frac{h^3}{3b^2}\right)$$

$$V = 2\pi a^2 h \left(1 + \frac{h^2}{3b^2}\right).$$

**Príklad 3.** Nájdime objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraničenej osou $o_x$ a oblúkom asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, $0 \leq t \leq \pi$ okolo osi $o_x$.

*Riešenie.* Keďže $\varphi'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$ je spojitá funkcia a spojitá funkcia $\psi(t) = a \sin^3 t$ je nezáporná v intervale $\langle 0, \pi \rangle$, podľa vzťahu (11) dostaneme:

$$V = \pi \int_0^{\pi} a^2 \sin^6 t \, |-3a \cos^2 t \sin t| \, dt = 3a^3\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t \, dt.$$

Zaveďme substitúciu $u = \cos t$. Pretože sú splnené predpoklady vety 1 z článku 5,2, platí

$$V = -3a^3\pi \int_1^{-1} (1 - u^2)^3 u^2 \, du = 3a^3\pi \int_{-1}^{1} (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) \, du =$$

$$= 3a^3\pi \left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^7}{7} - \frac{u^9}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{105} a^3\pi.$$

**Príklad 4.** Nájdime objem telesa, ktoré opíše elementárna oblasť ohraničená polárnou osou a oblúkom kardioidy $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, pričom $0 \leq \varphi \leq \pi$.

*Riešenie.* Daná elementárna oblasť je určená nerovnosťami

$$0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$0 \leq \varrho \leq a(1 + \cos \varphi).$$

Pre hľadaný objem podľa vzťahu (14) platí

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} a^3(1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi.$$

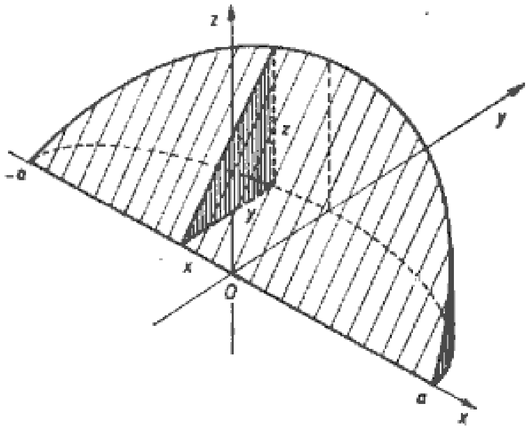
Po zavedení substitúcie $u = 1 + \cos \varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ (predpoklady vety 1 z článku 5,2 sú splnené) dostaneme

$$V = \frac{2a^3\pi}{3} \int_2^0 (-u^3) \, \mathrm{d}u = \frac{2a^3\pi}{3} \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8a^3\pi}{3}.$$

**B. Objem telies**

Majme v priestore daný pravouhlý súradnicový systém a v ňom dané teleso. Nech obsah rezov, ktoré vzniknú rezom telesa rovinami $x = a$, $c \leqq a \leqq d$, rovnobežnými s rovinou $R_{yz}$ je $S = S(x)$, kde $x \in \langle c, d \rangle$ a kde $x = c$, $x = d$ sú rovnice rovín, medzi ktorými je zovreté dané teleso. Pre objem tohto telesa platí

$$V = \int_c^d S(x) \, \mathrm{d}x. \tag{15}$$



*Obr. 44*

**Príklad 5.** Nájdime objem časti priameho eliptického valca ohraničeného základňou a rovinou, ktorá prechádza hlavnou osou eliptickej základne a zviera s ňou uhol 45° (*obr. 44*).

*Riešenie.* Nech je daný valec určený nerovnosťami

$$x^2 + 4y^2 \leqq a^2,$$
$$0 \leqq z \leqq a/2$$

a rovnica roviny je $y - z = 0$. Rez telesa rovinou rovnobežnou s rovinou $R_{yz}$, ktorá prechádza bodom $M = (x, 0, 0)$, $-a \leqq x \leqq a$, je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou $y = \sqrt{a^2 - x^2}/2$ a výškou $z = y$.

Obsah rezu je

$$S(x) = \frac{1}{2} yz = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{8} (a^2 - x^2).$$

Objem tohto telesa dostaneme podľa vzťahu (15)

$$V = \int_{-a}^{a} S(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{6} a^3.$$

V úlohách **1227** až **1232** vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré opíše daná elementárna oblasť pri rotácii okolo osi $o_x$:

**1227.** $-2 \leqq x \leqq 2$,
$0 \leqq y \leqq x^2 + 2$.

**1228.** $0 \leqq x \leqq 3$,
$0 \leqq y \leqq \sqrt{4x}$.

**1229.** $0 \leqq x \leqq \pi$,
$0 \leqq y \leqq \sin x$.

**1230.** $1 \leqq x \leqq 2$,
$0 \leqq y \leqq 4/x$.

**1231.** $-2 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq \cosh x$.

**1232.** $0 \leqq x \leqq \pi/4$, $0 \leqq y \leqq \operatorname{tg} x$.

**1233.** Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti $0 \leqq y \leqq 2$, $0 \leqq x \leqq \sqrt{y}$, okolo osi $o_y$.

V úlohách **1234** až **1239** nájdite objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti určenej danými krivkami okolo osi $o_x$:

**1234.** $y = x^2$, $y^2 = x$.

**1235.** $y = 1 - x^2$, $y = x^2$.

**1236.** $y = 2x/\pi$ a $y = \sin x$.

**1237.** $3x - 4y + 5 = 0$ a $y = 2^x$.

**1238.** $x = 0$, $x = b/4$, $y = 0$ a $y = a \cos(2\pi x/b)$, $(a > 0,\ b > 0)$.

**1239.** $x = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(k > a)$.

V úlohách **1240** až **1244** nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti určenej danými krivkami okolo osi $o_y$:

**1240.** $x = 0$, $y^2 + x - 4 = 0$.

**1241.** $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{|x|}{2}$.

**1242.** $y = \sin x$, $x = 0$, $y = 1/2$.

**1243.** $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $(a > 0)$.

**1244.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

**1245.** Nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti určenej krivkami:

a) $y^2 = x$, $x = 4$, okolo priamky $y = -2$;
b) $y = 4 - x^2$, $y = 0$, okolo priamky $x = 3$.

**1246.** Vypočítajte objem rotačného kužeľa s polomerom základne $r$ a výškou $h$.

**1247.** Vypočítajte objem zrezaného kužeľa s polomermi základní $r$, $R$ a výškou $h$.

**1248.** Vypočítajte objem rotačného elipsoidu.

V úlohách **1249** až **1253** nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti, určenej osou $o_x$ a funkciou danou parametricky:

**1249.** $x = t^2$, $y = t - t^3/3$, $0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$, okolo osi $o_x$.

**1250.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ (oblúk cykloidy), okolo osi $o_x$.

**1251.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, okolo priamky $x = \pi a$.

**1252.** $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad 0 \leqq t \leqq \pi,\quad c^2 = a^2 - b^2$ (oblúk evolúty elipsy), okolo osi $o_x$ a osi $o_y$.

**1253.** $x = a[-\cos t + \ln \operatorname{cotg}(t/2)],\quad y = a\sin t,\quad a > 0,\quad \frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{3\pi}{4}$ (oblúk traktrixy), okolo osi $o_x$.

V úlohách **1254** až **1257** vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou daného segmentu okolo polárnej osi.

**1254.** $0 \leqq \varphi \leqq \pi,$
$0 \leqq \varrho \leqq 2a^2(2 + \cos\varphi)$ (Pascalova závitnica).

**1255.** $0 \leqq \varphi \leqq \pi,$
$0 \leqq \varrho \leqq a\varphi,\quad a > 0$ (Archimedova špirála).

**1256.** $0 \leqq \varphi \leqq \pi,$
$0 \leqq \varrho \leqq a|\sin 2\varphi|.$

**1257.** $0 \leqq \varphi \leqq \pi,$
$0 \leqq \varrho \leqq a\cos^2\varphi.$

**1258.** Nájdite objem rotačného telesa vytvoreného rotáciou lemniskáty $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ okolo osi $o_x$. Zaveďte polárne súradnice.

V úlohách **1259** až **1265** nájdite objem telesa ohraničeného danými plochami:

**1259.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

**1260.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$
$z = c,\quad z = -c.$

**1261.** $y^2 + z^2 = ay,\quad x - y = 0,\quad x + y = 0.$

**1262.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad z = 0,\quad z = \frac{c}{b}\,y.$

**1263.** $x^2 + z^2 = 1,\quad x^2 + y^2 = 1.$

**1264.** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\quad x^2 + y^2 = ax.$

**1265.** $y^2 + 4z^2 = 8x,\quad y^2 + 4z^2 = 1,\quad x = 0.$

**1266.** V nádobe tvaru kruhového valca s polomerom základne $r$ je naliata kvapalina. Os nádoby zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha$. Polovica dna je pokrytá kvapalinou. Vypočítajte objem kvapaliny.

## 5,5. Dĺžka rovinnej krivky*)

**Veta 1.** Nech krivka $K$ je daná parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pričom derivácie $\varphi'$ a $\psi'$ sú spojité na intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom pre dĺžku krivky platí

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{1}$$

*) O rovinnej krivke pozri čl. 3,14.

Ak krivka $K$ je grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá má spojitú deriváciu $f'$ v intervale $\langle a, b\rangle$, dĺžka krivky je

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{2}$$

Ak krivka je daná v polárnom súradnicovom systéme rovnicou $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ a derivácia $f'$ je spojitá na intervale $\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$, potom dĺžka krivky je

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \tag{3}$$

**Príklad 1.** Vypočítajme dĺžku oblúka asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

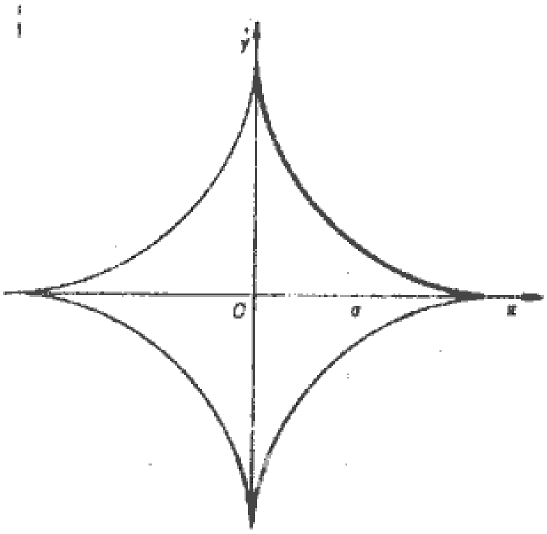
*Riešenie.* Keďže derivácie $\varphi'(t) = (a\cos^3 t)' = -3a\cos^2 t . \sin t$ a $\psi'(t) = (a \sin^3 t)' = 3a\sin^2 t . \cos t$ sú spojité na intervale $\langle 0, \pi/2\rangle$, podľa vzťahu (1) platí

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\, dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t = \frac{3a}{2}$$

(pozri *obr. 45*). Dĺžka celej asteroidy je $6a$.




*Obr. 45*

**Príklad 2.** Vypočítajme dĺžku reťazovky $y = (e^x + e^{-x})/2$ pre $x \in \langle 0, 3\rangle$.

*Riešenie.* Keďže $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$ je spojitá funkcia na intervale $\langle 0, 3\rangle$, podľa vzťahu (2) dostaneme

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]_0^3 = \frac{1}{2}(e^3 - e^{-3}) = \sinh 3.$$

**Príklad 3.** Vypočítajme dĺžku oblúka kardioidy danej rovnicou $\varrho = 2a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

*Riešenie.* Keďže $f'(\varphi) = -2a\sin\varphi$ je na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$ spojitá funkcia, podľa vzťahu (3) máme

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{[2a(1 + \cos\varphi)]^2 + (-2a\sin\varphi)^2}\, d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + \cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi + 4a\int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 8a + 8a = 16a.$$

V úlohách **1267** až **1272** vypočítajte dĺžku danej krivky:

**1267.** $x = t^2, \quad y = t - \frac{t^2}{3}, \quad 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}.$

**1268.** $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \quad a > 0.$

**1269.** $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \quad a > 0$ (evolventa kruhu).

**1270.** $x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t.$

**1271.** $x = 2a \sin^2 t, \quad y = 2a \sin^2 t \,.\, \mathrm{tg}\, t, \quad 0 \leqq t \leqq t_1.$

**1272.** $\begin{aligned} x &= 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t, \\ y &= 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t, \end{aligned} \quad 0 \leqq t \leqq \pi.$

**1273.** Dokážte, že dĺžka jedného oblúka epicykloidy

$$\begin{aligned} x &= a[(n + 1) \cos t - \cos (n + 1) t], \\ y &= a[(n + 1) \sin t - \sin (n + 1) t], \quad a > 0 \end{aligned}$$

je $8a(n + 1)/n$.

**1274.** Dokážte, že dĺžka jedného oblúka hypocykloidy

$$\begin{aligned} x &= a[(n - 1) \cos t + \cos (n - 1) t], \\ y &= a[(n - 1) \sin t - \sin (n - 1) t], \quad a > 0 \end{aligned}$$

je $8a(n - 1)/n$.

V úlohách **1275** až **1285** vypočítajte dĺžku krivky:

**1275.** $y = x^2, \quad 0 \leqq x \leqq 3.$

**1276.** $y = 2\sqrt{x}, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$

**1277.** $y = 2x - x^2, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$

**1278.** $y^2 = 4x^3, \quad y > 0, \quad 0 \leqq x \leqq 2.$

**1279.** $y = (2 + x^6)/8x^2, \quad 1 \leqq x \leqq 2.$

**1280.** $y = \mathrm{e}^x, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$

**1281.** $y = \ln x, \quad x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle.$

**1282.** $y = 1 - \ln \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi/4 \rangle.$

**1283.** $y = \ln \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}, \quad x \in \langle \ln 2, \ln 5 \rangle.$

**1284.** $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leqq x \leqq 1.$

**1285.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0$ (asteroida).

**1286.** Dokážte, že dĺžka elipsy $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ sa rovná dĺžke jednej vlnovky sínusoidy $y = e \sin \frac{x}{b}$, kde $e$ je ohnisková vzdialenosť elipsy.

V úlohách **1287** až **1291** vypočítajte dĺžku kriviek daných v polárnom súradnicovom systéme:

**1287.** $\varrho = a\varphi, \quad a > 0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ (prvý závit Archimedovej špirály).

**1288.** $\varrho = a/\varphi, \quad a > 0, \quad 2/3 \leqq \varphi \leqq 3/4$ (oblúk hyperbolickej špirály).

**1289.** $\varrho = a\mathrm{e}^{m\varphi}, \quad a > 0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ (prvý závit logaritmickej špirály).

**1290.** $\varrho = 2a \cos \varphi, \quad a > 0, \quad -\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2.$

**1291.** $\varrho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad a > 0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 3\pi.$

## 5,6. Obsah rotačnej plochy

Nech krivka $K$ má parametrické rovnice

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

pričom funkcie $\varphi$ a $\psi$ majú spojité derivácie na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkcia $\varphi$ je rýdzo monotónna. Pre obsah $P$ plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $K$ okolo osi $o_x$, platí

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{1}$$

Ak je krivka $K$ grafom funkcie $y = f(x)$, ktorá má spojitú deriváciu na intervale $\langle a, b \rangle$, tak obsah $P$ rotačnej plochy je

$$P = 2\pi \int_{a}^{b} |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{2}$$

Ak je krivka $K$ daná v polárnom súradnicovom systéme rovnicou $\varrho = f(\varphi)$, $0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \leqq \varphi_2 \leqq \pi$, pričom derivácia $f'$ je na intervale $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ spojitá, potom pre obsah $P$ plochy platí

$$P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f(\varphi)| \sin \varphi \,.\, \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \tag{3}$$

**Príklad 1.** Vypočítajme obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, okolo osi $o_x$.

*Riešenie.* Funkcie $x = \varphi(t) = a(t - \sin t)$, $y = \psi(t) = a(1 - \cos t)$ majú na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ spojité derivácie $\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a \sin t$. Pre všetky $t$ z intervalu $(0, 2\pi)$ platí $\varphi'(t) > 0$. Preto funkcia $\varphi$ je v intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ rastúca a podľa (1) dostaneme

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} |a(1 - \cos t)| \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a \sin t)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left[ \sin \frac{t}{2} - \cos t \sin \frac{t}{2} \right] dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left( 2 \sin \frac{t}{2} - \sin \frac{3t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left[ 3 \sin \frac{t}{2} - \sin \frac{3t}{2} \right] dt = 4\pi a^2 \left[ -3 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= 4\pi a^2 \left[ 3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \right] = 4\pi a^2 \frac{16}{3} = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme obsah guľového pása, ktorý vznikne rotáciou časti kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y > 0$ v intervale $\langle -a, a \rangle$ okolo osi $o_x$, pričom $0 < a < r$.

*Riešenie.* Z rovnice kružnice dostaneme $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Funkcia $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ je v intervale $\langle -a, a\rangle$ kladná, má tam spojitú deriváciu $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ a platí

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Podľa vzorca (2) obsah guľového pása je

$$P = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{r^2 - x^2}\, \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-a}^{a} r\, dx = 2\pi r[x]_{-a}^{a} = 4\pi r a.$$

**Príklad 8.** Vypočítajme obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou kardioidy $\varrho = 2a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$ okolo polárnej osi.

*Riešenie.* Funkcia $f(\varphi) = 2a(1 + \cos\varphi)$ je nezáporná v intervale $\langle 0, \pi\rangle$ a má tam spojitú deriváciu $f'(\varphi) = -2a \sin\varphi$. Pre obsah danej rotačnej plochy podľa (3) dostaneme:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} 2a(1 + \cos\varphi) \sin\varphi \sqrt{[2a(1 + \cos\varphi)]^2 + (-2a \sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \sin\varphi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \sin\varphi \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 8\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\varphi)^3} \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}\pi a^2 \left[-\frac{2}{5}\sqrt{(1 + \cos\varphi)^5}\right]_0^{\pi} = 8\sqrt{2}\pi a^2 \frac{2}{5}\sqrt{32} = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

**V úlohách 1292 až 1309** vypočítajte obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky okolo osi $o_x$.

**1292.** $x = 4 - t^2/2$, $y = t^3/3$ medzi priesečníkmi so súradnicovými osami.

**1293.** $x = (\cos t + 1/2)^2$, $y = \sin t + (\sin 2t)/2$, $0 \leqq t \leqq \pi$.

**1294.** $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leqq t \leqq \pi/2$.

**1295.** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$.

**1296.** $x = a \sin 2t$, $y = 2a \sin^2 t$, $a > 0$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$.

**1297.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, $a > 0$.

**1298.** $y = x^3$, $-2/3 \leqq x \leqq 2/3$.

**1299.** $y = x^2/2$, $0 \leqq x \leqq 3/4$.

**1300.** $y^2 = 4ax$, $0 \leqq x \leqq 3a$.

**1301.** $y = \sin x$, $0 \leqq x \leqq \pi$.

**1302.** $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leqq x \leqq \pi/4$.

**1303.** $y = e^{-x}$, $0 \leqq x \leqq 1$.

**1304.** $y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$, $0 \leqq x \leqq a$.

**1305.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.

**1306.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

**1307.** $x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad 0 < a < b.$

**1308.** $x^2 - y^2 = a^2, \quad a > 0, \quad a \leqq x \leqq a\sqrt{2}.$

**1309.** $y^2(2r - x) = x^3, \quad 1 \leqq x \leqq 2.$

**1310.** Nájdite obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou časti paraboly $y^2 = 2x$ medzi jej priesečníkmi s priamkou $2x = 3$ okolo osi $o_x$.

**1311.** Nájdite povrch guľovej plochy s polomerom $r$.

V úlohách **1312, 1313** a **1314** nájdite obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky okolo osi $o_y$.

**1312.** $4y = x^2, \quad 0 \leqq y \leqq 3.$

**1313.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad a > b.$

**1314.** $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \quad -b \leqq y \leqq b.$

V úlohách **1315** až **1318** nájdite obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky danej v polárnom súradnicovom systéme okolo polárnej osi.

**1315.** $\varrho = a \cos \varphi, \quad a > 0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$

**1316.** $\varrho = 2a \sin \varphi, \quad a > 0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$

**1317.** $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad a > 0.$

**1318.** $\varrho = 3 + 4 \sin \varphi.$

## 5,7. Statické momenty, ťažisko, momenty zotrvačnosti

A. Nech v rovine je daná sústava $\Omega$ hmotových bodov $A_i = (x_i, y_i)$ s hmotnosťami $m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

*Statický moment* tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na os $o_x$, resp. na os $o_y$ je

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{1}$$

*Moment zotrvačnosti* tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na os $o_x$, resp. na os $o_y$ je

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2. \tag{2}$$

Nech je v priestore daná sústava $\Pi$ hmotných bodov $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ s hmotnosťami $m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

*Statický moment* tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na každú zo súradnicových rovín $R_{yz}$, $R_{xz}$ a $R_{xy}$ je

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad M_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad M_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{3}$$

*Moment zotrvačnosti* tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na každú zo súradnicových osí $o_x$, $o_y$ a $o_z$ je

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2), \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2), \qquad I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2). \tag{4}$$

Nech $M$ je hmotnosť danej sústavy hmotných bodov, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

*Ťažisko sústavy $\Omega$* hmotných bodov je bod $T = (\xi, \eta)$, pre ktorý platí

$$\xi = \frac{M_y}{M}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M}. \tag{5}$$

*Ťažisko sústavy $\Pi$* hmotných bodov je bod $T = (\xi, \eta, \zeta)$, pre ktorý platí

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \eta = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \zeta = \frac{M_{xy}}{M}. \tag{6}$$

Majme hmotnú oblasť $\Omega$ s plošnou hustotou $\sigma = \sigma(x)$, ktorej tvar je určený elementárnou oblasťou

$$\left.\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ g(x) \leq y \leq f(x), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pričom funkcie $f$, $g$, $\sigma$ sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$.

*Statický moment* hmotnej oblasti $\Omega$ vzhľadom na os $o_x$, resp. na os $o_y$ je

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x)\,[f^2(x) - g^2(x)]\,\mathrm{d}x, \qquad M_y = \int_a^b \sigma(x)\,x[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Ťažisko oblasti $\Omega$ je určené vzťahmi (5), pričom $M_x$ a $M_y$ sú určené vzťahmi (8) a

$$M = \int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

*Moment zotrvačnosti hmotnej oblasti $\Omega$* vzhľadom na súradnicovú os $o_x$, resp. $o_y$, resp. $o_z$ je

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3} \int_a^b \sigma(x)\,[f^3(x) - g^3(x)]\,\mathrm{d}x, \\ I_y &= \int_a^b \sigma(x)\,x^2[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x, \\ I_z &= I_x + I_y. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

**Príklad 1.** Nájdime ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej časťou asteroidy

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad y \geq 0$$

a osou $o_x$.

*Riešenie.* Daná hmotná oblasť s konštantnou plošnou hustotou $\sigma_0$ je určená nerovnosťami

$$\begin{aligned} -a \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}. \end{aligned}$$

Statické momenty tejto oblasti podľa vzťahov (8) sú

$$M_x = \frac{\sigma_0}{2} \int_{-a}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^3\,\mathrm{d}x, \qquad M_y = \sigma_0 \int_{-a}^{a} x(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

Keďže druhý integrál je integrál z nepárnej funkcie v intervale $\langle -a, a\rangle$, je $M_y \doteq$ .

Prvý integrál je integrál z párnej funkcie v intervale $\langle -a, a\rangle$, preto platí

$$M_x = \sigma_0 \int_0^a (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sigma_0 \left[a^2x - \frac{9}{5}\,a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}\,a^{2/3}x^{7/3} - \frac{1}{3}\,x^3\right]_0^a = \frac{16}{105}\,\sigma_0 a^3.$$

Hmotnosť tejto oblasti je

$$M = \sigma_0 \int_{-a}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{d}x = 2\sigma_0 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

Zaveďme substitúciu $x = a\cos^3 t$. Pre hranice $\alpha$, $\beta$ dostaneme $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$. Z toho vyplýva

$$M = 2\sigma_0 \int_0^{\pi/2} a(\sin^3 t)\,3a\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t = 6a^2\sigma_0 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,.\cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Podľa vzorca (15) z článku 4,6 pre $m = 4$, $n = 2$ dostaneme

$$M = 6a^2\sigma_0 \left\{ \left[-\frac{1}{6}\sin^3 t\cos^3 t\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{6}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \right\} = \frac{3}{4}\,a^2\sigma_0 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{4}\,a^2\sigma_0 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\,a^2\sigma_0 \left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{16}\,\pi a^2\sigma_0.$$

Pre ťažisko tejto oblasti podľa vzťahov (5) platí

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{16a^3\sigma_0/105}{3\pi a^2\sigma_0/16} = \frac{256a}{315\pi},$$

čiže $T = (0;\ 256a/315\pi)$.

**B.** Majme hmotný oblúk $\Omega$ s dĺžkovou hustotou $\mu = \mu(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, ktorého tvar je určený oblúkom

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in \langle\alpha, \beta\rangle, \tag{11}$$

kde $\mu$ je spojitá nezáporná funkcia na intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$ a funkcie $\varphi$, $\psi$ majú spojité derivácie v tomto intervale.

Statický moment hmotného oblúka $\Omega$ vzhľadom na os $o_x$, resp. os $o_y$ je

$$M_x = \int_\alpha^\beta \mu(t)\;\psi(t)\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \mu(t)\,\varphi(t)\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Ťažisko hmotného oblúka $\Omega$ je určené vzťahmi (5), kde hmotnosť $M$ oblúka je

$$M = \int_\alpha^\beta \mu(t)\,\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Moment zotrvačnosti hmotného oblúka $\Omega$ vzhľadom na os $o_x$, resp. os $o_y$ je

$$I_x = \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\ \mu(t)\ \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\ \mathrm{d}t, \tag{14}$$

$$I_y = \int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\ \mu(t)\ \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\ \mathrm{d}t. \tag{15}$$

**Príklad 2.** Nájdime ťažisko drôtu tvaru polkružnice

*Riešenie.* Majme homogénny drôt tvaru polkružnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, $a > 0$ s konštantnou dĺžkovou hustotou $\mu_0$.

Funkcie $x = \varphi(t) = a\cos t$, $y = \psi(t) = a\sin t$ majú v intervale $\langle 0, \pi\rangle$ spojité derivácie $\varphi'(t) = -a\sin t$, $\psi'(t) = a\cos t$. Pre statické momenty drôtu podľa vzťahov (12) dostaneme

$$M_x = \mu_0 \int_0^\pi a\sin t\ \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

$$M_y = \mu_0 \int_0^\pi a\cos t\ \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Z toho dostaneme

$$M_x = \mu_0 a^2 \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \mu_0 a^2[-\cos t]_0^\pi = 2\mu_0 a^2,$$

$$M_y = \mu_0 a^2 \int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t = \mu_0 a^2[\sin t]_0^\pi = 0.$$

Keďže drôt je homogénny, jeho hmotnosť je

$$M = \mu_0 \pi a.$$

Súradnice ťažiska podľa vzťahov (5) sú

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{2\mu_0 a^2}{\mu_0 \pi a} = \frac{2a}{\pi},$$

čiže $T = (0;\ 2a/\pi)$.

C. Majme teleso $\Pi$ s hustotou $\gamma(x)$, ktoré má tvar rotačného telesa

$$\left.\begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ 0 \leq g(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), \end{array}\right\} \tag{16}$$

pričom $f$ a $g$ sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$.

Statický moment telesa $\Pi$ vzhľadom na súradnicové roviny je

$$M_{xy} = 0, \qquad M_{yz} = \pi \int_a^b \gamma(x)\, x[f^2(x) - g^2(x)]\,\mathrm{d}x, \qquad M_{xz} = 0. \tag{17}$$

Ťažisko telesa $\Pi$ má súradnice

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0, \tag{18}$$

kde $M$ je hmotnosť telesa

$$M = \pi \int_a^b \gamma(x)[f^2(x) - g^2(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{19}$$

Moment zotrvačnosti telesa $H$ vzhľadom na os $o_x$ je

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_a^b \gamma(x)[f^4(x) - g^4(x)]\,dx. \tag{20}$$

**Príklad 3.** Vypočítajme moment zotrvačnosti homogénneho pretiahnutého rotačného elipsoidu vzhľadom na jeho rotačnú os.

*Riešenie.* Nech homogénny rotačný elipsoid s hustotou $\gamma$ vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraničenej osou $o_x$ a hornou polovicou elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b.$$

Táto elementárna oblasť je určená nerovnosťami

$$-a \leqq x \leqq a,$$
$$0 \leqq y \leqq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pre hľadaný moment zotrvačnosti $I_x$ podľa vzťahu (20) platí

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\gamma \int_{-a}^{a} b^4\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx = \pi b^4\gamma \int_0^a \left(1 - 2\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}\right) dx =$$
$$= \pi b^4\gamma \left[x - \frac{2x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4}\right]_0^a = \frac{8}{15}\pi a b^4 \gamma.$$

Hmotnosť rotačného elipsoidu je

$$M = \pi\gamma \int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi\gamma b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2 \gamma.$$

Pre moment zotrvačnosti pretiahnutého elipsoidu vzhľadom na jeho rotačnú os platí

$$I_x = \frac{2}{5} M b^2.$$

D. Majme plochu $H$ s plošnou hustotou $\sigma$, ktorá má tvar rotačnej plochy

$$\left.\begin{aligned} a \leqq x \leqq b, \\ \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

kde $f$ je nezáporná funkcia, ktorá má v intervale $\langle a, b\rangle$ spojitú deriváciu.

Statický moment plochy $H$ vzhľadom na súradnicové roviny je

$$M_{xy} = 0, \qquad M_{yz} = 2\pi \int_a^b \sigma(x)\, x f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \qquad M_{xz} = 0. \tag{22}$$

Ťažisko plochy $H$ je určené vzťahmi (18), pričom

$$M = 2\pi \int_a^b \sigma(x)\, f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{23}$$

Moment zotrvačnosti plochy $\Pi$ vzhľadom na jej rotačnú os $o_x$, je

$$I_x = 2\pi \int_a^b \sigma(x)\, f^2(x)\, \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{24}$$

**Príklad 4.** Nájdime ťažisko homogénnej polguľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$.

*Riešenie.* Daná plocha je rotačná plocha s konštantnou plošnou hustotou $\sigma$, ktorá vznikne rotáciou štvrťkružnice

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad 0 \leqq x \leqq a$$

okolo osi $o_x$. Statické momenty tejto plochy podľa vzťahov (22) sú

$$M_{xz} = M_{xy} = 0, \qquad M_{yz} = 2\pi\sigma \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x,$$

čiže

$$M_{yz} = 2\pi\sigma \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi\sigma a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \pi\sigma a^3.$$

Hmotnosť tejto plochy je $M = 2\pi\sigma a^2$ a pre súradnice ťažiska plochy podľa vzťahu (18) platí

$$\xi = \frac{\pi\sigma a^3}{2\pi\sigma a^2} = \frac{a}{2}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

čiže $T = (a/2, 0, 0)$.

**E. Guldinove vety**

**Prvá Guldinova veta.** Nech jednoduchý homogénny oblúk (11) vytvorí pri rotácii okolo osi $o_x$ plochu $\Pi$, ktorá ju nepretína. Obsah $P$ tejto plochy sa rovná súčinu dĺžky oblúka $S$ a dĺžky kružnice, ktorú pri rotácii opíše jeho ťažisko $T = (\xi, \eta)$

$$P = 2\pi\eta S. \tag{25}$$

**Druhá Guldinova veta.** Objem telesa $V$, ktoré vytvorí elementárna oblasť (7) pri rotácii okolo osi $o_x$, kde $g(x) \geqq 0$, rovná sa súčinu obsahu $P$ rotujúcej oblasti a dĺžky kružnice, ktorú pri rotácii opíše ťažisko oblasti (7) $T = (\xi, \eta)$,

$$V = 2\pi\eta P. \tag{26}$$

**Príklad 5.** Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraničenej časťou asteroidy $-a \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ okolo osi $o_x$.

*Riešenie.* Obsah a ťažisko danej oblasti podľa príkladu 1 je

$$P = \frac{M}{\sigma} = \frac{3}{16}\pi a^2, \qquad T = \left(0, \frac{256a}{315\pi}\right).$$

Objem telesa podľa druhej Guldinovej vety je

$$V = 2\pi \frac{256a}{315\pi} \frac{3}{16} \pi a^2 = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

(Pozri aj príklad 3 z článku 5,4.)

**1319.** Vypočítajte statické momenty homogénneho hmotného obdĺžnika so stranami $a$, $b$ vzhľadom na obe jeho strany.

**1320.** Nájdite statické momenty homogénnej hmotnej oblasti tvaru pravouhlého trojuholníka s odvesnami $a$, $b$ vzhľadom na jeho strany.

**1321.** Vypočítajte statické momenty homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej krivkou $x = t^2 - t$, $y = t^3 + t^2$ a osou $o_x$ vzhľadom na súradnicové osi.

**1322.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej parabolou $y = 2x - x^2$ a osou $o_x$.

**1323.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej parabolou $y^2 = 6x$ a priamkou $x - 5 = 0$.

**1324.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej parabolou $y^2 = 4x$ a priamkami $x = 0$ a $y = 4$.

**1325.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti, ktorá leží v prvom kvadrante, ak je ohraničená parabolou $y^2 = 2px$ a priamkami $y = 0$, $x = x_0$.

**1326.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej parabolami $y^2 = ax$, $x^2 = ay$.

**1327.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti tvaru polkruhu $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $y \geqq 0$.

**1328.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$, $x \geqq 0$.

**1329.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti, ktorá leží v prvom kvadrante, ak je ohraničená kružnicou $x^2 + y^2 = a^2$, elipsou $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ a osou $o_y$.

**1330.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej krivkami $y = x^2$, $y = 2/(1 + x^2)$.

**1331.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej krivkou $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ a súradnicovými osami.

**1332.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej semikubickou parabolou $y^2 = x^3$ a priamkou $x = 1$.

**1333.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti, ktorá leží v prvom kvadrante, ak je ohraničená asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ a súradnicovými osami.

**1334.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti určenej nerovnosťami $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \sin x$

**1335.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej sínusoidou $y = \sin x$, priamkou $y = 2x/\pi$ a osou $o_x$.

**1336.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej krivkou $y = \sin x$ v intervale $\langle 0, \pi \rangle$ a priamkou $y = 1/2$.

**1337.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej krivkou $x = t^2 - t$, $y = t^3 + t^2$ a osou $o_x$.

**1338.** Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej cykloidou $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ a osou $o_x$.

**1339.** Nájdite súradnice ťažiska hmotnej oblasti ohraničenej parabolami $x^2 = 4y - 8$, $x^2 = 4y$, priamkami $x = 1$ a $x = 4$, ak plošná hustota tejto oblasti je v každom bode úmerná jeho $x$-ovej súradnici.

**1340.** Dokážte, že pre súradnice ťažiska*) $T = (\xi, \eta)$ homogénneho segmentu $0 \leqq \alpha \leqq \varphi \leqq \beta \leqq 2\pi$, $0 \leqq \varrho \leqq f(\varphi)$, kde $f$ je spojitá nezáporná funkcia v intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$, platí

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{\int_\alpha^\beta \varrho^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\int_\alpha^\beta \varrho^2 \, d\varphi}, \qquad \eta = \frac{2}{3} \frac{\int_\alpha^\beta \varrho^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\int_\alpha^\beta \varrho^2 \, d\varphi}.$$

*) Uvažujeme o pravouhlých súradniciach ťažiska: vzájomnú polohu pravouhlého a polárneho súradnicového systému volíme tak ako v analytickej geometrii, pozri článok 4,10/I.

V úlohách **1341** až **1344** nájdite ťažisko hmotného segmentu určeného nerovnosťami:

**1341.** $0 \leqq \varphi \leqq \alpha$,
$0 \leqq \varrho \leqq r$.

**1342.** $0 \leqq \varphi \leqq \pi$,
$0 \leqq \varrho \leqq a\varphi$.

**1343.** $0 \leqq \varphi \leqq \pi$,
$0 \leqq \varrho \leqq a(1 + \cos\varphi)$
(časť roviny ohraničená polovicou kardioidy a polárnou osou).

**1344.** $-\pi/4 \leqq \varphi \leqq \pi/4$,
$0 \leqq \varrho \leqq a\sqrt{\cos 2\varphi}$
(časť roviny ohraničená jednou vetvou lemniskáty).

V úlohách **1345** až **1352** nájdite ťažisko daných hmotných oblúkov:

**1345.** $y = -x^2/2 - 2$, $\quad -2 \leqq x \leqq 2$.

**1346.** $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, $\quad 1 \leqq x \leqq 2$.

**1347.** $x = t^2$, $\quad y = t - \dfrac{t^3}{3}$, $\quad 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$.

**1348.** $x = a\cos t$, $\quad y = a\sin t$, $\quad -\alpha \leqq t \leqq \alpha$ (oblúk kružnice).

**1349.** $x = a(\cos t + t\sin t)$ $\quad y = a(\sin t - t\cos t)$, $\quad 0 \leqq t \leqq \pi$, (oblúk evolventy kružnice).

**1350.** $x = a\cos^3 t$, $\quad y = a\sin^3 t$, $\quad 0 \leqq t \leqq \pi$ (polovica asteroidy).

**1351.** $x = a(t - \sin t)$, $\quad y = a(1 - \cos t)$, $\quad a > 0$, $\quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$ (jeden oblúk cykloidy).

**1352.** $y = a\cosh(x/a)$, $\quad -a \leqq x \leqq a$ (časť reťazovky).

**1353.** Nájdite ťažisko štvrtiny asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ak lineárna hustota v každom jej bode je úmerná $x$-ovej súradnici tohto bodu.

**1354.** Nájdite ťažisko štvrťkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ak lineárna hustota tohto oblúka je v danom bode úmerná súčinu jeho súradníc.

**1355.** Dokážte, že pre pravouhlé súradnice ťažiska*) $T = (\xi, \eta)$ homogénneho hmotného oblúka určeného v polárnom súradnicovom systéme rovnicou $\varrho = f(\varphi)$, pričom funkcia $f$ má spojitú deriváciu na intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$, platí

$$\xi = \frac{\int_\alpha^\beta \varrho\cos\varphi \cdot \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,\mathrm{d}\varphi}{\int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,\mathrm{d}\varphi}, \qquad \eta = \frac{\int_\alpha^\beta \varrho\sin\varphi \cdot \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,\mathrm{d}\varphi}{\int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,\mathrm{d}\varphi}.$$

**1356.** Nájdite ťažisko homogénneho oblúka logaritmickej špirály $\varrho = a\mathrm{e}^{\varphi}$, $\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi$.

---

*) Vzájomná poloha polárneho a pravouhlého súradnicového systému je rovnaká ako v analytickej geometrii v článku 4,10/1.

**1357.** Nájdite ťažisko homogénneho oblúka kardioidy $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.

**1358.** Vypočítajte súradnice ťažiska homogénnej polgule s polomerom $a$.

**1359.** Nájdite ťažisko homogénneho kužeľa s polomerom $a$ a výškou $v$.

**1360.** Vypočítajte ťažisko homogénneho rotačného paraboloidu, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq 2\sqrt{px}$ okolo osi $o_x$.

**1361.** Nájdite ťažisko homogénneho rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraničenej krivkami $y^2 = x$, $y = x^2$ okolo osi $o_x$.

**1362.** Vypočítajte ťažisko homogénneho rotačného hyperboloidu, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti $0 \leqq y \leqq b$, $0 \leqq x \leqq a\sqrt{1 + y^2/b^2}$ okolo osi $o_y$.

**1363.** Nájdite ťažisko plášťa rotačného kužeľa s polomerom základne $r$ a výškou $h$.

**1364.** Nájdite ťažisko rotačnej plochy, ktorá ohraničuje kužeľ z úlohy **1363**.

**1365.** Vypočítajte ťažisko rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou oblúka lemniskáty $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$, okolo polárnej osi.

**1366.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénneho hmotného obdĺžnika so stranami $a$, $b$ vzhľadom na jeho strany.

**1367.** Vypočítajte moment zotrvačnosti hmotnej oblasti, tvaru trojuholníka so základňou $a$ a výškou $v$ vzhľadom na základňu.

**1368.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénneho hmotného a) kruhu, b) polkruhu s polomerom $R$ vzhľadom na jeho priemer.

**1369.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej hmotnej oblasti tvaru kruhového výseku $\varrho \leqq a$, $0 \leqq \varphi \leqq \alpha$ vzhľadom na polárnu os.

**1370.** Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej hmotnej oblasti tvaru elipsy vzhľadom na jej osi.

**1371.** Nájdite moment zotrvačnosti hmotnej úsečky, ktorá má dĺžku $l$, vzhľadom na jej os.

**1372.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej hmotnej úsečky $y = a + (b - a)\,x/d$, $0 \leqq x \leqq d$, $b > a$, ktorá má dĺžku $l = \sqrt{d^2 + (b - a)^2}$, vzhľadom na súradnicové osi.

**1373.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej hmotnej polkružnice s polomerom $r$ vzhľadom na jej priemer.

**1374.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénneho oblúka kružnice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leqq t \leqq \alpha$ vzhľadom na súradnicové osi.

**1375.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénneho oblúka $y = e^x$, $0 \leqq x \leqq 1/2$ vzhľadom na súradnicovú os $o_x$.

**1376.** Nájdite moment zotrvačnosti homogénneho oblúka asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ vzhľadom na súradnicové osi.

**1377.** Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho hmotného oblúka cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ vzhľadom na súradnicové osi.

**1378.** Vypočítajte moment zotrvačnosti rotačného kužeľa s polomerom základne $r$ a výškou $h$ vzhľadom na jeho os.

**1379.** Nájdite moment zotrvačnosti gule s polomerom $r$ vzhľadom na jej priemer.

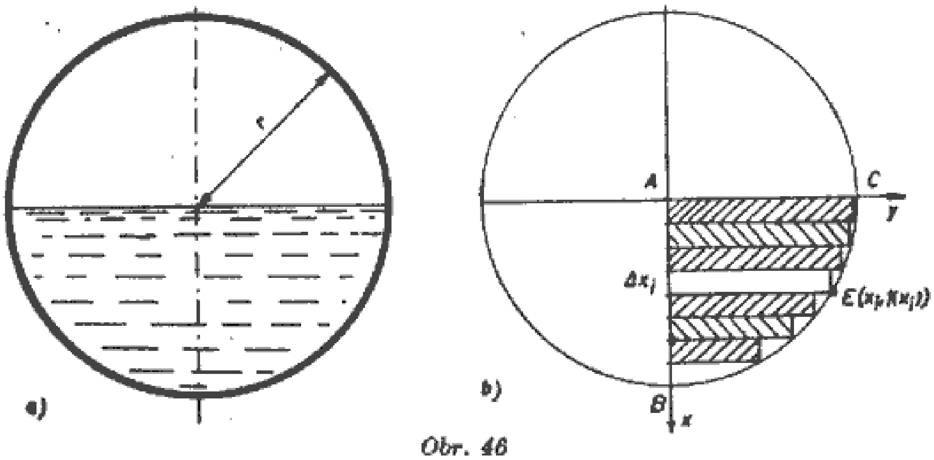
**1380.** Nájdite moment zotrvačnosti rotačného valca s výškou $h$ a polomerom základne $r$ vzhľadom na jeho os.

**1381.** Vypočítajte momenty zotrvačnosti splošteného rotačného elipsoidu s polosami $a$, $b$ vzhľadom na jeho osi.

1382. Nájdite moment zotrvačnosti rotačného paraboloidu s výškou $h$ a polomerom základne $r$ vzhľadom na jeho os.
1383. Vypočítajte moment zotrvačnosti plášťa rotačného valca s polomerom základne $r$ a výškou $h$ vzhľadom na jeho os.
1384. Nájdite moment zotrvačnosti plášťa rotačného kužeľa s polomerom základne a výškou $h$ vzhľadom na jeho os.
1385. Nájdite moment zotrvačnosti guľovej plochy s polomerom $r$ vzhľadom na jej priemer.
1386. Pravidelný $n$-uholník so stranou $a$ rotuje okolo jednej svojej strany. Nájdite objem a povrch tohto rotačného telesa. Skúmajte zvláštne prípady $n = 3, 4, 6$.
1387. Pomocou Guldinových viet nájdite objem a povrch anuloidu, ktorý vznikne rotáciou kružnice $x^2 + (y - 5)^2 = 9$ okolo osi $o_x$.
1388. Elipsa $x^2/a^2 + (y - n)^2/b^2 = 1$, $n \geq b$ sa otáča okolo osi $o_x$. Nájdite objem tohto rotačného telesa pomocou Guldinových viet.
1389. Asteroida $x = a \cos^3 t$, $y = a(1 + \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, rotuje okolo osi $o_x$. Nájdite povrch a objem takto vytvoreného rotačného telesa.

## 5,8. Príklady na výpočet fyzikálnych veličín

**Príklad 1.** Vodorovné potrubie tvaru kruhového valca s priemerom $d = 2r$ je do polovice naplnené vodou. Nájdime tlak na vertikálny uzáver potrubia (pozri *obr. 46*).




*Obr. 46*

*Riešenie.* Zvoľme súradnicový systém podľa obrázku, a vypočítajme tlak vody na časť uzáveru $ABC$. Keďže prierez potrubia je určený kružnicou

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

je

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Rozdeľme úsečku $AB$ na $n$ rovnakých čiastočných intervalov a zostrojme $n$ vpísaných obdĺžnikov. Obsah obdĺžnika s vrcholom $E$ je $f(x_i)\,\Delta x_i$, kde $y_i = f(x_i) = \sqrt{r^2 - x_i^2}$. Ak sa tento obdĺžnik nachádza v hĺbke $x_i$ pod hladinou, tlak kvapaliny na uvažovanú plôšku, ako vieme z hydrauliky, je $\gamma g x_i f(x_i)\,\Delta x_i$, kde $\gamma$ je hustota kvapaliny a $g$ je tiažové zrýchlenie. Tlak kvapaliny na vyšrafovanú plochu približne bude

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma g x_i f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Tlak vody na časť uzáveru $ABC$ je

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma g x_i f(x_i)\, \Delta x_i = \gamma g \int_0^r x f(x)\, \mathrm{d}x.^{*)} \tag{1}$$

Zo vzťahu (1) vyplýva

$$P = \gamma g \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \gamma g \left[ -\frac{1}{3}\ (r^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^r = \gamma g\, \frac{r^3}{3}.$$

Tlak vody na celý uzáver teda je

$$P = \frac{2}{3}\, \gamma g r^3.$$

**Príklad 2.** Vo valci polomeru $r = 20$ cm je pod piestom stlačený plyn. Piest je vo výške $h_2 = 100$ cm a pôsobí naň tlak 10,33 kp/cm². Vypočítajme, akú prácu treba vykonať pri stlačení piesta do výšky $h_1 = 70$ cm (pozri *obr. 47*). Predpokladáme, že plyn chladením valca udržujeme na rovnakej teplote.

*Riešenie.* Pri izotermickej zmene stavu plynu platí Boyle—Mariottov zákon

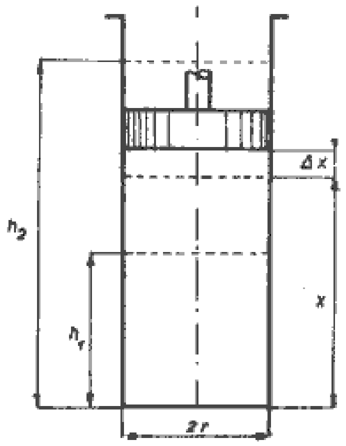
$$pv = p_0 v_0,$$

kde $p$ je tlak plynu, $v$ je objem plynu, $p_0$ je počiatočný tlak a $v_0$ počiatočný objem plynu. Preto, ak je piest vo výške $x$, tlak na plošnú jednotku je

$$p(x) = \frac{p_0 v_0}{v(x)} = \frac{p_0 v_0}{Sx},$$

kde $S$ je prierez valca. Teda na celý piest pôsobí tlak

$$P(x) = Sp(x) = \frac{p_0 v_0}{x}.$$



*Obr. 47*

Elementárna práca $\Delta L$, ktorú treba vykonať pri stlačení piestu z výšky $x + \Delta x$ na výšku $x$, je

$$\Delta L(x) = P(x)\, \Delta x = \frac{p_0 v_0}{x}\, \Delta x.$$

Podobnou úvahou ako v príklade 1 pre celkovú prácu dostaneme

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\ \Delta x_i = \int_{h_1}^{h_2} P(x)\, \mathrm{d}x = p_0 v_0 \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = p_0 v_0 \ln \frac{h_2}{h_1}.$$

V našom prípade je pre $h_2 = 1$ m, $h_1 = 0,7$ m, $r = 0,2$ m, $p_0 = 10\,330$ kp/m², $v_0 = \pi r^2 h_2 = 0,04\pi$ m³, $p_0 v_0 \doteq 1\,297,4$ kpm. Celková práca je

$$L \doteq 1\ 297,4\ \ln \frac{1}{0,7} \doteq 1\,297,4\ .\ 2,302\ .\ \log 1,428\,571 \doteq 462,9 \text{ kpm}.$$

*) Limita vo vzťahu (1) sa rovná uvedenému určitému integrálu, lebo postupnosť delení úsečky AB je normálna a funkcia $f$ je integrovateľná. Pozri poznámku v príklade 1 z článku 5,1.

**Príklad 3.** Vypočítajme koľko tepla vznikne vo vodiči, ktorým preteká prúd $i = I_0 \sin \omega t$ počas $t_1$ sekúnd.

*Riešenie.* Ak vodičom preteká konštantný prúd $I$ za čas $\Delta t$, vznikne teplo $\Delta Q = kRI^2 \Delta t$, kde $R$ je odpor vodiča a $k = 2{,}388 \cdot 10^{-4}$ kcal/$J$, ak $Q$ je vyjadrené v kcal, $R$ v $\Omega$ a $I$ v A.

Rozdeľme interval $\langle 0, t_1 \rangle$ na $n$ čiastočných intervalov $\Delta t_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), v ktorých predpokladáme konštantný prúd $i_j = I_0 \sin \omega t_j$. Teplo, ktoré vznikne za čas $\Delta t_j$, je

$$\Delta Q_j = kRI_0^2 \sin^2 \omega t_j \Delta t_j.$$

Teplo, ktoré vznikne vo vodiči za celý interval $\langle 0, t_1 \rangle$, je

$$Q = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} kRI_0^2 \sin^2 \omega t_j \Delta t_j = \int_0^{t_1} kRI_0^2 \sin^2 \omega t \, dt =$$

$$= kRI_0^2 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^{t_1} = kRI_0^2 \left[ \frac{t_1}{2} - \frac{\sin 2\omega t_1}{4\omega} \right].$$

**1390.** Rýchlosť pohybujúceho sa bodu je daná vzťahom $v = \sqrt{1 + t}$ m/s. Vypočítajte dĺžku dráhy, ktorú prejde bod za prvých 15 s a nájdite jeho priemernú rýchlosť.

**1391.** Hmotný bod a hmotná úsečka s dĺžkou $l$ ležia na priamke. Hmotnosť úsečky je $M$, hmotnosť bodu $m$ a vzdialenosť bodu od bližšieho konca úsečky je $a$. Nájdite silu, ktorou priťahuje táto hmotná úsečka daný hmotný bod.

**1392.** Dve rovnaké hmotné tyče, z ktorých každá má dĺžku $l$ a hmotnosť $M$, ležia na jednej priamke. Bližšie konce sú vo vzdialenosti $l$. Vypočítajte silu, ktorou navzájom na seba pôsobia.

**1393.** Zistite, akou silou pôsobí hmotný oblúk tvaru kružnice s polomerom $R$ a hmotnosťou $M$ na hmotný bod $P$ s hmotnosťou $m$, ktorý leží na priamke prechádzajúcej jej stredom kolmej na rovinu kružnice. Vzdialenosť bodu $P$ od stredu kružnice $S$ je $l$. Akú prácu vykoná príťažlivá sila pri premiestnení bodu $P$ z „nekonečna" do stredu kružnice?

**1394.** Na vodiči tvaru polkružnice s polomerom $a$ je rovnomerne rozložený elektrický náboj $Q$. Aká je intenzita elektrostatického poľa tohto vodiča v strede polkružnice, ak prostredie, v ktorom sa vodič nachádza, má dielektrickú konštantu $\varepsilon$.

**1395.** Nájdite veľkosť intenzity elektrostatického poľa vodiča tvaru kružnice s polomerom $r$ a nábojom $Q$, a to v bode $M$ na priamke, ktorá je kolmá na rovinu kružnice a prechádza jej stredom $S$.

**1396.** Na základe predchádzajúcej úlohy vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa kruhovej dosky s polomerom $r$ a rovnomerne rozloženým nábojom $Q$, a to na osi dosky vo vzdialenosti $a$ od jej stredu.

**1397.** Akým tlakom pôsobí voda na zvislý obdĺžnikový uzáver 8 m dlhý a 12 m vysoký, ktorý je v hĺbke 5 m pod hladinou?

**1398.** Priehrada má tvar rovnoramenného lichobežníka, ktorý má pri dne priehrady dĺžku $a = 50$ m, pri korune priehrady dĺžku $b = 200$ m a výšku 50 m. Výška vody za priehradou je $h = 30$ m. Nájdite tlak, ktorým pôsobí voda na priehradu.

**1399.** Vypočítajte tlak vody na povrch gule s priemerom 6 m, ktorej stred je v hĺbke 10 m pod vodnou hladinou.

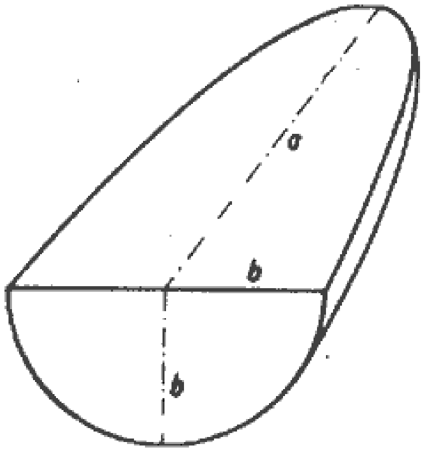
**1400.** Vodičom tvaru štvorca so stranou $a$ tečie prúd $i$. Zistite, aká je indukcia magnetického poľa v strede štvorca.

**1401.** Teleso sa pohybuje v osi $o_x$ pôsobením sily $F$, ktorej veľkosť je $F =$

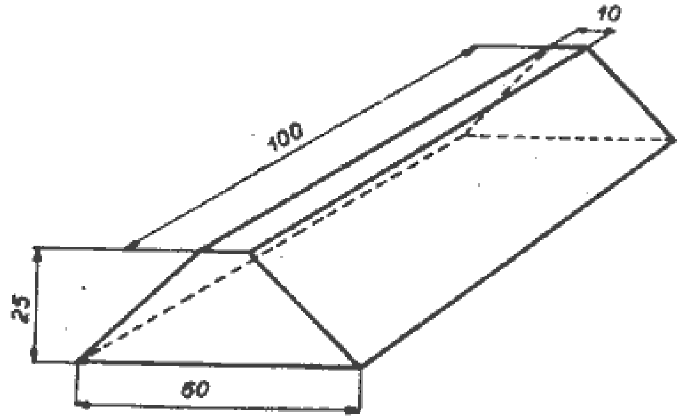
$= 5 \cos(\pi x/2) + 2/(1 + x^2)$. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila $F$ na dráhe $OJ$, kde $O = (0, 0)$ a $J = (1, 0)$.

**1402.** Vypočítajte prácu potrebnú na roztiahnutie pružiny o 5 cm, keď na predĺženie 1 cm potrebujeme silu 1 kp. Sila potrebná na roztiahnutie pružiny je úmerná jej predĺženiu.

**1403.** Priamočiary pohyb telesa je daný funkciou $s = ct^3$, kde $s$ je dĺžka dráhy za čas $t$. Odpor prostredia je úmerný štvorcu rýchlosti. Vypočítajte prácu, ktorú vykonajú sily trenia, ak teleso prejde dráhu od $s = 0$ po $s = a$.




*Obr. 48*




*Obr. 49*

**1404.** Raketa má hmotnosť 1,5 t. Vypočítajte prácu, ktorú vykonajú motory rakety, ak raketa dosiahne výšku $h = 200$ km.

**1405.** Kotol má tvar rotačného paraboloidu. Polomer hornej základne je $R$ a hĺbka kotla je $H$. Kotol je naplnený kvapalinou s hustotou $\gamma$. Nájdite prácu potrebnú na vyčerpanie kvapaliny.

**1406.** Vypočítajte prácu potrebnú na vyčerpanie vody z nádoby tvaru polgule, ktorej priemer je 20 m.

**1407.** Do akumulačnej vodnej nádrže tvaru štvrtiny rotačného elipsoidu (pozri *obr. 48*), kde $a = 500$ m, $b = 50$ m, prečerpáva sa v noci voda z nižšie položenej vodnej nádrže, ktorá je umiestnená 100 m pod úrovňou dna akumulačnej nádrže. Nájdite prácu, ktorú treba vykonať, aby sa prázdna akumulačná nádrž celkom naplnila zo spodnej nádrže.

**1408.** Zistite, akú prácu môže vykonať voda, ak ju vypúšťame z vodnej nádrže tvaru parabolického valca, ktorého výška je $h = 70$ m, dĺžka $d = 500$ m a šírka $\check{s} = 120$ m. Otvor je na dne nádrže.

**1409.** Guľa leží na dne bazénu hĺbky $h = 14$ m. Určte prácu potrebnú na vytiahnutie gule z vody, ak jej polomer je $r = 3$ dm a hustota $\gamma = 2$ kg/dm$^3$.

**1410.** Zistite, akú prácu treba vykonať, aby sme nasypali zemnú hrádzu tvaru znázorneného na *obr. 49*, základňa je obdĺžnik 60 m × 100 m, výška $h = 25$ m, koruna hrádze je obdĺžnik 10 m × 100 m, ak priemerná hustota materiálu je $\gamma = 2\,200$ kg/m$^3$.

**1411.** Kvapka s počiatočnou hustotou $M$ padá k zemi a vyparuje sa. Každú sekundu stratí hmotnosť $m$. Akú prácu vykoná príťažlivá sila za čas od počiatku pohybu až do úplného vyparenia sa kvapky?

1412. Vypočítajte prácu $L$, ktorú vykoná rozpínajúci sa plyn pri stálej teplote, ak počiatočný objem plynu je $v_0 = 2\,500\ \mathrm{cm}^3$ a konečný $v_k = 7\,500\ \mathrm{cm}^3$. Počiatočný tlak plynu je $p_0 = 5\ \mathrm{kp/cm}^2$.

1413. Dva elektrické náboje $e_1 = 1/30\ \mu\mathrm{C}$ a $e_2 = 1/15\ \mu\mathrm{C}$ sa nachádzajú na osi $o_x$ v bodoch so súradnicami $x_1 = 0$ cm a $x_2 = 1$ cm. Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná pri posunutí druhého náboja do bodu na osi $o_x$ so súradnicou $x_3 = 10$ cm.

1414. Na tyč, ktorá je zavesená za jeden koniec a má dĺžku $l$, prierez $S$ a modul pružnosti v ťahu $E$, pôsobí jej tiaž $G$. Nájdite predĺženie tyče.

1415. Vodojem tvaru kvádra má základňu $S = 6\ \mathrm{m}^2$ a je naplnený vodou do výšky $h = 5$ m. Vypočítajte čas, za ktorý vytečie všetka voda z vodojemu, ak otvor na dne nádoby má veľkosť $s = 0{,}01\ \mathrm{m}^2$.*)

1416. Nádoba tvaru zrezaného rotačného kužeľa je naplnená vodou. Polomery základní sú $R$ a $r$ ($R \gg r$) a výška je $h$. Zistite, za aký čas vytečie voda kruhovým otvorom polomeru $r$ na dne nádoby, ak dno nádoby tvorí a) základňa s polomerom $r$, b) základňa s polomerom $R$.

1417. Kotol má tvar eliptického valca s vodorovnou osou. Dĺžka kotla je $l$, výška je $2a$ a šírka $2b$. Kotol je naplnený do polovice vodou. Za aký čas vytečie voda z kotla otvorom na dne, ak obsah otvoru je $S$?

1418. Zistite, za aký čas možno vypustiť polovicu množstva vody z vodnej nádrže z príkladu 1407, ak pri dne nádrže sú tri zvislé výpusty s rozmermi $2\ \mathrm{m} \times 2\ \mathrm{m}$.

1419. Nájdite kinetickú energiu dosky tvaru kruhu s polomerom $r$, ktorá sa otáča okolo osi kolmej na rovinu kruhu, ak stred dosky je vo vzdialenosti $c < r$ od osi otáčania. Počet otáčok dosky za minútu je $f$, hustota dosky je $\gamma$.

1420. Tyč rotuje vo vodorovnej rovine okolo osi prechádzajúcej jedným jej koncovým bodom. Dĺžka tyče je $l$, prierez $S$, hustota materiálu $\gamma$ a uhlová rýchlosť otáčania $\omega$. Nájdite kinetickú energiu tyče.

1421. Teleso zahriate na teplotu 90 °C sa chladí vo vodnom kúpeli, ktorého teplota je 15 °C. Za aký čas bude mať teleso teplotu 20 °C, ak sa za 20 minút ochladilo na 70 °C. (Použite Newtonov zákon o ochladzovaní telies: rýchlosť ochladzovania je úmerná rozdielu teploty telesa a teploty okolitého prostredia.)

1422. Odporom $R$ preteká prúd $i = i_0 \sin(2\pi f t)$, kde $i_0$ je jeho amplitúda a $f$ frekvencia. Nájdite množstvo tepla, ktoré vznikne prechodom striedavého prúdu odporom $R$ za dobu jednej periódy. Nájdite konštantný jednosmerný prúd, ktorý vyvinie rovnaké množstvo tepla na odpore $R$ za rovnakú dobu.

1423. Počiatočný prúd prechádzajúci spotrebičom je $i_0 = 5{,}5$ A. Prechodom prúdu spotrebičom sa zvyšuje jeho odpor rovnomerne tak, že po 15 sekundách klesne prúd na $i = 0{,}8$ A. Počiatočný odpor spotrebiča je 40 Ω a napätie zdroja je 220 V. Nájdite priemernú hodnotu prúdu počas týchto 15 sekúnd a množstvo elektrického náboja, ktoré prejde spotrebičom.

1424. Pretlaková kabína veľkosti $2\ \mathrm{m}^3$ je vystrojená kyslíkovým prístrojom, ktorý pracuje tak, že toľko vzduchu z nej odsaje, koľko čistého kyslíka vpustí do kabíny. Ak pôvodná koncentrácia kyslíka bola 15 %, koľko litrov kyslíka musí kabínou pretiecť, aby koncentrácia bola 20 %? (Úlohu riešte za predpokladu, že koncentrácia kyslíka v celej kabíne je rovnaká.)

---

*) Rýchlosť vytekajúcej vody z nádrže je podľa Torricelliho zákona $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, kde $g$ je tiažové zrýchlenie a $h$ výška hladiny nad otvorom.

**1425.** Pri prechode rádioaktívneho žiarenia vrstvou látky hrúbky $h$ klesla jeho intenzita na polovicu pôvodnej hodnoty. Aká bude intenzita tohto žiarenia po prechode cez vrstvu látky hrúbky $H$? (Úlohu riešte za predpokladu, že intenzita žiarenia absorbovaného tenkou vrstvou látky je úmerná hrúbke vrstvy a intenzite dopadajúceho žiarenia.)

**1426.** Rýchlosť chemickej reakcie druhého druhu, ktorá prevádza látku $A$ na látku $B$, je úmerná súčinu ich koncentrácií. Aká bude koncentrácia látky $B$ za jednu hodinu, ak jej pôvodná koncentrácia bola 20 % a pri $t = 15$ min je jej koncentrácia 50 %?

## 5,9. Nevlastný integrál

### A. Integrál z funkcie na intervale s nekonečnou dĺžkou.

Nech funkcia $f$ je definovaná v intervale $\langle a, \infty)$. Nech pre každé $\xi > a$ existuje integrál $\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$. Hovoríme, že existuje nevlastný integrál funkcie $f$ v intervale $\langle a, \infty)$, keď existuje limita

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

a je

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi \to \infty} \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Nevlastný integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ definujeme rovnosťou

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi \to -\infty} \int_\xi^a f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

ak existuje pre každé $\xi < a$ integrál $\int_\xi^a f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\lim\limits_{\xi \to -\infty} \int_\xi^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak pre dané číslo $a$ existujú nevlastné integrály (1) a (2), potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

G e o m e t r i c k ý   v ý z n a m   n e v l a s t n é h o   i n t e g r á l u: Ak funkcia $f$ je spojitá pre $x \geqq a$ a existuje $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$, potom tento integrál udáva obsah časti roviny ohraničenej priamkou $x = a$, osou $o_x$ v intervale $\langle a, \infty)$ a grafom funkcie $y = |f(x)|$.

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int_2^\infty \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

*Riešenie*. Keďže funkcia $f(x) = (3/x + 2/x^2)^2$ je v každom intervale $\langle 2, \xi \rangle$ integrovateľná, platí

$$\int_2^{\xi} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_2^{\xi} \left(\frac{9}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{4}{x^4}\right) \mathrm{d}x =$$

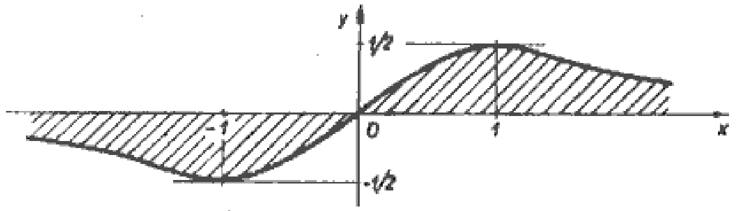
$$= \left[-\frac{9}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{4}{3x^3}\right]_2^{\xi} = -\frac{9}{\xi} - \frac{6}{\xi^2} - \frac{4}{3\xi^3} + \frac{37}{6}.$$

Podľa vzťahu (1) je

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \lim_{\xi \to \infty} \int_2^{\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\xi \to \infty} \left(\frac{37}{6} - \frac{9}{\xi} - \frac{6}{\xi^2} - \frac{4}{3\xi^3}\right) = \frac{37}{6}.$$

**Príklad 2.** Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej krivkou $y = x/(x^4 + 1)$ a priamkou $x = 0$ (pozri *obr. 50*).




*Obr. 50*

*Riešenie*. Obsah danej časti roviny je

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{x}{x^4 + 1}\right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x^4 + 1} \mathrm{d}x.$$

Keďže pre $x < 0$ je $|x| = -x$ a pre $x > 0$ je $|x| = x$, dostaneme

$$P = -\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4 + 1} \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} \mathrm{d}x = -\lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{0} \frac{x}{x^4 + 1} \mathrm{d}x + \lim_{\xi \to \infty} \int_0^{\xi} \frac{x}{x^4 + 1} \mathrm{d}x =$$

$$= -\lim_{\xi \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \xi^2\right) + \lim_{\xi \to \infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \xi^2\right) = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**Príklad 3.** Nájdime potenciál elektrostatického poľa bodového náboja $Q$.

*Riešenie*. Nech náboj $Q$ je v bode $O$ a počítajme potenciál v ľubovoľnom bode $A \neq O$. Uvažujme polpriamku $OA$, pričom $\varrho(OA) = r_A$. Z fyziky je známe, že potenciál $V_A$ v bode $A$ je práca $L$ potrebná na prenesenie bodového náboja $q$ z miesta zvoleného za základ (nekonečno) po danej polpriamke do bodu $A$, delená nábojom $q$.

$$V_A = \frac{L}{q} = \frac{1}{q} \int_{\infty}^{r_A} (-F) \,\mathrm{d}r.$$

Pre veľkosť sily $F$ podľa Coulombovho zákona platí $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{r^2}$, kde $\varepsilon$ je dielektrická konštanta prostredia. Z tohto vyplýva

$$V_A = \frac{1}{q}\int_{\infty}^{r_A}\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{r^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{r_A}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\lim_{\xi\to\infty}\int_{r_A}^{\xi}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\lim_{\xi\to\infty}\left(-\frac{1}{\xi}+\frac{1}{r_A}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_A}.$$

**B. Integrál z neohraničenej funkcie**

Majme funkciu $f$ definovanú v intervale $\langle a, b)$. Nech $\delta$ je ľubovoľné kladné číslo, pre ktoré platí $a < b - \delta < b$. Nech funkcia $f$ je neohraničená v intervale $(b - \delta, b)$. Nech pre každé $\xi \in \langle a, b)$ existuje integrál $\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hovoríme, že existuje nevlastný integrál funkcie $f$ v intervale $\langle a, b\rangle$, keď existuje $\lim_{\xi\to b^-}\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ a je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to b^-}\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Podobne definujeme nevlastný integrál na intervale $\langle a, b\rangle$ z funkcie neohraničenej v intervale $(a, a + \delta)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to a^+}\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Ak v intervale $\langle a, b\rangle$ funkcia $f$ má konečný počet bodov, v okolí ktorých je neohraničená, potom interval $\langle a, b\rangle$ rozdelíme na konečný počet intervalov tak, aby funkcia $f$ bola neohraničená len v jednom koncovom bode intervalu. Ak v každom z týchto intervalov má funkcia $f$ nevlastný integrál (4), resp. (5), súčet všetkých týchto integrálov je nevlastný integrál funkcie $f$ v intervale $\langle a, b\rangle$.

Geometrický význam. Nech funkcia $f$ je spojitá a nezáporná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $\lim_{\xi\to b^-} f(x) = \infty$. Ak existuje $\lim_{x\to b^-}\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$, potom hovoríme, že existuje obsah časti roviny, ohraničenej priamkami $x = a$, $x = b$, osou $o_x$ v intervale $\langle a, b\rangle$ a grafom funkcie $y = f(x)$.

**Príklad 4.** Vypočítajme

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Funkcia $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ je neohraničená v každom intervale $(1 - \delta, 1)$, kde $0 < \delta < 1$. Pre každé $\xi \in \langle 0, 1)$ je

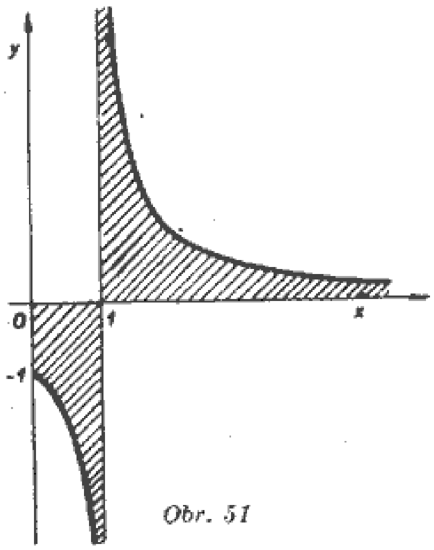
$$\int_0^{\xi}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\sqrt{1 - x^2}\right]_0^{\xi} = -\sqrt{1 - \xi^2} + 1.$$

Z definície dostaneme

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\xi\to1^-}\int_0^\xi \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\xi\to1^-}\left[-\sqrt{1-\xi^2}+1\right] = 1.$$

**Príklad 5.** Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej priamkami $x = 0$, $x = 4$, osou $o_x$ a grafom funkcie $f(x) = 1/\sqrt[3]{x-1}$.

*Riešenie.* Funkcia $f$ je nespojitá vo vnútornom bode $x = 1$ intervalu $\langle 0, 4\rangle$. Pre všetky $x \in \langle 0, 1)$ je $f(x) < 0$ a pre všetky $x \in (1, 4\rangle$ je $f(x) > 0$ (pozri *obr. 51*). Hľadaný obsah $P$ je



*Obr. 51*

$$P = \int_0^4 \frac{1}{|\sqrt[3]{x-1}|}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{-\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = -\lim_{\xi\to1^-}\int_0^\xi \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx +$$

$$+\lim_{\xi\to1^+}\int_\xi^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = -\lim_{\xi\to1^-}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2\right]_0^\xi + \lim_{\xi\to1^+}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x-1})^2\right]_\xi^4 = -\lim_{\xi\to1^-}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{\xi-1})^2 - \frac{3}{2}\right] +$$

$$+\lim_{\xi\to1^+}\left[\frac{3}{2}(\sqrt[3]{3})^2 - \frac{3}{2}(\sqrt[3]{\xi-1})^2\right] = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = \frac{3}{2}(1+\sqrt[3]{9}).$$

**C. Vlastnosti nevlastných integrálov.**

**Z viet o limitách a z viet o určitých integráloch vyplýva, že nevlastné integrály majú podobné vlastnosti ako vlastné integrály — napr. možno použiť substitučnú metódu, metódu per partes a tak ďalej.**

**Veta 1. (Porovnávacie kritérium.) Nech funkcie** $f$ a $g$ sú neohraničené v bode $b$ a nech pre každé $\xi \in (a, b)$ existuje integrál $\int_a^\xi f(x)\,dx$. Nech existuje číslo $c \in \langle a, b\rangle$ tak, že pre každé $x \in \langle c, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq g(x)$. Nech existuje nevlastný integrál $\int_a^b g(x)\,dx$. Potom existuje aj integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Nech neexistuje $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Potom neexistuje $\int_a^b |g(x)|\,dx$.

**Veta 2. Nech pre každé $\xi \in (a, b)$ existuje integrál $\int_a^\xi f(x)\,dx$ a nech existuje nevlastný integrál $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Potom existuje i nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$.**

**Definícia. Ak existuje nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ a integrál $\int_a^b |f(x)|\,dx$, hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je absolútne konvergentný.**

Ak existuje nevlastný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a neexistuje integrál $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, hovoríme, že nevlastný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ je neabsolútne (relatívne) konvergentný.

**Poznámka.** Pre nevlastné integrály $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ platia podobné vety ako je veta 1 a 2. Absolútna a relatívna konvergencia sa pre tieto integrály zavádza obdobne.

**Veta 3.** Nech pre každé $\xi \in (a, b)$ existuje určitý integrál $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$. Nech pre všetky $x \in (c, b)$ platí

$$|f(x)| \leqq \frac{M}{(b - x)^\alpha},$$

kde číslo $c$ je z intervalu $(a, b)$, $M$ je číslo a číslo $\alpha < 1$. Potom existuje nevlastný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

**Veta 4.** Nech pre každé $\xi > a$ existuje určitý integrál $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$. Nech pre všetky $x \geqq c$ platí

$$|f(x)| \leqq \frac{M}{x^\alpha},$$

kde $M$ je číslo, $c \geqq a$, a číslo $\alpha > 1$. Potom existuje nevlastný integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

**Veta 5.** Nech funkcia $f$ je spojitá na intervale $\langle a, b)$ a nech pre ľubovoľné dve čísla $\xi_1, \xi_2, \in$ $\in (a, b)$ platí

$$\left| \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| < K,$$

kde $K$ je kladné číslo. Nech funkcia $g$ je monotónna a spojitá na intervale $\langle a, b)$ a má po častiach spojitú deriváciu v každom intervale $\langle a, c\rangle$ pre $a < c < b$, pričom $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$. Potom existuje nevlastný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

**Príklad 6.** Zistime, či existuje

$$\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx.$$

*Riešenie.* Existenciu daného integrálu zistíme pomocou vety 3. Funkcia $f$ je v každom intervale $(0, \xi)$, kde $0 < \xi < 2$ spojitá, a preto existuje $\int\limits_0^\xi \frac{\sin x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$. Odhadnime funkciu $f$ v intervale $(1, 2)$, $(c = 1)$. Pre všetky $x \in (1, 2)$ platí $0 \leqq 4 - x^2 \leqq 3$, čiže $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.
Pre $x \in (1, 2)$ máme

$$\frac{\sin x}{\sqrt{3}} \leqq \frac{\sin x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sin x}{\sqrt{(2 - x)(2 + x)}} \leqq \frac{\sin x}{\sqrt{2 - x}} \leqq \frac{1}{(2 - x)^{1/2}}.$$

Z toho pre všetky $x \in (1, 2)$ vyplýva

$$|f(x)| = \frac{\sin x}{\sqrt{4 - x^2}} \leqq \frac{1}{(2 - x)^{1/2}}.$$

Keďže $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ a $M = 1$ podľa vety 3 nevlastný integrál $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$ existuje.

**Príklad 7.** Zistime, či existuje

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx.$$

*Riešenie.* Existenciu daného integrálu zistíme pomocou vety 4. Keďže funkcia $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$ je spojitá pre každé číslo $\xi > 0$, existuje $\displaystyle\int_0^\xi \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$. Odhadnime funkciu $f$. Pre všetky $x > 0$ je $\operatorname{arctg} x \leq \pi/2 < \pi$. Z toho vyplýva

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\right| = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \leq \frac{\pi}{1 + x^2} < \frac{\pi}{x^2}.$$

Keďže sú splnené predpoklady vety 4, existuje nevlastný integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$.

V úlohách **1427** až **1465** vypočítajte nevlastné integrály:

**1427.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$

**1428.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx.$

**1429.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^4}\, dx.$

**1430.** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{x^2 + 4}\, dx.$

**1431.** $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x - 2)^2}\, dx.$

**1432.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-0,5} \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx.$

**1433.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$

**1434.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^3}\, dx.$

**1435.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^4}\, dx.$

**1436.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{7x + 2}{x^3 - 5x^2 + 12x - 60}\, dx.$

**1437.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx.$

**1438.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\, dx.$

**1439.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx.$

**1440.** $\displaystyle\int_0^\infty x\, e^{-x^2}\, dx.$

**1441.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx.$

**1442.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx, \quad a > 0.$

**1443.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx, \quad a > 0.$

**1444.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx.$

1445. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} \,\mathrm{d}x.$

1446. $\int\limits_0^{\infty} \sin x \,\mathrm{d}x.$

1447. $\int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$

1448. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x.$

1449. $\int\limits_0^{5} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$

1450. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \,\mathrm{d}x.$

1451. $\int\limits_{-1}^{1} x^{-2/3} \,\mathrm{d}x.$

1452. $\int\limits_0^{4} \frac{1}{(x - 2)^2} \,\mathrm{d}x.$

1453. $\int\limits_0^{2} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \,\mathrm{d}x.$

1454. $\int\limits_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x - 1}} \,\mathrm{d}x.$

1455. $\int\limits_0^{1} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \,\mathrm{d}x.$

1456. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,\mathrm{d}x.$

1457. $\int\limits_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \,\mathrm{d}x.$

1458. $\int\limits_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x - x^2}} \,\mathrm{d}x.$

1459. $\int\limits_1^{2} \frac{1}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}} \,\mathrm{d}x.$

1460. $\int\limits_2^{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(4 - x)^2}} \,\mathrm{d}x.$

1461. $\int\limits_0^{1} x \ln x \,\mathrm{d}x.$

1462. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 2x} \,\mathrm{d}x.$

1463. $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{a + b \cos x} \,\mathrm{d}x, \quad |b| > |a|.$

1464. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.$

1465. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x} \,\mathrm{d}x.$

1466. Nech $n$ je prirodzené číslo. Vypočítajte:

a) $\int\limits_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x;$ b) $\int\limits_0^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} \,\mathrm{d}x.$

1467. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkou $y = \mathrm{e}^{-x/3}$, $x \geqq 0$ a súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému.

1468. Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi $o_x$ časti roviny ohraničenej hyperbolou $xy = 1$, osou $o_x$, pričom $x \geqq 1$.

**1469.** Nájdite objem telesa ohraničeného rovinou $R_{xz}$ a plochou, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = x/\sqrt{e^x}$, $x \geqq 0$, okolo jej asymptoty.

**1470.** Dané množstvo ideálneho plynu má objem $v_1$ pri tlaku $p_1$. Objem plynu sa adiabaticky neohraničene zväčšuje. Vypočítajte prácu, ktorú plyn vykoná.

**1471.** Pre prúd $i$ v elektrickom obvode platí $i = 4te^{-t}$. Vypočítajte celkový náboj $Q = \int_0^\infty i \, dt$, ktorý vznikne v obvode počas jedného impulzu.

**1472.** Kondenzátor s kapacitou $C$ má napätie $U$ a vybíja sa cez odpor $R$. Vypočítajte celkové teplo, ktoré vznikne na odpore.

V úlohách **1473** až **1490** zistite, či existujú uvedené integrály:

**1473.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1 + x^2} \, dx.$

**1474.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}} \, dx.$

**1475.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{1 + x^n} \, dx,$ $m > -1$, $n - m > 1$.

**1476.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}} \, dx.$

**1477.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}} \, dx.$

**1478.** $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x - 2)(x - 1)}} \, dx.$

**1479.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 2}{\sqrt{x^3}} \, dx.$

**1480.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\ln x} \, dx.$

**1481.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} \, dx.$

**1482.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx.$

**1483.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{x} \, dx.$

**1484.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} \, dx.$

**1485.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \, dx.$

**1486.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arccos \cos x}{1 + \sqrt{x}} \, dx.$

**1487.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} \, dx,$ $1 < p < 2$.

**1488.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{4 + x^2} \, dx.$

**1489.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^2} \, dx.$

**1490.** $\displaystyle\int_a^\infty |\ln x|^\lambda \frac{\sin x}{x} \, dx;$ $\lambda > 0$, $a > 0$.

V úlohách **1491** až **1494** zistite, či dané integrály konvergujú absolútne:

**1491.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$ **1492.** $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$

**1493.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x, \quad 1 < p < 2.$ **1494.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x, \quad 0 < p \leq 1.$

## 5,10. Určitý integrál komplexnej funkcie reálnej premennej

Určitý integrál komplexnej funkcie $f$ reálnej premennej na intervale $\langle a, b\rangle$ zavádzame podobne ako určitý integrál z reálnej funkcie.

Nech $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$ (pozri článok 5,1) a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sú ľubovoľné čísla z čiastočných intervalov delenia $D_n$. Uvažujme o postupnosti integrálnych súčtov komplexnej funkcie $f$ reálnej premennej pre delenia $D_n$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a dané voľby čísiel $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$S_f(D_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Komplexné číslo $I$ nazývame určitým integrálom komplexnej funkcie $f$ reálnej premennej na intervale $\langle a, b\rangle$, ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ a pre každú voľbu čísiel $\xi$ platí

$$\lim_{n\to\infty} S_f(D_n) = I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Komplexná funkcia reálnej premennej je integrovateľná, ak existuje určitý integrál (1). Ak určitý integrál (1) neexistuje, nie je integrovateľná.

Pre určitý integrál komplexnej funkcie reálnej premennej platia podobné vety ako pre určitý integrál reálnej funkcie, s výnimkou viet o nerovnostiach. Platí napríklad Newton–Leibnizov vzorec. Podobne platia vety o metóde per partes a substitučnej metóde. Ďalej platí:

**Veta 1.** Nech funkcia $f(x) = g(x) + ih(x)$ je definovaná v intervale $\langle a, b\rangle$. Funkcia $f$ je integrovateľná vtedy a len vtedy, ak funkcie $g$, $h$ sú integrovateľné v intervale $\langle a, b\rangle$, pričom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

**Veta 2.** Ak $f$ je integrovateľná komplexná funkcia reálnej premennej a $|f|$ je integrovateľná reálna funkcia reálnej premennej, potom platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

**Príklad 1.** Vypočítajme

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x.$$

*Riešenie.* Z viet článku 4,9 a z Newton–Leibnizovho vzorca vyplýva

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}}{2+3\mathrm{i}}\right]_0^1 = \frac{1}{(2+3\mathrm{i})}(\mathrm{e}^{2+3\mathrm{i}} - 1) = \frac{2-3\mathrm{i}}{2^2+3^2}(\mathrm{e}^{2+3\mathrm{i}} - 1) =$$

$$= \frac{1}{13}[2\mathrm{e}^2\cos 3 + 3\,\mathrm{e}^2\sin 3 - 2 + \mathrm{i}(2\mathrm{e}^2\sin 3 - 3\,\mathrm{e}^2\cos 3 + 3)].$$

**Príklad 2.** Pomocou určitého integrálu komplexnej funkcie reálnej premennej vypočítajme

$$\int_0^1 e^{2x} \cos 3x \, dx.$$

*Riešenie.* Podľa vety 1 platí

$$\int_0^1 e^{(2+3i)x} \, dx = \int_0^1 e^{2x} \cos 3x \, dx + i \int_0^1 e^{2x} \sin 3x \, dx.$$

Z výsledku príkladu 1 dostávame

$$\int_0^1 e^{2x} \cos 3x \, dx = \operatorname{Re} \int_0^1 e^{(2+3i)x} \, dx = \frac{1}{13} (2\,e^2 \cos 3 + 3\,e^2 \sin 3 - 2).$$

Poznámka. Nevlastný integrál z komplexnej funkcie reálnej premennej zavádzame podobne ako nevlastný integrál z funkcie reálnej premennej (pozri článok 5,9). Pre nevlastné integrály z komplexnej funkcie reálnej premennej platí aj veta 1 tohto článku, pomocou ktorej počítame tieto nevlastné integrály.

V úlohách **1495** až **1504** vypočítajte určité integrály:

**1495.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x + 2ix^2}{x^2 + 1} \, dx.$

**1496.** $\displaystyle\int_{-2}^1 (x - 2i)(x + 3i) \, dx.$

**1497.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + i} \, dx.$

**1498.** $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{x^2 + i} \, dx.$

**1499.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{i}{x^2 - 5ix - 6} \, dx.$

**1500.** $\displaystyle\int_1^4 x e^{(1+i)x} \, dx.$

**1501.** $\displaystyle\int_0^1 x e^{(3+4i)x^2} \, dx.$

**1502.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + i}{x - i} \, dx.$

**1503.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{(-2-5i)x} \, dx.$

**1504.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ix} \, dx, \quad a > 0.$

**1505.** Dokážte, že platí

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad m \neq n, \\ 2\pi & \text{pre} \quad m = n. \end{cases}$$

V úlohách **1506** až **1509** vypočítajte pomocou určitého integrálu komplexnej funkcie reálnej premennej určité integrály reálnej funkcie reálnej premennej, kde $m$ a $n$ sú prirodzené čísla.

**1506.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx.$

**1507.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx.$

**1508.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x \, dx, \quad a \neq 0.$

**1509.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx.$

# 6. VÝSLEDKY

## 1. Funkcia jednej reálnej premennej

### 1,1. Pojem a základné vlastnosti funkcie

**1.** a) 39; b) $-3$; c) $-3$; d) $4x^2 + 2x - 3$; e) $4a^2 + 14a + 9$. **2.** 0; 0; 0; $-2$; 1; 5. **3.** a) 2; b) $-1/[x(x + h)]$; c) $2x + h$; d) $[E(x) - E(x + h) + h]/h$; e) $[|x| - |x + h| + h]/h$. **4.** a) $-2{,}5$; 1; nie je definovaná; nie je definovaná; 0; nie je definovaná; b) $-3$; $-1$; 0; 1/2; 1; 0,6; 1/2; 0. **5.** 21. **6.** a) $-7x/5 + 6/5$; 1/2; $-1/5$; b) $3x^2 + 2x + 1$; 21/4; 6. **7.** a) $f(x) = 5$; b) $f(x) = 3$, pre $x = 1$, $x = 2$ a $f(x) = 5$ pre $x = 3$; c) $f(x) = 2x - 1$, $x$ je celé číslo; d) $f(x) = 0$ pre $x$ záporné celé číslo, $f(x) = 1$ pre $x = 0$, $f(x) = 2$ pre $x$ celé kladné číslo; e) $f(x) = 1/(x - 1)(x + 2)(x - 3)$. **8.** a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{a, b\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $\{a, b, c, d, e\}$, $\{0, !, *\}$. **9.** a), b), c), g), h), i) interval $(-\infty, \infty)$; e), f) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; d) $\langle 0, \infty)$. **10.** a) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$; b) $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$; c) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. **11.** a) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$; b) $(3, \infty)$; c) $(-\infty, 5/3\rangle$; d) $\langle -3, 3\rangle$; e) $(-\infty, \infty)$; f) $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$; g) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$; h) $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 2, \infty)$. **12.** a), c), d), g), $(-\infty, \infty)$; b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; e) $(-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty)$; f) všade, okrem celých čísiel. **13.** a) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; c) $(0, \infty)$; d) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; e) $(-2, 2)$; f) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. **20.** a) nie; b) nie; c) áno; d) áno; e) nie. **21.** a) $f(x) = g(x) = |2x|$ pre všetky $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; b) $f(x) = g(x) = 2x^2 - 1$ definované na množine $M = \{-2, 1/2\}$. **22.**

| $x$ | $f$ | $g$ | $f + g$ | $f - g$ | $fg$ | $f/g$ | $g/f$ | $f^2 - fg + 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $-2$ | 3 | 1 | $-5$ | $-6$ | $-2/3$ | $-3/2$ | 1 |
| $b$ | 0 | $-1$ | $-1$ | 1 | 0 | 0 | — | 3 |
| $c$ | 1 | 5 | 6 | $-4$ | 5 | 1/5 | 5 | $-1$ |
| $d$ | — | $-3$ | — | — | — | — | — | — |
| $e$ | 2 | — | — | — | — | — | — | —*) |

*) Znak — označuje, že funkcia alebo operácia nie je definovaná.

**23.** a) $3|x|$; $2x + 2$; $4x - 2$; $6x - 3x^2$; $(2 - x)/3x$, $x \neq 0$; $9x$; $2 - 3x$; b) $|x - 1|/|x|$, $x \neq 0$; 1, $x \neq 0$; $1 - 2/x$; $x \neq 0$; $(x - 1)/x^2$, $x \neq 0$; $1/(x - 1)$, $x \neq 1$; $-1/(x - 1)$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; $x/(x - 1)$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; c) $\sqrt{x + 2}$, $x \geqq -2$; $[(x + 2)\sqrt{x + 2} + 1]/(x + 2)$, $x > -2$; $[(x + 2)\sqrt{x + 2} - 1]/(x + 2)$; $x > -2$; $1/\sqrt{x + 2}$, $x > -2$; $1/(x + 2)\sqrt{x + 2}$, $x > -2$; $\sqrt{\sqrt{x + 2} + 2}$, $x \geqq -2$; $1/[\sqrt{x + 2} + 2]$, $x \geqq -2$; d) 0 pre $x \leqq 0$, $x$ pre $x > 0$; 0 pre $x \leqq 0$, $x - x^2$ pre $x > 0$; 0 pre $x \leqq 0$, $x + x^2$ pre $x > 0$; 0 pre $x \leqq 0$, $-x^3$ pre $x > 0$; nie je definované pre $x \leqq 0$, $-x$ pre $x > 0$; 0 pre $x \leqq 0$, $x$ pre $x > 0$; 0 pre $x \leqq 0$, $-x^2$ pre $x > 0$. **24.** $\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$; $\chi_A \chi_B$; $\chi_{A-B} + \chi_{B-A}$; $1 - \chi_A$; $1 - \chi_B$. **25.** a) $y = E(x^2)$; b) $y = E^2(x)$; c) $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$; d) $y = 1 + \sqrt[3]{x}$. **26.** a) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$, $\langle -1, 1\rangle$; b) $y = \sqrt{u}$, $u = |x|^3$, $(-\infty, \infty)$; c) $y = u^2$, $u = E(x)$, $(-\infty, \infty)$; d) $y = (-1)^u$, $u = E(x^2)$, $(-\infty, \infty)$; e) $y = 1/[E(u)]$, $u = \sqrt{1 - |x|}$, $(-1, 0)$. **27.** a) $x$, $\langle 0, \infty)$; $|x|$, $(-\infty, \infty)$; b) $(\sqrt{x} + 1)/(\sqrt{x} - 1)$, $\langle 0, 1) \cup (1, \infty)$; $\sqrt{(x + 1)/(x - 1)}$, $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; c) $(-1)^{E(x)}$, $(-\infty, \infty)$; $E[(-1)^x]$, množina všetkých čísiel tvaru $p/q$, kde $p$ je celé číslo a $q$ nepárne číslo; d) 0 pre $x < 0$ a $x^2$ pre $x \geqq 0$; 0 pre $x < 0$ a $x^2$ pre $x \geqq 0$; e) 1 pre $|x| \leqq 1$ a 2 pre $|x| > 2$; 1 pre $x \in \langle -\sqrt{3}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{3}\rangle$. **28.** a) $\langle 2, 3) \cup (3, \infty)$; b) $(-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty)$; c) $\langle 2n - 1, 2n)$ pre $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; d) $(-\infty, 3) \cup \langle 4, \infty)$; e) $\langle 0, 9)$; f) $\langle 1, \infty)$. **29.** $x/(nx + 2)$, $x \neq -2/n$, $n = 1, 2, \ldots$. **30.** a) $\chi(x)$, $\chi(x)$, 0; b) 1, 1, 1; c) je periodická, perióda neexistuje; je periodická, perióda neexistuje; je periodická, perióda neexistuje. **31.** a) $(2, \infty)$, $(-\infty, 2)$; b) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, $(-2, 0)$; c) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$, $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$; d) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, $(1, 3)$; e) $(-4, 7)$, $(-\infty, -4) \cup (7, \infty)$. **32.** a) $\langle 2 - \sqrt{3}, 1) \cup (1, 2 + \sqrt{3}\rangle$; b) $\langle -1/\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2/3)$. **33.** a) Rýdzo monotónna; b) monotónna; c) rýdzo monotónna; d) rýdzo monotónna; e) nie je monotónna; f) nie je monotónna; g) nie je monotónna; h) monotónna. **34.** a) Rastúca v intervale $\langle 0, \infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty, 0\rangle$; b) rastúca v intervale $\langle 0, \infty)$, neklesajúca, nerastúca v intervale $(-\infty, 0\rangle$; c) konštantná v intervaloch $(-\infty, -1\rangle$, $(-1/k, -1/(k + 1)\rangle$, $(1/(k + 1), 1/k\rangle$, $(1, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots$; d) rastie v intervale $\langle 3/2, \infty)$, klesá v intervale $(-\infty, 3/2\rangle$; e) rastie v intervale $\langle -5, 5\rangle$, klesá v intervaloch $(-\infty, 5\rangle$, $\langle 5, \infty)$; f) rastie v intervale $(-\infty, 0\rangle$, klesá v intervale $\langle 0, 1\rangle$; g) rastie v intervale $\langle 2, \infty)$, klesá v intervale $(-\infty, -3\rangle$, nerastie, neklesá v intervale $\langle -3, 2\rangle$. **36.** a) $f(x) \leqq 1/4$, $\sup_M f(x) = \max_M f(x) = 1/4$, $\inf_M f(x) = 0$, $\min_M f(x)$ neexistuje; b) $6 \leqq f(x) < 71$, $\inf_M f(x) = \min_M f(x) = 6$, $\max_M f(x)$ neexistuje, $\sup_M f(x) = 71$; c) $-7 < f(x) < 5$, $\sup_M f(x) = 5$, $\inf_M f(x) = -7$, $\max_M f(x)$ neexistuje, $\min_M f(x)$ neexistuje; d) zhora neohraničená; $1 \leqq f(x)$; $\sup_M f(x)$ neexistuje; $\max_M f(x)$ neexistuje, $\inf_M f(x) = \min_M f(x) = 1$. **37.** a), h), l), m), n) párna; c), e), f), i), k) nepárna; b), d), j), g) ani párna, ani nepárna. **38.** a) Párna $f(x) = 1 + x$, pre $x \leqq 0$, nepárna $f(x) = -1 - x$, $x \leqq 0$; b) párna $f(x) = \sqrt{x}$ pre $x \geqq 0$, nepárna $f(x) = -\sqrt{x}$, $x \geqq 0$; c) párna $f(x) = 1/(1 - x)$ pre $x \leqq 0$, nepárna $f(x) = 1/(x - 1)$, $x \geqq 0$; d) párna $f(x) = E(-x)$ pre $x \leqq 0$, nepárna $f(x) = -E(-x)$, $x \leqq 0$. **41.** Je periodická, nemá periódu; b) je periodická, 2; c) nie je periodická; d) je periodická, 2; e) je periodická, 1/3; f) je periodická, 1/2. **44.** Perióda je $l_0/a$; a) $\sqrt{2}$; b) 4/3. **45.** a) $y = (x - 2)^2/9$, 0; b) neexistuje inverzná funkcia; c) $y = (x - 3)^2/(1 - 2x)^2$, 9. **46.** a) $y = x/3$; b) $y = (1 - x)/(1 + x)$; c) nie je; d) $y = \sqrt[3]{x/(1 - x)}$; e) $y = (x + 4)^2/9$; f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$; g) nie je; h) $y = x + (-1)^{E(x)}$; i) $y = x$ pre $x < 0$, $y = x/2$ pre $x \geqq 0$; j) nie je. **47.** $y = \sqrt{16 - x^2}$, $\langle -4, 4\rangle$. **48.** a) $u^2/2$; b) $a^2\sqrt{3}/4$; c) $[(a^2 - b^2)\operatorname{tg} x]/4$. **49.** $x$ pre $x \in \langle 0, 1/2\rangle$, $x/2 + 1/4$ pre $x \in \langle 1/2, 3/2\rangle$, $x - 1/2$ pre $x \in \langle 3/2, 2\rangle$. **50.** a) $\pi(4 - x^2)\, x/4$ pre $x \in \langle 0, 2\rangle$; b) $\pi s^2 \sqrt{1 - s^2/4} \, . \, [2 + \sqrt{1 - s^2/4}]$, $0 \leqq s \leqq 2$; c) $\pi v^3/[3(v - 2)]$. **51.** $10x/(10 + x)$. **52.** $1 + 2[E(x) - x]$. **53.** $1/(1 - x)$. **54.** $(96 + 72x)/(2 + x)$. **55.** $p = 2/V$ [at; l]. **56.** $I = 10/R$, $R \in (0, \infty)$, [A; Ω]. **57.** $R = (3x + 2)/(x + 2)$ pre $x \in \langle 0, 100\rangle$, [Ω]. **58.** $E = 10\,000/[(400 + x^2)\sqrt{400 + x^2}]$, [Lx].

### 1,2. Elementárne funkcie

**59.** a) $-3$; nie je definovaná; 0; $\operatorname{tg} 2 - 3\cos^2 1 \doteq -3{,}053$; b) 2; nie je definovaná; $-4$; 0; c) $\pi/2$; $-\pi/2$; $-\pi/2$; 0; $\pi/4$; d) 0; 0; $\sqrt{2}/2$; $\sin 3 \doteq 0{,}141$; nie je definovaná. **61.** a) 1, $-1$, 0; b) 1, $-2$, 2. **64.** a) $f \neq g$; b) $f = g$; c) $f = g$. **65.** a) $-1 \leqq x \leqq 1$; b) $0 \leqq x \leqq 1$; c) $x < 1$. **73.** a) $y = \sin u$, $u = x^2$; b) $y = u^2$, $u = \sin x$; c) $y = 2^u$, $u = 2x$; d) $y = 2^u$, $u = x^2$. **74.** a) $f(f(x)) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$; $g(f(x)) = \sqrt{1 - |\ln x|}$, $\langle 1/e, e\rangle$; $f(g(x)) = \ln \sqrt{1 - |x|}$, $(-1, 1)$; $g(g(x)) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - |x|}}$, $\langle -1, 1\rangle$; b) $f(g(x)) = \arcsin(\sin x)$, $(-\infty, \infty)$; $g(f(x)) = x$, $\langle -1, 1\rangle$; $f(f(x)) = \arcsin(\arcsin x)$, $\langle -\sin 1, \sin 1\rangle$; $g(g(x)) = \sin(\sin x)$, $(-\infty, \infty)$; c) $f(g(x)) = x$, $(0, \infty)$; $g(f(x)) = x$, $(-\infty, \infty)$; $f(f(x)) = 2^{2^x}$, $(-\infty, \infty)$; $g(g(x)) = \log_2(\log_2 x)$, $(1, \infty)$; d) $f(g(x)) = (x - 1/x)/2$, $(0, \infty)$; $g(f(x)) = \ln \sinh x$, $(0, \infty)$; $f(f(x)) = \sinh(\sinh x)$, $(-\infty, \infty)$; $g(g(x)) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$. **75.** a) $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; b) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. **76.** a) $(0, \infty)$; b) $(-\infty, 0)$;

c) $(0, \infty)$; d) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; e) $(0, \infty)$; f) $(5/2, \infty)$; g) $(-2, 2)$; h) $(0, 1) \cup (1, \infty)$; i) $(-1, 1)$. **77.** a) $(7, \infty)$; b) $(0, \infty)$; c) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. **78.** a) $(-\infty, \infty)$; b) $(-\infty, \infty)$; c) definovaná pre všetky čísla $x \neq k\pi$, kde $k$ je celé číslo; d) $(-\infty, \infty)$; e) $(-\infty, \infty)$; f) $(-\infty, \infty) - \{(2k + 1)\,\pi/4\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **79.** a) $(0, \infty) - \{(2k + 1)^2\,\pi^2/8\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; b) $(-\infty, \infty) - \{k\pi/8\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; c) $\langle 0, 3\rangle$. **80.** a) $\langle 1, 2\rangle$; b) $(-\infty, 0\rangle$; c) $(-\infty, \infty)$; d) $(-\infty, \infty)$; e) $(-\infty, \infty)$; f) $(-\infty, \infty) - \{(2k + 1)\,\pi/2\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; g) $\langle -12, 0\rangle$; h) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$; i) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. **81.** a) $\langle -1, 5/3\rangle$; b) $\langle -2, 4\rangle$; c) $(-\pi/2 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; d) $(-\pi/6 + 2k\pi, \pi/6 + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; e) $(-1/3, \infty)$; f) $(1{,}5; 11\rangle$. **82.** c), d), g), l) párna funkcia; b), f), i), j), k) nepárna funkcia. **83.** $-b/2a$. **84.** a) $\max f = 1$, $\min f = 0$; b) $\max f = 1$, $\min f = -1$; c) $\max f = 3$, $\min f = 1$; d) $\max f$ neexistuje, $\min f = 1$. **85.** a) $3\pi$; b) 1; c) $\pi$; d), e), f) nie sú periodické funkcie. **86.** a) $2\pi$; b) $2\pi$; c) nie je periodická; d) $2\pi$; e) $2\pi$; f) $2\pi$. **87.** a) Klesajúca v intervale $(-\infty, 0)$, rastúca v intervale $(1, \infty)$; b) klesajúca v $(-\infty, 3/2)$, rastúca v $(3/2, \infty)$; c) nerastúca v $(-\infty, 2)$, neklesajúca v $(-1, \infty)$; d) rastúca v $(-2 - \sqrt{2}, -2) \cup (-2 + \sqrt{2}, \infty)$; e) klesajúca v $(0, e^{3/2})$, rastúca v $(e^{3/2}, \infty)$. **88.** a) $y = (x + 2)/4$, $(-\infty, \infty)$; b) $y = (1 + \arcsin x)/3$, $\langle -1, 1\rangle$; c) $y = (2x + 1)/(3x + 1)$, $(-\infty, -1/3) \cup (-1/3, \infty)$; d) $y = 2x/\pi$ pre $|x| \geqq \pi/2$, $y = \sin x$ pre $|x| \leqq \pi/2$; e) $y = \arcsin \log_4 x$, $\langle 1/4, 4\rangle$; f) $y = (\log_3 x)/(\log_3 x - 1)$, $(0, 3) \cup (3, \infty)$; g) $y = x$, pre $x < 1$, $y = \sqrt{x}$ pre $x \in \langle 1, 16\rangle$, $y = \log_2 x$ pre $x \geqq 16$. **89.** a) $y = [1 + \cos (x - 3)/4]/2$, $\langle 3, 3 + 4\pi\rangle$; b) $y = (2 - e^x)/3$, $(-\infty, \infty)$; c) $y = \ln \sqrt{x^2 - 2x - 2}$, $(1 + \sqrt{3}, \infty)$; d) $y = 2 + e^{2\log_2(x/2)}$, $(0, \infty)$; e) $y = \operatorname{tg} \log_2 (x/8)$, $(2^{3-\pi/2}, 2^{3+\pi/2})$. **90.** a) Jednojednoznačná, $y = (2^x - 2^{-x})/2$, $(-\infty, \infty)$; b) jednojednoznačná, $y = (x/(1 - 2x))^3$, $(-\infty, 1/2) \cup (1/2, \infty)$; c) nie je jednojednoznačná; d) jednojednoznačná, $y = \log_2[(4x - 1)/(x + 1)]$, $(-\infty, -1) \cup (1/4, \infty)$. **91.** a) $P = (x - \sin x)/2$; b) $v = 1 - \cos (x/2)$. **92.** a) $\alpha = (1/2) \arcsin (x/64)$, $\langle 0, 64\rangle$, kde $x$ je počítané v km; b) $\alpha = \arcsin (x/80\sqrt{5})$, $\langle 0, 80\sqrt{5}\rangle$, kde $x$ je počítané v m. **93.** a) $M = 4\,e^{-u/2}$; b) $u = 2 \ln [240/(240 - t)]$ v km . s$^{-1}$. **94.** a) $x = (1/100\pi) \cos (100\pi t + 1{,}5\pi)$; b) $x = \cos (100\pi t)$; c) $x = \sqrt{1 - 1/(100\pi)^2} \cos (100\pi t + \operatorname{arccotg} (-100\pi))$. **95.** $p = 1/8$ at. **96.** $\beta = \arcsin (\sin x/2)$. **97.** a) $x = (1/\mu) \ln (I_0/I)$; b) $d = (\ln 2)/\mu$.

## 1,3. Postupnosti

**98.** a) $f(1) = 2$, $f(2) = 9$, $f(3) = 64$; b) $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 6$. **99.** a) 2, 2, 2, 2, 2; b) 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243; c) 1, 0, 1, 0, 1; d) $-4/3$, $-7$, 10, 13/3, 16/5; e) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$; f) 1, 0, 0, 0, 0; g) 1, $(3/2)^2$, $(5/3)^3$, $(7/4)^4$, $(9/5)^5$; h) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$; i) 1, 3/4, 2/3, 5/8, 3/5. **100.** a) $a_n = 2^n$; b) $a_n = (n + 1)/(n + 2)$; c) $a_n = 2\,(-1)^{n+1}$; d) $a_n = 2n - 2$; e) $a_n = 3^{n-1}$. **101.** a) 2, 3, 4, 5, 6, $a_n = n + 1$; b) 1, $-1$, 1, $-1$, 1, $a_n = (-1)^{n+1}$; c) 1, 2, 1, $-1$, $-2$, $a_n = a_{3k+p} = (-1)^k \left[1 + \dfrac{1 + (-1)^p}{2}\right]$, $p = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; d) 0, 1, 1, 2, 3, $a_1 = 0$, $a_n = \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \ldots$, pre $n > 1$. **102.** a( $a_n = 4 - n$; b) $a_n = 3n/2 - 3$. **103.** a) 625, $-125$, 25, $-5$, 1, $-1/5$, 1/25, $-1/125$, 1/625, $-1/3125$; b) 300 000; $-30\,000$; 3 000; $-300$; 30; $-3$; 0,3; $-0{,}03$; 0,003; $-0{,}0003$. **104.** a) $a_{n+1} = a_n - 1$; b) $a_{n+1} = a_n/(a_n + 1)$; c) $a_{n+1} = 2 - a_n$. **105.** a) 99 e), g), 100 a), b), d), e); b) 99 b), i); c) 99 a), b), f), i); d) 99 a), e), g), 100 a), b), d), e); e) 99 a), b), c), d), e), f), g), h), i), 100 a), b), c), d), e); f) 99 a), b), c), d), f), h), i), 100 b), c); g) 99 a), b), c), d), f), h), i), 100 b), c). **107.** a) $N(\varepsilon) = 19$; 1 999; 199 999; b) $N(\varepsilon) = 2\,400$; 4 800; 7 200; c) $N(\varepsilon) = 1$; 2; d) $N(\varepsilon) = 3$; 6. **108.** a) $N(\varepsilon) = 9$; b) $N(\varepsilon) = 32$. **110.** a) 0; b) 0; c) diverguje d) diverguje; e) 0; f) diverguje. **111.** a) $-1/2$; b) $-1/2$. **112.** a) 2; b) 1; c) 1; d) 1/4. **114.** a) 2; b) 0; c) 1; d) 0. **115.** a) $a \leqq 4$; b) $a \geqq 1$; c) $a = 2$; d) $1/3 \leqq a \leqq 1/2$. **117.** 2, $-4$, $-3$, $-1/3$. **118.** a) $a^2$; b) $3a^2 + 6a - 2$. **119.** a) 3; b) $-15$; c) $-7/2$; d) 8; e) $3^{100}$; f) 5/17; g) 0; h) 1; i) 4; j) 0;

k) $-2$. **120.** a) $-4$; b) 16; c) $-\log_a 2$; d) 1; e) 1. **121.** a) 0; b) 1; c) $5^{2-e^2}$; d) $\infty$. **122.** a) e; b) $\sqrt{e}$; c) $1/e$; d) $1/e$; e) e; f) $e^{-5}$; g) 1; h) 0; i) $1/k!$. **123.** a) 0; b) 1/2; c) $(a+b)/2$. **124.** a) $-1/2$; b) $-1$; c) 1/3; d) 1/2; e) $x/2$. **125.** a) 1, ak $a > 1$; 1/2, ak $a = 1$; 0, ak $a < 1$; b) 0 pre $a \neq 1$, 1/2 pre $a = 1$; c) 0. **127.** a), b), c), f), h), majú; d), e), g) nemajú. **128.** a) $\infty$; b) $\infty$; c) $\infty$; d) $\infty$; e) $\infty$. **130.** a) Divergentná; b) môže byť aj konvergentná aj divergentná; c) divergentná. **131.** Môžu konvergovať aj divergovať. **132.** Nemusí platiť ani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ani $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, napr. $a_n = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$, $b_n = \left\{\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}$. **133.** $a^2\sqrt{3}$. **134.** $2\pi r^2$, $4r^2$. **135.** 2; $800\pi/7$. **136.** $a_0 \operatorname{cotg} \alpha/2$. **137.** $(v_0^2 \sin 2\alpha)/g(1-c^2)$. **138.** a) $I = E/r$; b) $I = E/R$. **139.** a) $(1/2 - 1/2^n)$ 60 %; $(1/2 + 1/2^n)$ 60 %; b) 30 %. **140.** $\dot{s} = 3\pi r/2$, $R = 6R_0$.

### 1,4. Spojitosť funkcie

**141.** a) Nemusí byť spojitá, je ohraničená v intervale $(a, b)$; b) nemusí byť spojitá; spojitosť inverznej funkcie definovanej v okolí čísla $f(x_0)$; c) spojitá. **142.** a) $\delta = \varepsilon/(1+\varepsilon)$; 1/11; 1/1 001; $1/(10^6+1)$; b) $\varepsilon = \delta$; 0,1; $10^{-3}$; $10^{-6}$. **144.** a) $(-\infty, \infty)$; b) $(-\infty, 1) \cup (1; \infty)$; c) $(-\infty, \infty)$; d) $(-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty)$. **145.** a), b), c), d) v každom intervale $(k, k+1)$, kde $k$ je celé číslo; e) v každom čísle $x \neq k$, kde $k$ je celé číslo rôzne od nuly. **146.** a) $(-\infty, 0) \cup \cup (0, \infty)$; b) $(-\infty, \infty) - \{k\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; c) $(-\infty, \infty) - \{k\pi/2\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; d) $(-\infty, \infty)$; e) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **147.** a) $(-\infty, \infty)$; b), c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; d) $(-\infty, \infty)$. **148.** a) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; b) $(-\infty, \infty) - \{k\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; c) $(0, 1) \cup (1, \infty)$; d) $(-\infty, \infty) - - \{2/(2k+1)\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **149.** a) $(9, \infty)$; b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. **150.** a) $(-\infty, 0) \cup \cup (0, \infty)$; b) nespojitá v číslach $1/n$ a $-n$, kde $n$ je prirodzené číslo. **151.** a) Nespojitá v každom čísle; b) $(-\infty, \infty)$. **152.** a) 4; b) 0; c) 1; d) 1/4. **153.** a) 1; b) 1. **154.** a) nespojitá; b), c), d), e) spojitá alebo nespojitá v čísle $a$. **155.** a), b), c), d) spojitá alebo nespojitá v čísle $a$. **156.** a) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$; $(-\infty, \infty)$; b) $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; c) $(-\infty, -1) \cup \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; d) $(-\infty, \infty) - \{k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $(-\infty, 0) \cup \cup (0, \infty)$; e) $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, \infty)$; f) $(-\infty, \infty)$; nespojitá v každom čísle z intervalu $\langle 0, 2\rangle$. **158.** Nespojitá sprava i zľava. **161.** a) $\langle 5, 125\rangle$; b) $\langle -4, 0\rangle$; c) $\{-1, 0, 1\}$. **162.** a) $\langle -1, 1\rangle$; b) $(0, \pi/4e)$; c) $\langle 2, 2 + 3\pi/2\rangle$; d) $(0, 2)$. **164.** 1,25. **165.** a) Má korene v intervaloch $(1, 2)$, $(5, 6)$; b), c), d) má riešenie. **166.** a) Nie je ohraničená, $\min f = 1$, $\max f$ neexistuje; b) ohraničená, $\max f = 1$, $\min f = -1$; c) nie je ohraničená, $\max f = 0$, $\min f$ neexistuje.

### 1,5. Limita funkcie

**167.** $\delta \leqq \min(\sqrt{1+\varepsilon} - 1, 1 - \sqrt{1-\varepsilon})$; 0,04; 0,004; 0,00 004; $4 \cdot 10^{-n-1}$. **168.** $\delta \leqq 1/\sqrt{C}$; 0,31; 0,1; 0,031; 0,001; $10^{-n/2}$. **169.** $k = 1/\varepsilon$; 10; 100; 1 000; $10^n$. **170.** $k = M^2$; $10^2$; $10^4$; $10^6$; $10^{12}$; $10^{2n}$. **171.** b) Ak $k$, $l$ sú násobnosti koreňa $a$ polynómov $P(x)$, $Q(x)$, $P(x) = (x-a)^k P_1(x)$, $Q(x) = (x-a)^l Q_1(x)$ a $a_0$, $b_0$ koeficienty pri najvyšších mocninách týchto polynómov, tak limita je 0 pre $k > l$, $a_0P_1(a)/b_0Q_1(a)$ pre $k = l$, $\pm\infty$ pre $k < l$, $l - k$ je párne číslo a neexistuje pre $k < l$, $l - k$ je nepárne číslo. **172.** 4. **173.** Neexistuje; $-1$; 4. **174.** a) 0; b) 1; c) neexistuje; d) 4; e) 2,5; f) 1. **175.** a) 4; b) 15/2; c) 0; d) $n/m$; e) 1/2; f) 6. **176.** a) 7/13; b) 3; c) 0; d) 1/8; e) 16; f) $6^{-100}$. **177.** a) $\sqrt{2}/4$; b) 1/4; c) 1/12; d) $5\sqrt{2}/96$; e) 0; f) 10/9; g) $1/n$; h) $-2/3$. **178.** a) $\sqrt[3]{2}/3$; b) $a/m - b/n$. **179.** a) 0; b) 1/2; c) 0; d) 0; e) 1; f) $-1/4$; g) 2; h) 0; i) 1; j) $1/\sqrt{2}$. **180.** a) 2; b) 8/9; c) $(-1)^{m-n}\, m/n$; d) $k$; e) 5/6; f) 0; g) 1/2; h) 0; i) 1. **181.** a) 11/3; b) $2/\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}/2$; d) 0; e) 0; f) $2\cos a$; g) $-1/\sqrt{2}$; h) 1. **182.** a) 1; b) 1/2; c) $2/\pi$; d) $(2\sqrt{\sin a})/(3\cos^2 a \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 a})$. **183.** a) 1; b) $\pi/2$; c) 0; d) $-\pi/2$. **184.** a) $\infty$; b) $\infty$; c) $\infty$; d) neexistuje. **185.** a) Neexistuje; b) 0; c) 0; d) neexistuje. **186.** a) $e^{-k}$; b) $e^3$; c) $e^2$; d) $e^2$; e) $1/\sqrt{e}$; f) $e^2$. **187.** a) 0; b) 1; c) e; d) $e^{3/2}$; e) $e^{\operatorname{cotg} a}$;

f) 1. **188.** a) $\sqrt{3/2}$; b) 0; c) $\infty$; d) 1. **189.** a) 2; b) 0; c) $2{,}5 \ln 2$; d) 1; e) $a$; f) $1/e$. **190.** a) $\ln a$; b) $e^3$; c) $1/\ln 9$; d) $\ln 3$; e) $e^5$; f) $\ln a$; g) $a^c \ln a$. **191.** a) $-2$; $-3$; b) 1; $-1$; c) 1; 1; d) neexistuje; neexistuje; e) 2; 2; f) $\infty$, 0. **192.** a) 0; $-\infty$; b) 0; 1; c) $-\infty$; $\infty$; 0; $-1$; 1; 6; d) 0; 3/2; e) neexistuje; 0; f) $-2$; 2; g) 1; $-1$.

## 2. Komplexná funkcia reálnej premennej

### 2.1. Komplexné čísla

**194.** a) 1. Každé reálne číslo; 2. neexistuje; 3. neexistuje; b) 1. každé rýdzo imaginárne číslo; 2. neexistuje; 3. každé rýdzo imaginárne číslo. **195.** a) $a = 4b/3$, $b$ je ľubovoľné reálne číslo; b) $a = -b/2$, $b$ je ľubovoľné reálne číslo. **196.** a) $b = 0$; b) $a = 0$; c) $a = b = 0$. **197.** $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = i$, alebo $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = -i$, alebo $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = i$, alebo $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = -i$. **198.** a) $x = -8/11$, $y = 7/11$; b) $x = -5/3$; $y = 2/3$. **199.** a) (6, 8); b) $(-6, -5)$; c) (4, 3); d) $3 + 6i$; e) 0; f) $1 + 6i$. **200.** a) $b_1 = -b_2$; $b_1 = b_2$; b) $a_1 = -a_2$ a $b_1 \neq -b_2$; $a_1 = a_2$ a $b_1 \neq b_2$; c) $b_1 \neq -b_2$; $b_1 \neq b_2$. **201.** a) (4, 7); b) (3, 1); c) (0, 6); d) $-2 + 3i$; e) $-7 + 22i$; f) 5. **202.** a) 1, i, i, i, $-1$, $-i$, i; b) $-6 - 6i$. **203.** a) $24 - 7i$; b) $29 - 2i$; c) $120 - 119i$; d) $-8i$. **204.** a) $a_2b_1 = -a_1b_2$; $a_2b_1 = a_1b_2$; b) $a_1a_2 = b_1b_2$ a $a_2b_1 \neq -a_1b_2$; $a_1a_2 = -b_1b_2$ a $a_2b_1 \neq a_1b_2$; c) $a_2b_1 \neq -b_2a_1$; $a_2b_1 \neq a_1b_2$. **205.** a) $7/10 + i/2$; b) $-$[illegible]$/25 + 7i/50$; c) $2i$; d) $-2(1 - i)/5$. **206.** a) $2i$; b) $-1/5 + 8i/5$. **207.** a) $x = 1/5$, $y = -1/5$; b) $x = 5$, $y = -1$. **208.** a) $5 - 3i$; b) $-4 + 2i$; c) $-2i$; d) 13; e) $23i/10$; f) $1/2 - 17i/2$. **210.** a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$; $2e^{i0}$; b) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$; $2e^{i\pi}$; c) $2[\cos (\pi/2) + i \sin (\pi/2)]$; $2e^{i\pi/2}$; d) $\sqrt{2}[\cos (\pi/4) + i \sin (\pi/4)]$; $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$; e) $2[\cos (-\pi/6) + i \sin (-\pi/6)]$; $2e^{-i\pi/6}$; f) $2[\cos (-\pi/3) + i \sin (-\pi/3)]$; $2e^{-i\pi/3}$; g) $2[\cos (2\pi/3) + i \sin (2\pi/3)$; $2e^{2\pi i/3}$; h) $2[\cos (4\pi/3) + i \sin (4\pi/3)]$; $2e^{i4\pi/3}$; i) $2[\cos (\pi/3) + i \sin (\pi/3)]$; $2e^{i\pi/3}$. **211.** a) $-i$; $4i$; b) $-2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$; $-\frac{1}{4}[\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}]$; c) $\frac{3}{2}[(-1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i]$; $\frac{1}{6}[(-1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i]$; d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3})i]$; $\frac{1}{16}[(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i]$. **212.** a) $-8 - 8i$; b) $-4096$; c) $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} e^{in\alpha/2}$; d) $2 \cos kx$; **214.** a) $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$; b) $\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$; c) $\sin 7x = 7 \cos^6 x \sin x - 35 \cos^4 x \sin^3 x + 21 \cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x$. **215.** a) $\frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$; b) $\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$; c) $\frac{1}{16} \sin 5x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x$; d) $-\frac{1}{32} \cos 6x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{5}{32} \cos 2x + \frac{5}{16}$. **216.** a) $\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ b) $\frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$;

c) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} - (-1)^n \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\cos \frac{x}{2}}\right]$. **217.** a) $\pm \sqrt{\frac{3}{2}} (1 + i)$; b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} (11 - i)$; c) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3} + i)$. **218.** a) $\cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2}$, $k = 0, 1$; b) $\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$; c) $\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$; d) $4\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$; e) $2\left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2,$

3, 4; f) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$; g) $\sqrt[10]{8}\left(\cos\dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi/4 + 2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; h) $3\left(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; i) $1/\sqrt[16]{2}\left(\cos\dfrac{\pi/12 + 2k\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi/12 + 12k\pi}{8}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **220.** 5. **221.** a) Symetrické podľa počiatku; b) symetrické podľa reálnej osi; c) otočenie o 90°; d) dilatácia; e) pootočenie o uhol $\varphi$; f) totožné. **222.** 1, $-1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$, $-1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2$. **223.** Vrcholy $n$-uholníka budú všetky komplexné čísla, pre ktoré platí: $\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. **224.** a) Priamka rovnobežná s reálnou osou a prechádzajúca bodom $A = (0, -3)$; b) všetky body kružnice so stredom v počiatku súradnicového systému s polomerom 2; c) množina všetkých bodov $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $-1 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$; d) všetky body polpriamky, ktorá má počiatok v počiatku súradnicového systému a s kladným smerom reálnej osi zviera uhol $\varphi = 1/2$; e) všetky body kruhu so stredom v bode $S = (0, 1)$ s polomerom 1; f) všetky body hyperboly o rovnici $(x - 1/4)^2 - y^2 = 1/16$. **225.** a) Množina všetkých bodov $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $0 < x \leqq y$; b) množina všetkých bodov $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $y^2 \leqq 2x - 1$; c) všetky body medzikružia so stredom v bode $O = (0, 0)$ s polomerom $r_1 = 2$, $r_2 = 3$; d) všetky body $(x, y)$, ktorých súradnice spĺňajú nerovnosti $0 \leqq x < 1$, $-\infty < y < \infty$; e) všetky body $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $x \leqq 5/2$ a $x \neq 2$; f) všetky body $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $0 \leqq x < \infty$, $x \operatorname{tg}\alpha \leqq y \leqq x \operatorname{tg}\alpha$. **226.** a) všetky body $(x, y)$, súradnice ktorých spĺňajú rovnicu $55x^2 + 63y^2 + 6xy - 168x - 72y - 720 = 0$; b) všetky body $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $x^2/4 + y^2/3 > 1$; c) všetky body $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 \leqq 1$ (vnútro lemniskáty); d) všetky body $(x, y)$, pre súradnice ktorých platí $\alpha x^2 + \alpha y^2 - y - \alpha = 0$.

### 2,2. Postupnosť komplexných čísiel

**227.** 1, i, $(1 + \mathrm{i})/2$, $(1 + 3\mathrm{i})/4$, $(3 + 5\mathrm{i})/8$, $(5 + 11\mathrm{i})/16$, $(11 + 21\mathrm{i})/32$, $(21 + 43\mathrm{i})/64$, $(43 + 85\mathrm{i})/128$. **228.** a) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$; b) $\{-1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$; c) $\{(-1)^{n+1}\mathrm{i}\}_{n=1}^{\infty}$; d) $\{-\mathrm{i}\}_{n=1}^{\infty}$. **229.** $2 + \mathrm{i}$, $2\mathrm{i}$. **230.** a) $(11 + 7\mathrm{i})/6$; b) $2\mathrm{i}$. **231.** a) 0; b) 1; c) $e^2(1 + \mathrm{i}\,e^2)$; d) $-4\mathrm{i}$; e) $3\mathrm{i}$; f) 4. **232.** a) 2; b) $-\mathrm{i}/2$; c) 0. **233.** a) 0; b) $-1$; c) $(\mathrm{i} - 1)/2$; d) $(3\mathrm{i} - 1)/10$; e) $e^{-1}$. **234.** a) 0 pre $|z| < 1$; 1 pre $z = 1$; neexistuje pre $|z| > 1$, resp. pre $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \neq 2k\pi$, kde $k$ je celé číslo; b) 0 pre $|z| \neq 1$; 1/2 pre $z = 1$; neexistuje pre $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \neq 2k\pi$, kde $k$ je celé číslo; c) $e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$. **235.** a) Divergentná ohraničená, $\{a_{4n+2}\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$; b) divergentná ohraničená, $\{a_{6n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$; c) divergentná neohraničená; d) divergentná ohraničená, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{4n} = e^{-1}$.

### 2,3. Komplexná funkcia reálnej premennej

**236.** a) 2, $2 + 3\mathrm{i}$, $2 - 6\mathrm{i}$; b) $6 + 2\mathrm{i}$, $3 + 5\mathrm{i}$, $3(1 + \sqrt{2}/2) + \mathrm{i}(2 - 3\sqrt{2}/2)$; c) $1 + \mathrm{i}$, $e + \mathrm{i}/e$, $\alpha + \mathrm{i}/\alpha$. **237.** a) nie, b) áno, c) áno, d) nie. **238.** a) $\operatorname{Re} z = t^4 - 24t^2 + 16$, $\operatorname{Im} z = 8t^3 - 32t$; b) $\operatorname{Re} z = 27t^2 - 36/t$, $\operatorname{Im} z = 54t - 8t^3$; c) $\operatorname{Re} z = |t\sqrt{2}|^{E(t)}\cos\left[\dfrac{3}{4}\pi E(t)\right]$, $\operatorname{Im} z = |t\sqrt{2}|^{E(t)}\sin\left[\dfrac{3}{4}\pi E(t)\right]$, d) $\operatorname{Re} z = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, $\operatorname{Im} z = -2t/(t^2 + 1)$; e) $\operatorname{Re} z = 2 + 3\cos t$, $\operatorname{Im} z = -1 + 3\sin t$; f) $\operatorname{Re} z = e^{-2t}\cos t$, $\operatorname{Im} z = -e^{-2t}\sin t$. **240.** a) $(-\infty, \infty)$; b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; c) $\langle -3, -1\rangle$; d) $\langle 4, 6\rangle$. **241.** a) Nespojitá v číslach $-2, -1, 1, 2$; b) nespojitá v čísle 0; c) nespojitá v číslach $k\pi/2$, $k$ je celé číslo; d) nespojitá na množine všetkých celých čísiel. **242.** a) $2 + \mathrm{i}$, b) $1 + \mathrm{i}\pi/2$; c) $2\mathrm{i}$; d) 0; e) 0. **244.** a) $z = A_1 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_2)} = A e^{(\mathrm{i}\omega t + \varphi)}$, kde $A = |A_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1} + A_2 e^{\mathrm{i}\varphi_2}|$, $\operatorname{tg}\varphi = (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)/(A_1 \cos\varphi_1 +$

$+ A_2 \cos \varphi_2)$; b) $z = \operatorname{Re} A\, e^{i(\omega t+\varphi_1)} + i \operatorname{Re} A\, e^{i(\omega t+\varphi_2)} = \frac{1}{2} A[(e^{i\varphi_1} + i\, e^{i\varphi_2})\, e^{i\omega t} + (e^{-i\varphi_1} + i\, e^{-i\varphi_2})]\, e^{-i\omega t}$. **245.** a) $\operatorname{Re} z = 2A \cos \omega t$; b) $\operatorname{Re} z = 2A \cos \frac{1}{2}\omega t \cos \frac{3}{2}\omega t$; c) $\operatorname{Re} z = A\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{1}{4}\pi\right)$.

## 3. Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej

### 3,1. Derivácia funkcie

**247.** a) 0; b) $-2$; c) $-1$; d) 0; $-500$, 0; e) $\pi^3/64$; f) $1 + \arcsin 1/\sqrt{2}$. **248.** a) $2x$; b) $-1/2\sqrt{x^3}$; c) $-1/x^2$; d) $2/\sqrt{4x+1}$; e) $1/\cos^2 x$; f) $E'(x) = 0$ pre $x \neq k$; neexistuje pre $x = k$. **249.** a) 0; $13 \cdot 2^{12}$; $13x^{12}$; b) neexistuje; $-3/16$; $-3x^{-4}$; c) neexistuje; $1/4$; $-2/x^3$; d) 0; $44\sqrt[3]{4}/3$; $11x^{8/3}/3$; e) neexistuje; $3/5\sqrt[5]{4}$; $3/5\sqrt[5]{x^2}$; f) neexistuje; $1/3\sqrt[3]{4}$; $-2/3\sqrt[3]{x^5}$; g) 0; neexistuje; $5\sqrt[4]{x}/4$; h) neexistuje; neexistuje; $7/8\sqrt[8]{x}$; i) neexistuje; $-7/12\sqrt[3]{2}$; $-14/3\sqrt[3]{x^{10}}$. **250.** a) 0; $-3/8$; b) 6; 0; c) 0; $-2/3$; d) $6a^3$. **251.** a) $1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$; b) $3x^2 + 14x^2\sqrt{x} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{15}{x^6} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$; c) $-\frac{1}{\sqrt[5]{t^7}} + \frac{1}{4t^{3,1}} - \frac{6}{\sqrt[11]{t^{17}}}$; d) $8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{\sqrt[15]{x^{14}}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$; e) $19\sqrt[12]{x^7}/12$; f) $(12x^7 + 3x^5 - 21x + 8)/3x^5$.

**252.** a) $4x^3 - 6x^2 + 8$; b) $7x^6 - 35x^4 + 4x^3 + 60x^2 - 10x - 20$; c) $7x^2\sqrt{x} - 0{,}65\sqrt[10]{x^9} + \sqrt{7}/2\sqrt{x}$; d) $3x^2 - 12x + 12$; e) $2(4x^7 - 5x^4 + x)$; f) $2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9)$; g) $x \sin 2x + \cos 2x$. **253.** a) $-4x^3/\sqrt[3]{\pi}$; b) $2/(x+1)^2$; c) $-2x(x^2-1)^2$; d) $2(1-x^2)/(1+x^2)^2$; e) $3 + \frac{5}{2x^2\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3\sqrt{2}}{x^4}$; f) $-(x^6 + 4x^5 - 4x^3 - 6x^2 - 8x)/(x^4+2)^2$; g) $-(1+2t)/(1+t+t^2)^2$; h) $(av^2 - 2av - 1)/(v-1)^2$. **254.** a) $\frac{1-4x^5}{3(x^5+1)^2} + 6x^5$; b) $-\frac{3x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x^2}{(x^3+1)^2} + (x^2-1)(5x^2-1)$; c) $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})^2} - \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$; d) $-(x^8 + 2x^7 - 7x^6 - 6x^5 - x^4 + 5x^2 + 4x - 2)/(x^5 + x^3 - x^2 - 1)^2$. **255.** a) $51(2+3x)^{16}$; b) $6(5x^4 - 3x^3 + 2x - 11)^5 \cdot (20x^3 - 9x^2 + 2)$; c) $50\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{99}\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$; d) $4(1 + 2\sqrt{t} - 3/t^2)^3\left(1/\sqrt{t} + \frac{6}{t^3}\right)$; e) $-x/\sqrt{4-x^2}$; f) $(2ax+b)/2\sqrt{ax^2+bx+c}$; g) $4/3\sqrt[3]{2x+3}$; h) $(s-3)/\sqrt{(6s-s^2)^3}$; i) $-1/(1+x)\sqrt{1-x^2}$; j) $-1/2(1+\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}$; **256.** $\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

**257.** a) $\frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x)^2}}$; b) $\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}$; c) $1/24\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2} \cdot \sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}})^3}$. **258.** a) $(1+2x^2)/\sqrt{1+x^2}$; b) $135t^7/\sqrt[4]{(9t^4-3)^3}$; c) $28s\sqrt[3]{3s+7}$; d) $-3x^2/2\sqrt[4]{(1-x^3)^3(1+x^3)^2}$; e) $2x(1+x^2)/\sqrt{(1-x^4)^3}$; f) $2/(x+\sqrt{1+x^2})^2\sqrt{1+x^2}$.
**259.** a) $-5\sin(5x+3)$; b) $2(\cos x + \cos 2x)$; c) $-3x\sin x + (2-x^2)\cos x$; d) $4x\cos 2x^2$;

e) $a \cos ax \,.\, \cos bx - b \sin ax \,.\, \sin bx$; f) $(\sin x)/\cos^2 x$; g) $-1/(1 - \cos x)$; h) $(\sin^3 x - \cos^3 x)/\sin^2 2x$; i) $2(\sin x \,.\, \cos x^2 - x \sin x^2 \,.\, \cos x)/\cos^3 x$. **260.** a) $\cos x \,.\, (9 \sin^2 x - 4 \sin x + 1)$; b) $-3/\sin^4 x$; c) $-1/x^2\cos^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; d) $-1/2\sqrt{x} \sin^2\sqrt{x}$; e) $\dfrac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}} \sin \sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$; f) $2x/\cos^2(x^2+1)$; g) $20(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)^9/\cos^2 x$; h) $\dfrac{-1}{\sin^2 \sqrt[5]{1+x^5}} \dfrac{x^4}{\sqrt[5]{(1+x^5)^4}}$; i) $\dfrac{\cos\dfrac{2x}{3}}{3\sqrt{\sin\dfrac{2x}{3}}}$; j) $(-3\sqrt{3}/\sqrt{x^3}) \sin^2 \sqrt{3/x} \,.\, \cos \sqrt{3/x}$. **261.** a) $1/\sin^2 x \cos^6 x$; b) $(2 \sin^5 x + 5 \sin^7 x + 6 \cos^9 x + 3 \cos^{11} x)/\sin^4 x \cos^8 x$; c) $3/\cos^2 3x$; d) $\cos[\sin(\sin x)] \,.\, \cos(\sin x) \,.\, \cos x$; e) $-3 \sin^2[\cos^2(\operatorname{tg} x)] \,.\, \cos[\cos^2(\operatorname{tg} x)] \,.\, [\sin(2 \operatorname{tg} x)]/\cos^2 x$. **262.** $\left[\sin nx - 2n \sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x\right]/4 \sin^2\dfrac{x}{2}$. **263.** a) $3 \,.\, 4^{3x} \ln 4$; b) $\dfrac{7^{-1/4x}}{4x^2} \ln 7$; c) $x^2 \,.\, 3^{x^3+1} \ln 3$; d) $4^x \ln 4 - 4x^3$; e) $2^{1/\cos x} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \ln 2$; f) $10^{-x}(1 - x \ln 10)$. **264.** a) $-e^{-x}/3$; b) $5x^4 e^{x^5}$; c) $e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx)$; d) $-e^{-x}(\sin x + \cos x)$; e) $e^x(x^2 + 4x)$; f) $2e^x/(e^x + 1)^2$. **265.** a) $(2x + 1) e^{\sqrt{x^2+x+1}}/2\sqrt{x^2 + x + 1}$; b) $-\sin x \,.\, e^{\sqrt{\cos x}}/2\sqrt{\cos x}$; c) $2e^{\operatorname{arctg} 2x}/(1 + 4x^2)$; d) $\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} e^{x/\ln x}$; e) $2(x + 1) e^{x^2+2x-1}/\cos^2(e^{x^2+2x-1})$; f) $Ce^{-L/RT}(1 + L/RT)$. **266.** a) $2/(2x + 3)$; b) $(1 + 4x)/(x + 2x^2) \ln 10$; c) $(4 \ln^3 x)/x$; d) $(2 \log_2 x)/x \ln 2$; e) $x^2(3 \log_2 x + 1/\ln 2)$; f) $-23/(5 + 4x)(3 + 7x)$; g) $2 \operatorname{cotg} 2x$; h) $1/\sqrt{1 + x^2}$; i) $(13 e^x + 3x^2)/(13 e^x + x^3)$; j) $\ln x$. **267.** a) $-1/(1 + x^2) \operatorname{arccotg} x$; b) $1/\cos x$; c) $(-e^x \operatorname{tg} \sqrt{e^x + 1})/2\sqrt{e^x + 1}$; d) $-1/\cos x$; e) $[8 \ln^3(\operatorname{tg} x)]/\sin 2x$; f) $1/x\sqrt{\ln x^2}$; g) $-1/3 \sin \dfrac{4x+2}{3} \sqrt[4]{\left(\ln \operatorname{cotg} \dfrac{2x+1}{3}\right)^3}$; h) $1/x \ln x \,.\, \ln(\ln x)$; i) $-(\operatorname{tg} x)/3 \sqrt[3]{(\ln \cos x)^2}$; j) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \,.\, 3^{\ln(x^2+x+1)} \ln 3$. **268.** a) $(1 + 3x^4)/x(1 - x^4)$; b) $\sqrt{21}/(7x^2 - 3)$; c) $12/x(2x^2 + 7x + 6)$. **269.** a) $1/\sqrt{49 - x^2}$; b) $-\sqrt{3}/\sqrt{5 + 2x - 3x^2}$; c) $\arcsin x$; d) $-m/(1 + m^2x^2)$; e) $-1/(1 + x^2)$; f) $2x/(x^4 + 2x^2 + 2)$. **270.** a) 0; b) $1/2(1 + x^2)$; c) $(\cos x)/|\cos x|$; d) 1; e) $(2 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x})/(1 + x)\sqrt{x}$; f) $(-15 \arccos^2 5x)/\sqrt{1 - 25x^2}$. **271.** a) $\left(-2 \arcsin \dfrac{1}{x-1}\right) \Big/ |x - 1| \sqrt{x^2 - 2x}$; b) $1/\sqrt{(1 - x^2)^3}$; c) $-1/2$; d) $1/\sqrt{-x^2 + 8x - 12}$. **272.** a) $3 \cosh(3x + 5)$; b) $x \cosh x$; c) $2 \sinh x \,.\, \cos x$; d) $(2 \sinh x \,.\, \sin x)/(\sinh x + \sin x)^2$; e) $2 \sinh 2x$. **273.** a) $\cosh^3 x$; b) $\operatorname{cotgh} x$; c) $\sinh x \,.\, \cosh(\cosh x)$; d) $-\sin(\cosh x) \,.\, \sinh x$; e) $e^{\operatorname{tg} x}/\cosh^2 x$; f) $(8x \operatorname{tgh}^3 x^2)/\cosh^2 x^2$; g) 0; h) $(3 \operatorname{tgh} x\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 x})/\cosh^2 x$; i) $\operatorname{tgh}^3 x$. **274.** a) $x^x(1 + \ln x)$; b) $-27x^{-3x}(1 + \ln x)$; c) $x^{x^2+1}(1 + 2 \ln x)$; d) $e^x x^{e^x}(\ln x + 1/x)$; e) $x^{\sin x}[\cos x \,.\, \ln x + (\sin x)/x]$; f) 0; g) $x^{x^x} \,.\, x^x(\ln^2 x + \ln x + 1/x)$; h) $(a/x)^x(\ln(a/x) - 1)$; i) $(\sin x)^{\cos x}[(\cos^2 x)/\sin x - \sin x \,.\, \ln \sin x]$. **275.** a) $(\operatorname{tg} x)^{1/\cos x}\left(\sin x \,.\, \log \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\sin x}\right)/\cos^2 x$; b) $(x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x - 1}[\ln(x^2 + 1) + 2x \operatorname{arctg} x]$; c) $(\cosh x)^{\ln x}[\operatorname{tgh} x \,.\, \ln x + (\ln \cosh x)/x]$; d) $(-\log_x a)/x \ln x$; e) $(\ln x)^{x-1}(1 + \ln x \,.\, \ln \ln x)$; f) $2x^{\ln x - 1} \ln x$. **276.** a) $(x + 5)^2(2x + 7)^3(x - 2)(x - 3)\left[\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{3}{2x+7} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right]$; e) $\dfrac{10x}{(x^2-1)^2} \sin^3 x \,.\, \cos^4 x + \dfrac{5x^2}{x^2+1} \sin^2 x \,.\, \cos^3 x \,.\, (3 \cos^2 x - 4 \sin^2 x)$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}} \,.\, \dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{3(x^5 - x)}$; b) $(x + 5)(x - 4)(536 + 198x + 6x^2 - 2x^3)/(x + 2)^6(x + 4)^3$; d) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x+4)^5} \sqrt{(x-1)^3}} \left[\dfrac{1}{2(x-2)} - \dfrac{35}{6(7x+4)} - \dfrac{3}{2(x-1)}\right]$. **277.** a) $2 e^{2x} \operatorname{cotg} e^{2x}$; b)

$\operatorname{cotg} e^x - (x e^x)/\sin^2 e^x$; c) $\cos x\, e^{\sin x}(1 + \sin x)$; d) $(a^2 + 1)\, e^{ax} \cos x$; e) $1/x\left(1 + \ln^2 \frac{1}{x}\right)$; f) $1/2(x + 1)\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$; g) $2x^7/(x^{16} - 1)$; h) $-1/x\sqrt{1 - \ln^2 x}$. **278.** a) $2\sqrt{a^2 - x^2}$; b) $-6x^8/(1 + x^6)^2$; c) $2 \operatorname{tg} x + \frac{2}{\sin^2 x}\left[\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x) + \frac{\operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}\right]$; d) $1/(x^3 + 1)$. **279.** a) $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$; b) $1/x(1 + x^3)^2$; c) $4x^2/(x^4 - 16)$; d) $\sqrt{1 + x^2}/(x^2 + 2)$; e) $1/(1 + x^2 + x^4)$. **280.** a) 1 pre $x > 2$; $-1$ pre $x < 2$; neexistuje pre $x = 2$; b) $3x|x|$; c) $1/2\sqrt{(x - 1)}$ pre $x > 1$, $-1/2\sqrt{1 - x}$ pre $x < 1$, $f'(1)$ neexistuje, $f'_+(1) = \infty$, $f'_-(1) = -\infty$; d) $1/(x - 3)$ pre $x \neq 3$, $f'(3)$ neexistuje; $f'_+(3)$, $f'_-(3)$ neexistuje, lebo neexistuje $f(3)$; e) $f'(x) = 1$ pre $x \in (-\infty, -1)$, $f'_+(-1) = -1$, $f'_-(-1) = 1$; $f'(x) = -1$ pre $x \in (-1, 2)$, $f'_+(2) = -3$, $f'_-(2) = -1$, $f'(x) = -3$ pre $x \in (2, 4)$, $f'_+(4) = -1$, $f'_-(4) = -3$; $f'(x) = -1$ pre $x \in (4, \infty)$. **281.** a) $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = -\pi$; b) $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$; c) $f'_+(0)$ neexistuje, $f'_-(0)$ neexistuje; d) $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 1$. **282.** a) $2|x|$; b) 1 pre $x \neq k$, kde $k$ je celé číslo; c) 0 pre $x \neq k$, kde $k$ je celé číslo; d) $E(x)\,(-1)^{E(x)}\pi \,.\cos \pi x$, pre $x \neq k$, kde $k$ je celé číslo; e) $(-1)^{k+1} \sin x$ pre $x \neq \pi/2 + k$, kde $k$ je celé číslo; f) neexistuje pre $x \neq 0$, $f'(0) = 0$. **283.** a) $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$; $f'(0) = 0$; b) $\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$, $f'(0)$ neexistuje; c) 1 pre $x \leqq 0$, $1/(1 + x)$ pre $x > 0$; d) $-1$ pre $x \leqq 1$, $-3 + 2x$ pre $x \in (1, 2)$, 1 pre $x \geqq 2$.

### 3,2. Geometrický a fyzikálny význam derivácie

**286.** a) $4x - y - 4 = 0$; $x + 4y - 18 = 0$; b) $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; c) $4x - y + 1 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$. **287.** a) $x - 2\sqrt{5}y + 5 = 0$, $2\sqrt{5}x + y - 11\sqrt{5} = 0$; b) $5x - y - 2 = 0$, $x + 5y - 16 = 0$; c) $x + y - 4 = 0$, $x - y = 0$; d) $2x - y + 2 - \pi/2 = 0$, $x + 2y - 4 - \pi/4 = 0$; e) $y = x$, $y = -x$; f) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$. **288.** a) $A = (1, -2)$, $B = (-1, 2)$; b) $A = (e, 1/e)$; c) $A = ((\ln 5 - \ln \ln 10)/\ln 10, 5/\ln 10)$. **289.** a) $12x - 4y - 13 = 0$, $4x + 12y - 61 = 0$; b) $4x - 4y + 3 = 0$, $4x + 4y - 15 = 0$; c) $12x - 4y - 13 = 0$, $4x + 12y - 61 = 0$; $12x + 36y - 83 = 0$, $108x - 36y - 17 = 0$. **290.** a) $2x - y - 1 - \ln 2 = 0$, $2x + 4y - 1 + 4 \ln 2 = 0$; b) $x - 2y + 3 = 0$, $4x + 2y - 3 = 0$; c) $y = x$, $y = -x$. **291.** a) $x - y - 3\,e^{-2} = 0$; b) $x - 2y + 6 = 0$. **292.** arctg 12,5 čiže približne 85°25′34″. **293.** $a = e^{1/e}$, $A = (e, e)$. **296.** a) $M = (1, 1/3)$, $N = (-1, -1/3)$; b) $M = (1/\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}/9)$, $N = (-1/\sqrt[4]{3}, -\sqrt[4]{3}/9)$; c) $M = (0, 0)$. **297.** a) $\pi/4$, resp. $3\pi/4$; b) $\pi/4$; c) arctg 1/2, 26°34′; d) arctg 2, 63°26′; e) $\pi/4$. **298.** 4. **299.** a) arctg 1/7, 8°7′48″; b) 0; c) arctg $2\sqrt{2}$, 70°31′43″; d) $\pi/4$; arctg $(e/(e^2 + 1))$, 16°8′47″. **300.** a) $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 2, 2; b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, 1; c) $\sqrt{1 + 4 \ln^2 2}/\ln 2$, $2\sqrt{1 + 4 \ln^2 2}$, $4 \ln 2$, $1/\ln 2$. **302.** $y_0^2/a$. **306.** $A = (3, 8)$. **307.** 1,508 $m^3 s^{-1}$. **308.** 2 s; 3 s. **309.** 2 304 km, 1 536 km/h, $-256$ km/h²; 4 h, 8 h; 4 096 km. **310.** a) 80,4 m $s^{-1}$; b) $-47$ m $s^{-1}$; c) 10,2 s; d) 510,20 m. **311.** 500 m. **312.** 40 m $s^{-1}$. **313.** $v = -2\pi(2 \sin 2\pi t + 3 \cos 2\pi t)$; $\sqrt{13}$. **314.** 50 km/h. **315.** a) 58,31 km/h; $u = (3\,400t - 1\,000)/\sqrt{900t^2 + (50t - 20)^2}$; 10,29 km. **316.** $u = (936t - 643{,}5)/\sqrt{936t^2 - 1\,287t + 452{,}5625}$. **317.** a) 2,285 m $s^{-1}$; b) 24/35 m $s^{-1}$; **318.** 2/3 m $s^{-1}$. **319.** $40\pi/3$ km/min. **320.** a) 2 A, 8 A, 32 A, 3 s; b) 2 A, 1 s; c) 5,06 A, 0,00112... $+ k/50$. **321.** 1,90V. **322.** a) $k(A - x)$; b) $k(x - A)(x - B)$. **323.** 0,234 g/cm³. **324.** $-3$ Mp; 12,5 Mp m. **325.** $-0{,}00820$ kcal $m^{-2} s^{-1} deg^{-1}$, $-0{,}00816$ kcal $m^{-2} s^{-1} deg^{-1}$, $-0{,}00820$ kcal $m^{-2} s^{-1} deg^{-1}$.

### 3,3. Derivácie vyšších rádov

**326.** a) $-14$, 6; b) 0, 11/8; c) 0, $8(\sin 2)/\cos^3 2$; d) 0, $-2/e$. **327.** a) $4/(1 - x)^3$; b) $-3x/\sqrt{(1 + x^2)^5}$; c) $1/x$; d) $\frac{-3x}{(1 - x^2)^2} + \frac{(1 + 2x^2) \arccos x}{(1 - x^2)^{5/2}}$. **328.** a) $f''(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x}$,

$f''(0)$ neexistuje; b) $f''(x) = 6|x|$. **329.** $y'' = f''(g)g'^2 + f'(g)\,g''$; $y''' = f'''(g)\,g'^3 + 3f''(g)\,g'g'' + f'(g)\,g'''$. **331.** $[f_{-1}(x)]'' = -\left[\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]_{x=f_{-1}(x)}$, $f'''_{-1}(x) = -\left[\dfrac{f'(x)\,f'''(x) - 3f''^2(x)}{f'^5(x)}\right]_{x=f_{-1}(x)}$.
**332.** a) $360x^2 + 120$; b) $72\,072/x^{15}$; c) $4/(x-1)^3$; d) $408\,240$; e) $120(1+x)^3$; f) $\dfrac{397!!(799-x)}{2^{200}(1+x)^{401/2}}$.
**333.** a) $a^x \ln^6 a$; b) $-6/x^4 \ln a$; c) $2 \sin x/\cos^3 x$; d) $(6x^2 - 2)/(1+x^2)^3$. **334.** a) $e^x(x^3 + 12x^2 + 36x + 24)$; b) $24/x$; c) $(12 - 8x^2)\cos 2x - 24x \sin 2x$; d) $x \cosh x + 100 \sinh x$; e) $2^{18}(\cos 2x + 2^{20}\cos 4x + 3^{20}\cos 6x)$. **335.** a) $4\,e^x(\sin x - \cos x)$; b) $64\,e^{2x}(x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 60x + 22{,}5)$; c) $e^x(x^2 + 2nx + n^2 - n)$; d) $-e^{4x}(3\,116 \sin 3x + 237 \cos 3x)$. **336.** a) $(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n(2n-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{x^n}$, $n \geqq 1$; b) $\dfrac{(-1)^{n-1}5n!}{(x+2)^{n+1}}$; c) $\dfrac{(n-1)!}{x}$; d) $-2^{n-1}\cos(2x + n\pi/2)$; e) $\dfrac{3}{4}\cos(x + n\pi/2) + \dfrac{3^n}{4}\cos(3x + n\pi/2)$; f) $2^n x \cos(2x + n\pi/2) + n2^{n-1}\sin(2x + n\pi/2)$; g) $2^n \cosh 2x$ pre $n$ párne, $2^x \sinh 2x$ pre $n$ nepárne. **337.** a) $f'(0) = 1$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2$, $k = 1, 2, \ldots$; b) $f^{(2k-1)}(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^{k-1}2(2k-1)!\,[1 + 1/3 + \ldots + 1/(2k-1)]$. **338.** a) $\dfrac{m!}{(m-n)!}\,b^n(a+bx)^{m-n}$; b) $\dfrac{(-1)^n n!\,b^n}{(a+bx)^{n-1}}$; c) $(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!\,b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$; d) $p^n \sin(px + n\pi/2)$. **341.** $v = -A\alpha^2 t\,e^{-\alpha t}$, $a = A\alpha^2\,e^{-\alpha t}(\alpha t - 1)$. **342.** $a = \dfrac{mrv_0^2}{(m + rv_0t)^2}$, $f = ma = r\left(\dfrac{mv_0}{m + rv_0t}\right)^2$.

### 3,4. Diferenciál a diferenciály vyšších rádov funkcie jednej reálnej premennej

**343.** a) 0,63, 0,6; b) $-2{,}152$, $-2$; c) $-0{,}09$, $-0{,}1$; d) $(\ln 0{,}973)/2$, $-0{,}013$. **344.** a) $df(x) = \dfrac{24x\sqrt[3]{x^2} + 1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; b) $df(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$; c) $df(x) = (\sin 2x + 2x \cos 2x)\,dx$; d) $df(x) = \dfrac{6x^2 \sin x - 2x^3 \cos x}{\sin^4 x}\,dx$; **345.** a) $df(x) = \dfrac{3}{1 + 9x^2}\,dx$; b) $df(x) = a^x(2x + x^2 \ln a)\,dx$; c) $df(x) = 2^{(-\ln x)/x}\ln 2\,\dfrac{\ln x - 1}{x}\,dx$; d) $df(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; **346.** $d^2(f \pm g) = f''dx^2 \pm g''dx^2$; $d^2(fg) = f\,d^2g + 2\,df\,dg + g\,d^2f$; $d^2(f/g) = [g^3\,d^2f - g^2f\,d^2g - 2g^2\,df\,dg + 2fg(dg)^2]/g^4$, $g \neq 0$. **347.** a) $d^3f(1) = -0{,}048$; b) $d^2f(0) = -0{,}01$; c) $d^2f(1) = 0{,}02$; d) $d^4f(2) = -1/2\,048 \ln 10$. **348.** a) $d^3f(x) = (10\,dx^3)/27x^2\sqrt[3]{x^2}$; b) $d^{10}f(x) = (-x \sin x - 10 \cos x)\,dx^{10}$; c) $d^4f(x) = (6\,dx^4)/x$; d) $d^4f(x) = -4\,e^x \cos x\,dx^4$; e) $d^nf(x) = \left[\sum\limits_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(x^n)^{(m)}\,e^x\right]dx^n$; f) $d^nf(x) = [(-1)^n n!\,(x^{-n-1} - (x-1)^{-n-1})]\,dx^n$. **349.** a) 9,05; b) 6,259; c) 1,997. **350.** a) 4,0432; b) 1,2; c) 5,0015. **351.** a) 3,2197, 3,2029; b) 3,00043; c) 1,035906; d) 0,835398; e) 0,2; f) 2,003. **352.** a) 0,04, 0,014; b) 0,01; 1. **353.** a) 10,981; b) 10,8. **354.** a) $4\pi R^2\Delta r + 4\pi R(\Delta r)^2 + \dfrac{4}{3}\pi(\Delta r)^3$, $4\pi R^2\Delta r$; b) $8\pi R\Delta r + 4\pi(\Delta r)^2$, $8\pi R\Delta r$. **356.** 0,01726. **358.** $p_{0°} \doteq p[1 - (\alpha - \alpha')\,t]$. **359.** a) $-p_0/11$, $-p_0/10$; b) $p_0[1/(1{,}1)^{3/2} - 1]$, $-3p_0/20$. **360.** a) $(-U_0\Delta R)/[R(R - \Delta R)]$, $(-U_0\Delta R)/R^2$.

### 3,5. Vety o prírastku funkcie

**361.** a) $\alpha$) Neplatí; $\beta$) platí, $(1 + \sqrt{7})/3$, $(1 - \sqrt{7})/3$; $\gamma$) platí, $(1 - \sqrt{7})/3$; $\delta$) platí $(1 + \sqrt{7}/3)$; b) platí, 0; c) platí, tg $(\pi/c) = \pi/c$, $c \doteq 2/(2k+1)$, pre veľké prirodzené čísla. **362.** a) Nie je spojitá v $\langle 0, 1\rangle$; b) nemá deriváciu v čísle 0; c) nemá deriváciu v čísle 0. **363.** a) $(-1, 0)$; b) $(-A-1,$

$A + 1)$, kde $A = \max\{a, b, c\}$; c) $(0, 1)$. **866.** a) Platí, $(5 + \sqrt{97})/12$, $(5 - \sqrt{97})/12$; b) platí, $\sqrt{2}$; c) platí, $e - 1$; d) platí, $\pm\sqrt{1 - 4/\pi^2}$. **868.** a) $(7,4 - 3\pi,\ 3,2 - 3\pi/2)$; b) $(5/2 + 1/10,\ 5/2 + 1/5)$; c) $(4/11,\ 4/10)$; d) $(1/2,\ 1/\sqrt{3})$; e) $(\pi/4 + 2/13,\ \pi/4 + 1/4)$; f) $(\pi/4 - 1,\ (\pi/2 - 2)(\sqrt{3} - 1)/18)$. **869.** a) Neplatí, b) platí, $2/3$; c) neplatí; d) platí, $\pi/4$.

**3,6. Taylorova veta**

**870.** a) $-5 + 10(x - 2) + 21(x - 2)^2 + 8(x - 2)^3 + (x - 2)^4$; b) $999\,805 + 29\,998(x - 100) + 300(x - 100)^2 + (x - 100)^3$. **871.** a) $1 + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{1}{9}(x - 1)^2 + \frac{4}{81}(x - 1)^3$; b) $(x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3$; c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{8}(x - 2)^2 - \frac{1}{16}(x - 2)^3 + \frac{1}{32}(x - 2)^4$; d) $\ln 4 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{32}(x - 4)^2 + \frac{1}{192}(x - 4)^3 - \frac{1}{1\,024}(x - 4)^4$. **872.** a) $1 + 2x + 2x^2$; b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$; c) $x^3 - \frac{1}{2}x^5$; d) $x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$; e) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2$; f) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$. **873.** a) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \ldots + \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k - 1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2k}x^{2k}$; b) $1 - x\ln 2 + \frac{x^2}{2!}(\ln 2)^2 - \frac{x^3}{3!}(\ln 2)^3 + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}(\ln 2)^n$; c) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $T_{2n+1} = T_{2n}$; d) $2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}\right)$, $T_{2n} = T_{2n-1}$. **875.** $x$; $x - \frac{x^3}{3!}$; $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. **879.** 8. **880.** 5. **881.** a) $x < 0,03162$; b) $x < 0,14424$. **882.** a) 1,99727; b) 1,7724; c) 1,1211; d) 1,0391. **883.** a) 0,7; b) 1,08; c) 2,718. **884.** a) 3; b) 4; c) 4; d) 4.

**3,7. L'Hospitalovo pravidlo**

**885.** a) 2; b) $(n - 1)/n$; c) $1/6$; d) $1/12$; e) $\sqrt{3}/\sqrt{8}$; f) $(n^2 - m^2)/2$. **886.** a) $-\pi/4$; b) 1; c) $1/\ln 2$; d) $\ln(a/b)$; e) $-\infty$. **887.** a) $2/9$; b) $(-\ln a)/3$; c) $-1$. **888.** a) 0, ak $a > 1$; $\infty$, ak $0 < a < 1$; b) $\infty$; c) $3/5$; d) 0. **889.** a) $a^2/b^2$; b) 1; c) $-2$; d) 0. **890.** a) $-\infty$; b) $\infty$; c) 0; d) $-1$. **891.** a) $1/2$; b) $1/2$; c) $1/6$; d) 0. **892.** a) 0; b) 0; c) 0; d) 1; e) $2/\pi$; f) $-4/\pi$. **893.** a) 1; b) 1; c) $e^{-1}$; d) $e^m$; **894.** a) 1; b) 1; c) 1; d) $e^{-2}$. **895.** a) 1; b) $e^{\cot g\, a}$; c) $e^{-2/\pi}$; d) $\sqrt{e}$. **896.** a) Nemožno, 1; b) nemožno, 0; c) nemožno, 1 . **897.** 180 [W]. **898.** 0.

**3,8. Algebraické rovnice**

**399.** a) 1, $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$; b) $-1$, $(1 \pm i\sqrt{3})/2$; c) $(1 \pm i)/\sqrt{2}$, $(-1 \pm i)/\sqrt{2}$; d) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$, $1 \pm i$, $-1 \pm i$; e) $4 \pm i$, $-4 \pm i$; f) 1, $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, 2, $-1 \pm i\sqrt{3}$. **401.** a) $x^3 - 4x = 0$; b) $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$; c) $x^3 - (7 + \sqrt{2})x^2 + (19 + 4\sqrt{2})x - 21 - 7\sqrt{2} = 0$; d) $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 22x + 14 = 0$. **402.** a) $x^5 + (-8 + i)x^4 + (12 - 3i)x^3 + (26 - 3i)x^2 + (-61 + 11i)x + 30 - 6i = 0$, $x^6 - 13x^5 + 53x^4 - 37x^3 - 194x^2 + 346x - 156 = 0$; b) $x^3 + (-9 + 3i)x^2 + (24 - 18i)x - 18 + 26i = 0$, $x^6 - 18x^5 + 138x^4 - 576x^3 - 1\,380x^2 - 1800x + 1000 = 0$; c) $x^3 - (2 + 3i)x^2 + (-3 + 4i)x + 2 + i = 0$, $x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x + 5 = 0$. **403.** a) $a = 6$; b) $a = -1$, $b = -6$; c) $a = -50$, $b = -10$. **404.** a) $2 - 3i$, $3 + 5i$; b) $-2 + i$, $-2 - i$, 2; c) $-2 \pm i$, $(1 \pm i\sqrt{3})/2$; d) i, i, $-i$, $-i$, $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$. **405.** $a = 11$; 2, $-2 \pm \sqrt{7}$. **406.** $a = 4$, $b = -3,5$; $-5$, $(1 \pm i\sqrt{5})/2$. **408.** a) 2, $-1 \pm i\sqrt{2}$; b) $1/2$, $(2 \pm i\sqrt{3})/7$; c) 1, $-2$, $1/2$, $1/2$; d) 2, $-2/3$, $(1 \pm i\sqrt{7})/4$; e) 1, $-2$, 3, i, $-i$. **409.** a) 4; b) 3; c) 3. **410.** a) $-2$, $-2$, 3; b) 1, 1, $-2$, $-2$; c) 2, 2, 2, i, $-i$. **411.** a) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$; b) $x^2 - 3x - 4 = 0$; c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$. **412.** a) $-54$, 54; b) $-5$. **413.** a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$; b) $(x - 1)^2(x + 1)(x - 2)$; c) $9(x - \sqrt{2/3})(x + \sqrt{2/3})(x - i\sqrt{2/3})(x + i\sqrt{2/3})$; d) $4(x - 1)(x + 1)(x -$

$-1/\sqrt{2})(x+1/\sqrt{2})$. **414.** a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$; b) $(x^2+4)(x^2-2\sqrt{3}x+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4)$; c) $(x+5)(x^2-2x+2)$; d) $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos((3k+1)2\pi/3n)+1)$. **415.** 1, $-1$, i, $-$i, 1, $(-1\pm i\sqrt{3})/2$. **416.** $c=-3$; $-1/2$; $(1\pm\sqrt{13})/2$. **417.** $c=6$, $c=-6$, 1; 2, $-3$; $-1$, $-2$, 3.

### 3,9. Monotónnosť funkcie

**418.** a) Nie je; b) je, neklesajúca; c) je, nerastúca. **419.** a) $(-\infty,-1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3},\infty)$ rastie; $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ klesá; b) $(-\infty,-3)$, $(3,\infty)$ rastie; $(-3,3)$ klesá; c) $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ klesá, $(-1,1)$ rastie; d) $(-\infty,-1)$ klesá, $(-1,1)$ neklesá a nerastie, $(1,\infty)$ rastie; e) $(-\infty,0)$ $(0,2/3)$, $(2,\infty)$ klesá; $(2/3,1)$, $(1,2)$ rastie; f) $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\infty)$ rastie, $(-\sqrt{3},-1)$, $(-1,1)$, $(1,\sqrt{3})$ klesá; g) $(-\infty,-5)$, $(-1,\infty)$ rastie; $(-5,-1)$ klesá; h) $(-\infty,-1)$ klesá, $(-1,1)$ nerastie a neklesá, $(1,\infty)$ rastie. **420.** a) $(-\infty,-1/\sqrt{2})$, $(0,1/\sqrt{2})$ rastie; $(-1/\sqrt{2},0)$, $(1/\sqrt{2},\infty)$ klesá; b) $(-1/3,\infty)$ rastie, $(-\infty,-1/3)$ klesá; c) $(-\infty,\infty)$ rastie. **421.** a) $(-\infty,\infty)$ rastie; b) $(-3\pi/4+2k\pi,\pi/4+2k\pi)$ $k$ je celé číslo, rastie; $(\pi/4+2k\pi,5\pi/4+2k\pi)$, $k$ je celé číslo, klesá; c) $(-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi)$, $\left(\pi/2+2k\pi,\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2k\pi\right)$, $\left(\pi+\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi,3\pi/2+2k\pi\right)$, $k$ je celé číslo, rastie; $\left(\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2k\pi,\pi+\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi\right)$, $k$ je celé číslo, klesá; d) $(2k\pi,2\pi/3+2k\pi)$, $(\pi+2k\pi,4\pi/3+2k\pi)$, $k$ celé číslo, funkcia klesá, $(2\pi/3+2k\pi,\pi+2k\pi)$, $(4\pi/3+2k\pi,2\pi+2k\pi)$, $k$ je celé číslo, funkcia rastie. **422.** a) $(-\infty,0)$, $(2,\infty)$ klesá, $(0,2)$ rastie; b) $(-\infty,0)$, $(0,1)$ klesá, $(1,\infty)$ rastie; c) $(-\infty,-1)$, $(0,\infty)$ rastie; d) $(-\infty,0)$ klesá, $(0,\infty)$ rastie; e) $(0,1/2)$ klesá, $(1/2,\infty)$ rastie; f) $(-\infty,0)$ klesá, $(0,\infty)$ rastie. **426.** $\langle-4,-3\rangle$, $\langle 0,1\rangle$, $\langle 4,5\rangle$. **428.** Nemusí.

### 3,10. Maximum a minimum funkcie

**431.** a) V čísle 0 má ostré lokálne maximum, a to $f(0)=0$; v čísle 4 má ostré lokálne minimum, a to $f(4)=-32$; b) v čísle 2 má ostré lokálne minimum, a to $f(2)=-10$; v čísle $-2$ má ostré lokálne maximum, a to $f(-2)=10$; c) extrémy neexistujú; d) v čísle 2 má ostré lokálne minimum, a to $f(2)=-57$; v čísle $-3/2$ má ostré lokálne maximum, a to $f(-3/2)=115/4$; e) v čísle $x=0$ má ostré lokálne maximum, a to $f(0)=3$; f) v čísle 1 má ostré lokálne maximum, a to $f(1)=0$; v čísle $x=(5+\sqrt{13})/6$ má ostré lokálne minimum $f[(5+\sqrt{13})/6]\doteq-0{,}05$, v čísle $x=(5-\sqrt{13})/6$ má ostré lokálne minimum $f[(5-\sqrt{13})/6]\doteq-0{,}76$. **432.** a) Extrémy neexistujú; b) v čísle $\sqrt[5]{24}$ má ostré lokálne minimum, a to $\sqrt[5]{24^2}-8/\sqrt[5]{24^3}$; c) extrémy neexistujú; d) v čísle $x=1$ je ostré lokálne maximum $f(1)=10$, v čísle $x_2=1/2$ je ostré lokálne minimum $f(1/2)=8$. **433.** a) V čísle $x=0$ má ostré lokálne maximum, a to $f(0)=18$; v čísle $x=-4$ má ostré lokálne minimum, a to $f(-4)=-10$; v čísle $x=1$ má ostré lokálne minimum $f(1)=15$; b) v celých číslach má funkcia ostré lokálne minimá rovné 0; c) v čísle $\sqrt{2/3}$ má ostré lokálne minimum, a to $f(\sqrt{2/3})=-4\sqrt{2/3}\sqrt{3}$; v čísle $x=0$ má ostré lokálne maximum, a to $f(0)=0$; d) v čísle 0 má ostré lokálne minimum, a to $f(0)=1$. **434.** a) V čísle $x=3$ má ostré lokálne maximum, a to $f(3)=3$; b) v čísle $x=0$ má ostré lokálne maximum, a to $f(0)=3$; c) v čísle $x=0$ má ostré lokálne maximum $f(0)=1$; v čísle $x=1$ a $x=-1$ má ostré lokálne minimá, a to $f(1)=f(-1)=0$; d) v čísle $x=2$ má ostré lokálne minimum $f(2)=-\sqrt[3]{44}$; v čísle $x=-3$ má ostré lokálne maximum $f(-3)=3\sqrt[3]{3}$. **435.** a) V číslach $(\pi/4+2k\pi)$, kde $k$ je celé číslo, má ostré lokálne maximum $f(\pi/4+2k\pi)=\sqrt{2}$; v číslach $5\pi/4+2k\pi$, kde $k$ je celé číslo, má ostré lokálne minimum $f(5\pi/4 + 2k\pi) = -\sqrt{2}$; b) v číslach $\pi/3 + k\pi$ má ostré lokálne maximum $f(\pi/3 + k\pi) = 4(\pi/3 + k\pi) - \sqrt{3}$; v číslach $2\pi/3 + k\pi$ je ostré lokálne minimum $f(2\pi/3 + k\pi) = 4(2\pi/3 + k\pi) + \sqrt{3}$, pričom $k$ je celé číslo; c) v čísle $x = 1/2$ má ostré lokálne maximum $f(1/2) = \sin(1/2) + 1/16$; v číslach $\pi/6 + 2k\pi$ má ostré lokálne minimá, v číslach $5\pi/6 + 2k\pi$ má ostré lokálne maximá, kde $k$ je celé číslo; d) v čísle $x = 1$ má ostré lokálne minimum $f(1) = 0$. **436.** a) V čísle $x = 0$ má ostré lokálne minimum $f(0) = 0$; v čísle $x = 2$ má ostré lokálne maximum $f(2) = 4e^{-2}$; b) v číslach $\pi/4 + 2k\pi$ má ostré lokálne maximum $f(\pi/4 + 2k\pi) = e^{-(\pi/4+2k\pi)} \cdot \sqrt{2}/2$; v číslach $5\pi/4 + 2k\pi$ má ostré lokálne minimum $f(5\pi/4 + 2k\pi) = -e^{-(5\pi/4+2k\pi)}\sqrt{2}/2$, kde $k$ je celé číslo; c) v čísle $x = 1$ má ostré lokálne maximum $f(1) = e$; d) v čísle $x = 0$ má ostré lokálne minimum $f(0) = 0$; v čísle $x = 1$ má ostré lokálne maximum $f(1) = 1$. **437.** a) V čísle $x = e$ má ostré lokálne minimum $f(e) = e$; b) v čísle $x = 0$ má ostré lokálne minimum $f(0) = 0$; c) v čísle $x = 1/8$ má ostré lokálne maximum $f(1/8) = \ln(17/16)$; d) extrémy neexistujú; e) v čísle $x = 10\sqrt{10}$ má ostré lokálne minimum $f(10\sqrt{10}) = -1/4$; f) v čísle $x = 1$ má ostré lokálne maximum $f(1) = \pi/4 - (\ln 2)/2$. **439.** V čísle $x = 0$ má ostré lokálne minimum $f(0) = 0$. **440.** a) Má ostré lokálne minimum rovné 0; b) nemá ostré lokálne extrémy. **441.** a) V čísle $x = -1$ má maximum $f(-1) = 17$; v čísle $x = 3$ má minimum $f(3) = 1$; b) v čísle $x = -3$ má minimum $f(-3) = 2$; maximum nemá; c) v čísle $x = -2$ má minimum $f(-2) = -151$; v čísle $x = 1$ má maximum $f(1) \doteq 2$; d) v čísle $x = -5$ má maximum $f(-5) = 60$; v čísle $x = 1$ má minimum $f(1) = 0$; e) v čísle $x = 0$ má maximum $f(0) = -1$; maximum nemá; f) v čísle $x = 1{,}01$ má maximum $f(1{,}01) \doteq 101{,}5$; v čísle $x = 2$ má minimum $f(2) = 10/3$. **442.** a) Maximum neexistuje; minimum má v čísle $x = 0$, $f(0) = 0$; b) maximum je 1, minimum je $2 - 2\ln 2$; c) v čísle $x = e$ má maximum $f(e) = e^2$; v čísle $x = 1$ má minimum $f(1) = 0$; d) v čísle $x = e^{-1}$ má minimum $f(e^{-1}) \doteq 0{,}69$; maximum nemá; f) v čísle $x = -\pi/2$ má maximum $f(-\pi/2) = -1 + \pi$; v čísle $x = \pi/2$ má minimum $f(\pi/2) = -1 - \pi$. **443.** 14, 14. **444.** 1. **445.** a) $a^n/2^{n-1}$; b) $(a/2)^{2n}$. **446.** $x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$. **447.** Výška pravouhlého rovnobežníka je $H/2$, kde $H$ je výška trojuholníka. **448.** Rovnoramenný trojuholník so stranami $a$, $s - a/2$, $s - a/2$. **449.** $a = s/4$; $b = s/4$. **452.** Plocha bude maximálna, ak výška trojuholníka $h = 3R/2$. **453.** Výsek kružnice polomeru $r = s/2$ so stredovým uhlom $\alpha = 2$. **454.** $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$. **456.** Polomer valca $r = a$ a výška $h = 2a$. **457.** a) Polomer valca $r = R/2$, výška $h = H/2$; b) polomer valca $r = 2R/3$, výška $h = H/3$. **458.** a) Polomer základne kužeľa $R = 2\sqrt{2}r/3$ a výška $H = 4r/3$; b) $s = 2\sqrt{2}r/\sqrt{3}$, $h = 4r/3$; c) $H \doteq 1{,}17r$, $R = 0{,}993r$. **459.** Polomer základne $r = \sqrt{2}R/2$, výška $h = R\sqrt{2}$. **460.** Výška valca je $h/2$ a polomer je $r = \sqrt{2ah}$. **461.** $A = (-1/5, -8/5)$. **462.** $A = (3, 2)$. **464.** (1, 3). **465.** $x = 4a/(\pi + 4)$. **466.** 6. **467.** 20 m, 5 m, 2 m. **468.** $x = 2a/(4 + \pi)$, $y = a/(4 + \pi)$. **469.** $(4^{2/3} + 6^{2/3})^{3/2}$. **470.** $h = d/\sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}d/\sqrt{3}$. **471.** Vzdialenosť miesta je $l\sqrt[3]{I_1}/(\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2})$, kde $l$ je vzdialenosť zdrojov. **472.** $d/2\sqrt{2}$. **473.** 170. **474.** Vylodiť sa musí 6,464 km od miesta $A$ a bude mu to trvať 4,39 h. **475.** 19,57 $\mathrm{kmh^{-1}}$. **476.** $\cos\alpha = 0{,}5/1{,}5 = 1/3$. **477.** $h/2$. **478.** Ak $NO_2$ je 66,7 % a $O_2$ je 33,3 %. **479.** $\mathrm{tg}\, 2\alpha = 2$.

## 3,11. Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexný bod

**480.** a) $(-\infty, \infty)$ konvexná; b) $(-\infty, 2/3)$, konkávna, $(2/3, \infty)$ konvexná, $x_1 = 2/3$, inflexný bod; c) $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$ konvexná, $(-2, 1)$ konkávna, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, inflexné body; d) $(1, \infty)$ konvexná, $(-\infty, 1)$ konkávna, $x_1 = 1$ inflexný bod; e) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ konvexná, $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$ konkávna; f) $(-\infty, -1/3\sqrt{3})$, $(1/3\sqrt{3}, \infty)$ konvexná, $(-1/3\sqrt{3}, 0)$, $(0, 1/3\sqrt{3})$ konkávna, $x_1 = -1/3\sqrt{3}$, $x_2 = 1/3\sqrt{3}$ inflexné body. **481.** a) $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ konvexná, b) $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$ konvexná, $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ konkávna, $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ inflexné body; c) $(0, 1)$, $(1, \infty)$ konvexná, $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ konkávna, $x_1 = 0$ inflexný bod; d) $(-\infty, -9)$,

$(0, 9)$ konvexná, $(-9, 0)$, $(9, \infty)$ konkávna, $x_1 = -9$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$ inflexné body. **482.** a) $(0, \infty)$ konvexná, $(-\infty, 0)$ konkávna, $x_1 = 0$ inflexný bod; b) $(-\infty, -2)$ konvexná, $(-2, \infty)$ konkávna, $x_1 = -2$ inflexný bod; c) $(1, \infty)$ konvexná; d) $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ konvexná, $(1, \infty)$ konkávna. **483.** a) $(0, \infty)$ konvexná; b) $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$ konvexná; c) $(0, \infty)$ konvexná. **484.** a) $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ konvexná, $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$ konkávna, $x = (2k + 1)\pi/2$ inflexné body, $k$ je celé číslo; b) $(-\infty, \infty)$ konvexná; c) $(-\infty, 0)$ konkávna, $(0, \infty)$ konvexná. **485.** a) $(-\infty, \infty)$ konvexná; b) $(\pi/2 + 2k\pi, 5\pi/2 + 2k\pi)$ konvexná, $(-\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$ konkávna, $k$ je celé číslo; c) $(-\infty, \infty)$ konvexná. **486.** $(-\infty, 1)$, konkávna, $(1, \infty)$ konvexná. **489.** a) $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$; b) $x = -2 + e^{8/3}$ inflexný bod; c) $x = -4$ inflexný bod. **492.** $a = -1/2$, $b = 3$. **494.** $b > 0$, $b \leq -e/6$.

### 3,12. Asymptoty

**502.** $a = 1$. **503.** a) $x = 1, y = 1$; b) $x = 1, x = -1, y = 0$; c) $x = 2, y = 3x$; d) $x = 0, x = -1, x = 1, y = 0$. **504.** a) $x = -2, x = 2, y = x$; b) $x = -1, x = 1, y = x$. **505.** a) $y = x + 4/3$; b) $x = 1/\sqrt{2}, x = -1/\sqrt{2}, y = 1/2$. **506.** a) $x = (2k + 1)\pi/2$, kde $k$ je celé číslo; b) $y = 0$; c) $x = 0, y = 2x$; d) $y = 0$. **507.** a) $x = 0, y = 1$; b) $x = 0, y = x$; c) $y = x + 1$; d) $y = -x + 3$, $y = 1 - x$. **508.** a) $x = -1/e, y = x + 1/e$; b) $y = x, x = 0$. **509.** a) $y = \pm\pi x/2 - 1$; b) $y = 0$; c) $y = bx \pm \pi/2$; d) $y = x, y = -x$.

### 3,13. Priebeh funkcie

**510.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Body nespojitosti nemá. V čísle 0 má funkcia nulový bod. Na $(-\infty, \infty)$ je rastúca. Na $(0, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, 0)$ je konkávna. Extrémy nemá. V čísle 0 má inflexný bod. Asymptoty nemá. **511.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. Nulové body má v číslach 0, 1. Na $(1/4, \infty)$ je rastúca, na $(-\infty, 1/4)$ je klesajúca. Na $(1, \infty)$, $(-\infty, -1/4)$ je konvexná a na $(-1/4, 1)$ je konkávna. V čísle 1/4 má ostré lokálne maximum. V číslach $1, -1/4$ má inflexné body. Asymptoty nemá. **512.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V číslach 0, 1, 2, 3 má nulové body. Je klesajúca na $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ a rastúca na $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. Na $\left(-\infty, \frac{9 - \sqrt{15}}{6}\right)$, $\left(\frac{9 + \sqrt{15}}{6}, \infty\right)$ je konvexná a na $\left(\frac{9 - \sqrt{15}}{6}, \frac{9 + \sqrt{15}}{6}\right)$ je konkávna. V čísle $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ má ostré lokálne maximum a v čísle $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ má ostré lokálne minimum. V číslach $\frac{9 + \sqrt{15}}{6}$, $\frac{9 - \sqrt{15}}{6}$ má inflexné body. Asymptoty nemá. **513.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je párna. Je spojitá. V číslach $4, -4$ má nulové body. Na $(-\infty, -4)$, $(0, 4)$ je klesajúca, na $(-4, 0)$, $(4, \infty)$ je rastúca. Na $(-4, 4)$ je konkávna a na $(-\infty, -4)$, $(4, \infty)$ je konvexná. Inflexné body nemá. V číslach $-4, 4$ má ostré lokálne minimum a v čísle 0 ostré lokálne maximum. Asymptoty neexistujú. **514.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je párna. Je spojitá. Nulové body má v číslach $0, 2, -2$. Na $(-1, 0)$, $(1, \infty)$ je rastúca a na $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ je klesajúca. V číslach $-1, 1$ má ostré lokálne minimá a v čísle 0 ostré lokálne maximum. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **515.** Obor definície je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Je nepárna. V čísle 0 je nespojitá. Nulové body nemá. Na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ je rastúca, na $(-1, -1)$ klesajúca. Na $(0, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, 0)$ je konkávna. V čísle 1 má ostré lokálne minimum, v čísle $-1$ má ostré lokálne maximum. Inflexné body nemá. Jej asymptoty sú $x = 0$, $y = x$. **516.** Obor definície je $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Je nepárna. V číslach $-1, 1$ je nespojitá. Na $(-\infty, -\sqrt{2 + \sqrt{5}})$, $(\sqrt{2 + \sqrt{5}}, \infty)$ je rastúca, na $(-\sqrt{2 + \sqrt{5}}, \sqrt{2 + \sqrt{5}})$ je klesajúca. Na $(-\infty, -1)$,

$(0, 1)$ je konkávna a na $(-1, 0)$, $(1, \infty)$ je konvexná. V čísle $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ má ostré lokálne minimum a v čísle $-\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ má ostré lokálne maximum. V čísle 0 má inflexný bod. Jej asymptoty sú $x = -1$, $x = 1$, $y = x$. **517.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Je spojitá. Na $(-\infty, \infty)$ je rastúca. Na $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ je konkávna. Extrémy nemá. V číslach $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ má inflexné body. Jej asymptota je $y = 2x$. **518.** Obor definície je $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. V čísle $-1$ je nespojitá. Nulový bod má v čísle 0. Na $(-\infty, -4)$, $(0, \infty)$ je rastúca, na $(-4, 0)$ je klesajúca. V čísle 0 má ostré lokálne minimum, v čísle 4 ostré lokálne maximum. Inflexné body neexistujú. Asymptoty sú $y = x - 3$, $x = -1$. **519.** Obor definície je $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. Je nepárna. V číslach $-1, 0, 1$ je nespojitá. Nulové body sú v číslach $1/\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3}$. Na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ je klesajúca. Extrémy nemá. Jej asymptoty sú $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. **520.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V čísle 1 má nulový bod. Na $(-\infty, 1)$ je klesajúca, na $(1, \infty)$ je rastúca. Na $(1, \infty)$ je konkávna, na $(-\infty, 1)$ je konvexná. V čísle 1 má ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **521.** Obor definície je $\langle -3, -2 \rangle \cup \langle -1, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V číslach $-1$, $-2$, $-3$ má nulové body. Na $\left(3, \dfrac{-6-\sqrt{3}}{3}\right)$, $(-1, \infty)$ je rastúca, na $\left(\dfrac{-6-\sqrt{3}}{3}, -2\right)$ je klesajúca. V číslach $-3, -2, -1$ má ostré lokálne minimum, v čísle $\dfrac{-6-\sqrt{3}}{3}$ má ostré lokálne maximum. Asymptoty nemá. **522.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V čísle 1 má nulový bod. Na $(-\infty, \infty)$ je klesajúca. Extrémy neexistujú. V čísle 0 má inflexný bod . Jej asymptota je $y = -x$. **523.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. Nulové body má v číslach 0, 1. Na $(-\infty, -2/3)$, $(0, \infty)$ je rastúca a na $(-2/3, 0)$ je klesajúca. Na $(-1, \infty)$ je konkávna, na $(-\infty, -1)$ je konvexná. V čísle 0 má ostré lokálne minimum, v čísle $-2/3$ má ostré lokálne maximum.

Jej asymptota je $y = x + 1/3$. **524.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Je spojitá. V čísle 0 má nulový bod. Na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ je klesajúca, na $(-1, 1)$ je rastúca. Na $(0, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, 0)$ je konkávna. V čísle $-1$ má ostré lokálne minimum, v čísle 1 má ostré lokálne maximum. V čísle 0 má inflexný bod. Jej asymptota je $y = 0$. **525.** Obor definície je $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Je nepárna. V číslach 1 a $-1$ je nespojitá. Nulový bod funkcie je v čísle 0. Na $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$ je rastúca, na $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ je klesajúca. V čísle $-\sqrt{3}$ má ostré lokálne maximum, v čísle $\sqrt{3}$ má ostré lokálne minimum. V číslach 0, 3, $-3$ má inflexné body. Na $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$, $(1, 3)$ je konvexná, na $(-3, -1)$, $(0, 1)$, $(3, \infty)$ je konkávna. Asymptoty bez smernice sú $x = 1$, $x = -1$. **526.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V číslach $-1$, $19/8$ má nulové body. Na $(-1, 0)$ je klesajúca, na $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$ je rastúca. Na $(-\infty, \infty)$ je konvexná. V čísle 0 má ostré lokálne minimum, v čísle $-1$ má ostré lokálne maximum. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **527.** Obor definície je $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. V čísle 0 je nespojitá. Nulové body nemá. Na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ je klesajúca. Na $(-1/2, 0)$, $(0, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, -1/2)$ je konkávna. Extrémy neexistujú. V čísle $-1/2$ má inflexný bod. Jej asymptoty sú: $y = 1$, $x = 0$. **528.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je párna. Je spojitá. Nulové body funkcia nemá. Na $(-\infty, 0)$ je rastúca a na $(0, \infty)$ je klesajúca. Na $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, \infty)$ je konvexná, na intervale $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ je konkávna. V čísle 0 má maximum. V číslach $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$ má inflexné body. Jej asymptota je $y = 0$. **529.** Obor definície je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. V čísle 0 je nespojitá. Na $(1/2, \infty)$ je rastúca, na $(-\infty, 0)$, $(0, 1/2)$ je klesajúca. Nulové body funkcia nemá. Na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ je konvexná. V čísle 1/2 má funkcia ostré lokálne minimum.

Inflexné body nemá. Jej asymptota je $x = 0$. **530.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Je spojitá. Na $(-1, 1)$ je rastúca, na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ je klesajúca. Na $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ je konkávna. V čísle $-1$ má ostré lokálne minimum. V čísle 1 má ostré lokálne maximum. V číslach $0$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ má inflexné body. Jej asymptota je $y = 0$. **531.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. Nulové body funkcia nemá. Na $(0, \infty)$ je rastúca, na $(-\infty, 0)$ je klesajúca. Na $(-\infty, \infty)$ je konvexná. V čísle 0 má ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Jej asymptota je $y = x$. **532.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je párna. Je spojitá. V čísle 0 má nulový bod. Na $(0, \infty)$ je rastúca, na $(-\infty, 0)$ je klesajúca. Na $(-\infty, \infty)$ je konkávna. V čísle 0 má ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Jej asymptota je $y = 1$. **533.** Obor definície je $(0, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V čísle 1 má nulový bod. Na $(1/e, \infty)$ je rastúca, na $(0, 1/e)$ je klesajúca. Na $(0, \infty)$ je konvexná. V čísle $1/e$ má minimum. Inflexné body nemá. Asymptoty neexistujú. **534.** Obor definície je $(-2, 2)$. Je párna. Je spojitá. V čísle $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ má nulové body. Na $(-2, 0)$ je rastúca, na $(0, 2)$ je klesajúca. Na $(-2, 2)$ je konkávna. V čísle 0 má ostré lokálne maximum. Inflexné body nemá. Jej asymptoty sú $x = 2$, $x = -2$. **535.** Obor definície je $(-1, 1)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V čísle 0 má nulový bod. Na $(-1, 1)$ je rastúca. Na $(0, 1)$ je konvexná, na $(-1, 0)$ je konkávna. Extrémy nemá. V čísle 0 má inflexný bod. Jej asymptoty sú $x = 1$, $x = -1$. **536.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Je spojitá. V čísle 0 má nulový bod. Na $(-\infty, \infty)$ je rastúca. Na $(-\infty, 0)$ je konvexná, na $(0, \infty)$ je konkávna. Extrémy nemá. V čísle 0 má inflexný bod. Asymptoty nemá. **537.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je periodická s periódou $2\pi$. Je spojitá. V číslach $(2k + 1)\pi + \pi/4$, $2k\pi - \pi/4$, kde $k$ je celé číslo, má nulové body. Na $((2k - 1)\pi + \pi/4, 2k\pi + \pi/4)$ je rastúca, na $(2k\pi + \pi/4, (2k + 1)\pi + \pi/4)$ je klesajúca, pričom $k$ je celé číslo. V číslach $2k\pi + \pi/4$, kde $k$ je celé číslo, má ostré lokálne maximum, v číslach $(2k + 1)\pi + \pi/4$, kde $k$ je celé číslo, má ostré lokálne minimum. V číslach $k\pi - \pi/4$, kde $k$ je celé číslo, má inflexné body. Asymptoty nemá. **538.** Obor definície je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. V čísle 0 je nespojitá. Nulový bod má v čísle $-0{,}876\ldots$ Rastúca je v $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Inflexné body sú v číslach, ktoré sú riešením rovnice $1/x - x/2 = \operatorname{cotg} x$. Jej asymptota je $y = x$. **539.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V číslach $k\pi/3$, kde $k$ je celé číslo, má funkcia nulové body. V číslach $x$, pre ktoré platí $\operatorname{tg} 3x = 3/2$, má funkcia ostré lokálne extrémy. Jej asymptota je $y = 0$. **540.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. V čísle $x = 0$ má nulový bod. Na $(-\infty, \infty)$ je rastúca. Na $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k$ je celé číslo, je konvexná. Extrémy nemá. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **541.** Obor definície je $(3\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + (2k + 1)\pi)$, kde $k$ je celé číslo. Je párna. Je spojitá. Na obore definície je konvexná. V číslach $2k\pi$, kde $k$ je celé číslo, má ostré lokálne minimá. Inflexné body nemá. Jej asymptoty sú $x = \pi/2 + k\pi$, kde $k$ je celé číslo. **542.** Obor definície je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Je nepárna. Je nespojitá v čísle 0. V číslach $1/k\pi$, kde $k$ je celé číslo, má nulové body. V číslach, ktoré sú riešením rovnice $\operatorname{tg} u = u/2$, kde $u = 1/x$, má lokálne extrémy. V číslach, ktoré spĺňajú rovnicu $\operatorname{tg} u = 2u/(2 - u^2)$, kde $u = 1/x$, má inflexné body. Jej asymptota je $y = x$. **543.** Obor definície je $\langle -1, 1 \rangle$. Je párna. Je spojitá. V čísle $x = 0$ má nulový bod. Na $(0, 1)$ je rastúca, na $(-1, 0)$ je klesajúca. Na $(-1, 1)$ je konvexná. V čísle 0 má ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **544.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Je spojitá. V číslach $-2{,}331\ldots$; $2{,}331\ldots$ má nulové body. Na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ rastie, na $(-1, 1)$ klesá. Na $(0, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, 0)$ je konkávna. V čísle $x = 1$ má ostré lokálne minimum, v čísle 1 má ostré lokálne maximum. V čísle 0 má inflexný bod. Jej asymptoty sú $y = x - \pi$, $y = x + \pi$. **545.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je párna. Je spojitá. V čísle 0 má nulový bod. Na $(0, \infty)$ je rastúca, na $(-\infty, 0)$ je klesajúca. Na $(-\infty, \infty)$ je konvexná. V čísle 0 má ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Jej asymptoty sú $y = \pi x/2 - 1$, $y = -\pi x/2 - 1$. **546.** Obor definície je $(0, \infty)$. Je spojitá. V čísle 1 má nulový bod. Na $(0, \infty)$ je klesajúca. Na $(0, \infty)$ je konvexná. Extrémy nemá. Inflexné body nemá. Jej asymptota je $y = -\pi/2$. **547.** Obor definície je $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Je nepárna. Je spojitá. Nulové body nemá. Na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ je klesajúca. Na $(0, \infty)$ je konvexná, na $(-\infty, 0)$ je konkávna. Extrémy nemá. Inflexné body nemá. Jej asymptota je $y = 0$. **548.** Obor definície je $(-\infty, \infty)$. Je nepárna. Je periodická. Je spojitá. V číslach $k\pi$, kde $k$ je celé číslo, má nulové body. Na $((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)$, kde $k$ je celé číslo, je rastúca, na $((2k+1)\pi/2, (2k+3)\pi/2)$ je klesajúca. V číslach $(2k+1)\pi/2$ má ostré lokálne maximá, v číslach $(2k-1)\pi/2$ má ostré lokálne minimá, pričom $k$ je celé číslo. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **549.** Obor definície sú všetky reálne čísla, okrem čísiel $(2k-1)\pi/2$, kde $k$ je celé číslo. Je nepárna. Je periodická s periódou $\pi$. V číslach $(2k-1)\pi/2$, kde $k$ je celé číslo, je nespojitá. V číslach $k\pi$, kde $k$ je celé číslo, má nulové body. Na jednotlivých intervaloch oboru definície je rastúca. Extrémy nemá. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá. **550.** Oborom definície je $(0, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. Nemá nulové body. Na $(e, \infty)$ je klesajúca, na $(0, e)$ je rastúca. V čísle $e$ má ostré lokálne maximum. Jej asymptota je $y = 1$. **551.** Oborom definície je $(-\infty, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. Je spojitá. Nulové body nemá. Na $(-\infty, 1/2)$ je klesajúca, na $(1/2, \infty)$ je rastúca. Na $(-\infty, \infty)$ je konvexná. V čísle $1/2$ má ostré lokálne minimum, inflexné body nemá. Asymptoty neexistujú. **552.** Obor definície je $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Nie je ani párna, ani nepárna. V číslach $1, -1$, je nespojitá. Nulové body nemá. Na $(-\infty, 1)$ je rastúca, na $\langle 1, \infty)$ je klesajúca. Na $(-\infty, 1)$ je konvexná, na $(1, \infty)$ je konkávna. Extrémy nemá. Inflexné body nemá. Jej asymptotou je $y = -\dfrac{1+e^2}{1-e^2}$, $x = 1$. **553.** Oborom definície je $(-\infty, \infty)$. Je párna. V čísle 0 je nespojitá. V čísle 0 má nulový bod. Na $(-\infty, 0)$ je rastúca, na $(0, \infty)$ je klesajúca. Extrémy nemá. Jej asymptota je $y = 0$.

### 3,14. Funkcia určená parametrickými rovnicami

**554.** a) $y = 2 - x^2$, $(2, 5)$; b) $y = 2\sqrt{x^2 - 9}/3$, $\langle 3, \infty)$; c) $y = 3\sqrt{16 - x^2}/4$, $\langle -4, 4\rangle$; d) $y = -9x/8 + 9$, $\langle 0, 8\rangle$. **555.** a) $t \in \langle 0, \infty)$, $y = 2x + 13$, $x \in \langle -7, \infty)$; $t \in (-\infty, 0\rangle$, $y = 2x + 13$, $x \in \langle -7, \infty)$; b) $t \in \langle 0, \infty)$, $y = 3\sqrt{x/5}$, $x \in \langle 0, \infty)$; $t \in (-\infty, 0\rangle$, $y = -3\sqrt{x/5}$, $x \in \langle 0, \infty)$; c) $t \in \langle -3/2 + 6k, 3/2 + 6k\rangle$, $y = \sqrt{36 - x^2}/2$, $x \in \langle -6, 6\rangle$; $t \in \langle 3/2 + 6k, 9/2 + 6k\rangle$, $y = -\sqrt{36 - x^2}/2$, $x \in \langle -6, 6\rangle$, kde $k$ je celé číslo; d) $t \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$, $y = \sqrt{(a^{2/3} - x^{2/3})^3}$, $x \in \langle -a, a\rangle$; $t \in \langle \pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi\rangle$, $y = -\sqrt{(a^{2/3} - x^{2/3})^3}$, $x \in \langle -a, a\rangle$, kde $k$ je celé číslo. **556.** a) Elipsa; b) asteroida; c) oblúk cykloidy. **557.** a) Parabola; b) úsečka $AB$, $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$. **558.** a) $x = 3at/(1 + t^3)$, $y = 3at^2/(1 + t^3)$; $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$; b) $x = (1 + t^2)/(1 + t^3)$, $y = (t + t^2)/(1 + t^3)$; $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. **559.** a) $x = 3\varphi \cos \varphi$, $y = 3\varphi \sin \varphi$; $\varphi \in \langle 0, \infty)$; b) $x = \sin 2\varphi$, $y = \sin^2 \varphi$; $\varphi \in (0, \pi)$; c) $x = 2 \cos \varphi \,.\, \cos 3\varphi$, $y = 2 \sin \varphi \,.\, \sin 3\varphi$; $\varphi \in (0, \pi)$; d) $x = \pi(\cos \varphi)/\varphi$, $y = \pi(\sin \varphi)/\varphi$; $\varphi \in (0, \infty)$; e) $x = 2(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$, $y = 2(1 + \cos \varphi) \sin \varphi$; $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$; f) $x = 2^{\varphi/\pi} \cos \varphi$, $y = 2^{\varphi/\pi} \sin \varphi$; $\varphi \in (-\infty, \infty)$. **560.** a) $\sqrt{2}$; b) $-2/3$. **561.** a) $-1$; $t \neq -1$; b) $(\cos t)/(1 + \sin t)$; $t \neq 3\pi/2 + 2k\pi$, kde $k$ je celé číslo; c) $-\operatorname{tg} t$; $t \neq \pi/2$; d) $\operatorname{tg} t \,.\, (\sin t + \cos t)/(\cos t - \sin t)$; $t \neq \pi/4$; e) $a^{-1} b \operatorname{cotgh} t$; f) $-1$, $t \neq 0$. **562.** a) $x = 4t + t^3$, $y' = (3t^2 + t)/(4 + 2t)$, $y'' = (3t^2 + 12t - 1)/4(t + 2)^3$, $y''' = -(3t^2 + 12t - 27)/8(t + 2)^5$; $t \geqq 0$; b) $x = a \sin t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = -1/a \cos^3 t$, $y''' = 3(\sin t)/a^2 \cos^5 t$; $t \in (-\pi/2, \pi/2)$; c) $x = 3 \cos^3 t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = 1/9 \sin t \cos^4 t$, $y''' = (\cos^2 t - 4 \sin^2 t)/81 \sin^3 t \cos^7 t$; $t \in \langle 0, \pi\rangle$; d) $x = e^{-t} \cos t$, $y' = (\sin t - \cos t)/(\sin t + \cos t)$, $y'' = -2e^t/(\sin t + \cos t)^3$, $y''' = 4e^{2t}(2 \sin t - \cos t)/(\sin t + \cos t)^5$; $t \neq 3\pi/4 + k\pi$, kde $k$ je celé číslo; e) $x = \ln t$, $y' = 2t \cos 2t$, $y'' = 2t(\cos 2t - 2t \sin 2t)$, $y''' = 2t[(-4t^2 + 1) \cos 2t -

$-6t \sin 2t]$; $t > 0$; f) $x = e^t$, $y' = 1/e^t\sqrt{1 - t^2}$, $y'' = (t^2 + t - 1)/e^{2t}\sqrt{(1 - t^2)^3}$, $y''' = (2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 3t + 3)/e^{3t}\sqrt{(1 - t^2)^5}$; $t \in (-1, 1)$. **563.** a) $x - 2y - 1 = 0$, $2x + y - 2 = 0$; b) $x + y - a/\sqrt{2} = 0$, $x - y = 0$; c) $x + y - (3\pi + 4)\, a/2 = 0$, $x + y - 3a\pi/2 = 0$; d) $y = [x - a \ln \operatorname{tg} (t_0/2)] \operatorname{tg} t_0$, $y = -[x - a \ln \operatorname{tg} (t_0/2)] \operatorname{cotg} t_0 + a/\sin t_0$. **564.** a) $A = (4, 1)$, $B = (-4, 1)$; b) $A = (\sqrt{2}/2, e^{3\pi/4})$. **565.** $a = 3$, $b = 1$. **566.** a) $y = 2x - 2e$; b) $x + y + a = 0$. **567.** a) Krivka sa skladá z grafov funkcií: $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $t \in (-\infty, 1)$ a $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $t \in (1, \infty)$. Prvá z nich je definovaná pre $x \in (-\infty, 1)$, je spojitá. Nulové body sú $A = (-3 - 2\sqrt{3}, 0)$, $B = (0, 0)$. V intervale $(-\infty, -3)$ je klesajúca, v intervale $(-3, 1)$ je rastúca. Je konvexná. Má ostré lokálne minimum $y_{\min} = -2$, pre $x = -3$. Druhá funkcia je definovaná na $(-\infty, 1)$, je spojitá. Nulový bod je $C = (-3 + 2\sqrt{3}, 0)$. Je rastúca a konvexná. Krivka nemá v bode $D = (1, 2)$ dotyčnicu; b) Krivka sa skladá z grafov funkcií $x = (\ln t)/t$, $y = t \ln t$, $t \in (0, e)$ a $x = (\ln t)/t$, $y = t \ln t$, $t \in (e, \infty)$. Prvá funkcia je definovaná pre $x \in (-\infty, 1/e)$, je spojitá. Nulový bod je $O = (0, 0)$. Na intervale $(-\infty, -e)$ je klesajúca, na intervale $(-e, 1/e)$ je rastúca. Na intervale $(-\infty, -\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}})$ je konkávna, na intervale $(-\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}, 1/e)$ konvexná. Inflexný bod je $A = (-\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$. Asymptota je $y = 0$. Druhá funkcia je definovaná na intervale $(0, 1/e)$, je spojitá, klesajúca. Konvexná v $(0, \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$, konkávna v $(\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}}, 1/e)$. Inflexný bod je $(\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}}, \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}})$, asymptota je $x = 0$. Krivka je súmerná podľa priamky $x + y = 0$; c) Krivka je grafom funkcie definovanej v $(-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$. Jej graf je súmerný podľa bodu $A = (-1/2, 1/2)$. Funkcia je spojitá na $(-\infty, -1)$ a na $\langle 0, \infty)$, klesajúca na intervale $(-\infty, -1)$ a na intervale $\langle 0, \infty)$. Konkávna na $(-\infty, -1)$, konvexná na $\langle 0, \infty)$. Asymptota je $y = 1/2$. d) Krivka je grafom funkcie definovanej v $\langle 0, 1\rangle$. Jej graf je súmerný podľa priamky $y = x$. Je spojitá, klesajúca a konvexná. Nulový bod je $A = (1, 0)$. e) Krivka sa skladá z grafov funkcií: $x = t\, e^t$, $y = t\, e^{-t}$, $t \in (-\infty, -1)$ a $x = t\, e^t$, $y = t\, e^{-t}$, $t \in \langle -1, \infty)$. Prvá funkcia je definovaná v $(-1/e, 0)$. Je spojitá, klesajúca. Konvexná na $(-1/e, -\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$, konkávna na $(-\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}}, 0)$. Inflexný bod je $A = (-\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}})$. Asymptota je $x = 0$. Druhá funkcia je definovaná v $(-1/e, \infty)$. Je spojitá a rastúca v $(-1/e, e)$, klesajúca v $(e, \infty)$. Ostré lokálne maximum je pre $x = e$, $y_{\max} = 1/e$. Je konkávna v $(1/e, \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}})$, konvexná v $(\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}, \infty)$. Inflexný bod je $B = (\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}})$. Asymptota je $y = 0$. Krivka je súmerná podľa priamky $x + y = 0$; f) Krivka sa skladá z grafov troch funkcií $x = 3t/(1 + t^3)$, $y = 3t^2/(1 + t^3)$, pričom 1. $t \in (-1, 1/\sqrt[3]{2})$, 2. $t \in (1/\sqrt[3]{2}, \infty)$, 3. $t \in (-\infty, -1)$. Prvá funkcia je definovaná v $(-\infty, \sqrt[3]{4})$. Je spojitá. Nulový bod je $O = (0, 0)$. Je klesajúca v $(-\infty, 0)$, rastúca v $(0, \sqrt[3]{4})$. Ostré lokálne minimum $y_{\min} = 0$ je pre $x = 0$. Je konvexná. Asymptota je $x + y + 1 = 0$. Druhá funkcia je definovaná v $(0, \sqrt[3]{4})$. Je spojitá. Rastúca je v $(0, \sqrt[3]{2})$, klesajúca v $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Ostré lokálne maximum $y_{\max} = \sqrt[3]{4}$ je pre $x = \sqrt[3]{2}$. Je konkávna. Tretia funkcia je definovaná v $(0, \infty)$. Je spojitá, klesajúca, konvexná. Asymptota je $x + y + 1 = 0$. Krivka je súmerná podľa priamky $y = x$. (Descartov list.) **568.** a) Krivka je definovaná pre $\varphi \in (-\alpha, \pi + \alpha)$, $\alpha = \arcsin (a/b)$. Krivka je uzavretá a súmerná podľa polpriamok $\varphi = \pi/2$, a $\varphi = 3\pi/2$; $\varrho_{\max} = a + b$ je pre $\varphi = \pi/2$, $\varrho_{\min} = 0$ je pre $\varphi = -\alpha$, resp. $\varphi = \pi + \alpha$; b) Krivka je definovaná pre $\varphi \in (0, \pi/3) \cup (2\pi/3, \pi) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)$. Krivka je uzavretá a má tri zhodné časti súmerné podľa polpriamok $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$, $\varphi = 3\pi/2$. Ich spoločný bod je $O = (0, 0)$; $\varrho_{\max} = a$ pre $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$, $\varphi = 3\pi/2$, $\varrho_{\min} = 0$ pre $\varphi = k\pi/3$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **569.** $x = 300t$, $y = 300\sqrt{3}\, t - 4{,}9t^2$; dráha je parabola $y = x\sqrt{3} - 49 \cdot 10^{-5}x^2/9$, $\mathbf{v}(2) = 300\, \mathbf{i} + (300\sqrt{3} - 19{,}6)\, \mathbf{j}$, $\mathbf{a}(2) = -9{,}8\, \mathbf{j}$, $\mathbf{v}(5) = 300\, \mathbf{i} = (300\sqrt{3} - 49)\, \mathbf{j}$, $\mathbf{a}(5) = -9{,}8\, \mathbf{j}$, $v(t) =$

$= \sqrt{360\,000 - 5\,880/\sqrt{3}t + 96{,}04t^2}$, $ms^{-1}$, $a = g = 9{,}8\ ms^{-2}$. Rýchlosť zviera s osou $o_x$ v čase $t$ uhol $\varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 3{,}27 \,.\, 10^{-2}t)$ a zrýchlenie uhol $\varphi = -\pi/2$. **570.** $\boldsymbol{v}(2) = 2\pi(4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{a}(2) = 4\pi^2(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})$, $x^2 + y^2 = 50$. **571.** Parabola $y = x - x^2/4$; $\boldsymbol{v}(0) = 0$, $\boldsymbol{v}(1) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}(2) = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}(0) = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}(1) = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}(2) = 2\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$, $A = (2, 1)$; $B = (2/3, 5/9)$. **572.** Kružnica $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Rovnomerný pohyb po kružnici so stredom $A = (0, 2)$, s uhlovou rýchlosťou $\omega = 1\ s^{-1}$.

### 3,15. Derivácia komplexnej funkcie reálnej premennej

**573.** a) $4 - i$; b) $-1$. **574.** a) $-3i$; b) $4(t + 2i)^3$; c) $2i/(t + i)^2$. **575.** a) $i(e^{it} - e^t)$; b) $-2i\,e^{-2it}$; c) $-i$; d) $2t^2 \sin 2t - 8 \sin 2t - 2t \cos 2t + i(8t \sin 2t - 4 \cos 2t)$. **576.** a) $(3 + 5i)\,x^{2+5i}$; b) $[(2 - 2 \ln 2x + 6i \ln 2x)\,x^{3i} - 3x^{3i-1} \ln^2 2x]/(2x + i \ln x)^2$. **577.** a) $(2i)^n e^{2ix}$; b) $(a + ib)^n e^{(a+ib)x}$; c) $i^{3n}(\sin x + i \cos x)$. **579.** a) $[3^n \cos(3x + n\pi/2) + 3 \cos(x + n\pi/2)]/4$; b) $2^{-1}(a + b)^n \,.\, \sin[(a + b)x + n\pi/2] + 2^{-1}(a - b)^n \sin[(a - b)x + n\pi/2]$; c) $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k P^{(n-k)}(x) \cos(ax + k\pi/2)$. **580.** $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k}\, 2^{n-2p+1}(p - k)^n \binom{2p}{k} \cos\left[(2p - 2k)\,x + \frac{n\pi}{2}\right]$.

**581.** a) $\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} \frac{(2p - 2k + 1)^n}{2^{2p}} \binom{2p}{k} \,.\, \sin\left[(2p - 2k + 1)x + \frac{n\pi}{2}\right]$; b) $\sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1}(p - k)^n \,.\, \binom{2p}{k} \cos\left[(2p - 2k)\,x + \frac{n\pi}{2}\right]$; c) $\sum_{k=0}^{p} \frac{(2p - 2k + 1)^n}{2^{2p}} \binom{2p+1}{k} \cos\left[(2p - 2k + 1)\,x + \frac{n\pi}{2}\right]$.

## 4. Neurčitý integrál

### 4,1. Pojem primitívnej funkcie a elementárne metódy integrovania

**583.** a) Je; b) je; c) nie je; d) nie je. **585.** $x^3 + x^2 - 4x + C$. **586.** $-\frac{1}{3x} - \frac{1}{5} \ln |x| + C$. **587.** $2\sqrt{x^5}/5 - 2\sqrt{x} + C$. **588.** $x^5/5 - x^4/2 + 2x^3/3 + C$. **589.** $x^5/5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + C$. **590.** $x^4/4 - 5x^3/3 + 3x^2 + C$. **591.** $-3x^{-2/3}/2 + 8x^{-1/4} + x + 2x^{-1} + C$. **592.** $\ln |x| - x^{-4}/4 + C$. **593.** $12x^{25/12}/25 - 4x^{21/4}/21 + C$. **594.** $x^3/3 + x^2/2 + x + C$, pre $x \neq 1$. **595.** $5 \sin x - \sqrt{3}x^6/6 + 3 \operatorname{arctg} x + C$. **596.** $-10^{-x}/\ln 10 + x + \operatorname{arctg} x + C$. **597.** $\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| + C$. **598.** $e^x a^x/(1 + \ln a) + C$. **599.** $(2^x 3^{-x} - 3^x 2^{-x})/(\ln 2 - \ln 3) - 2x + C$. **600.** $-x/2 + (\sinh 2x)/4 + C$. **601.** $-2 \cos x - 3 \sin x + C$. **602.** $x + \sin x + C$. **603.** $\operatorname{tg} x - x + C$. **604.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$. **605.** $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 3| + C$. **606.** $\ln |\ln x| + C$. **607.** $\ln |\operatorname{tg} x| + C$. **608.** $\ln |\arcsin x| + C$. **609.** $v = 10t^3/3 - 6 \cos t - 3t + 14$, $x = 5t^4/6 - 6 \sin t - 3t^2/2 + 14t + 5$.

### 4,2. Substitučná metóda

**610.** $(3x - 11)^{10}/30 + C$. **611.** $\frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)} + C$. **612.** $(a + bx)^{n+2}/b^2(n + 2) - a(a + bx)^{n+1}/b^2(n + 1) + C$. **613.** $(x^2 + 2)^4/4 + C$. **614.** $-3[\ln |2 - 5x|]/5 + C$. **615.** $x^6/6 + x^5/5 + x^4/4 + x^3/3 + x^2/2 + x + \ln |x - 1| + C$. **616.** $-1/21(1 - x)^{21} + 3/22(1 - x)^{22} - 3/23(1 - x)^{23} + 1/24(1 - x)^{24} + C$. **617.** $-1/6(2x + 3)^3 + C$. **618.** $-1/b(n - 1)(a + bx)^{n-1} +$

$+ C$. **619.** $-1/b^2 (n-2)(a+bx)^{n-2} + a/b^2(n-1)(a+bx)^{n-1} + C$. **620.** $-1/b^3(n-3)(a + bx)^{n-3} + 2a/b^3(n-2)(a+bx)^{n-2} - a^2/b^3(n-1)(a+bx)^{n-1} + C$. **621.** $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} (3x/2) + C$. **622.** $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + C$. **623.** $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} (bx/a) + C$. **624.** $\ln |x/(x+1)| + C$. **625.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$. **626.** $\frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{19}} + C$. **627.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2\sqrt{2}} + C$. **628.** $\frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$. **629.** $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} (x/a) + C$. **630.** $-1/2(a^2+x^2) + C$. **631.** $x - a \operatorname{arctg} (x/a) + C$. **632.** $x^3/3 - x + \operatorname{arctg} x + C$. **633.** $-1/10(x^2+4)^5 + C$. **634.** $\frac{1}{2\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \left(x^2 \sqrt{\frac{5}{6}}\right) + C$. **635.** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C$. **636.** $-1/4(1+x^2)^2 + C$. **637.** $\frac{1}{3} \ln |a^3 + x^3| + C$. **638.** $\frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} + C$. **639.** $-\frac{2}{9} \sqrt{(7-3x)^3} + C$. **640.** $\frac{4}{9} \sqrt[8]{(2x+5)^9} + C$. **641.** $\frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3} + C$. **642.** $\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^4} + C$. **643.** $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$. **644.** $\frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3+3)^4} + C$. **645.** $-\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}} + C$. **646.** $-\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3x-2}} + C$. **647.** $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x\sqrt{3} + C$. **648.** $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C$. **649.** $\sqrt{1+x^2} + C$. **650.** $-\frac{1}{5} \sqrt{4-5x^2} + C$. **651.** $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$. **652.** $2 \arcsin \sqrt{x} + C$. **653.** $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{3} + C$. **654.** $\ln (x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}) + C$. **655.** $\frac{3}{5} \sqrt[3]{(x+1)^5} - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} + C$. **656.** $\frac{1}{2} \sqrt[3]{(3x^2-2)} + C$. **657.** $\frac{9}{8} \sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C$. **658.** $\frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-4}| + C$. **659.** $-\frac{1}{3} \sqrt{8-x^6} + C$. **660.** $-\frac{4}{\sqrt[4]{1+ax^4}} + C$. **661.** $\frac{2}{3} [x^3 + \sqrt{(x^2-1)^3}] - x + C$. **662.** $-\frac{1}{2} e^{-2x-3} + C$. **663.** $\ln (4 + e^x) + C$. **664.** $x - \log_3(3^x+1) + C$. **665.** $-\frac{2}{9} \sqrt{(2-3 e^x)^3} + C$. **666.** $\frac{1}{\ln 4} \operatorname{arctg} 4^x + C$. **667.** $\frac{\arcsin 3^x}{\ln 3} + C$. **668.** $-\frac{2}{\ln 2} \ln (2^{-x/2} + \sqrt{1+2^{-x}}) + C$. **669.** $\frac{a^{x^2}}{2 \ln a} + C$. **670.** $\frac{2}{3} e^{x^3} + C$. **671.** $e^{\sinh x} + C$. **672.** $\frac{1}{2} e^{(x^2+4x+5)} + C$. **673.** $-e^{1/x} + C$. **674.** $-e^{\cos^2 x} + C$. **675.** $\frac{1}{2} (x^2 + 2) [\ln (2 + x^2) - 1] + C$. **676.** $\frac{1}{5} \ln^5 x + C$. **677.** $\frac{2}{3} \sqrt{(2 + \ln |x|)^3} + C$. **678.** $3 \arcsin (\ln |x|) + C$. **679.** $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} - 4\sqrt{\ln x} + C$. **680.** $(\ln |\operatorname{arctg} x|)^2/2 + C$. **681.** $\sin (\ln x) + C$. **682.** $-\frac{1}{8} \cos (8x-3) + C$. **683.** $4 \sin (x/4) + C$. **684.** $\ln \sqrt{|\sin (2x+1)|} + C$. **685.** $-\frac{1}{3} \operatorname{cotg} (3x-2) + C$. **686.** $\ln |\sin e^x| + C$. **687.** $2 \ln |\sin \sqrt{x}| + C$. **688.** $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$. **689.** $-b^{-1} \ln |a + b \cos x| + C$. **690.** $\frac{1}{6} \ln |2 + 3 \sin 2x| + C$. **691.** $-1/\sin x + C$. **692.** $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{a}\right) + C$. **693.** $-2\sqrt{2 + \cos x} + C$. **694.** $\frac{2}{3} \operatorname{tg} (x^3 + 1) + C$. **695.** $-\frac{1}{2} \cos (x^2 + 4) + C$. **696.** $\frac{1}{2} \ln |\cos (1-x^2)| + C$. **697.** $\cos (1/x) + C$. **698.** $(\sin^4 x)/4 + C$. **699.** $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$. **700.** $2/3 \sqrt{\cos^3 x} + C$. **701.** $3\sqrt[3]{\sin x} + C$. **702.** $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$. **703.**

$\frac{3}{5}\sqrt[3]{\mathrm{tg}^5 x} + C$. **704.** $\ln(\sin^2 x + 3) + C$. **705.** $\mathrm{tg}(x/2) + C$. **706.** $1/\sqrt{6}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2/3}\,\mathrm{tg}\,x) + C$. **707.** $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\cos x + \sin x)^3} + C$. **708.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **709.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **710.** $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right)\right| + C$. **711.** $\ln|\mathrm{tg}(x/2)| + C$. **712.** $\frac{1}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x^3}{2}\right| + C$. **713.** $(-\cos 7x)/14 - (\cos x)/2 + C$. **714.** $(\sin 4x)/8 + (\sin 8x)/16 + C$. **715.** $(\sin 2x)/4 - (\sin 4x)/8 + C$. **716.** $-\frac{1}{8}[(\cos 4x)/2 + \cos 2x - (\cos 6x)/3] + C$. **717.** $-1/\ln\sin x + C$. **718.** $\ln|\mathrm{arctg}\,x| + C$. **719.** $-\frac{2}{3}\sqrt{\arccos^3 x} + C$. **720.** $-\frac{1}{2}(\pi - \arcsin x)^2 + C$. **721.** $\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}\arccos^2 x + C$. **722.** $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C$. **723.** $\frac{1}{12}\mathrm{arctg}^2(2x/3) + C$. **724.** $\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{arctg}^3 e^x} + C$. **725.** $2\,\mathrm{arctg}\,e^x + C$. **726.** $\mathrm{tgh}\,x + C$. **727.** $-3\,\mathrm{cotgh}(x/3) + C$.

**4,3. Metóda per partes**

**728.** $e^{2x}(2x - 1)/4 + C$. **729.** $\sin x - x\cos x + C$. **730.** $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$. **731.** $a^x(x\ln a - 1)/\ln^2 a + C$. **732.** $x\sinh x - \cosh x + C$. **733.** $\frac{1}{4}x\cosh 2x - \frac{1}{8}\sinh 2x + C$. **734.** $\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$. **735.** $\frac{1}{2}(x^2 + 3)[\ln(x^2 + 3) - 1] + C$. **736.** $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + C$. **737.** $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\,\mathrm{arccotg}^2 x + x\,\mathrm{arccotg}\,x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$. **738.** $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$. **739.** $\frac{1}{3}x^3(\ln x - 1/3) + C$. **740.** $-\frac{1}{4}(2x^2 - 1)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C$. **741.** $\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1 + x^2) + C$. **742.** $\frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2)\ln(x + 1) - \frac{1}{6}[2x^3/3 + x^2/2 - x + \ln(x + 1)] + C$. **743.** $(x^2 + 6x + 5/2)(\sin 2x)/2 + (x + 3)(\cos 2x)/2 + C$. **744.** $e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\binom{n}{k}x^{n-k} + C$. **745.** $x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$. **746.** $-\sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}x^{n-k}\cos(x + k\pi/2) + C$. **747.** $\frac{x^{k+1}}{k+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j n(n-1)\ldots(n-j+1)\frac{(\ln x)^{n-j}}{(k+1)^j} + C$. **748.** $x(\ln x - 1) + C$. **749.** $x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$. **750.** $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$. **751.** $x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C$. **752.** $x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$. **753.** $x\arcsin\sqrt{x/(x + 1)} + \mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$. **754.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$. **755.** $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$. **756.** $\frac{1}{2}(\sinh x \cdot \cosh x - x) + C$. **757.** $\frac{1}{2}x(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$. **758.** $\frac{1}{2}(x + \sqrt{1 - x^2})\,e^{\arcsin x} + C$. **759.** $x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\ldots(n-k)(1+x^2)^{n-k}} + \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\mathrm{arctg}\,x + C$. **760.** $-\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C$. **761.** $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$. **762.** $(\ln x)(\ln\ln x - 1) + C$. **763.** $e^x/(x + 1) + C$. **764.** $x - \sqrt{1 - x^2}\arcsin x + C$. **765.** $-(\mathrm{arctg}\,x)/2(1 + x^2) + (\mathrm{arctg}\,x)/4 + x/4(1 + x^2) + C$. **766.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$. **767.** $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$. **768.** $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$. **769.** $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx -$

$-\,b\cos bx)+C.$ **770.** $\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\cos x\,.\,\ln \operatorname{tg} x+C.$ **771.** $x \operatorname{tg} x+\ln|\cos x|-x^2/2+C.$ **772.** $x-\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x+C.$ **773.** $(1+x)\,e^{(\operatorname{arctg} x)}/2\sqrt{1+x^2}+C.$

**4,4. Integrovanie racionálnych funkcií**

**774.** $\dfrac{1}{11}\ln\left|\dfrac{2x-3}{x+4}\right|+C.$ **775.** $\dfrac{2}{3}\ln|3x-2|+3\ln|x-3|+C.$ **776.** $\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{x}{a+bx}\right|+C.$ **777.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2(x+2)}{(x+1)^3}\right|+C.$ **778.** $\ln\left|\dfrac{(x-2)^4(x-5)^5}{(x+2)^6}\right|+C.$ **779.** $5x+\ln\left|\dfrac{(x-1)^{1/2}(x-5)^{161/6}}{(x-2)^{7/3}}\right|+$ $+\,C.$ **780.** $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$ **781.** $\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{2}{3}\ln|3x+$ $+\,2|+\dfrac{1}{3}\ln|3x-1|-\ln|x-1|+C.$ **782.** $2/(9x-12)+\ln|3x-4|+C.$ **783.** $1/x+$ $+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C.$ **784.** $\dfrac{1}{a^2}\ln\left|\dfrac{x}{a+bx}\right|+\dfrac{1}{a(a+bx)}+C.$ **785.** $-\dfrac{3}{x+2}+\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2+$ $+\,C.$ **786.** $\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C.$ **787.** $\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{11}{(x-3)^2}-\dfrac{8}{x-3}+C.$ **788.** $-\dfrac{3}{2(x-2)^2}-\dfrac{2}{x-2}+\ln|x-2|+2\ln|x|+C.$ **789.** $\dfrac{1}{x}+\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+$ $+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+C.$ **790.** $-\dfrac{9}{2(x-5)}-\dfrac{1}{2(x-1)}+C.$ **791.** $\dfrac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\,.$ $.\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C.$ **792.** $x+\ln|x^2+x+2|-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$ **793.** $x+\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$ **794.** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$ **795.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+$ $+\,C.$ **796.** $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x-1)+C.$ **797.** $\dfrac{1}{52}\ln|x-4|-\dfrac{1}{20}\ln|x-2|+$ $+\dfrac{1}{65}\ln(x^2+2x+2)+\dfrac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$ **798.** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,.$ $.\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$ **799.** $\dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+\dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C.$ **800.** $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\right|-$ $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+C.$ **801.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2-4x+6)+C.$ **802.** $\dfrac{x-4}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ **803.** $\dfrac{-x}{2(x^2+1)}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+$ $+\,C.$ **804.** $-\dfrac{x+2}{x^2+3x+3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{3}}+C.$ **805.** $\ln|x+2|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3x+3)+$ $+\dfrac{x+3}{3(x^2+3x+3)}+\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{3}}+C.$ **806.** $\dfrac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}+$ $+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg} x+C.$ **807.** $\dfrac{3x^2-7x+4}{(x-2)(x^2-2x+2)}+\ln\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}+\operatorname{arctg}(x-1)+C.$ **808.** $\dfrac{x}{4(x^2+1)^2}+\dfrac{3x}{8(x^2+1)}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg} x+C.$ **809.** $\dfrac{4x^2+3}{4(x^2+1)^2}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$ **810.** $\dfrac{x}{3(x^3+1)}+$ $+\dfrac{1}{9}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$ **811.** $I_n=\dfrac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}.$ **812.** $-\dfrac{1}{2(x-3)}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C.$ **813.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x-3}\right|-$

$-\frac{1}{x-1}\left(1+\frac{1}{2(x-1)}\right)-\frac{1}{2(x-3)}+C$. **814.** $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x+2)\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}{x-2}\right|+C$. **815.** $\frac{1}{16}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+3}+\frac{1}{8(x^2-2x+3)^2}+\frac{1}{8(x^2-2x+3)}+C$. **816.** $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}x+C$. **817.** $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$. **818.** $\frac{x^2-1}{2(x^4+1)}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$. **819.** $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

**820.** $\frac{15x^5+75x^4+190x^3+270x^2+228x+88}{48(x^2+2x+2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **821.** $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)+C$. **822.** $-\frac{x}{x^5+x+1}+C$. **823.** $-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(1)}{k!(n-k)(x-1)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(1)}{n!}\ln|x-1|+C$. **824.** $a+2b+3c=0$.

**4,5. Integrovanie iracionálnych funkcií**

**825.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **826.** $-x+4\sqrt{x}-4\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **827.** $3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-\sqrt[3]{x}+\ln|1+\sqrt[3]{x}|\right)+C$. **828.** $6(\sqrt[6]{x^7}/7-\sqrt[6]{x^5}/5+\sqrt[6]{x^3}/3-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **829.** $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$. **830.** $3\sqrt[3]{x}/2+6\sqrt[12]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}+C$. **831.** $-6/\sqrt[6]{x}+12/\sqrt[12]{x}+24\ln|\sqrt[12]{x}/(\sqrt[12]{x}+1)|+C$. **832.** $-15(\sqrt[20]{x}+1)^4+2(\sqrt[20]{x}+1)^5+C$. **833.** $2\sqrt{1-x}+\ln|(1-\sqrt{1-x})/(1+\sqrt{x-1})|+C$. **834.** $2\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{(x-3)/2}+C$. **835.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{x-4}/2)+C$. **836.** $-3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}-6\ln|1-\sqrt[6]{x+1}|+C$. **837.** $3t^4/4-3t^2/2-3(\ln|t-1|)/4+15(\ln|t^2+t+1|)/8-(27/4\sqrt{7}\operatorname{arctg}[(2t+1)/\sqrt{7}]+C$, kde $t=\sqrt[3]{x+1}$. **838.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. **839.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+\frac{2u}{u^3-1}+C$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$. **840.** $x/\sqrt{1-x^2}+C$. **841.** $t/3-t^{2/3}/2+t^{1/3}-\ln|t^{1/3}+1|+C$, kde $t=3x+4$. **842.** $-18t^5/5-9t^4-24t^3-72t^2-288t-576\ln|t-2|+C$, kde $t=\sqrt[6]{x-1}$. **843.** $2\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}+C$. **844.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{3}+C$, kde $t=\sqrt[3]{x}$. **845.** $\ln|\sqrt{1+x+x^2}+x+1/2|+C$. **846.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}-5\sqrt{3}/6+\sqrt{3x^2-5x+8}|+C$. **847.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x+1}{4}+C$. **848.** $\sqrt{x^2-4x+1}+2\ln|2x-4+2\sqrt{x^2-4x+1}|+C$. **849.** $3\sqrt{x^2-2x+2}+C$. **850.** $-2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin[(2x-1)/\sqrt{5}]+C$. **851.** $-3^{-1/2}\ln[(3+x)/3x]+\sqrt{(x^2+2x+3)/3x^2}+C$, pre $x>0$. **852.** $\arcsin[(x-3)/\sqrt{5}(x-)]+C$, pre $x>1$. **853.** $a^{-1}\sqrt{(a+x)/(a-x)}+C$, $-a<x<a$. **854.** $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. **855.** $x^2+x\sqrt{x^2+1}+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$. **856.** $2\ln|t|-(3/2)\ln|2t+1|+3/2(2t+1)+C$, kde $t=\sqrt{x^2-x+1}-x$. **857.** $5/18(t+1)-1/6(t+1)^2+(3/4)\,.\,\ln|t-1|-(16/27)\ln|t-2|-(17/108)\ln|t+1|+C$, kde $t=\sqrt{x^2+5x+6}/(x+2)$. **858.** $-\ln|2\sqrt{x^2+x+1}+x+2|+C$. **859.** $2\sqrt{x^2+x}+C$. **860.** $x/9\sqrt{9+x^2}+C$. **861.**

$[x-(3/a)]\sqrt{ax^2+2x+1}+(3/a\sqrt{a})\ln|ax+1+\sqrt{a(ax^2+2x+1)}|+C.$ **862.** $[(x-3)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|]/2+C.$ **863.** $(x-a)\sqrt{x^2+a^2}+C.$ **864.** $(-x^2/3+5x/6-19/6)\sqrt{1-2x-x^2}-4\arcsin[(x+1)/\sqrt{2}]+C.$ **865.** $(x^2/3+5x/6+1)\cdot\sqrt{x^2+4x+3}-(3/2)\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+3})+C.$ **866.** $[(x^3/4-7x^2/12+x/3+5/2)\cdot\sqrt{3+2x+x^2}+(7/2)\ln|1+x+\sqrt{3+2x+x^2}|]+C.$ **867.** $(x^4/5-4x^2/15+8/15)\cdot\sqrt{1+x^2}+C.$ **868.** $(-x^5/6-5x^3/24-5x/16)\sqrt{1-x^2}+(5/16)\arcsin x+C.$ **869.** $[(x+2)/2]\sqrt{3+4x+x^2}-(1/2)\ln|x+2+\sqrt{3+4x+x^2}|+C.$ **870.** $\dfrac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{x+1}{2}+C.$ **871.** $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{3x+1}{3}+(x+1/6)\sqrt{1-2x-3x^2}+C.$ **872.** $(4x^2/3-6x+1/3)\sqrt{2+3x-x^2}+\dfrac{17}{2}\arcsin\dfrac{3-2x}{\sqrt{17}}+C.$ **873.** $\dfrac{1}{6}(3x^3-2x^2-10x-60)\cdot\sqrt{4x-x^2}+10\arcsin\dfrac{x-2}{2}+C.$ **874.** $\dfrac{6x-5}{2(x-1)^2}\sqrt{3-2x^2}+7\ln\left|\dfrac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1}\right|+C.$ pre $x<1.$ **875.** $-(1/9x^3+5/54x^2+1/54x)\sqrt{3-2x+x^2}+\dfrac{2}{27\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\dfrac{3-x-\sqrt{3}\sqrt{3-2x-x^2}}{x}\right|+C,$ pre $x>0.$ **876.** $-(63/256x^2-21/128x^4-21/160x^6-9/80x^8+1/10x^{10})\sqrt{1+x^2}+\dfrac{63}{256}\cdot\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C,$ pre $x>0.$ **877.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}t,$ kde $t=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$ **878.** $-\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\dfrac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C.$ **879.** $2(1+x^{1/3})^{3/2}+C.$ **880.** $\dfrac{5x^3-3}{40}\cdot(1+x^3)^{5/3}+C.$ **881.** $(2x-8)^{3/2}\left(\dfrac{x-4}{5}+\dfrac{4}{3}\right)+C.$ **882.** $\left(\dfrac{10x^{2/3}-10}{15}\right)(2+x^{2/3})^{5/4}+C.$ **883.** $-\dfrac{4+3x^3}{8x(2+x^3)^{2/3}}+C.$ **884.** $\dfrac{3t}{2(t^3+1)}-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,$ kde $t=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$

### 4,6. Integrovanie trigonometrických funkcií

**885.** $\operatorname{tg}x+1/\cos x+C.$ **886.** $\ln|\operatorname{tg}x|+C.$ **887.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2\right)\Big/\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1\right)\right|+C.$ **888.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1\right)\Big/\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)\right|+C.$ **889.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln|\operatorname{tg}(\pi/8-x/2)|+C.$ **890.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1\right)+C.$ **891.** $x+\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}+C.$ **892.** $-x+2\ln\left|\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)/\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C.$ **893.** $\ln|\sin x+\cos x|+C.$ **894.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}[(\operatorname{tg}x)/2]+C.$ **895.** $(\sqrt{2}/4)\operatorname{arctg}[(\operatorname{tg}x)/2]+C.$ **896.** $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}[(\sqrt{3}\operatorname{tg}x)/\sqrt{5}]+C.$ **897.** $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\ln|(3+\sqrt{13}-2\operatorname{tg}x)/(3-\sqrt{13}-2\operatorname{tg}x)|+C.$ **898.** $-x/2+4^{-1}\operatorname{tg}(\pi/4+x)+C.$ **899.** $\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+1/(1+\cos x)+\operatorname{tg}(x/2)+C.$ **900.** $-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}x\right)-\dfrac{1}{4\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\operatorname{cotg}x\right)-\dfrac{1}{8}\ln|(3-\sin^2x)/(1+\sin^2x)|+C.$ **901.** $2(\sin x-\cos x)+C.$ **902.** $(\cos^2x)/2-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$ **903.** $2\arcsin\sqrt{\sin x}+C.$ **904.** $\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}x\right)+C.$ **905.** $1/2(1+\cos x)^2+C.$ **906.** $\dfrac{1}{4}\ln|(1+\sin x)/(5+\sin x)|+C.$ **907.** $-\ln(1+\cos^2x)+C.$ **908.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln|(\sqrt{2}+\sin 2x)/$

$/(\sqrt{2} - \sin 2x)| + C$. **909.** $-2\sqrt{\operatorname{cotg} x}\left(1 + \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^2 x\right) + C$. **910.** $-2\sqrt{\operatorname{cotg} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C$. **911.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 + 2\cos x)^2} + C$. **912.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **913.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **914.** $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$. **915.** $\sin x - 2(\sin^3 x)/3 + (\sin^5 x)/5 + C$. **916.** $5x/16 - (\sin 6x)/12 + (\sin 12x)/64 - (\sin^3 6x)/144 + C$. **917.** $(\cos^7 x)/7 - (3\cos^5 x)/5 + \cos^3 x - \cos x + C$. **918.** $-(\cos^3 x)/3 + C$. **919.** $x/8 - (\sin 4x)/32 + C$. **920.** $-(\cos^3 x)/3 + (\cos^5 x)/5 + C$. **921.** $\frac{1}{4}\sin^8\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin^6\frac{x}{2} + C$. **922.** $\frac{1}{128}\left|\frac{1}{8}\sin 8x - \sin 4x - 3x\right| + C$. **923.** $\ln|\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)| + C$. **924.** $\ln|\operatorname{tg}(x/2)| + 1/\cos x + C$. **925.** $-[\operatorname{cotg} x + 2(\operatorname{cotg}^3 x)/3 + (\operatorname{cotg}^5 x)/5] + C$. **926.** $(\sin x)/4\cos^4 x + 3(\sin x)/8\cos^2 x + \frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)| + C$. **927.** $(\operatorname{tg}^7 x)/7 + 3(\operatorname{tg}^5 x)/5 + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$. **928.** $(\operatorname{cotg}^2 x)/2 - 3\ln|\operatorname{cotg} x| + 3/2\operatorname{cotg}^2 x + 1/4\operatorname{cotg}^4 x + C$. **929.** $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{cotg} x - (\operatorname{cotg}^3 x)/3 - C$. **930.** $-1/6\sin^6 x + C$. **931.** $-(\cos^2 x)/2 + 1/2\cos^2 x + 2\ln|\cos x| + C$. **932.** $(\operatorname{tg}^3 x)/3 + (\operatorname{tg}^5 x)/5 + C$. **933.** $-x - \operatorname{cotg} x + C$. **934.** $(\operatorname{tg}^2 x)/2 + \ln|\cos x| + C$. **935.** $x - (\operatorname{cotg}^3 x)/3 + \operatorname{cotg} x + C$. **936.** $x + (\operatorname{tg}^7 x)/7 - (\operatorname{tg}^5 x)/5 + (\operatorname{tg}^3 x)/3 - \operatorname{tg} x + C$. **937.** $-(\sin 8x)/16 + (\sin 2x)/4 + C$. **938.** $(\sin x)/2 + (\sin 7x)/14 + C$. **939.** $-(\cos x)/2 + \cos(x/2) + C$. **940.** $-(\cos 2x)/8 - (\cos 4x)/16 + (\cos 6x)/24 + C$. **941.** $(\cosh^3 x)/3 - \cosh x + C$. **942.** $3x/8 + (\sinh 2x)/4 + (\sinh 4x)/32 + C$. **943.** $\ln|\cosh x| + C$. **944.** $x - \operatorname{cotgh} x + C$.

### 4.7. Integrovanie transcendentných funkcií

**945.** $-x/2 + 4^{-1}\ln(e^{2x} + 4) + 2^{-1}\operatorname{arctg}(e^x/2) + C$. **946.** $\operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}) + C$. **947.** $(\ln a)^{-1}\ln[a^x/(a^x + 1)] + C$. **948.** $(\ln a)^{-1}\, 2\sqrt{1 - a^x} + \ln|(\sqrt{1 - a^x} - 1)/(\sqrt{1 - a^x} + 1)| + C$. **949.** $x + 3\ln[(e^{-x/6} + 1)\sqrt{e^{-x/3} + 1}] + 3\operatorname{arctg} e^{-x/6} + C$. **950.** $-\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1}) - \arcsin e^x + C$. **951.** $-\sqrt{e^{-2x} + 4e^{-x} - 1} - 2\ln(2 + e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 4e^{-x} - 1}) + \arcsin[(2 - e^x)/\sqrt{5}] + C$. **952.** $-e^{-5x}(125x^3 + 75x^2 + 30x + 6)/625 + C$. **953.** $e^{3x}(3x^3 - 3x + 13)/9 + C$. **954.** $2e^{\sqrt{x}}[(x^2 + 20x + 120)\sqrt{x} - (5x^2 + 60x + 120)] + C$. **955.** $-e^{-x^2}(x^6/2 + 3x^4/2 + 3x^2 + 3) + C$. **956.** $x(\ln^4 x - 4\ln^3 x + 12\ln^2 x - 24\ln x + 24) + C$. **957.** $x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 4\ln x - 1) + C$. **958.** $x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + 5x(5\ln^2 x - 2\ln x - 2) + C$. **959.** $x^4(32\ln^3 x - 24\ln^2 x + 12\ln x - 3)/128 + C$. **960.** $-(4\ln^3 x + 6\ln^2 x + 6\ln x + 3)/8x^2 + C$. **961.** $(x^4/4 - 1)\ln(x^2 + 2) - x^4/8 + x^2/2 + C$. **962.** $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x - 2x + C$. **963.** $4^{-1}(2x^2 - 1)\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}/4 + C$. **964.** $[12x^7\operatorname{arctg} x - 2x^6 + 3x^4 - 6x^2 + 6\ln(1 + x_2)]/84 + C$. **965.** $(4x^3 - 24x)\sin x + (x^4 - 12x^2 + 24)\cos x + C$. **966.** $(x^5 - 20x^3 + 120x)\sin x + 5(x^4 - 12x^2 + 24)\cos x + C$. **967.** $(x^2/2 + 5x/2 + 17/4)\sin(2x + 2) + (x/2 + 5/4)\cos(2x + 2) + C$. **968.** $(x^4 + 3x^2)/4 + (3x^2 - 21/4)\cos x - 6x\sin x - (3/4)x\sin 2x - (3/8)\cos 2x - (1/12)\cos 3x + C$. **969.** $e^{-x}[x^2(\sin x - \cos x) + 2x\sin x + \sin x + \cos x]/2 + C$. **972.** $e^x + \operatorname{li}(e^x) + C$. **973.** $e^x/(x + 1) + C$. **974.** $e^2\operatorname{li}(e^{-2x-2}) - e^4\operatorname{li}(e^{-2x-4}) + C$.

### 4.8. Rozličné úlohy

**975.** $-1/5x^5 + 1/3x^3 - 1/x - \operatorname{arctg} x + C$. **976.** $(2x + 1)/6(x^2 + x + 1)^2 + (2x + 1)/3(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$. **977.** $-\frac{1}{8}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{8}\ln|x^2 - 1| + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2 + C$. **978.** $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2 - x^3 + 2\sqrt{1 - x^3 + x^6}}{x^3}\right| + C$. **979.** $x/4\sqrt{4 - x^2} + C$. **980.** $3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x} +$

$+ C.$ **981.** $-(2x+1)/\sqrt{4x^2+2x+1} + C.$ **982.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$ **983.** $\frac{2}{9}(x^3 - 2)\sqrt{x^3+1} + C.$ **984.** $2\sqrt{x+1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right| + C.$ **985.** $\frac{2}{3}[\sqrt{(x-3)^3} - \sqrt{(x-4)^3}] + C.$ **986.** $(-x^2+2)/x - 2\sqrt{1-x^2}/x - 2\arcsin x + C.$ **987.** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| + C.$ **988.** $\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2x-5}{4}\sqrt{x^2-x} + \frac{3}{8}\ln|x-1/2+\sqrt{x^2-x}| + C.$ **989.** $-(x+5)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$ **990.** $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C.$ **991.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$ **992.** $x^x + C.$ **993.** $-x/2 + x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$ **994.** $-\frac{\ln(x^2-x+1)}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$ **995.** $-\frac{(x^2+7)}{9}\sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right| + C.$ **996.** $2\operatorname{arctg}(\ln|x|) + C.$ **997.** $-\ln\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C.$ **998.** $(x\ln|x|)/\sqrt{1-4x^2} - \frac{1}{2}\arcsin 2x + C.$ **999.** $x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)\ln(1+x^2) + C.$ **1000.** $-(\operatorname{cotg} x)\ln|\cos x| - x + C.$ **1001.** $\frac{1}{3}x^3\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - x^3/18 - x^2/92 - x/6 + C.$ **1002.** $\operatorname{arctg} x\,.\,\ln|\operatorname{arctg} x| - \operatorname{arctg} x + C.$ **1003.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5+4e^x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5+4e^x}+\sqrt{5}} + C.$ **1004.** $-1/(n-1)(e^x+a)^{n-1} + C.$ **1005.** $\ln|1+e^x| - e^{-x} - x + C.$ **1006.** $\ln\frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1} + C.$ **1007.** $\frac{4}{3}\sqrt{(1+e^x)^3} + C.$ **1008.** $\frac{1}{2}a\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}b\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)| + \frac{1}{2}c\ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C.$ **1009.** $2e^{\sqrt{x}} + C.$ **1010.** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + C.$ **1011.** $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + C.$ **1012.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + C.$ **1013.** $1/\cos x + \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C.$ **1014.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{cotg}(x+1)}{\sqrt{3}-\operatorname{cotg} x}\right| + C.$ **1015.** $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - x^2/2 + C.$ **1016.** $e^x\operatorname{tg}(x/2) + C.$ **1017.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}+\cos 4x}\right| + C.$ **1018.** $-\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C.$ **1019.** $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x} - \frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x} + \frac{3}{40}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2}\right)\right| + C.$ **1020.** $\ln|\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}| + C.$ **1021.** $(2x^2+14x-11)/4\sin 2x + \frac{2x+7}{4}\cos 2x + C.$ **1022.** $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{\arcsin x}{x} + C.$ **1023.** $-(1/3x^3)\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + (1/6)\arccos(1/x) + \sqrt{x^2-1}/6x^2 + C.$ **1024.** $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$ **1025.** $x - e^{-x}\arcsin e^x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}}) + C.$ **1026.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + x\arcsin[2\sqrt{x}/(1+x)] + C.$ **1027**—$x - \sqrt{1-x^2}\arccos x + C.$ **1028.** $-\frac{1}{4}(2x+21)\sqrt{-x^2+3x-2} +$

$+ (x^2 + 3x - 55/8) \arccos (2x - 3) + C$. **1029.** $1/\arccos x + C$. **1030.** $\frac{1}{2} \ln [x^2/(1 + x^2)] - (\operatorname{arctg} x)/x + C$. **1031.** $[(x^2 - 1) \operatorname{arctg} x + x]/4(1 + x^2) + C$. **1032.** $\ln \sqrt[8]{(x - 1)/(x + 1)} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - 1}\right] \operatorname{arctg} x + C$. **1033.** $x - \ln (1 + e^x) - 2e^{x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} x\right)^2 + C$. **1034.** $\frac{1}{2} \cdot \left[(x^2 - 2) \operatorname{arctg}(2x + 3) + \frac{3}{8} \ln (2x^2 + 6x + 5) - \frac{x}{4}\right] + C$. **1035.** $\frac{1}{4} \ln \cosh 2x + C$. **1036.** $-2 \cosh \sqrt{1 - x} + C$. **1037.** $-x^3/12 - x/4 + 4^{-1}(1 + x^2)^2 \operatorname{arctg} x + C$. **1038.** $x|x|/2 + C$. **1039.** $|x^3|/3 + C$. **1040.** $e^x - 1 + C$, pre $x < 0$, $1 - e^{-x} + C$ pre $x \geq 0$. **1041.** $x + C$ pre $0 < x < 1$, $\ln x + C$ pre $x > 1$. **1042.** $E(x) [E(x) - (-1)^{E(x)} \cos \pi x]/\pi + C$.

## 4,9. Neurčitý integrál komplexnej funkcie reálnej premennej

**1043.** $x^3/3 + i(x^2/2 - 3x) + C$. **1044.** $\sin x - i \cos x + C$. **1045.** $(x^3/3 + 3x^2/2 - 6x) - i(5x^2/2 + 6x) + C$. **1046.** $(x^4/4 - 27x^2/2) + i(3x^3 - 27x) + C$. **1047.** $x - 2 \operatorname{arctg} x - i \ln (x^2 + 1) + C$. **1048.** $(1/2) \ln [(x - 3)^2 + 1] + i \operatorname{arctg} (x - 3) + C$. **1049.** $\frac{1}{4}\left[\ln \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2x + 2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}\right] - \frac{i}{4}\left[\ln \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2x + 2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{x^2 - x + 2}\right] + C$. **1050.** $(2 - x)/(x^2 - 4x + 5) + i/(x^2 - 4x + 5) + C$. **1051.** $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{i}{8} \ln \frac{x^2}{x^2 + 4} + C$. **1052.** $-x/(x^2 + 4) - 2i/(x^2 + 4) + C$. **1053.** $\frac{2 - 4i}{5} \frac{x + 3i}{x^2 + 9} + \frac{3 + 4i}{25}\left[\ln \frac{x^2 + 9}{x^2 + 2x + 2} + 2 i \operatorname{arctg} \frac{4x + 3}{3 - x - x^2}\right] + C$. **1054.** $\frac{3}{4} \ln (x^4 + 2x^2 + 5) - 2 i \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{2} + C$. **1055.** $(e^2/2) (\sin x^2 + i \cos x^2) + C$. **1056.** $e^{(3-2i)x}[39x - 5 + i(12 - 26x)]/169 + C$. **1057.** $(x^2/2 - 9/4) \cos 2x + i (2x \cos x - \sin 2x) + C$. **1058.** $x^{4-5i}/(4 - 5i) + C$. **1059.** $\sin x + i(-\cos x - e^x) + C$. **1060.** $e^{3x}\left[\left(\frac{3x^2}{13} - \frac{10x}{169} - \frac{18}{2\,197}\right) \cos 2x + \left(\frac{2x^2}{13} - \frac{24x}{169} + \frac{92}{2\,197}\right) \sin 2x\right] + C$. **1061.** $e^{3x}\left[\left(\frac{3x^2}{13} - \frac{10x}{169} - \frac{18}{2\,197}\right) \sin 2x - \left(\frac{2x^2}{13} - \frac{24x}{169} + \frac{92}{2\,197}\right) \cos 2x\right] + C$. **1062.** Pre $n = 2k$, $2\sum_{k=1}^{n/2} \frac{\sin (2k - 1) x}{2k - 1} + C$, pre $n = 2k + 1$, $x + 2\sum_{j=1}^{k} \frac{\sin 2jx}{2j} + C$. **1063.** $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\sin 2kx}{2k} + \frac{x}{2^n} + C$. **1064.** Pre $n$ párne $\frac{(-1)^{n/2-1}}{2^n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\cos 2(n - j) x}{2(n - j)} + C$, pre $n$ nepárne $(-1)^n x + \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\sin 2(n - j) x}{2(n - j)} + C$. **1065.** $-\binom{2n}{n} \frac{e^{iax}}{2^{2n} a} + \frac{e^{-iax}}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^{n} \binom{2n}{n - j} \frac{1}{a^2 + 4j^2} (2j \sin 2jx - a \cos 2jx) + C$. **1066.** $2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\sin 2kx}{2k} + (-1)^n \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$. **1067.** $2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\sin 2kx}{2k} + (-1)^n x + C$.

# 5. Určitý integrál

## 5,1. Pojem a základné vlastnosti určitého integrálu

**1068.** 0,5; 0,6; 0,4; 0,4; 0,3; 0,3; 0,2; 0,3; $\|D\| = 0{,}6$. **1069.** $0 < 1/n < 2/n < \ldots < (n - 1)/n < 1$, $\|D_n\| = 1/n$, $0 < 1/n^2 < 4/n^2 < 9/n^2 < \ldots < (n-1)^2/n^2 < 1$, $\|D_n\| = (2n - 1)/n^2$. **1070.** $-105/16$; $-81/8$; $-29/8$. **1072.** Nie je integrovateľná. **1073.** a) $c(b - a)$; b) $(b^2 - a^2)/2$; c) $(b^3 - a^3)/3$; d) $(c^b - c^a)/\ln c$; e) 1; f) 1. **1074.** a) $40\frac{1}{4}$; b) 3; c) $2/\ln 3 - 1/2$; d) $(e^2 + 4e - 1)/2$. **1075.** $-21/2$. **1076.** $-1/6$. **1077.** $65/6$. **1078.** $-\ln 2$. **1079.** $4 - 3\ln 3$. **1080.** $35\frac{1}{15} - 32\ln 3$. **1081.** $7/72$. **1082.** $\pi/4$. **1083.** $\frac{1}{4}\ln(5/3)$. **1084.** $\frac{1}{5}\ln(4/3)$. **1085.** $\ln(32/27)$.

**1086.** $1/4$. **1087.** $6 + 9\sqrt[3]{3}/4$. **1088.** $4\sqrt{2}/3$. **1089.** 2. **1090.** $\pi/4$. **1091.** $\sqrt{2} - 1$. **1092.** 12. **1093.** $e - 1/e$. **1094.** $e^5/5 + 3e^4/4 + e^3 + e^2/2 - 49/20$. **1095.** $e - \sqrt{e}$. **1096.** $3/2$. **1097.** $\pi/6$. **1098.** 0.

**1099.** $\pi/2$. **1100.** $4/3$. **1101.** $21/16\sqrt[3]{2} - 9/8$. **1102.** $\ln 2$. **1103.** 2. **1104.** $2 - \pi/4$. **1105.** $4/3$. **1106.** a), b), c) Funkcia za integrálom a k nej primitívna funkcia je v danom intervale nespojitá a neohraničená. **1107.** a) $\ln 2$; b) $\pi/4$; c) $(1 - \cos a\pi)/a$; d) $1/(p + 1)$. **1108.** a), b), c), d) Prvý. **1109.** $(0, 4/27)$. **1110.** $(9, 19/2)$. **1111.** $(2/5, 1/2)$. **1112.** $(4, 4\sqrt{2})$. **1113.** $(\pi/4, 1)$. **1114.** $(4/3, e - 1)$. **1115.** $(1/2, \pi/4)$. **1116.** $(\pi/2, \pi\sqrt{6}/4)$. **1117.** $(e^{-1/e}, 1)$. **1118.** $1/6$. **1119.** $-2$. **1120.** $2\ln(6/5)$. **1121.** $20/9$. **1122.** $2/\pi$. **1123.** $1/2$. **1124.** $1/6$. **1125.** $2/\ln 3 - 3/2$. **1126.** a) $(1/11\sqrt{2}, 1/11)$; b) $[e^{-200}(\operatorname{arctg} 10)/10, (\operatorname{arctg} 10)/10]$ alebo $[(1 - e^{-200})/20\,200, (1 - e^{-200})/100]$. **1128.** $2v/3$. **1129.** $2h/3$. **1130.** $0$, $E_0\sqrt{2}/2$. **1131.** $\ln x$. **1132.** $\cos x - 1$. **1133.** $(x^3 - a^3)/3$. **1134.** $\ln x$. **1135.** $-\sqrt{1 + x^4}$. **1136.** $(\sin x)/x$, pre $x \in (0, \infty)$. **1137.** $e^{-x}\cos 2x$. **1138.** a) $2x/(1 - x^4)$; b) $-x\cos x - (\pi/2 - x)\sin x$. **1139.** Rastúca v intervale $(-\infty, \infty)$. **1140.** Lokálne maximum v číslach $x = (2k + 1)\pi$, lokálne minimum v číslach $x = 2k\pi$, kde $k$ je prirodzené číslo. **1141.** a) 0; b) 0. **1142.** $5/6$. **1144.** 0. **1145.** 1. **1146.** 0. **1147.** $14 - \ln 5040$.

## 5,2. Substitučná metóda a metóda per partes pre určité integrály

**1148.** $\ln 3$. **1149.** $\operatorname{arctg}(2/9)$. **1150.** $4\sqrt{2}/3 - 2/3$. **1151.** $\pi/6$. **1152.** $2\ln 2 - 1$. **1153.** $3\sqrt{2}/2$. **1154.** $2(2 - \operatorname{arctg} 2)$. **1155.** $8 + 3\sqrt{3}\,\pi/2$. **1156.** $\pi/2 + 1$. **1157.** $\ln[(7 + 2\sqrt{7})/9]$. **1158.** $\pi/4 + 1/2$. **1159.** $1412/5$. **1160.** $4 - \pi$. **1161.** $3/2$. **1162.** $1/3$. **1163.** $[1/2(a^2 - b^2)]\ln[2a^2/(a^2 - b^2)]$.

**1164.** $9(7\sqrt[3]{4} - 12)/32$. **1165.** $(2/\sqrt{5})\operatorname{arctg}(1/\sqrt{5})$. **1166.** $\ln(4/3)$. **1167.** Funkcia $x = \varphi(t)$, resp. $t = \varphi_{-1}(x)$ nemá v každom bode daného intervalu deriváciu. **1172.** $1 - 2/e$. **1173.** 1. **1174.** 1. **1175.** $2\ln 2 - 3/4$. **1176.** $(e^2 + 3)/8$. **1177.** $(2e^{\pi} + 1)/5$. **1178.** $\pi(9 - 4\sqrt{3})/36 + 2^{-1}\ln(3/2)$. **1179.** $\pi$. **1180.** $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$. **1181.** $(3/4)\ln 2 - 1/4$. **1182.** a) $I_n = n^{-1}(n - 1)I_{n-2}$; $I_8 = 105\pi/768$; b) $I_n = 1/(2n - 1) - I_{n-1}$; $I_8 = \pi/4 - (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15)$; c) $I_n = (-1)^{n+1}/(m + 1)\,e^{m+1} - nI_{n-1}/(m + 1)$; $I_8 = -8!\,e^{-m-1}\sum_{j=0}^{8}[1/(8 - j)!\,(m + 1)^{j+1}] + 8!/(m + 1)^9$.

## 5,3. Obsah rovinných útvarov

**1185.** a) 12; b) 2; c) 1. **1186.** 36. **1187.** $9/2$. **1188.** $9/2$. **1189.** $1/3$. **1190.** $343/3$. **1191.** $16/3$. **1192.** $2(2 - \sqrt{2})/3$. **1193.** 8. **1194.** $5/6$. **1195.** $15/2 - 8\ln 2$. **1196.** $1/2$. **1197.** $1/4 - 1/2e$. **1198.** $3 - e$. **1199.** $[a^2(e - e^{-1})]/2$. **1200.** $3(\sqrt{3} - 1/2)\,\pi/2 + 9(1 - \sqrt{3})/2$. **1201.** $\pi/2$. **1202.** $(1 + e^{-\pi})/2$. **1203.** $9/4$. **1204.** 474. **1205.** $3/2$. **1206.** $2\pi + 4/3$, $6\pi - 4/3$. **1207.** $(6\pi + 16)p^2/3$. **1208.** $(16/3).(1 + 2\sqrt{2} + (3/2)\ln 2)$. **1209.** $72\sqrt{3}/5$. **1210.** $8/15$. **1211.** $3\pi a^2$. **1212.** $3\pi a^2/8$.

**1213.** $3\pi c^4/8ab$. **1214.** $a^2(4\pi^3 + 3\pi)/3$. **1215.** $4\pi^2a^2/3$. **1216.** $\pi a^2/4$. **1217.** $\pi a^2/2$. **1218.** $9\pi/2$ **1219.** $\pi a^2/2$ **1220.** $18\pi a^2$. **1221.** $6\pi$. **1222.** $\frac{p^2}{6}(3 + 4\sqrt{2})$. **1223.** $a^2$. **1224.** $24 \operatorname{arctg}(5/12)$. **1225.** $\pi\sqrt{2}$. **1226.** $3a^2/2$.

### 5,4. Objem telies

**1227.** $50\frac{2}{15}\pi$. **1228.** $18\pi$. **1229.** $\pi^2/2$. **1230.** $8\pi$. **1231.** $\frac{1}{4}\pi(e^4 - 1/e^4) + 8$. **1232.** $(4 - \pi)\pi/4$. **1233.** $2\pi$. **1234.** $3\pi/10$. **1235.** $2\pi\sqrt{2}/3$. **1236.** $\pi^2/12$. **1237.** $(7 - 15/4 \ln 2)\pi/2$. **1238.** $\pi a^2b/8$. **1239.** $\pi b^2(k - a)^2(k + 2a)/3a^2$. **1240.** $(34 + 2/15)$. **1241.** $\pi/12$. **1242.** $\pi(\pi^2 + 12\pi\sqrt{3} - 72)/72$. **1243.** $2\pi[1 - (a + 1)e^{-a}]$. **1244.** $\pi a^3/15$. **1245.** a) $128\pi/3$; b) $64\pi$. **1246.** $\pi r^2h/3$. **1247.** $\pi(R^2 + Rr + r^2)h/3$. **1248.** $4\pi ab^2/3$, $4\pi a^2b/3$. **1249.** $3\pi/4$. **1250.** $5a^3\pi^2$. **1251.** $\pi a^3(9\pi^2 - 16)/6$. **1252.** $32\pi c^6/105ab^2$, $32\pi c^6/105a^2b$. **1253.** $\pi a^3\sqrt{2}/12$. **1254.** $320\pi a^6/3$. **1255.** $2\pi a^3(\pi^3 - 6\pi)/3$. **1256.** $4\pi a^3/9$. **1257.** $4\pi a^3/21$. **1258.** $\pi a^3[\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})/4 - 2/3]$. **1259.** $4\pi abc/3$. **1260.** $8\pi abc/3$. **1261.** $\pi a^3/4$. **1262.** $4abc/3$. **1263.** $16/3$. **1264.** $2a^3(\pi - 4/3)/3$. **1265.** $\pi/32$. **1266.** $2r^3(\operatorname{cotg}\alpha)/3$.

### 5,5. Dĺžka rovinnej krivky

**1267.** $2\sqrt{3}$. **1268.** $8a$. **1269.** $2\pi^2a$. **1270.** $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2})$. **1271.** $2a\left(\frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 t_1}}{\cos t_1} - 2 - \sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 t_1} + \sqrt{3}\cos t_1}{\sqrt{3} + 2}\right)$. **1272.** $\pi^3/3$. **1275.** $3\sqrt{37}/2 + 4^{-1}\ln(6 + \sqrt{37})$. **1276.** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. **1277.** $\sqrt{5}/2 + [\ln(2 + \sqrt{5})]/4$. **1278.** $2(\sqrt{19^3} - 1)/27$. **1279.** $33/16$. **1280.** $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + 1 + \ln[(1 + \sqrt{2})/(1 + \sqrt{1 + e^2})]$. **1281.** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **1282.** $\ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. **1283.** $\ln\frac{16}{5}$. **1284.** $4$. **1285.** $6a$. **1287.** $\frac{1}{2}a[2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})]$. **1288.** $a\left(\frac{3\sqrt{13} - 10}{6} + \ln\frac{6}{2 + \sqrt{13}}\right)$. **1289.** $a\sqrt{1 + m^2}(e^{2\pi m} - 1)/m$. **1290.** $2a\pi$. **1291.** $3a\pi/2$.

### 5,6. Obsah rotačnej plochy

**1292.** $P \doteq 191{,}32$. **1293.** $32\pi/5$. **1294.** $2\pi\sqrt{2}(e^{\pi} - 2)/5$. **1295.** $12\pi a^2/5$. **1296.** $4\pi^2a^2$. **1297.** $32\pi a^2/3$. **1298.** $196\pi/27^2$. **1299.** $\pi[255/1024 - (\ln 2)/8]$. **1300.** $56\pi a^2/3$. **1301.** $2\pi[\sqrt{2} + \ln\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}]$. **1302.** $\pi[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln[(1 + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)]]/2$. **1303.** $-\sqrt{e^2 + 1}/e^2 - \ln[(1 + \sqrt{e^2 + 1})/e] + \sqrt{2} + \ln[(1 + \sqrt{2})/2]$. **1304.** $[\pi a^2(e^2 - e^{-2} + 4)]/4$. **1305.** $2\pi b^2 + 2\pi a^2b(\arcsin\varepsilon)/\varepsilon$, $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. **1306.** $12\pi a^2/5$. **1307.** $4\pi^2ab$. **1308.** $\pi a^2\left[\sqrt{6} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + 2}\right]$. **1309.** $2\pi r\left[\frac{2 - 4r}{1 - r}\right]2\sqrt{4r - 3} + \frac{8r}{3}\arccos\frac{1}{2r} - \frac{1 - 4r}{1 - 2r}\sqrt{8r - 3} - \frac{8r}{3}\arccos\frac{1}{4r}$. **1310.** $14\pi/3$. **1311.** $4\pi r^2$. **1312.** $56\pi/3$. **1313.** $2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1 + \varepsilon)\right]$, $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. **1314.** $2\pi b\left[\sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2a^2 + b^2}}{a}\right]$. **1315.** $\pi a^2$. **1316.** $4\pi^2a^2$. **1317.** $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. **1318.** $24\pi^2$.

**5,7. Statické momenty, ťažisko, momenty zotrvačnosti**

**1319.** $\frac{1}{2}\sigma ab^2$, $\frac{1}{2}\sigma a^2b$. **1320.** $M_b = \frac{1}{6}\sigma a^2b$, $M_a = \frac{1}{6}\sigma ab^2$, $M_c = \frac{1}{6}\frac{\sigma a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1321.** $M_x = 3\sigma/280$, $M_y = 83\sigma/420$. **1322.** $(1, 2/5)$. **1323.** $(3, 0)$. **1324.** $(6/5, 3)$. **1325.** $(3x_0/5, 3y_0/8)$. **1326.** $(9a/20, 9a/20)$. **1327.** $(0, 4a/3\pi)$. **1328.** $(4a/3\pi, 4b/3\pi)$. **1329.** $(4a/3\pi, 4(a+b)/3\pi)$. **1330.** $(0, (24 + 15\pi)/(30\pi - 20))$. **1331.** $(a/5, a/5)$. **1332.** $(5/7, 0)$. **1333.** $(256a/315\pi, 256a/315\pi)$. **1334.** $(\pi/2, \pi/8)$. **1335.** $(4\pi(4\pi + 3)/(\pi + 4), 5\pi/6(\pi + 4))$. **1336.** $[\pi/2, (2\pi + 3\sqrt{3})/(24\sqrt{3} - 8\pi)]$. **1337.** $(83/77, 9/154)$. **1338.** $(a\pi, 5a/6)$. **1339.** $(14/5, 25/8)$. **1341.** $T(\varrho, \varphi) = ((4r/3\alpha)\sin(\alpha/2), \varphi/2)$. **1342.** $(6a(4 - \pi^2)/\pi^2, 2a(\pi^2 - 6)/\pi^2)$. **1343.** $(5a/6, 16a/9\pi)$. **1344.** $(a\sqrt{2}\pi/8, 0)$. **1345.** $(0; 0{,}971)$. **1346.** $(1{,}520; 0{,}397)$. **1347.** $(7/5, \sqrt{3}/4)$. **1348.** $[(a\sin\alpha)/\alpha, 0]$. **1349.** $(2a(\pi^2 - 6)/\pi^2, 6a/\pi)$. **1350.** $(0, 2a/5)$. **1351.** $(\pi a, 4a/3)$. **1352.** $\left(0, \frac{1}{2}a(\cosh 1 + 1/\sinh 1)\right)$. **1353.** $(5a/8, 15\pi a/256)$. **1354.** $(2r/3, 2r/3)$. **1356.** $[-a(2e^{2\pi} + e^{\pi})/5(e^{\pi} - e^{\pi/2}), a(e^{2\pi} - 2e^{\pi})/5(e^{\pi} - e^{\pi/2})]$. **1357.** $(4a/5, 4a/5)$. **1358.** Ťažisko leží na osi symetrie vo vzdialenosti $3a/8$ od stredu. **1359.** Ťažisko leží na osi symetrie vo vzdialenosti $v/4$ od základne. **1360.** $\xi = 2a/3$. **1361.** $\xi = 5/9$. **1362.** $\eta = 9b/16$. **1363.** Ťažisko je na osi symetrie, vzdialenosť od základne je $h/3$. **1364.** Ťažisko je na osi symetrie, vzdialenosť od základne je $h\sqrt{r^2 + h^2}/3(r + \sqrt{r^2 + h^2})$. **1365.** $\xi = a(\sqrt{2} + 1)/3$. **1366.** $\sigma ab^3/3$, $\sigma a^3b/3$. **1367.** $\tau av^3/12$. **1368.** $\pi R^4\sigma/4$, $\pi R^4\sigma/8$. **1369.** $\frac{\sigma}{8}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)a^4$. **1370.** $\pi\sigma ab^3/4$, $\pi\sigma a^3b/4$. **1371.** $\mu l^3/12$. **1372.** $\frac{\mu}{3}(a^2 + ab + b^2)l$, $\frac{\mu}{3}ld^2$. **1373.** $\frac{\mu}{2}\pi r^3$. **1374.** $\frac{\mu}{2}r^3\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$. **1375.** $\frac{\mu}{3}(\sqrt{1 + e})^3 - 2\sqrt{2})$. **1376.** $3\sigma a^4/8$, $3\sigma a^4/8$. **1377.** $I_x = 256\sigma a^4/15$, $I_y = 16\sigma a^4(\pi^2 - 128/45)$. **1378.** $\pi\gamma r^4h/10$. **1379.** $\pi\gamma r^5/15$. **1380.** $\pi\gamma r^4h/2$. **1381.** $8\pi\gamma a^4b/15$. **1382.** $\pi\gamma r^4h/6$. **1383.** $Mr^2$, $M$ je hmota plochy. **1384.** $Mr^2/2$. **1385.** $2Mr^2/3$. **1386.** $n = 3$; $\pi a^4/4$, $\pi a^4\sqrt{3}$; $n = 4$; $\pi a^4$, $4\pi a^4$. **1387.** $90\pi^2$, $60\pi^2$. **1388.** $2\pi^2\, nab$. **1389.** $12\pi a^2$, $3\pi^2a^3/4$.

**5,8. Príklady na výpočet fyzikálnych veličín**

**1390.** $s = 42$ m, $v_{str.} = 2{,}8$ m/s. **1391.** $\varkappa Mm/a(a + l)$. **1392.** $\varkappa\frac{M^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. **1393.** $F = \varkappa Mml/\sqrt{(l^2 + R^2)^3}$, $L = \varkappa Mm/R$. **1394.** $Q/2\pi^2\varepsilon a^2$. **1395.** $Qa/4\pi\varepsilon\sqrt{(r^2 + a^2)^3}$ kde $a$ je vzdialenosť bodu $M$ od $S$. **1396.** $Q(1 - a/\sqrt{a^2 + r^2})/2\pi\varepsilon r^2$. **1397.** 1056 Mp. **1398.** 93 000 Mp. **1399.** $36 \cdot 10^4\,\pi$ kp. **1400.** $\mu_0 8\sqrt{2}i/4\pi a$. **1401.** $(20 + \pi^2)/2\pi$. **1402.** 0,125 kpm. **1403.** $\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$, $k$ je koeficient trenia. **1404.** $93{,}09 \cdot 10^7$ kpm. **1405.** $\pi\gamma gR^2H^2/6$, $g$ je tiažové zrýchlenie. **1406.** $\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^6$ kpm. **1407.** $5{,}4187 \cdot 10^{10}$ kpm. **1408.** $16{,}34 \cdot 10^3$ kpm. **1409.** $61{,}2\pi$ kpm. **1410.** $1925 \cdot 10^5$ kpm. **1411.** $g^2M^2/6$ m$^2$. **1412.** 125 ln 3 kpm. **1413.** $126 \cdot 10^{-6}$ J. **1414.** $Gl/2ES$. **1415.** 16,83 min. **1416.** $t_1 = 2R^2\sqrt{H}/3r^2\sqrt{2g}$, $t_2 = 16\sqrt{H}/9\sqrt{2g}$. **1417.** $2bl\sqrt{a}(2\sqrt{2} - 1)/1{,}8S\sqrt{2g}$. **1418.** $7\pi a\sqrt{b}/108\sqrt{2g}$. **1419.** $\frac{1}{2}\pi r^2\gamma\pi^2f^2(r^2 + 4d^2)$. **1420.** $\frac{1}{6}(Sl^3\omega^2\gamma)$. **1421.** 2,81$h$. **1422.** $Ri_0^2[t_2/2 - t_1/2 + (\sin 4\pi f t_1)/8\pi f - (\sin 4\pi f t_2)/8\pi f]$, $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$. **1423.** 1,83$A$, 27,45$As$. **1424.** 119,6 l. **1425.** Pri prechode hrúbkou $H$ bude intenzita $i = i_0e^{-k(h+H)}/2$ **1426.** 98,44 %.

**5,9. Nevlastný integrál**

**1427.** 1/2. **1428.** Neexistuje. **1429.** Neexistuje. **1430.** $\pi/8$. **1431.** 1. **1432.** $\pi/\sqrt{3}$. **1433.** $\pi$. **1434.** $2\pi/3\sqrt{3}$. **1435.** $\pi/2\sqrt{2}$. **1436.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln\frac{25}{12}$. **1437.** $\pi/2$. **1438.** 1. **1439.** 1/2. **1440.** 1/2.

**1441.** $e - 1$. **1442.** $b/(a^2 + b^2)$. **1443.** $a/(a^2 + b^2)$. **1444.** Neexistuje. **1445.** 0. **1446.** Neexistuje. **1447.** 1. **1448.** $\pi^2/12$. **1449.** Neexistuje. **1450.** $5/2$. **1451.** 6. **1452.** $-1$. **1453.** Neexistuje. **1454.** $8/3$. **1455.** $(\pi + 2)/2$. **1456.** $\pi$. **1457.** $\ln (2 + \sqrt{3})$. **1458.** $3\pi/8$ **1459.** $\pi/2 - \arcsin (3/4)$. **1460.** $6\sqrt[3]{2}$. **1461.** $-1/4$. **1462.** Neexistuje. **1463.** $\pi/\sqrt{a^2 - b^2}$, použite substitúciu $\operatorname{tg} (x/2) = t$. **1464.** Neexistuje. **1465.** $\ln 3$. **1466.** a) $n!$; b) $\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}$ pre $n$ párne, $\dfrac{(n-1)!!}{n!!}$ pre $n$ nepárne. **1467.** 3. **1468.** $\pi$. **1469.** $2\pi$. **1470.** $\dfrac{p_1 v_1}{k - 1}$, kde $k = \dfrac{c_p}{c_v} > 1$. **1471.** 4. **1472.** $(V_0^2 C)/2$. **1473.** Neexistuje. **1474.** Existuje. **1475.** Existuje. **1476.** Existuje. **1477.** Existuje. **1478.** Existuje. **1479.** Neexistuje. **1480.** Neexistuje. **1481.** Existuje. **1482.** Neexistuje. **1483.** Existuje. **1484.** Neexistuje. **1485.** Existuje. **1486.** Neexistuje. **1487.** Existuje. **1488.** Existuje. **1489.** Existuje. **1490.** Existuje. **1491.** Relatívne. **1492.** Relatívne. **1493.** Absolútne. **1494.** Relatívne.

## 5,10. Určitý integrál komplexnej funkcie reálnej premennej

**1495.** $\dfrac{3}{2} \ln 2 + i(2 - \pi/2)$. **1496.** $21 - i\,1{,}5$. **1497.** $\ln \sqrt{2} - i\pi/4$. **1498.** $-(1 + i) (\ln 5)/4\sqrt{2} + (1 - i) (\operatorname{arctg} 2)/2\sqrt{2}$. **1499.** $\dfrac{1}{2} \ln (13/18) + \left(\operatorname{arctg} \dfrac{2}{3} - \pi/4\right) i$. **1500.** $e^{\pi}(\pi + 1) (i - 1)/2 - i/2$. **1501.** $e^2(3 \cos 4 - 4 \sin 4 - 3)/50 + e^2 (3 \sin 4 + 4 \cos 4 - 4)\, i/50$. **1502.** Neexistuje. **1503.** $(2 - 5i)/29$. **1504.** $2a/(a^2 + 1)$. **1505.** 0 pre $n$ nepárne, $\pi$ pre $n$ párne. **1507.** $\pi/2^n$. **1508.** $(1 - e^{-2n\pi})/2^{2n}a$. **1509.** $\pi(2m)!(2n)!/2^{2m+2n+1}m!n!(m + n)!$.

## LITERATÚRA


1. Baranenkov G. S., Demidovič B. P. . . .: Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. Moskva: GIFML 1959
2. Berman G. N.: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza. Moskva: Izd. „Nauka" 1965
3. Demidovič B. P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Moskva: GITTL 1956
4. Djubjuk P. R. . . .: Sbornik zadač po kursu vyššej matematiki dlja vtuzov. Moskva: GI „Vysšaja škola" 1963
5. Faddejev D. K., Sominskij I. S.: Sbornik zadač po vyššej algebre. Moskva: GITTL 1956
6. Gjunter M. N., Kuzmin R. O.: Sbornik zadač po vyššej matematike, I. a II. Moskva: GITTL 1957
7. Kluvánek I., Mišik L., Švec M.: Matematika I. Bratislava: SVTL 1966
8. Davydov N. A., Korovkin P. P., Nikoľskij V. N.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskva: Izd. „Prosveščenije" 1965
9. Krysicki W. i Wlodarski L.: Analiza matematyczna v zadaniach część druga. Warszawa: PWN 1962
10. Minorskij B. P.: Sbornik zadač po vyššej matematike. Moskva: GITTL 1964
11. Zaporožec G. I.: Rukovodstvo k rešeniju zadač po matematičeskomu analizu. Moskva: GI „Vysšaja škola" 1961

EDÍCIA TEORETICKEJ LITERATÚRY

*Zbierka je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického i prírodovedeckého zamerania, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní*

Doc. RNDr. Jozef Eliaš, CSc. – RNDr. Ján Horváth, CSc. – Ing. Juraj Kajan

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY
2. časť
MDT 512 9 (075 8)

Vydala ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, Hurbanovo nám. 3 v decembri 1979, ako svoju 7002. publikáciu

Zodpovedná redaktorka prom. fyz. Eva Babilonová
Technická redaktorka Mária Brodeková
Väzbu navrhol Leodegar Horváth

Vytlačili Nitrianske tlačiarne, n. p., Nitra, ul. R. Jašíka 26
256 strán, 51 obrázkov; 25,28 AH, 25,96 VH

5. vydanie. Náklad 10 000 výtlačkov

302 03 2

63 – 106 – 79 Kčs 30,–

508/21; 857