Derivácia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať jedným z najdôležitejších pojmov v matematike, pojmom derivácie, popíšeme jej vlastnosti a postupy pri jej počítaní. Taktiež precvičíme možnosti použitia derivácie v matematike a uvidíme, že s použitím derivácie je možné jednoduchšie riešiť niektoré otázky, ktoré sa vyskytli v predchádzajúcej kapitole.

Pojem a označenia

Derivácia meria zmenu hodnôt závislej veličiny vzhľadom k zmene hodnôt nezávislej veličiny.

Derivácia funkcie f **v čísle (v bode)** x_0 je **číslo**

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

ak existuje **vlastná limita** na pravej strane rovnosti.

Na označenie derivácie funkcie f v bode x_0 sa používajú tiež symboly

$$y'(x_0), \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Ak existuje derivácia funkcie f v každom bode niektorej množiny M, tak **funkcia** f', ktorá priradí každému číslu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$ je **derivácia funkcie** f v množine M.
Z existencie derivácie vyplýva spojitosť:

Ak má funkcia f v bode a deriváciu, tak je v bode a spojitá.

Pre väčšinu elementárnych funkcií existuje derivácia v každom bode definičného oboru, preto derivácia elementárnej funkcie je zvyčajne funkcia s tým istým definičným oborom.

Na označenie derivácie funkcie f sa používajú tiež symboly

$$y', \quad \left(\frac{df}{dx}\right), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Príklad 1. Vypočítajme deriváciu

b)

funkcie $y = x$ v bode -3,

c)

funkcie $y = x^2$ v bode 2,

d)

funkcie $y = \frac{1}{x-4}$ v bode 0,

e)

funkcie $y = |x+1|$ v bode -1,

f)

funkcie $y = \sqrt[3]{x}$ v bode 0.

Riešenie:

b)

Podľa definície derivácie funkcie je

$$y'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{y(-3+h) - y(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3+h-(-3)}{h} = 1$$

c)

Vychádzame z definície:

$$y'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{y(2+h) - y(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4+h = 4$$

d)

Analogicky

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(0+h) - y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-4+h} - \frac{1}{-4}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{4(4-h)}}{h} = -\frac{1}{16}$$

e)

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{y(-1+h) - y(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|-1+h+1| - |-1+1|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1,$$

avšak

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{y(-1+h)-y(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|-1+h+1|-|-1+1|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1.$$

Pretože hľadaná limita neexistuje, funkcia $y = |x+1|$ nemá v bode -1 deriváciu.

f)

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(h)-y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \infty.$$

Pretože hľadaná limita nie je vlastná, funkcia $y = \sqrt[3]{x}$ nemá v bode 0 deriváciu.

♣

Príklad 2. Vypočítajme deriváciu

b)

funkcie $y = x^n$, kde $n \in \mathbf{N}$, v ľubovoľnom bode x,

c)

funkcie $y = \sin x$ v ľubovoľnom bode x,

d)

funkcie $y = \log_a x$ v ľubovoľnom bode x.

Riešenie:

e)

Podľa definície derivácie funkcie a s použitím binomickej vety dostávame

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} xh^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1} xh^{n-2} + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

b)

Z definície derivácie, použitím goniometrických vzťahov a poznatkov o limitách z predchádzajúcej kapitoly dostávame.

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin\ x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos\ x.$$

c)

Analogicky, s použitím vzťahov pre logaritmy

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a\ x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \frac{(x+h)}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \log_a \left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\ e = \frac{1}{x\ln\ a}.$$

♣

Počítanie derivácie funkcie z definície je značne obtiažne a zdĺhavé. Na zjednodušenie práce s deriváciami slúži nasledujúca schéma.

1. Z definície derivácie sa odvodia derivácie mocninovej funkcie s prirodzeným exponentom, funkcie sinus a logaritmickej funkcie (pozri Príklad 2)
2. Odvodia sa pravidlá derivovania pre operácie s funkciami.
3. Pomocou už známych derivácií a pravidiel sa určia derivácie ostatných elementárnych funkcií.

Derivácie základných elementárnych funkcií

Nasledujúce vzťahy platia pre všetky hodnoty premennej x z definičných oborov príslušných funkcií, ak nie je uvedené inak:

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde a je ľubovoľné reálne číslo,
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0,\ a \neq 1$, špeciálne $(e^x)' = e^x$,
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, kde $a > 0,\ a \neq 1$, špeciálne $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
4. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$
   $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
5. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,
   $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,
6. $(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x,$
   $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$,

Platnosť vzťahu (3) a prvého zo vzťahov (4) sme ukázali v príklade 2. Platnosť ďalších vzťahov overíme v príkladoch nasledujúcej časti a v cvičeniach na konci kapitoly.

Príklad 3. Vypočítajme deriváciu funkcie $y = \sqrt[3]{x}$.

Riešenie: Pri počítaní derivácie prepíšeme odmocniny do tvaru mocniny s racionálnym exponentom a použijeme vzťah (1):

$$y' = \left((x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Derivácia a algebrické operácie

Ak nová funkcia vznikne pomocou algebrických operácií z funkcií f a g, tak jej deriváciu môžeme počítať podľa nasledujúcich pravidiel:

Nech funkcie f a g majú derivácie v množine M. Potom platí

$$(f+g)' = f'+g' \tag{7.1}$$

$$(f-g)' = f'-g' \tag{7.2}$$

$$(f.g)' = f'.g+f.g' \tag{7.3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g-f.g'}{g^2}, \tag{7.4}$$

pričom posledný vzťah platí v číslach x, kde $g(x) \neq 0$.

Derivácia zloženej funkcie

Ak poznáme derivácie zložiek, tak deriváciu zloženej funkcie môžeme vypočítať pomocou nasledujúceho pravidla:

Derivácia zloženej funkcie. Nech funkcia $y = f(x)$ má deriváciu v množine M a funkcia $z = g(y)$ má deriváciu v obore hodnôt funkcie f. Potom aj zložená funkcia $g \circ f$ má v množine M deriváciu a pre každé $x \in M$ platí

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)).f'(x),$$

čo môžeme zapísať aj

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}.$$

Posledný vzťah sa volá **reťazové pravidlo**.

Príklad 5. Vypočítame derivácie funkcií $y = \sin 2x$, $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$, $y = \arcsin\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)$, $y = 5^{\frac{4}{cotg\ x}}$.

Riešenie: V riešení budeme používať pravidlo o derivácii zloženej funkcie. Danú funkciu si najskôr rozložíme na zložky a potom postupujeme podľa pravidla od vonkajších zložiek ku vnútorným.

b)

Rozklad danej funkcie je

$$x \xrightarrow{2x} 2x \xrightarrow{\sin} \sin 2x.$$

Preto derivácia je

$$y'(x) = (\sin t)'_{[t=2x]}.(2x)' = 2\cos 2x.$$

c)

Rozklad danej funkcie je

$$x \xrightarrow{x+\frac{1}{\sqrt{x}}} x + \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{(\ )^{100}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$$

a derivácia je

$$y'(x) = \left((t)^{100}\right)'_{[t=x+\frac{1}{\sqrt{x}}]} \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 100\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{99}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right).$$

d)

Rozklad danej funkcie je

$$x \xrightarrow{\frac{2x+3}{5-3x}} \frac{2x+3}{5-3x} \xrightarrow{\arcsin} \arcsin\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)$$

a derivácia je

$$y'(x) = (\arcsin t)'_{[t=\frac{2x+3}{5-3x}]} \cdot \left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)^2}} . \frac{2(5-3x)-(2x+3)(-3)}{(5-3x)^2} =$$

$$= \frac{19}{(5-3x)\sqrt{5x^2-42x+16}}.$$

e)

Rozklad danej funkcie je $x \xrightarrow{cotg} cotg\ x \xrightarrow{\frac{4}{(\ )}} \dfrac{4}{cotg\ x} \xrightarrow{5^{(\ )}} 5^{\frac{4}{cotg\ x}}$

a derivácia je

$$y'(x) = (5^u)'_{[u=\frac{4}{cotg\ x}]} \cdot \left(\frac{4}{t}\right)'_{[t=cotg\ x]} .(cotg\ x)' =$$

$$5^{\frac{4}{cotg\ x}} . \ln 5\ \frac{-4}{cotg^2\ x} . \frac{-1}{\sin^2\ x} = \frac{4 \ln 5}{\cos^2\ x}\ 5^{\frac{4}{cotg\ x}}.$$

♣

Príklad 6. Overíme platnosť vzťahu $(\cos x)' = -\sin x$ z časti 2.

Riešenie: V riešení použijeme deriváciu zloženej funkcie a goniometrické vzťahy

$$(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}).1 = -\sin x.$$

♣

Príklad 7. Overíme platnosť vzťahu $(cotgh\ x)' = -\frac{1}{sinh^2\ x}$ z časti 2.

Riešenie:

$$(cotgh\ x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$\frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{1}{-\frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} = -\frac{1}{sinh^2\ x}.$$

Derivácia inverznej funkcie

Z pravidla pre deriváciu zloženej funkcie vyplýva pravidlo pre deriváciu inverznej funkcie.

Derivácia inverznej funkcie Nech funkcia f je monotónna v intervale (a,b) a pre každé $x \in (a,b)$ existuje $f'(x) \neq 0$. Potom

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Príklad 8. Odvodíme pravidlo (2) v časti 2 pre deriváciu exponenciálnej funkcie z pravidla pre deriváciu logaritmickej funkcie.

Riešenie: Označme $f(x) = \log_a x$. Potom $f^{-1}(x) = a^x$ a pre deriváciu f^{-1} platí

$$(a^x)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(log_a t)'_{[t=a^x]}} = \frac{1}{\frac{1}{t\ \ln a}_{[t=a^x]}} = a^x\ \ln a.$$

♣

Príklad 9. Odvodíme pravidlo (5) v časti 2 pre deriváciu funkcie $\arccos$ z pravidla pre deriváciu funkcie $\cos$.

Riešenie: Označme $f(x) = \cos x$. Potom inverzná funkcia (samozrejme v intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$) je $f^{-1}(x) = \arccos x$ a pre deriváciu f^{-1} platí

$$(\arccos x)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(\cos t)'_{[t=\arccos x]}} =$$

$$\frac{1}{-\sin t}_{[t=\arccos x]} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Logaritmické derivovanie

Nasledujúce pravidlo sa volá **pravidlo o logaritmickom derivovaní**.

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))', \quad \text{ak } f(x) > 0 \quad \text{a} \quad f'(x) \quad \text{existuje.}$$

Je to špeciálny prípad pravidla pre deriváciu zloženej funkcie a používa sa pre deriváciu funkcií, ktoré majú premennú **v exponente**, ale najmä funkcií, ktoré majú premennú **aj v základe aj v exponente**. Poznamenajme, že funkcie, ktoré majú neznámu **len v základe**, derivujeme podľa pravidla (1) v časti 2.

Príklad 10. Nájdeme deriváciu funkcie $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie:

$$y' = y.(\ln y)' = x^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}}.\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} =$$

$$x^{\frac{1}{x}}.\frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

♣

Príklad 11. Odvodíme pravidlo (1) v časti 2 pre deriváciu mocninovej funkcie z pravidla pre deriváciu logaritmickej funkcie.

Riešenie:

$$(x^a)' = x^a.(\ln\ x^a)' = x^a.(a \ln\ x)' = x^a.(\frac{a}{x}) = ax^{a-1}.$$

Použili sme skutočnosť, že definičným oborom mocninovej funkcie s reálnym exponentom je množina kladných reálnych čísel (kde?). ♣

Derivácia implicitnej funkcie

Niekedy rovnica $F(x,y)=0$ určuje funkčný vzťah medzi veličinami x a y. Takúto funkciu voláme **funkcia určená implicitne** rovnicou $F(x,y)=0$. Ak funkcia určená implicitne má deriváciu v niektorej množine, tak túto môžeme vypočítať aj bez explicitného vyjadrenia funkcie f. Postupujeme pri tom tak, že derivujeme obidve strany rovnice, pričom ľavú stranu derivujeme ako zloženú funkciu $F(x,y(x))$. Tento postup je veľmi užitočný najmä v situáciách, keď veličinu y nie sme schopní z rovnice vyjadriť.

Príklad 12. Rovnica $x^2+y^2=1$ určuje dve funkcie $f_1: y=\sqrt{1-x^2}$ a $f_2: y=-\sqrt{1-x^2}$. Vypočítame ich derivácie bez pomoci tohoto explicitného vyjadrenia.

Riešenie: Derivujeme obidve strany rovnice $x^2+y^2=1$, pričom si uvedomujeme, že y je funkcia premennej x. Dostávame

$$2x+2y.\frac{dy}{dx}=0$$

a po vyjadrení hľadanej derivácie

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Porovnajme tento vzťah s deriváciou napríklad funkcie f_2. Túto derivujeme ako zloženú funkciu z funkcií $1-x^2$ a $-(\ )^{\frac{1}{2}}$. Dostávame

$$f_2'(x)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

čo sa zhoduje s deriváciou vypočítanou implicitne pre $f_2 : y = -\sqrt{1-x^2}$.

Príklad 13. Nájdime deriváciu funkcie určenej implicitne rovnicou

$$x^5 + 4xy^3 - y^5 - 2 = 0.$$

Riešenie: Derivovaním obidvoch strán dostávame $5x^4 + 4(y^3 + x.3y^2\frac{dy}{dx}) - 5y^4\frac{dy}{dx} = 0$,
a po vyjadrení derivácie $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4+4y^3}{5y^4-12xy^2}$ ♣.

Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami

Rovinná krivka býva často určená parametrickými rovnicami

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in (a,b).$$

V prípade, keď $f'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in (a,b)$, je krivka grafom **funkcie určenej parametrickými rovnicami**, ktorej deriváciu môžeme počítať aj bez jej explicitného vyjadrenia pomocou vzťahu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Príklad 14. Nájdeme prvé dve derivácie funkcie určenej parametrickými rovnicami

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in \langle \pi, 2\pi \rangle.$$

Riešenie: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -cotg\ t$.
Porovnajte tento výsledok s výsledkom príkladu 12.
Pretože druhá derivácia je deriváciou prvej derivácie (pozri nasledujúcu časť), platí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$\frac{\frac{d(-cotg\ t)}{dt}}{\frac{d(\cos t)}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = \frac{-1}{\sin^3 t}.$$

Derivácie vyšších rádov

Keďže derivácia elementárnej funkcie je funkciou, má zmysel hovoriť o derivácii derivácie atď. **Druhou deriváciou** funkcie f je derivácia funkcie f' (ak existuje).
Pomocou indukcie môžeme takto definovať derivácie ľubovoľného rádu. **Deriváciou n-tého rádu** alebo **n-tou** deriváciou funkcie f je derivácia (n-1)-ej derivácie funkcie f (ak existuje).
Derivácie vyšších rádov označujeme takto

$$f'',\ f''',\ f^4,\ f^5, \dots,\ f^{(n)}$$

$$y'',\ y''',\ y^4,\ y^5, \dots,\ y^{(n)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \frac{d^5y}{dx^5}, \dots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

Príklad 15. Nájdime $(\cos x)^{(91)}$, $(\log_2\ 3x)^{(12)}$ a $(x^n)^{(n)},\quad n \in \mathbf{N}$.

Riešenie:

b)

Počítajme derivácie funkcie $\cos x$: $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, $(\cos x)''' = \sin x$ a $(\cos x)^{(4)} = \cos x$. Preto platí aj $(\cos x)^{(88)} = \cos x$. Potom však

$$(\cos x)^{(91)} = (\cos x)^{(3)} = (-\sin x)^{(2)} = (-\cos x)' = \sin x.$$

c)

$(\log_2\ 3x)' = \frac{1}{x \ln\ 2}$. Ďalej $(\log_2\ 3x)'' = \frac{1}{\ln\ 2}.\frac{-1}{x^2}$ a $(\log_2\ 3x)''' = \frac{1}{\ln\ 2}.\frac{2}{x^3}$. V každej ďalšej derivácii zostane konštanta $\frac{1}{\ln\ 2}$, násobí sa exponentom a tento sa potom zníži (je záporný!) o jednotku. Po ďalších deviatich deriváciách dostaneme (premyslite si dôkladne aj znamienko)

$$(\log_2\ 3x)^{(12)} = -\frac{1}{\ln\ 2}.\frac{11!}{x^{12}}.$$

d)

Pri derivácii mocninovej funkcie sa násobí exponentom a ten sa potom znižuje o jednotku. Po n deriváciách funkcie x^n dostaneme $(x^n)^{(n)} = n!$. Dodajme ešte, že $(x^n)^{(n+1)} = 0$.

Geometrický význam derivácie

Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0, tak číslo $f'(x_0)$ je smernicou **dotyčnice** ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$ a číslo $-\frac{1}{f'(x_0)}$ je smernicou **normály** ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$.
Preto

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

je **rovnica dotyčnice ku grafu funkcie** f v bode $[x_0, f(x_0)]$
a

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

je **rovnica normály ku grafu funkcie** f v bode $[x_0, f(x_0)]$.
Body, v ktorých funkcia má deriváciu, rozoznáme pri pohľade na jej graf tak, že graf je v nich "hladký", naopak v bodoch, kde derivácia neexistuje, je graf "špicatý", napríklad graf funkcie $y = |x|$ v bode $[0, 0]$.

Príklad 16. Nájdime rovnice dotyčnice a normály ku

b)

grafu funkcie $y = \sin x$ v bode $[0, ?]$,

c)

grafu funkcie $y = \operatorname{arctg} 2x$ v bode $[-\frac{1}{2}, ?]$,

d)

kružnici so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 1 v bode $[\frac{1}{2}, y]$, kde $y < 0$.

Riešenie:

b)

Druhá súradnica bodu ležiaceho na grafe funkcie $y = \sin x$, ktorej prvá súradnica je 0 je určená hodnotou $\sin 0 = 0$. Derivácia funkcie $y = \sin x$ v bode 0 je $\cos 0 = 1$. Preto rovnica dotyčnice je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 1.(x - 0) + 0 = x,$$

čo je geometrickým vyjadrením faktu, že $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Rovnica normály je $y = -x$.

c)

Druhá súradnica bodu dotyku je $\operatorname{arctg} 2.(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{4}$. Derivácia funkcie $y = \operatorname{arctg} 2x$ v bode $-\frac{1}{2}$ je $\frac{2}{1+(-\frac{1}{2}\cdot 2)^2} = 1$. Rovnica dotyčnice je

$$y = (x + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4} = x + \frac{2 - \pi}{4}$$

a rovnica normály je

$$y = -(x + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{2 + \pi}{4}.$$

d)

Určený bod má súradnice $[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Pre výpočet smernice dotyčnice použijeme riešenie príkladu 12:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rovnica dotyčnice je

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

a rovnica normály

$$y = -\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x.$$

Overte správnosť výpočtu tak, že vyjadríte príslušný oblúk kružnice parametricky a tiež pomocou explicitnej funkcie! ♣

Príklad 17. Nájdime rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 4$ rovnobežné s priamkou $y = \frac{3-x}{2}$.

Riešenie: Tentokrát nepoznáme bod dotyku, ale smernicu hľadanej priamky $k = -\frac{1}{2}$. Hľadáme preto takú hodnotu x_0, v ktorej má funkcia deriváciu rovnú tejto smernici: $y'(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 5 = -\frac{1}{2}$. Táto rovnica však nemá riešenie, preto graf nemá dotyčnicu rovnobežnú s danou priamkou. Pri normále hľadáme takú hodnotu x_0, pre ktorú platí $-\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{2}$, t.j. $y'(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 5 = 2$. Táto rovnica má dve riešenia $x_1 = -1$ a $x_2 = -3$. Hodnoty funkcie v týchto bodoch sú $y(-1) = \frac{2}{3}$ a $y(-3) = -2$. Graf funkcie má dve normály rovnobežné s danou priamkou. Ich rovnice sú

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$

Príklad 18. Nájdeme rovnicu dotyčnice ku krivke danej parametrickými rovnicami $x = \frac{1}{t} + t^2$ a $y = t^2 - t + 1$ v bode $[2, 1]$.

Riešenie: Najskôr vypočítajme hodnotu parametra t pre daný bod. Je ňou jedno z riešení kvadratickej rovnice $t^2 - t + 1 = 1$ (odôvodnite!), ktorej riešeniami sú dve čísla $t_1 = 0$ a $t_2 = 1$. Hodnota parametra $t_1 = 0$ je mimo definičného oboru funkcie $x(t)$, dosadením hodnoty $t_2 = 1$ dostaneme $x(1) = 2$. Preto hľadaná hodnota parametra je $t_2 = 1$. Potrebujeme smernicu dotyčnice, ktorú nájdeme pomocou vzťahu

$$k(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - 1}{2t - \frac{1}{t^2}}.$$

Jej hodnota v danom bode je $k(1) = 1$. Hľadaná rovnica dotyčnice je

$$y = 1.(x - 2) + 1 = x - 1.$$

Fyzikálny význam derivácie

Ak je stav fyzikálnej veličiny v závislosti od času určený funkciou $y = f(t)$, tak **rýchlosť zmeny** tejto veličiny je určená funkciou $y = f'(t)$.

Preto, ak sa teleso pohybuje priamočiaro v smere x-ovej osi a jeho poloha v čase t je $x(t)$, tak funkcia

$$v(t) = x'(t)$$

určuje jeho rýchlosť a funkcia

$$a(t) = x''(t) = v'(t)$$

určuje jeho zrýchlenie v čase t.

Príklad 19. Do balóna guľového tvaru pripevneného spodným okrajom k zemi prúdi rovnomerne 200 l vzduchu za minútu. Akou rýchlosťou sa pohybuje smerom nahor vrchný okraj balóna v okamihu, keď sú v balóne $3\ m^3$ vzduchu?

Riešenie: Označme $V(t)$ objem balóna v m^3 a $v(t)$ jeho výšku, teda priemer v m v čase t. Potrebujeme zistiť veličinu $v'(t)$ v čase, keď $V(t) = 3$. Podľa reťazového pravidla platí

$$v'(t) = \frac{dv}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

Veličina $\frac{dV}{dt}$ je rýchlosť prúdenia vzduchu a rovná sa $0,2\ m^3/min$. Veličinu $\frac{dv}{dV}$ vyjadríme zo vzťahu pre objem gule $V = \frac{1}{6}\pi v^3$. Preto

$$\frac{dv}{dV} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi V^2}}$$

a

$$\frac{dv}{dV}_{[V=3]} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{81\pi}}.$$

Dosadením dostávame hľadanú rýchlosť

$$v'(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{81\pi}}.0,2\ m/min,$$

čo je približne $4\ cm/min$. ♣

Veta o strednej hodnote

Existuje viac viet o strednej hodnote, ktoré sa tiež volajú vety o prírastku funkcie. Tieto vety vyjadrujú za istých podmienok vzťah medzi rozdielom ("prírastkom") hodnôt funkcie v dvoch bodoch a deriváciou funkcie v istom čísle medzi týmito bodmi.

Lagrangeova veta o strednej hodnote.

Nech f má deriváciu v intervale (a,b) a naviac je spojitá v bodoch a a b. Potom existuje také číslo r z intervalu (a,b), že

$$f(b) - f(a) = f'(r)(b-a).$$

Ak medzi predpoklady Lagrangeovej vety doplníme podmienku $f(a) = f(b)$, tak dostaneme **Rolleho vetu**, ktorá zaručuje existenciu takého čísla r z intervalu (a,b), že

$$f'(r) = 0.$$

Vety o strednej hodnote majú veľký teoretický význam, ich dôsledkom je veľa poznatkov v diferenciálnom počte a jeho aplikáciách (pozri časť 7.10).

Názorný fyzikálny zmysel viet o strednej hodnote môže byť napríklad vyjadrený v nasledujúcom tvrdení

> Ak auto prejde za 2 hodiny 100 km, tak aspoň v jednom okamihu cesty dosiahne rýchlosť presne 50 km za hodinu.

Príklad 20. Ukážeme, že pre ľubovoľné dve reálne čísla $a < b$ platí $arctg\ b - arctg\ a < b - a$.

Riešenie: Môžu nastať tri prípady:

- Nech $0 \leq a < b$. Potom podľa Lagrangeovej vety pre niektoré číslo $c \in (a,b)$ platí

$$arctg\ b - arctg\ a = (arctg\ x)'_{[x=c]}.(b-a) = \frac{1}{1+c^2}.(b-a) < b-a.$$

- Keďže funkcia $\operatorname{arctg} x$ je nepárna, nerovnosť platí aj v prípade, ak $a < b \leq 0$
- Ak $a < 0 < b$, tak podľa predošlých dvoch častí existujú $c \in (a,0)$ a $d \in (0,b)$ také, že $\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a = \frac{1}{1+c^2}(0-a)$ a $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{1+d^2}(b-0)$. Po sčítaní dostávame

$$\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \frac{1}{1+d^2}b - \frac{1}{1+c^2}a < b - a,$$

lebo b je kladné, a záporné a výrazy $\frac{1}{1+d^2}$ a $\frac{1}{1+c^2}$ sú menšie ako 1. ♣

Príklad 21. Dokážeme, že ľubovoľná algebrická rovnica tretieho stupňa má najviac tri reálne riešenia.

Riešenie: Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje rovnica tretieho stupňa $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ktorá má štyri riešenia $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Podľa Rolleho vety existuje medzi každou susednou dvojicou z nich číslo, v ktorom je derivácia funkcie P rovná nule. Avšak derivácia funkcie P je kvadratická funkcia $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ a tá nemôže mať tri rôzne nulové hodnoty. Toto je spor, ktorý dokazuje pravdivosť tvrdenia.
♣

Poznamenajme, že pomocou matematickej indukcie sa dá analogickými argumentami ukázať všeobecné tvrdenie

Ľubovoľná algebrická rovnica stupňa n má najviac n reálnych riešení.

Diferenciál a diferenciály vyšších rádov

Pri aplikáciách matematiky je často potrebné pracovať s hodnotami komplikovaných funkcií. Je možné nahradiť ich hodnotami jednoduchších funkcií, ak sú tieto v rámci požadovanej presnosti. Často sa k tomu používajú lineárne funkcie, keďže sú na výpočty najjednoduchšie.

Nech má funkcia f v bode a deriváciu. Potom hodnoty funkcie f v blízkom okolí čísla a najlepšie zo všetkých lineárnych funkcií aproximuje (približne vyjadruje) funkcia $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Preto

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

pre čísla x blízke číslu a. Lineárny výraz

$$df(a,x) = f'(a)(x-a)$$

v tejto aproximácii voláme **diferenciál funkcie** f **v bode** a. Všeobecne **diferenciál n-tého rádu funkcie** f **v bode** a je výraz

$$d^n f(a,x) = f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

ak existuje $n-$ tá derivácia funkcie f v bode a.

Špeciálne, pre $n=0$, diferenciálom nultého rádu je konštantna $f(a)$.

Príklad 22. Nájdeme prvých päť diferenciálov funkcie $f:\ y = \cos x$ v bode 0.

Riešenie: K nájdeniu diferenciálu potrebujeme príslušnú deriváciu v danom bode. Keďže $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-1$, $y'''(0)=0$, $y^{(4)}(0)=1$, $y^{(5)}(0)=0$, platí

$$d^0 f(0,x) = 1, \quad d^2 f(0,x) = -x^2, \quad d^4 f(0,x) = x^4.$$

Ostatné hľadané diferenciály sú rovné nulovej konštante. ♣

Pre použitie pojmu diferenciálu pozri časť 7.8.

Taylorova veta

Nech funkcia f má v bode a všetky derivácie až do rádu n. Potom mnohočlen premennej x

$$T_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(a,x)}{k!}$$

voláme **Taylorov mnohočlen (polynóm)** funkcie f v bode a.
Taylorova veta vyjadruje fakt, že spomedzi všetkých mnohočlenov stupňa menšieho alebo rovného n práve mnohočlen $T_n(f,a,x)$ najlepšie aproximuje hodnoty funkcie f v blízkom okolí bodu a.

Taylorova veta.

Nech funkcia f má v intervale $\langle a,b\rangle$ spojité derivácie $f',\ f'',\ \ldots,\ f^{(n)}$ a deriváciu $f^{(n+1)}$ v intervale (a,b). Potom pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ existuje také číslo $r \in (a,x)$, že platí

$$f(x) = T_n(f,a,x) + \frac{f^{(n+1)}(r)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Všimnime si:

- Pre hodnoty x blízke číslu a je posledný člen (zvyšok) blízky 0 a preto

  $$f(x) \approx T_n(f,a,x)$$

  pre x z blízkeho okolia čísla a.

- V prípade $n=0$ sa Taylorova veta zhoduje s Lagrangeovou vetou o strednej hodnote.

Príklad 23. Nájdeme Taylorove mnohočleny stupňa 4 v bode 0 pre funkcie $y=\cos x$ a $y=e^x$.

Riešenie: Potrebujeme nájsť diferenciály do rádu 4 funkcie. Preto (pozri Príklad 22)

$$T_4(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

a podobne

$$T_4(e^x, 0, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

♣

Príklad 24. Nájdeme Taylorov mnohočlen štvrtého stupňa v bode -1 pre funkciu $f:\ y = x^4 - 5x^3 + 2x - 3$.

Riešenie: Potrebujeme nájsť diferenciály funkcie v bode -1 do rádu 3. Platí

$$\begin{aligned}
y = x^4 - 5x^3 + 2x - 3, &\quad y(-1) = 1, \quad d^{(0)}f(0,x) = 1,\\
y' = 4x^3 - 15x^2 + 2, &\quad y'(-1) = -17, \quad df(0,x) = -17(x+1),\\
y'' = 12x^2 - 30x, &\quad y''(-1) = 42, \quad df^{(2)}(0,x) = 42(x+1)^2,\\
y''' = 24x - 30, &\quad y'''(-1) = -54, \quad df^{(3)}(0,x) = -54(x+1)^3,\\
y^{(4)} = 24, &\quad y^{(4)}(-1) = 24, \quad df^{(4)}(0,x) = 24(x+1)^4.
\end{aligned}$$

Preto

$$T_3(f, -1, x) = 1 - 17(x+1) + \frac{42}{2}(x+1)^2 - \frac{54}{6}(x+1)^3 + \frac{24}{24}(x+1)^4 =$$

$$1 - 17(x+1) + 21(x+1)^2 - 9(x+1)^3 + (x+1)^4.$$

♣

Presvedčte sa, že v poslednom príklade platí $T_3(f, -1, x) = f(x)$. Všeobecne platí, že

> Ak P_n je mnohočlen stupňa n, tak $T_n(P_n, a, x) = P_n(x)$ pre všetky $a \in \mathbf{R}$.

Približné výpočty hodnôt funkcií

Ak máme približne vypočítať hodnotu funkcie f v bode x, ktorú nie sme z nejakého dôvodu schopní vypočítať presne, postupujeme nasledovne.

1. Nájdeme taký bod a čo najbližšie k bodu x, v ktorom sme schopní vypočítať hodnotu funkcie f a jej derivácií.
2. Použijeme vzťah $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.
3. Ak nie sme spokojní s presnosťou aproximácie, použijeme vzťah $f(x) \approx T_n(f,a,x)$ pre vhodné prirodzené číslo $n > 1$.

Príklad 25. Vypočítajme pomocou prvého diferenciálu približne hodnotu $\sqrt{80}$.

Riešenie: Ide o výpočet hodnoty $f(80)$ pre funkciu $f:\ y = \sqrt{x}$. Keďže

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

potrebujeme nájsť vhodnú hodnotu a blízko hodnoty 80, v ktorej vieme vypočítať obidve hodnoty $f(a)$ aj $f'(a)$. Keďže $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, vhodnou hodnotou je $a = 81$. Platí $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{18}$. Preto

$$\sqrt{80} \approx 9 + \frac{1}{18}(80-81) = 9 - \frac{1}{18} = \frac{161}{18} \approx 8,94.$$

♣

Príklad 26. Vypočítajme s presnosťou na tri desatinné miesta hodnotu čísla e.

Riešenie: Použijeme Taylorov mnohočlen funkcie $f:\ y = e^x$ v bode 0. Platí

$$T_n(f,0,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Keďže $e = e^1$, je

$$e \approx T_n(f,0,1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Potrebnú hodnotu n určíme z požiadavky, aby chyba výpočtu bola menšia ako $5.10^{-4} = 0{,}0005$ (tri desatinné miesta!). Z Taylorovej vety vyplýva, že chyba výpočtu sa rovná hodnote $\frac{f^{(n+1)}(r)}{(n+1)!}1^{n+1} = \frac{e^r}{(n+1)!}$, kde $r \in (0,1)$. Preto číslo n, pre ktoré bude výpočet **zaručene** v rámci danej presnosti je určené nerovnicou

$$\frac{e^r}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < 0{,}0005,$$

teda $(n+1)! > 2000e \approx 5436$. Najmenšie prirodzené číslo n, ktoré spĺňa túto nerovnosť, nájdeme pomocou výpočtu faktoriálov: $7! = 5040,\ 8! > 40000$. Z toho vyplýva, že $n = 7$. Preto

$$e \approx T_7(f,0,1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 2{,}718.$$

Porovnajte túto hodnotu výpočtom kalkulačkou! Poznamenajme, že rovnakú hodnotu dostaneme aj voľbou $n = 6$. ♣

Monotónnosť

Pomocou derivácie môžeme zistiť, v ktorých intervaloch funkcia rastie alebo klesá. Nasledujúce tvrdenie je založené na vete o strednej hodnote (skúste ho odvodiť!).

> Ak $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ platí pre každé $x \in (a,b)$, tak funkcia f je **rastúca (klesajúca)** v intervale (a,b).

Dôsledkom je tvrdenie užitočné pri dôkazoch nerovností medzi funkciami.

Nech funkcie f a g sú spojité v intervale $\langle a,b\rangle$ a $f(a)\leq g(a)$. Ak $f'(x)\leq g'(x)$ pre každé $x\in(a,b)$, tak aj $f(x)\leq g(x)$ pre každé $x\in(a,b)$.

Iným dôsledkom vety o strednej hodnote je tvrdenie

Ak $f'(x)=0$ pre všetky $x\in(a,b)$, tak f je konštantná funkcia v intervale (a,b).

Príklad 28. Zistime intervaly, v ktorých rastú a intervaly, v ktorých klesajú funkcie $y=51+36x+6x^2-x^3$, $y=2x^2-\ln\ x$, $y=x^2e^{-x}$.

Riešenie:

b)

Zistíme intervaly v ktorých je derivácia kladná (záporná). Najskôr si uvedomíme, že definičný obor funkcie je množina $\mathbf{R}$. Počítame deriváciu: $y'=36+12x-3x^2$. Pre určenie intervalov, v ktorých funkcia rastie riešime kvadratickú nerovnicu $36+12x-3x^2>0$. Riešením je interval $(-2,6)$. Funkcia je rastúca v tomto intervale. Klesajúca je v intervaloch, ktoré sú riešením opačnej nerovnice $(-\infty,-2)$ a $(6,\infty)$.

c)

Definičným oborom funkcie je množina $D=(0,\infty)$. $y'=4x-\frac{1}{x}$. Riešením nerovnice $4x-\frac{1}{x}>0$ sú intervaly $(-\frac{1}{2},0)$ a $(\frac{1}{2},\infty)$. Riešením opačnej nerovnice sú intervaly $(-\infty,-\frac{1}{2})$ a $(0,\frac{1}{2})$. Vzhľadom na svoj definičný obor je funkcia rastúca v intervale $(\frac{1}{2},\infty)$ a klesajúca v intervale $(0,\frac{1}{2})$.

d)

Definičný obor funkcie je množina $\mathbf{R}$ a derivácia $y'=(2x-x^2)e^{-x}$. Pretože druhý činiteľ je kladný pre všetky $x\in\mathbf{R}$, znamienko derivácie závisí len od prvého člena. Preto je funkcia rastúca v intervale $(0,2)$ a klesajúca v intervaloch $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$ $\clubsuit$.

Príklad 29. Ukážeme, že pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí $x \geq 1 - e^{-x}$.

Riešenie: Nerovnosť ukážeme vtedy, ak sa presvedčíme, že $f(x) = x - 1 + e^{-x} \geq 0$ pre každé $x \in \mathbf{R}$. Určíme intervaly, v ktorých funkcia f rastie a v ktorých klesá. f klesá v $(-\infty,0)$ a rastie v $(0,\infty)$ (overte!). Z toho vyplýva, že funkcia f nadobúda najmenšiu hodnotu v bode 0. Preto pre všetky $x \in \mathbf{R}$ platí $f(x) \geq f(0) = 0$, čo sme chceli ukázať. $\clubsuit$

Príklad 30. Ukážeme, že pre každé $x < 0$ platí $arctg\ \frac{1}{x} = -arctg\ x - \frac{\pi}{2}$.

Riešenie: Podobne ako v predchádzajúcom príklade uvažujme o funkcii $f(x) = arctg\ \frac{1}{x} + arctg\ x + \frac{\pi}{2}$. Chceme ukázať, že f je konštantná a rovná 0 v intervale $(-\infty,0)$. Jej derivácia je

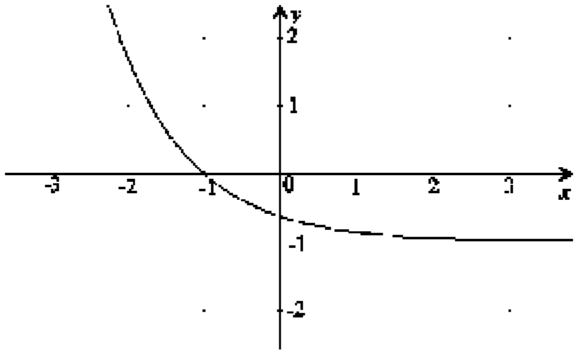
$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} . \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Preto funkcia f je konštantná v celom intervale $(-\infty,0)$. Hodnotu tejto konštanty zistíme dosadením ľubovoľného bodu, vhodným je napríklad bod $x = -1$.

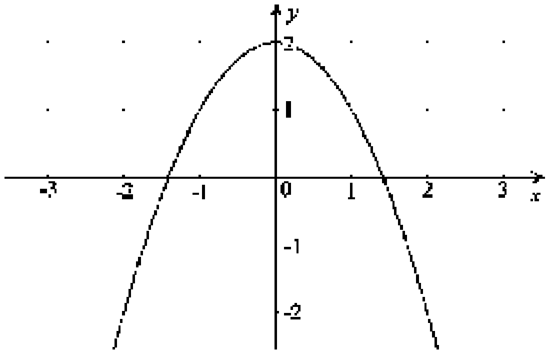
$$f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 0. \qquad \clubsuit$$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

Funkcia je **konvexná (konkávna)** v intervale (a,b), ak jej graf je "otvorený nahor (nadol)". (Presná definícia konvexnosti a konkávnosti je pomerne náročná. Pre lepšiu názornosť pojmov si prezrite obrázky.)



Obrázok 7.1: Konvexná funkcia



Obrázok 7.2: Konkávna funkcia

Konvexnosť alebo konkávnosť môžeme určiť pomocou druhej derivácie.
Ak $f''(x) > 0 \ (f''(x) < 0)$ platí pre každé $x \in (a,b)$, tak funkcia f je **konvexná (konkávna)** v intervale (a,b).
Bod, v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak voláme **inflexný bod**. Inflexné body hľadáme podľa pravidla

Ak a je inflexný bod funkcie f a $f''(a)$ existuje, tak $f''(a) = 0$.

Príklad 31. Nájdeme intervaly, v ktorých sú konvexné a intervaly, v ktorých sú konkávne funkcie $y = x(3-x)^2, \ y = \ln(1+x^3), \ y = x \ arctg \ x$. Nájdeme aj inflexné body týchto funkcií.

Riešenie: Intervaly budeme hľadať za pomoci druhej derivácie.

b) Definičný obor je množina $\mathbf{R}$. $y' = (3-x)^2 - 2x(3-x) = 3(3-x)(1-x)$ a $y'' = 3(x-1+x-3) = 6x-12$. Druhá derivácia je kladná a preto funkcia je konvexná v intervale $(2,\infty)$ a druhá derivácia je záporná a preto funkcia je konkávna v intervale $(-\infty,2)$. Jediný inflexný bod je bod $[2,2]$.

c)

Definičný obor funkcie je interval $(-1,\infty)$. $y'' = \frac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$ (overte!). Pretože menovateľ zlomku je v celom definičnom obore funkcie kladný, o znamienku rozhoduje čitateľ. Funkcia je konvexná v intervale $(0,\sqrt[3]{2})$ a konkávna v intervaloch $(-1,0)$ a $(\sqrt[3]{2},\infty)$. Funkcia má dva inflexné body $[0,0]$ a $[\sqrt[3]{2},\ln\ 3]$.

d)

Definičný obor je množina $\mathbf{R}$. $y' = arctg\ x + \frac{x}{1+x^2}$ a $y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ je kladná pre všetky $x \in \mathbf{R}$. Funkcia je konvexná v celej množine $\mathbf{R}$ a preto nemá inflexné body.

Extrémy funkcie

Funkcia f má v bode a **lokálne maximum (minimum)**, ak existuje také okolie U bodu a, že pre všetky $x \in U - \{a\}$ platí $f(x) < f(a)\ (f(x) > f(a))$. Lokálne maximá a minimá funkcie voláme spoločným názvom **lokálne extrémy**. Pri určovaní lokálnych extrémov funkcie používame nasledujúce tvrdenie.

Ak má funkcia f v bode a **lokálny extrém** a $f'(a)$ existuje, tak $f'(a) = 0$. Ak naviac $f''(a) < 0\ (f''(a) > 0)$, tak f má v bode a **lokálne maximum (minimum)**.

Body, v ktorých má derivácia funkcie nulovú hodnotu voláme **stacionárne body** funkcie. Poznamenajme, že funkcia **môže mať** stacionárne body aj v bodoch, v ktorých **nemá** lokálny extrém, napríklad funkcia $y = x^3$ v bode 0.
Pri určovaní lokálneho extrému môžeme namiesto druhej derivácie použiť aj fakt, že

funkcia f má lokálne maximum v bode a, ak je **rastúca** v niektorom **ľavom** okolí bodu a a **klesajúca** v niektorom **pravom** okolí bodu a.

Analogické tvrdenie platí pre lokálne minimá.
Pri určovaní lokálnych extrémov postupujeme tak, že najskôr určíme všetky body, v ktorých derivácia je rovná 0 alebo derivácia neexistuje a potom z nich vyberieme tie, ktoré **sú** lokálnymi extrémami.
V praxi je často potrebné určiť najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu funkcie v niektorom intervale $\langle a,b\rangle$. Postupujeme nasledovne.

1. Určíme všetky lokálne maximá funkcie v intervale (a,b).
2. Nájdeme najväčšiu z hodnôt všetkých lokálnych maxím a hodnôt v krajných bodoch intervalu: $f(a)$ a $f(b)$.

Analogicky postupujeme pri určovaní najmenšej hodnoty.

Príklad 32. Určíme lokálne extrémy funkcií $y=\frac{x^3}{3}-x^4$, $y=1-|1-x|$, $y=\ln\ x+\frac{1}{x}$.

Riešenie:

b)

Funkcia je definovaná a má deriváciu $y'=x^2-4x^3$ pre všetky $x\in\mathbf{R}$. Preto môže nadobúdať lokálne extrémy len v stacionárnych bodoch, t.j. v riešeniach rovnice $x^2-4x^3=0$. Táto rovnica má dve riešenia $x_1=0$ a $x_2=\frac{1}{4}$. Na určenie, či ide skutočne o extrém a o aký typ extrému ide, použijeme druhú deriváciu $y''=2x-12x^2$ a jej hodnoty v stacionárnych bodoch. Hodnota $y''(0)=0$ nedáva informáciu, hodnota $y''(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}<0$ rozhoduje o tom, že funkcia má lokálne maximum $\frac{1}{32}$ v bode $\frac{1}{4}$. Pre určenie povahy bodu 0 použijeme intervaly monotónnosti: funkcia je rastúca aj v ľavom aj v pravom okolí bodu 0 (overte!), preto nemá v tomto bode lokálny extrém.

c)

Daná funkcia je rovná funkcii $y=x$ a má deriváciu $y'=1$ v intervale $(-\infty,1)$ a rovná sa funkcii $y=2-x$ a má deriváciu $y'=-1$ v intervale $(1,\infty)$. Preto v žiadnom bode z týchto intervalov nemôže mať lokálny extrém (odôvodnite!). V samotnom bode 1 funkcia nemá deriváciu, napriek tomu má v tomto bode lokálne (aj absolútne) maximum rovné 1, pretože "naľavo" od neho rastie a "napravo" od neho klesá.

d) Definičný obor funkcie je množina $D = (0, \infty)$. Derivácia funkcie $y' = \frac{x-1}{x^2}$ je nulová jedine v bode $x = 1$. Druhá derivácia $y'' = \frac{2-x}{x^3}$ je v tomto bode rovná 1, preto má funkcia v tomto bode lokálne minimum.

♣

Príklad 33. Zistíme najmenšie a najväčšie hodnoty

b) funkcie $y = x^3 - 6x^2 + 7$ v intervale $\langle -1, 2 \rangle$,

c) funkcie $y = 2x + \cos 2x$ v intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,

d) funkcie $y = 3 - e^{|x|}$ v intervale $\langle -2, 3)$.

Riešenie:

b) Funkcia má deriváciu v každom bode intervalu, preto lokálne extrémy môžu byť len v jej stacionárnych bodoch. Tie sú určené rovnicou $3x^2 - 12x = 0$, t.j. $x_1 = 0$ a $x_2 = 4$. Z nich do daného intervalu patrí len $x_1 = 0$. Test pomocou druhej derivácie potvrdí lokálne maximum funkcie v tomto bode. Na extrémne hodnoty máme teda troch kandidátov: $f(0) = 7$, $f(-1) = 0$ a $f(2) = -9$. Najmenšou hodnotou funkcie v danom intervale je preto hodnota -9 nadobudnutá v bode 2 a najväčšou hodnota 7 nadobudnutá v bode 0.

c) Funkcia má deriváciu v každom bode intervalu, preto lokálne extrémy môžu byť len v jej stacionárnych bodoch. Tie sú určené rovnicou $2 - 2\sin 2x = 0$, ktorej riešením v danom intervale je jediné číslo $x = \frac{\pi}{4}$. Ďalej postupujeme podobne ako v predchádzajúcej časti. Najmenšou hodnotou v danom intervale je hodnota $-\pi - 1$ a najväčšou hodnota $\pi - 1$.

d)

Pre $x > 0$ je $y = 3 - e^x$ a $y' = -e^x < 0$. Pre $x < 0$ je $y = 3 - e^{-x}$ a $y' = e^{-x} > 0$. Znamienka derivácie určujú, že v bode 0 (neexistuje v ňom derivácia - odôvodnite!) má funkcia najväčšiu hodnotu $f(0) = 2$ Najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť len v krajných bodoch intervalu, z ktorých jeden do intervalu nepatrí. Platí

$$f(-2) = 3 - e^2 > f(3) = 3 - e^3.$$

Pretože funkcia je spojitá, v intervale $\langle -2, 3)$ nenadobudne najmenšiu hodnotu (odôvodnite).

♣

Príklad 34. Aké rozmery má mať konzerva objemu 1 liter v tvare valca, aby sme na jej výrobu spotrebovali čo najmenej materiálu?

Riešenie: Označme r polomer podstavy a h výšku konzervy v decimetroch. Množstvo spotrebovaného materiálu je priamo úmerné povrchu $S = 2\pi r(r + h)$ konzervy, preto hľadáme jeho minimálnu hodnotu. Pre objem konzervy platí $V = \pi r^2 h$, preto medzi neznámymi veličinami platí vzťah $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Po jeho dosadení do vzťahu pre povrch a úprave dostávame povrch konzervy ako funkciu polomeru podstavy $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$. Hľadáme teda najmenšiu hodnotu tejto funkcie v intervale $(0, \infty)$ (to sú všetky možné hodnoty polomeru podstavy). Počítame deriváciu

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}.$$

Derivácia existuje v každom bode intervalu, interval neobsahuje koncové body, preto jediná možnosť minimálnej hodnoty funkcie je v stacionárnych bodoch. Ten existuje jediný $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. Druhá derivácia potvrdí, že ide skutočne o minimum (overte!). Dosadením tejto hodnoty r dostaneme aj hodnotu pre výšku $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ ♣.

Príklad 35. Nosnosť pravouhlého trámu je priamo úmerná jeho šírke násobenej druhou mocninou jeho výšky. Aké rozmery máme zvoliť, ak sekáme trám z valcovitého kmeňa s priemerom 1 meter, aby sme dosiahli maximálnu nosnosť?

Riešenie: Označme s a v rozmery šírky a výšky trámu v metroch. Jeho nosnosť je určená vzťahom $N = c.s.v^2$, kde c je kladná konštanta. Keďže trám je vysekaný z valca s priemerom 1 meter, pre veličiny s a v platí vzťah $s^2 + v^2 = 1$. Vyjadrením v^2 a dosadením do vzťahu pre nosnosť dostaneme funkciu $N(s) = c.s.(1 - s^2)$. Hľadáme jej najmenšiu hodnotu v intervale $(0, 1)$. Derivácia $N'(s) = c(1 - 3s^2)$ existuje pre každé s z daného intervalu a je nulová v jedinom $s = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Druhá derivácia potvrdí, že ide o najväčšiu hodnotu. Nosnosť trámu je preto najväčšia, ak volíme šírku $\frac{\sqrt{3}}{3}$ metrov a výšku $\frac{\sqrt{6}}{3}$ metrov. ♣

Priebeh funkcie

Zisťovanie priebehu funkcie spočíva v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu. Postup by mal obsahovať:

1. Definičný obor funkcie;
2. vlastnosti symetrie: párnosť, nepárnosť, periódu;
3. významné body, napríklad nulové body funkcie, body nespojitosti, (v nich treba určiť jednostranné limity), body, v ktorých neexistuje derivácia alebo je nespojitá a pod.;
4. asymptoty grafu funkcie;
5. intervaly monotónnosti funkcie a jej lokálne extrémy;
6. intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body;
7. náčrtok grafu funkcie.

V nasledujúcich príkladoch ponechávame niektoré výpočty a úvahy na čitateľa.

Príklad 36. Zistíme priebeh funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je množina $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.
2. Počítame

$$y(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x^3}{x^2 - 1} = -y(x),$$

funkcia je nepárna, nie je periodická.

3. Funkcia je spojitá, jediný nulový bod funkcie je bod 0.
4. Asymptoty grafu funkcie bez smernice sú priamky $x = -1$ a $x = 1$, lebo jednostranné limity v nich sú nevlastné. Počítame asymptoty so smernicou:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2.$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0.$$

Vzhľadom na nepárnosť funkcie existuje jediná asymptota jej grafu so smernicou: $y = 2x$.

5. Intervaly monotónnosti funkcie určíme pomocou prvej derivácie $y'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$. Analýza znamienok derivácie vedie k výsledku (pozor na nesúvislosť definičného oboru!):

Funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty, -\sqrt{3}),\ (\sqrt{3}, \infty)$,

funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\sqrt{3}, -1),\ (-1, 1),\ (1, \sqrt{3})$.

Lokálne extrémy funkcie sú v bodoch, kde funkcia mení rast na klesanie alebo naopak. Pretože body ± 1 nie sú v jej definičnom obore, jediné jej extrémy sú:

Funkcia má lokálne maximum $-3\sqrt{3}$ v bode $-\sqrt{3}$.

Funkcia má lokálne minimum $3\sqrt{3}$ v bode $\sqrt{3}$.

Všimnite si, že lokálne minimum môže byť väčšie ako lokálne maximum!

6. Intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna určíme pomocou druhej derivácie $y''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Analýza znamienok druhej derivácie vedie k výsledku:

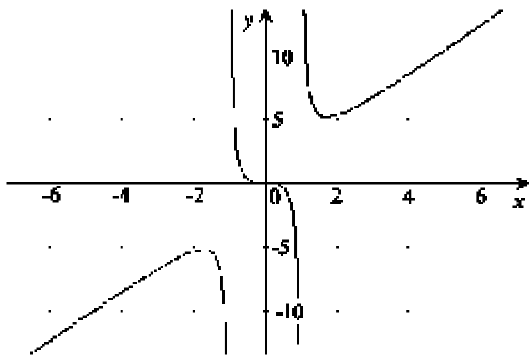
   Funkcia je konvexná v intervaloch $(-1,0),\ (1,\infty)$,

   funkcia je konkávna v intervaloch $(-\infty,-1),\ (0,1)$.

   Funkcia mení charakter konvexnosti a konkávnosti v jedinom bode definičného oboru.

   Funkcia má jediný inflexný bod v bode 0.

7. Náčrtok grafu funkcie.



Obrázok: Graf funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$

♣

Príklad 37. Zistíme priebeh funkcie $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je interval $(-1,1)$.
2. Počítame

$$y(-x) = \ln\ \frac{1-x}{1+x} = \ln\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\ \frac{1+x}{1-x} = -f(x).$$

Funkcia je nepárna, nie je periodická.

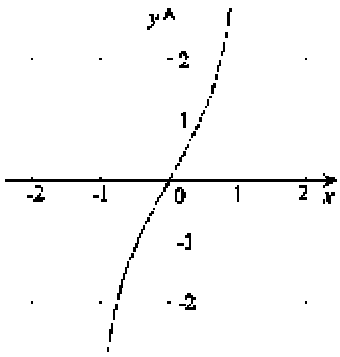
3. Funkcia je spojitá v definičnom obore, jediný nulový bod je bod 0.
4. Graf funkcie má asymptoty bez smernice $x=-1$ a $x=1$ v krajných bodoch definičného oboru, lebo $\lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \infty$ a $\lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$.
Asymptoty so smernicou nemá z dôvodu ohraničenosti svojho definičného oboru.
5. Derivácia funkcie $y'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ je kladná v celom definičnom obore, preto

   funkcia je rastúca, nemá lokálne extrémy.

6. Znamienko druhej derivácie $y''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$ je zhodné so znamienkom x a mení sa v bode 0. Preto

   Funkcia je konvexná v intervale $(0,1)$, je konkávna v intervale $(-1,0)$ a má jediný inflexný bod v bode 0.

7. náčrtok grafu funkcie.



Obrázok: Graf funkcie $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$

♣

Príklad 38. Zistíme priebeh funkcie $y = e^{\sin x}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je množina všetkých reálnych čísel $\mathbf{R}$.
2. Počítame

$$y(-x) = e^{\sin(-x)} = e^{-\sin x} = \frac{1}{e^{\sin x}}.$$

   Táto hodnota nie je rovná ani jednej z hodnôt $\pm y(x)$, preto funkcia nie je párna ani nepárna. Je periodická s periodou 2π.

3. Funkcia je spojitá, nemá nulové body.
4. Z dôvodu spojitosti nemá graf funkcie asymptoty bez smernice, keďže je periodická, nemá graf ani asymptoty so smernicou.
5. Prvá derivácia $y'(x) = \cos x \; e^{\sin x}$ má znamienko zhodné so znamienkom funkcie $\cos$. Preto

   funkcia rastie v intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ a

   klesá v intervaloch $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$,

   funkcia má lokálne maximá e v bodoch $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a

   funkcia má lokálne minimá $\frac{1}{e}$ v bodoch $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

   kde k je ľubovoľné celé číslo.

6. Druhá derivácia funkcie $y''(x) = e^{\sin x}(1 - \sin x - \sin^2 \; x)$ má znamienko zhodné so znamienkom výrazu v zátvorke. Výpočet nulových bodov tohoto výrazu je možné vykonať len približne. Dostávame:

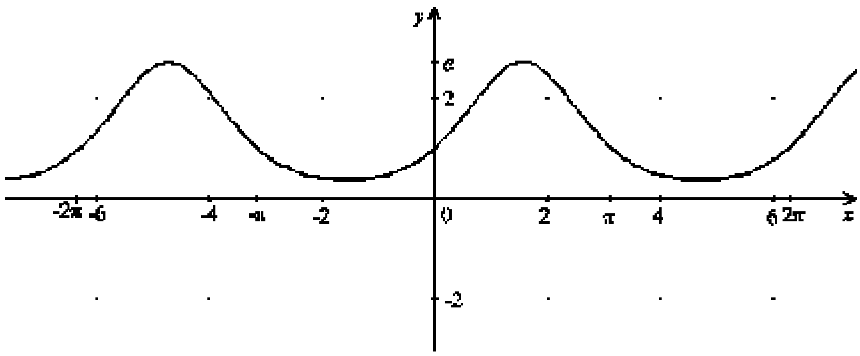
   funkcia je konvexná v intervaloch $((-1,212 + 2k)\pi, (0,212 + 2k)\pi)$,

   funkcia je konkávna v intervaloch $((0,212 + 2k)\pi, (0,788 + 2k)\pi)$

a má inflexné body v bodoch $(0,212+2k)\pi$ a $(0,788+2k)\pi)$,

kde k je ľubovoľné celé číslo.

7. náčrtok grafu funkcie.



Obrázok: Graf funkcie $y=e^{\sin x}$

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

Matematická formulácia tohoto problému je nasledovná: Je daná spojitá funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definovaná na intervale $\langle a,b\rangle$. Chceme nájsť reálne číslo $\alpha\in\langle a,b\rangle$ (pokiaľ existuje), pre ktoré platí

$$f(\alpha)=0.$$

Takéto číslo α nazývame **koreň rovnice**. Keďže funkcia f môže byť v podstate ľubovoľná funkcia jednej reálnej premennej, jej koreň vo všeobecnosti nevieme nájsť nejakým matematickým výpočtom ako napríklad u lineárnej alebo kvadratickej funkcie, prípadne niektorej goniometrickej funkcie. Tento koreň preto budeme hľadať numerickými metódami. Spravidla sa nám nepodarí nájsť koreň, ale len jeho **aproximáciu - približnú hodnotu**. Musí nás preto zaujímať okrem metódy, ktorú na výpočet použijeme, aj **chyba**, akej sa pri nájdení tohoto približného riešenia dopustíme (podrobnejšie o numerických metódach a chybách pozri kapitolu Reálne čísla, paragrafy Zdroje chýb, Chyby aritmetických operácií). Numerické metódy, ktorými sa budeme teraz zaoberať, sú založené na iteračných princípoch (pozri kapitolu Reálne čísla, paragraf Algoritmy). Budú nás zaujímať hlavne dve základné otázky:

1. Konverguje postupnosť vytvorená danou iteračnou metódou?
2. Ak konverguje, tak ako rýchlo?

Ak konverguje postupnosť vytvorená danou iteračnou metódou, hovoríme, že iteračná metóda konverguje.

Ak o koreni rovnice vieme len toľko, že leží v intervale $\langle a, b \rangle$ a nemáme žiadne iné informácie o jeho polohe, použijeme iteračnú metódu, ktorej konvergencia nezávisí od voľby začiatočnej aproximácie. Takéto metódy voláme **vždy konvergentné metódy**. Spravidla majú tú nevýhodu, že konvergujú pomaly, a preto sú zvyčajne vhodné pre určenie takej aproximácie koreňa, ktorá by mohla slúžiť ako začiatočná aproximácia pre nejakú rýchlo konvergentnú metódu, ktorá ale vyžaduje "dobrú" počiatočnú aproximáciu koreňa. Preto metódy riešenia nelineárnych rovníc rozdeľujeme na dva typy:

1. štartovacie metódy
2. spresňujúce metódy

Neznamená to však, že štartovacia metóda konverguje vždy pomaly a spresňujúca zas konverguje vždy rýchlo. Závisí to vždy od konkrétnej situácie a vlastností funkcie f.

V ďalšom budeme predpokladať, že funkcia f, ktorej koreň na intervale $\langle a, b \rangle$ hľadáme, je na tomto intervale spojitá. K tomu, aby sme mohli odpovedať na druhú otázku z dvoch vyššie položených, zavedieme najskôr nasledujúci pojem:

Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}$ konverguje k číslu α **s rýchlosťou rádu r**, ak pre $k \to \infty$ platí: Existuje taká konštanta $C > 0$, že

$$|x_{k+1} - \alpha| = C|x_k - \alpha|^r + o(|x_k - \alpha|^r),$$

$$\text{symbol } f(x) = o(g(x)), \text{ pre } x \to a, \text{ znamená, že} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Štartovacie metódy

Grafická metóda.

Pozorne nakreslený graf funkcie $y = f(x)$ nám pomôže separovať reálne korene rovnice $f(x) = 0$, t.j. určiť intervaly, v ktorých korene ležia. Niekedy je výhodnejšie rovnicu $f(x) = 0$ písať v tvare $f_1(x) = f_2(x)$. Potom korene určíme ako x-ové súradnice prienikov grafov funkcií $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$. Grafická metóda nám tiež môže poskytnúť informáciu o tom, či daný reálny koreň rovnice v uvažovanom intervale vôbec existuje. Pre zložitejšie typy funkcií môžeme reálne korene lokalizovať tabelovaním funkcie $y = f(x)$.

Metóda bisekcie.

Nech je

- reálna funkcia f spojitá na $I_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$,
- $f(a_0).f(b_0) < 0$ (funkčné hodnoty v koncových bodoch intervalu I_0 majú opačné znamienka).

Tieto predpoklady zaručujú, že existuje aspoň jedno číslo $\alpha \in I_0$ také, že $f(\alpha) = 0$. Zostrojme postupnosť intervalov

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_k, \text{ kde } I_k = \langle a_k, b_k \rangle$$

takto:

Ak je $f(a_{k-1}).f(b_{k-1}) < 0$, vypočítame stred intervalu I_{k-1}, t.j.

$$s_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}).$$

V prípade, že $f(s_k) = 0$ našli sme koreň rovnice. V opačnom prípade zvolíme za $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ ten z intervalov $\langle a_{k-1}, s_k \rangle, \ \langle s_k, b_{k-1} \rangle$, v ktorého koncových bodoch má funkcia f opačné znamienka. Koreň α bude ležať v každom z intervalov I_k a postupnosti $\{a_k\}, \{b_k\}$ koncových bodov týchto intervalov vždy konvergujú ku koreňu α. Po n krokoch bude mať interval dĺžku

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \ldots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Pre odhad chyby preto platí: ($\alpha \in I_n$).

$$|a_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \text{ resp. } |b_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Metóda bisekcie (delenia intervalu) konverguje pomaly. Rýchlosť konvergencie tejto metódy je ale úplne nezávislá na tvare funkcie f.

Príklad 39. Nájdime aproximáciu koreňa rovnice

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x = 0.$$

Riešenie: Pre zastavovaciu podmienku zvolíme $\delta = 0,05$. Z grafu funkcií $y = (\frac{x}{2})^2,\ y = \sin x$ odhadneme $I_0 = \langle 1,5; 2\rangle$. Skutočne $f(1,5).f(2) < 0$. Podľa vzťahu, odvodeného pre odhad chyby, máme:

$$|a_4 - \alpha| < \frac{1}{2^4}.0,5 < 0,05.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky:

k	a_k	b_k	s_{k+1}	$f(s_{k+1})$	$b_k - a_k$
0	1,50000	2,00000	1,7500	< 0	0,5
1	1,75000	2,00000	1,87500	< 0	0,25
2	1,87500	2,00000	1,93750	> 0	0,125
3	1,87500	1,93750	1,90625	< 0	0,0625
4	1,90625	1,93750			0,03125

Výhoda tejto metódy okrem jej jednoduchosti je aj v tom, že môžeme dopredu určiť počet krokov, potrebných k dosiahnutiu požadovanej presnosti. Nevýhodou je pomalá konvergencia.

Metóda prostej iterácie.

Rovnicu $f(x) = 0$ prepíšeme na tvar

$$x = \phi(x) \tag{7.6}$$

(obyčajne býva niekoľko možností).

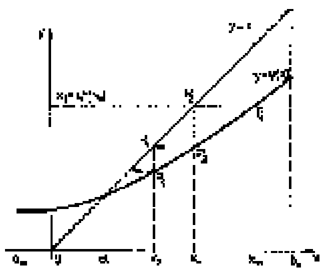
Predpokladáme, že existuje interval $I_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$ patriaci definičnému oboru a oboru spojitosti ako funkcie f, tak aj funkcie ϕ taký, ktorý obsahuje spoločný koreň α obidvoch vyššie uvedených rovníc a pre ktorý je splnená podmienka $\phi(I_0) \subset I_0$. Využijúc rovnicu (7.6), zostrojíme postupnosť aproximácií $x_1, x_2, \dots$, koreňa α podľa nasledujúceho návodu:

1. Zvolíme číslo $\delta > 0$ a začiatočnú aproximáciu $x_0 \in I_0$.
2. Ďalšiu aproximáciu určíme z iteračnej formule

$$x_k = \phi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{7.7}$$

3.

4. Ak bude $|x_k - x_{k-1}| \geq \delta$, pokračujeme podľa bodu číslo 2, v opačnom prípade výpočet zastavíme a x_k považujeme za aproximáciu koreňa α.



Obrázok 7.6: Metóda prostej iterácie.

Pri realizácii tohoto algoritmu musíme mať zaručené, že postupnosť $\{x_k\}$, určená vzťahom (7.7), konverguje ku koreňu α. K tomu nám slúži nasledujúca veta:

Veta 7.1 (Postačujúce podmienky konvergencie.) Predpokladajme, že funkcia ϕ je na nejakom intervale $I = \langle a, b \rangle$ spojitá a má tieto vlastnosti:

a) $$\forall x \in I: \ \phi(x) \in I \tag{7.8}$$

b) $\exists q \in \langle 0, 1)$ také, že $: \forall x, y \in I$ platí $: |\phi(x) - \phi(y)| \leq q|x - y|$.

Potom v intervale I existuje práve jeden reálny koreň α rovnice $x = \phi(x)$ a postupnosť $\{x_k\}$, určená formulou $x_k = \phi(x_{k-1})$ konverguje pre každé $x_0 \in I$ a platí $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$.

Pre diferencovateľnú funkciu ϕ možno podmienku b) nahradiť podmienkou

$$\text{b')} \quad \exists q: \ \forall x \in I \text{ je } |\phi'(x)| \le q < 1.$$

Príklad 40. Budeme hľadať opäť koreň rovnice $(\frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$ v intervale $I_0 = \langle 1,5; 2\rangle$. Uvedenú rovnicu prepíšeme na tvar $x = 2\sqrt{\sin x}$. Budeme počítať podľa iteračného vzorca

$$x_k = 2\sqrt{\sin x_{k-1}}$$

a výpočet zastavíme, ak bude $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3} = \delta$. Ľahko sa presvedčíme, že interval $I_0 = \langle 1,5; 2\rangle$ patrí do definičného oboru funkcie $\phi(x) = 2\sqrt{\sin x}$. Zderivovaním iteračnej funkcie $\phi(x) = 2\sqrt{\sin x}$. zistíme, že derivácia je skutočne na intervale I_0 menšia ako 1. Z počtu iterácií uvedených v tabuľke môžeme posúdiť rýchlosť konvergencie. Vidíme, že táto je závislá od voľby začiatočnej hodnoty x_0.

k	$x_k,\ x_0 = 1,5$	$x_k,\ x_0 = 2,0$
1	1,99749	1,90714
2	1,80823	1,94316
3	1,94279	1,93025
4	1,93039	1,93503
5	1,83498	1,93328
6	1,93330	1,93392
7	1,93392	

Na základe vety o postačujúcej podmienke konvergenie metódy prostej iterácie môžeme získať odhad chyby tejto metódy:

$$|x_k - \alpha| \le \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|.$$

Ak máme výpočet zastaviť pri splnení podmienky $|x_k - x_{k-1}| \le \delta,$ potom pre odhad chyby dostávame

$$|x_k - \alpha| \le \frac{q}{1-q}\delta.$$

Ak je funkcia ϕ dostatočne hladká môžeme pomocou jej Taylorovho rozvoja získať nasledujúci odhad: Pre $\phi'(\alpha) \ne 0$ máme

$$x_k - \alpha = \phi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + o((x_{k-1} - \alpha)).$$

(Pre symbol $o((x_{k-1} - \alpha))$ pozri (7.5)). Vidíme, že rád rýchlosti konvergencie je $r = 1$. Hovoríme preto o **lineárnom iteračnom procese**. V prípade, že je $\phi'(\alpha) = 0$ a $\phi''(\alpha) \ne 0$, potom

$$x_k - \alpha = \frac{\phi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + o((x_{k-1} - \alpha)^2).$$

a rýchlosť konvergencie je v tomto prípade druhého rádu.

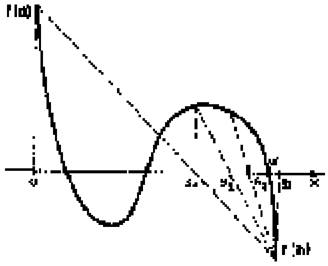
Metóda regula falsi

Opäť uvažujme rovnicu $f(x) = 0$ a predpokladáme, že táto funkcia je spojitá na intervale $I = \langle a, b \rangle$ a opäť platí: $f(a).f(b) < 0$ (t.j. v intervale I existuje reálny koreň rovnice).

Vypočítame x-ovú súradnicu prieniku x-ovej osi a sečnice krivky $y = f(x)$, zostrojenej v bodoch $A = [a, f(a)], B = [b, f(b)]$ podľa vzorca

$$s_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{7.9}$$

Ak bude platiť $signf(s_1) = signf(a)$ (sign znamená znamienko príslušného reálneho čísla), potom preznačíme s_1 na a a počítame s_2 podľa rovnakého vzorca. Ak bude $signf(s_1) = signf(b)$, preznačíme s_1 na b a ďalej počítame s_2 opäť podľa vzorca (7.9). Proces výpočtu zastavíme napríklad podmienkou $|f(s_k)| < \delta$.



Obrázok 7.7: Metóda regula falsi.

Metóda regula falsi je vždy konvergentnou metódou, t.j. zostrojená postupnosť bodov s_k vždy konverguje ku koreňu α, pokiaľ je jeho existencia zaručená. Dá sa ukázať, že rýchlosť konvergencie je rádu $r = 1$. Metóda sa neodporúča používať veľmi blízko pri hľadanom koreni. Z vety o strednej hodnote dostávame pre odhad chyby:

$$|s_k - \alpha| \leq \frac{f(s_k)}{m}, \text{ kde } m = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Príklad 41. Metódou regula falsi riešme opäť úlohu $(\frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$. Voľme $I_0 = \langle 1,5; 2 \rangle$. Výpočet sme zastavili podmienkou $|f(s_k)| < 10^{-5}$. Výsledky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

k	s_k	a_k	b_k	$f(s_k)$	$f(a_k)$	$f(b_k)$
0	-	1,50000	2,00000	-	< 0	> 0
1	1,91373	1,91375	2,00000	< 0	< 0	> 0
2	1,93305	1,93305	2,00000	< 0	< 0	> 0
3	1,93373	1,93373	2,00000	< 0	< 0	> 0
4	1,93375					

Spresňujúce metódy

Efektívne algoritmy na riešenie nelineárnych rovníc majú obvykle dve časti. V prvej časti použijeme niektorú štartovaciu metódu a v druhej časti sa prejde k nejakej rýchlejšie konvergujúcej metóde, ktorá slúži ku spresneniu počítanej aproximácie koreňa.

Newtonova metóda

Nech daný jednoduchý reálny koreň α leží v intervale I. Zvolíme $x_0 \in I$ a pomocou Taylorovho rozvoja vyjadríme funkciu f v tvare:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(x - x_0)^2, \tag{7.10}$$

kde ξ_0 leží medzi x a x_0, pričom predpokladáme, že v intervale I existujú derivácie f', f''. Rovnicu $f(x) = 0$ teraz nahradíme (aproximujeme) lineárnou rovnicou (prvé dva členy rozvoja (7.10)):

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \tag{7.11}$$

a vypočítame jej koreň (označíme ho x_1):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{pre } f'(x_0) \neq 0. \tag{7.12}$$

Teraz nahradíme rovnicu $f(x) = 0$ rovnicou

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0,$$

ktorá tiež vychádza z Taylorovho rozvoja funkcie f, ale v bode x_1. Koreňom tejto lineárnej rovnice je číslo:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Opakované nahradenie rovnice $f(x) = 0$ lineárnymi rovnicami typu

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

je základnou myšlienkou Newtonovej metódy, ktorej sa z tohoto dôvodu často hovorí aj **metóda linearizácie**. Korene týchto lineárnych rovníc tvoria postupnosť, ktorá je určená nasledujúcou rekurentnou formulou (**Newtonova iteračná formula**):

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \quad h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{7.13}$$

Pre spojitú funkciu f musí byť hľadaný koreň α limitou postupnosti $\{x_k\}$. Iteračný proces zastavujeme podmienkou $|h_k| < \delta$, kde požadovanú presnosť δ zadávame spolu so vstupnými údajmi.

Poznámka 1. V geometrickej interpretácii vzorca (7.13) je bod $[x_{k+1}, 0]$ prienikom dotyčnice zostrojenej v bode $[x_k, f(x_k)]$ ku krivke $y = f(x)$ a x-ovej osi. Preto Newtonovej metóde hovoríme aj **metóda dotyčníc**.

Poznámka 2. Algoritmus Newtonovej metódy odpovedá algortimu metódy prostej iterácie pre funkciu

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Príklad 42. Nájdime aproximáciu koreňa $\alpha \in \langle 1,5; 2 \rangle$ rovnice $f(x) \equiv (\frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$ Newtonovou metódou. Výpočet zastavíme, ak bude $|h_k| = |x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$. Zvolíme $x_0 = 1,5$. Výsledky sú uvedené v tabuľke:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	h_k
0	1,50000	-0,434995	0,679263	6,403930 $\cdot 10^{-1}$
1	2,14039	0,303197	1,60948	-1,88381 $\cdot 10^{-1}$
2	1,95201	2,43719 $\cdot 10^{-2}$	1,34805	1,82563 $\cdot 10^{-2}$
3	1,93393	2,32991 $\cdot 10^{-4}$	1,32217	-1,76218 $\cdot 10^{-4}$
4	1,93375	-4,97570 $\cdot 10^{-6}$	1,32191	3.76402 $\cdot 10^{-6}$

Vyšetrovanie podmienok konvergencie Newtonovej metódy je pomerne zložité, a preto ho nebudeme uvádzať. Povieme si len, že táto metóda konverguje veľmi rýchlo, ak sme dostatočne blízko koreňa. V praxi sa často používa ľahko overiteľné kritérium konvergencie:

Ak je $f'(x) \neq 0,\ f''$ nemení znamienko na intervale I, platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ a súčasne

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b - a, \quad \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b - a,$$

potom Newtonova metóda konverguje pre ľubovoľné $x_0 \in I$. Dá sa ukázať, že Newtonova metóda má rád rýchlosti konvergencie $r = 2$.

Metóda sečníc

Predpokladajme, že $x_k \neq x_{k-1}$ sú "dobré" aproximácie jednoduchého koreňa α rovnice $f(x) = 0$. Funkciu f nahradíme lineárnou funkciou g:

$$g(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

(g je priamka, prechádzajúca bodmi $[x_{k-1}, f(x_{k-1})],\ [x_k, f(x_k)]$) a namiesto rovnice $f(x) = 0$ riešime rovnicu $g(x) = 0$. Koreň x_{k+1} tejto lineárnej rovnice je teda určený vzorcom:

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k, \text{ kde } \tau_k = -f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

a považujeme ho za aproximáciu koreňa α rovnice $f(x) = 0$. Dostali sme tak **dvojkrokovú iteračnú formulu** t.j. k zahájeniu jej výpočtu potrebujeme dve začiatočné aproximácie x_0, x_1. Oproti Newtonovej metóde má výhodu, že v každom kroku počítame len jednu novú funkčnú hodnotu a stačí, aby daná funkcia f bola len spojitá, nemusí byť diferencovateľná.

Poznámka. V geometrickej interpretácii je graf funkcie g sečnicou grafu funkcie f a odtiaľ pochádza názov tejto metódy.

Dá sa ukázať, že rýchlosť konvergencie metódy sečníc je rádu $r = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1,618.$

Pokiaľ začiatočné aproximácie x_0, x_1 nebudú "dobré", metóda sečníc nemusí vôbec konvergovať. Je preto nutné kombinovať ju s niektorou zo štartovací
ch metód.

Cvičenia

1. Pomocou definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie

b) $y = 3x^2 + 2x - 1$ v bode 0,

c) $y = 3x + 4$ v bode a,

d) $y = \frac{5}{2x+6}$ v bode 2,

e) $y = \cos 2x$ v bode $\frac{\pi}{4}$,

2. Pomocou definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = -2x^2,$ b) $y = \frac{3}{x-1},$

c) $y = \sqrt{1-2x},$ d) $y = \operatorname{tg} x,$

e) $y = |x|,$ f) $y = |x^3|.$

3. Vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = 7x^4 - 12x^3 + 2\sqrt{x},$ b) $y = \sqrt[5]{x^9},$

c) $y = (x^2 - 2x + 5)(3x - 2),$ d) $y = \frac{1-x}{1+x},$

e) $y = \operatorname{tg} x - 3x \log_4 x,$ f) $y = x^3 \cosh x + \frac{\sqrt[3]{x}}{3+\sqrt{x}},$

g) $y = 4.3^x.2^{-x},$ h) $y = e^x(\cos x + \arcsin x).$

4. Vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = \cos 3x$, b) $y = (x^2+1)^7$,
c) $y = \ln(x - x^2)$, d) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$,
e) $y = \operatorname{tg}^2(x^3)$, f) $y = \ln\operatorname{cotg}\frac{x}{3}$,
g) $y = 2^{-x^2} + \ln\frac{1}{\sqrt{x}}$, h) $y = (\arccos e^x)^2$,
i) $y = log_2^2 e^x$, j) $y = \operatorname{cotgh}\ln x$,
k) $y = e^{\sin^2 x^3}$, l) $y = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}}}$.

5. Vypočítajte deriváciu inverznej funkcie k funkcii f v bode a bez určenia funkcie f^{-1}

a) $f(x) = \frac{7-2x}{5}$, $a = -2$, b) $f(x) = y = x^3$, $a = \frac{1}{8}$
c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = \frac{\pi}{3}$, d) $f(x) = e^{-2x}$, $a = 5$.

6. Vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = x^x$, b) $y = (\ln x)^x$,
c) $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

7. Vypočítajte deriváciu implicitnej funkcie

a) $y^2 = 2x$, b) $xy = 6$,
c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ v bode 4,
e) $x^2 - 2xy + y^3 = 7$ v bode 0, f) $e^y + xy = e$ v bode 0.

8. Vypočítajte deriváciu funkcie určenej parametrickými rovnicami

a) $x = t^2,\ y = 2t$, b) $x = \cos t,\ y = t + \sin t$,
c) $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$, d) $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t$,
e) $x = t(1-\sin t),\ y = t.\cos t$, f) $x = e^t \sin t,\ y = e^t\cos t$.

9. Dokážte, že ak má funkcia f v bode a deriváciu, tak je v bode a spojitá.

10. Predpokladajme, že funkcia f má deriváciu. Dokážte, že platí

b) Ak f je periodická s periódou p, tak f' je periodická s tou istou periódou.

c) Ak f' je periodická s periódou p, tak f je periodická s tou istou periódou.

d) Ak f je párna, tak f' je nepárna.

e) Ak f je nepárna, tak f' je párna.

11. Nájdite príklady funkcie f, pre ktorú platí

b) f je ohraničená, ale f' nie je ohraničená,

c) f' je ohraničená, ale f nie je ohraničená,

d) f je rastúca, ale f' je klesajúca,

e) f' je rastúca, ale f je klesajúca,

f) f je monotónna, ale f' nie je monotónna,

g) f' je monotónna, ale f nie je monotónna.

12. Nájdite príklad funkcií f a g, pre ktoré platí

$$f'(0) < g(0) < g'(0) < f(0).$$

13. Nájdite príklad funkcie f, pre ktorú platí

$$f(0) < f'(0) < f''(0) < f'''(0).$$

14. Vypočítajte derivácie funkcie do rádu n pre danú hodnotu n

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 1,\ n = 5,$ b) $y = \cos x,\ n = 5,$
c) $y = (3x-4)e^{2x},\ n = 3,$ d) $y = \operatorname{arctg} x,\ n = 3,$
e) $y = x^2 \ln x,\ n = 3,$ f) $y = \operatorname{tgh} x,\ n = 3,$
g) $x^2 + y^3 = 4,\ n = 2,$ h) $x = t^3,\ y = t^2,\ n = 2,$

15. Vypočítajte derivácie funkcie rádu n pre všeobecnú hodnotu n

a) $y = e^{2x},$ b) $y = 3^x,$
c) $y = \ln x,$ d) $y = \sinh x,$
e) $y = x^{-n},$ f) $y = \sqrt{x}.$

16. Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$

a) $f(x) = \frac{x-2}{3},\ x_0 = -1,$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 1,\ x_0 = \frac{1}{2},$
c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x_0 = -2,$ d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2},$
e) $f(x) = 3^{-x},\ x_0 = 0,$ f) $f(x) = \ln 5x,\ x_0 = 1.$

17. Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie f rovnobežnej s priamkou p

b)

$f(x) = 3x + 1, \quad p: \; y = \frac{4-x}{3}$,

c) $f(x) = x^2 + 3, \quad p: \; y = \frac{x-5}{2}$,

d) $f(x) = \frac{4}{3-2x}, \quad p: y = 1 - x$,

e) $f(x) = e^{2x}, \quad p: y = 2x - 7$,

f) $f(x) = \operatorname{cotg} 2x, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \quad p: y = -4x$.

18. Nájdite dotyčnicu s najväčšou smernicou ku grafu funkcie $y = \operatorname{arctg} x$.

19. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ v bode $[1, -\sqrt{2}]$.

20. Dotyčnica ku grafu funkcie určenej rovnicou $xy = 4$ vytvorí spolu s osami o_x a o_y trojuholník. Vyjadrite obsah tohoto trojuholníka ako funkciu premennej x.

21. **Asteroida** je krivka určená rovnicou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dokážte, že úsečka na dotyčnici ku asteroide ohraničená súradnicovými osami má konštantú dĺžku a.

22. Teleso je vrhnuté zo zeme smerom kolmo nahor. Jeho výška po t sekundách je (približne) $30t - 5t^2$ metrov.

b) Aká je začiatočná rýchlosť telesa?

c) Za aký čas teleso dopadne na zem?

d) Akou rýchlosťou dopadne teleso na zem?

e) Ako vysoko teleso doletí?

f) Aká je rýchlosť telesa v najvyššom bode?

g)

Aké je zrýchlenie telesa v najvyššom bode?

23. Teleso sa pohybuje v smere osi o_x, pričom jeho poloha v čase t je daná vzťahom

$$x = (t-1)(t-4)^4.$$

b)

Kedy má teleso nulovú rýchlosť?

c)

V ktorých časových intervaloch sa teleso pohybuje smerom doľava?

d)

Akou najväčšou rýchlosťou sa teleso pohybuje doľava?

24. Človek výšky $1,75$ m sa vzďaľuje od zdroja svetla rýchlosťou $5\ km/h$. Zistite rýchlosť pohybu tieňa jeho hlavy, ak zdroj svetla je umiestnený vo výške 7 m.

25. Nájdite diferenciál funkcie

a) $y = 2x - 5$ v bode 3, b) $y = 4 + 3x - 2x^2$ v bode -2,
c) $y = xsin\ x$ v bode 0, d) $y = 3xe^{-x}$ v bode 0,
e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v bode 0, f) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ v bode 2.

26. Použitím diferenciálu približne vypočítajte hodnoty

a) $(2,03)^3$, b) $3^{1,95}$,
c) $\sqrt{98}$, d) $\sqrt[10]{1000}$,
e) $\frac{6}{0,997}$, f) $\cos 61^\circ$,
g) $\operatorname{tg} 44^\circ$, h) $\operatorname{arccotg}(-0,9)$.

27. Pomocou diferenciálu odhadnite približne zmenu objemu gule pri zmene jej polomeru r o hodnotu Δx.

28. Hmotnosť platnej mince sa nesmie odlišovať o viac ako $0,1$ % od jej predpísanej hmotnosti. O koľko percent sa môže líšiť polomer platnej mince od predpísaného polomeru za predpokladu, že minca má predpísanú hrúbku.

29. Perióda T pohybu kyvadla je určená vzťahom $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, kde L je dĺžka kyvadla v metroch, T je meraná v sekundách a $g \approx 9,81\ m/s^2$ je gravitačná konštanta. Použitím diferenciálu nájdite

b) približnú dĺžku kyvadla, ktorého perióda je 1 sekunda,

c) zmenu $\triangle T$ periódy, ak dĺžka kyvadla v časti a) sa predĺži o 1 cm.

30. Nájdite Taylorov mnohočlen stupňa n v bode a pre funkciu

b) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode 0, $n = 4$,

c) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode -2, $n = 4$,

d) $y = e^{-\frac{x}{2}}$ v bode 0, $n = 4$,

e) $y = \ln x$ v bode 1, $n = 5$,

f) $y = \sqrt{x}$ v bode 1, $n = 4$,

g) $y = \operatorname{tg} x$ v bode $\frac{\pi}{4}$, $n = 3$,

h) $y = \operatorname{arctg} x$ v bode 0, $n = 3$.

31. Nech T_f je Taylorov mnohočlen funkcie f stupňa n v bode a a T_g je Taylorov mnohočlen funkcie g stupňa n v bode a. Dokážte, že $T_f + T_g$ je Taylorov mnohočlen funkcie $f + g$ stupňa n v bode a.

32. Použite výsledok predchádzajúceho cvičenia na určenie Taylorovho mnohočlenu stupňa 5 funkcie $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ v bode 0 pomocou Taylorových mnohočlenov funkcií $y = \ln(1+x)$ a $y = \ln(1-x)$.

33. Použite Taylorov mnohočlen z predchádzajúceho cvičenia na približný výpočet hodnoty $\ln 2$. (Pomôcka: zvoľte $x = \frac{1}{3}$.)

34. Dokážte, že rovnica $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$ má jediné riešenie, ktoré patrí do intervalu $(3, 4)$. Nahraďte funkciu na ľavej strane rovnice jej Taylorovým mnohočlenom druhého stupňa a zistite tak približnú hodnotu tohoto riešenia. Svoj výpočet porovnajte s presným výpočtom.

35. S chybou menšou ako 10^{-4} vypočítajte hodnoty z príkladu 26.

36. Nájdite intervaly monotónnosti, intervaly, v ktorých je konvexná a v ktorých konkávna a lokálne extrémy pre funkcie

a) $y = x^3 - 3x$,	b) $y = \frac{2x^2}{3x+4}$,
c) $y = \lvert x^2 + x - 20 \rvert$,	d) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2}$,
e) $y = \frac{e^x}{x}$,	f) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$,
g) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$,	h) $y = \sqrt[5]{x^4}$,
i) $y = x \ln x$,	j) $y = \arccos x^2$.

37. Dokážte, že postupnosť $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rastúca.

38. Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie v danom intervale

b)

$y=-2+3x-x^2$ v intervale $\langle 0,3\rangle$,

c)

$y=|2x^2+5x+3|$ v intervale $\langle -5,1\rangle$,

d)

$y=x^4+4x^3-20x^2+7$ v intervale $\langle -1,3\rangle$,

e)

$y=\sqrt{9-4x^2}$ v intervale $\langle -1,1\rangle$,

f)

$y=x-2\ln x$ v intervale $\langle 1,e\rangle$,

g)

$y=2x^{\frac{2}{3}}-9x+12\sqrt{x}$ v intervale $\langle 0,\infty)$,

h)

$y=x^x$ v intervale $(0,\infty)$,

i)

$y=e^{-\frac{1}{1+x^2}}$ v intervale $(-\infty,\infty)$.

39. Aký najmenší obvod môže mať obdĺžnik s obsahom $25\ \mathrm{cm}^2$?

40. Do rotačného kužeľa s polomerom r a výškou v je vpísaný valec tak, že jeho podstava leží v podstave kužeľa. Určte najväčšiu možnú hodnotu

b)

objemu valca,

c)

obsah povrchu valca.

41. Pozemok v tvare obdĺžnika z jednej strany ohraničený rovným prúdom rieky má byť zo zvyšných troch strán ohraničený plotom. Akú môže mať pozemok najväčšiu plochu, ak môžeme na plot použiť 800 metrov pletiva?

42. Parník pohybujúci sa rovnomerne rýchlosťou v km/h spotrebuje za hodinu $20+0,001v^3$ m^3 nafty. Pri akej rýchlosti spotrebuje parník najmenej nafty?

43. Z kartónu tvaru obdĺžnika 30×48 cm má byť vyrobená otvorená krabica tak, že sa v každom rohu vyreže štvorec a potom sa zložia štyri bočné steny. Aký najväčší objem môže mať takto vytvorená krabica?

44. Výrobca vynaloží na produkciu n kusov výrobkov za týždeň $50n + 20000$ Sk a je schopný ich predať za cenu $200 - 0,01n$ Sk za kus. Pri akom počte výrobkov za týždeň dosiahne výrobca najväčší zisk? Koľko je tento zisk?

45. Chlapec stojí na jednom brehu rovnej rieky širokej $0,5$ km, ktorá tečie rýchlosťou 4 km/h a chce sa dostať na miesto na opačnom brehu vzdialené 3 km po prúde rieky. Za aký najmenší čas to stihne, ak pláve rýchlosťou 2 km/h a kráča rýchlosťou 6 km/h?

46. Učiteľ dovolil študentom, aby si zvolili prirodzené číslo n s tým, že každý študent, ktorý bude mať z testu aspoň $100\left(1 - \frac{12n}{10n^2+21}\right)$ bodov, urobí úspešne skúšku. Aká hodnota n je pre študentov najvýhodnejšia?

47. Nájdite príklad konvexnej funkcie f, pre ktorú je funkcia $\frac{1}{f}$ konkávna.

48.

b)

Môže byť inverzná funkcia ku konvexnej funkcii konvexná?

c)

Môže funkcia nadobudnúť lokálne minimum v inflexnom bode?

d)

Môže byť prvá derivácia záporná v inflexnom bode funkcie?

e)

Môže mať funkcia f' viac lokálnych extrémov ako funkcia f?

f)

Môže mať funkcia f' viac inflexných bodov ako funkcia f?

49. Dokážte, že pre všetky $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x > \frac{2x}{\pi}$.

50. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

51. Dokážte, že pre všetky $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

52. Dokážte, že pre všetky $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$.

53. Dokážte, že rovnica $x^5 + 3x - 6 = 0$ má jediné reálne riešenie a nájdite interval dĺžky 1, v ktorom sa toto riešenie nachádza.

54. Dokážte, že rovnica $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 15 = 0$ má jediné kladné riešenie a nájdite interval dĺžky 1, v ktorom sa toto riešenie nachádza.

55. Vyšetrite priebehy funkcií

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, b) $y = (x^2 - 1)^3$,
c) $y = \frac{x^2}{x+2}$, d) $y = 3x^4 - 4x^3$,
e) $y = x^2\sqrt{x+4}$, f) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$,
g) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$, h) $y = x + \sin x$,
i) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$, j) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

56. Metódou bisekcie alebo metódou regula falsi určte aproximácie koreňov rovníc

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$, c) $e^x = 1 + \frac{1}{x}$,
b) $e^x = x + 2$, d) $\sin x = 3x - 2$.

57. Metódou bisekcie určte aproximácie reálnych koreňov rovníc
a) $x + e^x = 0$, b) $x^5 - x - 2 = 0$
s presnosťou 0,01.

58. Použijúc dva kroky metódy bisekcie, nájdite približnú hodnotu reálneho koreňa rovnice $x^3 - 10x + 5 = 0$, ktorý sa nachádza v intervale $\langle 0; 0,6 \rangle$. Približné riešenia x_1, x_2 vypočítajte na dve desatinné miesta. Odhadnite chybu približnej hodnoty x_2.

59. Metódou regula falsi alebo metódou bisekcie určte aproximáciu koreňov rovnice z predchádzajúceho cvičenia s chybou $\varepsilon = 10^{-2}$. Pri metóde bisekcie určte počet krokov potrebných k dosiahnutiu požadovanej aproximácie.

60. Metódou regula falsi nájdite aproximáciu kladného koreňa rovnice $x^4 - 2x - 4 = 0$ s presnosťou $0,001$.

61. Metódou prostej iterácie riešte rovnice z vyššie uvedeného cvičenia. Preverte postačujúce podmienky konvergencie. Iteračnýproces zastavte podmienkou $|x - x_{k-1}| < 10^{-3}$. Určte odhad chyby vypočítanej aproximácie koreňa.

62. Metódou prostej iterácie riešte rovnicu $x + \ln x = 0$. Posúďťe iteračné vzorce

$$x_k = -\ln x_{k-1}; \quad x_k = e^{-x_{k-1}}; \quad x_k = \frac{x_{k-1} + e^{-x_{k-1}}}{2}$$

z hľadiska a) konvergencie b) rýchlosti konvergencie.

63. Nájdite aproximáciu najmenšieho nezáporného koreňa nasledujúcich rovníc (s presnosťou 10^{-5}). Použite metódu prostej iterácie.

$$\text{a) } e^x - 2(x-1)^2 = 0, \quad \text{c) } x^2 - \cos \pi x = 0.$$
$$\text{b) } e^{-x} - (x-1)^2 = 0,$$

64. Metódou prostej iterácie stanovte aproximáciu dvoch najmenších kladných koreňov rovnice $x \cos x = \sin x - \pi/2$. Vyjasnite otázku konvergencie metódy pre rôzne volené funkcie ϕ.

65. Nájdite aproximácie prvých dvoch kladných koreňov rovnice $\operatorname{tg} x = x$ a) Newtonovou metódou b) metódou sečníc. Výpočet zastavte, ak bude platiť $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-6}$. Počiatočnú aproximáciu určte grafickou metódou.

66. Použijúc dvakrát metódu dotyčníc, nájdite približnú hodnotu reálneho koreňa rovnice $x^4 - 8x + 1 = 0$, ktorý sa nachádza v intervale $\langle 1,6; 2 \rangle$. Približné hodnoty vypočítajte na dve desatinné čísla. Odhadnite chybu približnej hodnoty x_2.

67. Použijúc päťkrát metódu sečníc, nájdite približné riešenie rovnice $2x - \cos x = 0$, ktoré sa nachádza v intervale $\langle 0; 0,5 \rangle$ s presnosťou na tri platné číslice. Ako štartovaciu metódu použite metódu delenia intervalu.

68. Vypočítajte približnú hodnotu koreňa rovnice $x - \sin x - \pi/4 = 0$, ktorý leží v intervale $\langle \pi/2, 3\pi/4 \rangle$. Použite metódu sečníc s presnosťou na päť desatinných miest.

Výsledky cvičení

1. a) 2, b) 3, c) $-0,1$, d) -2.

2. a) $-4x$, b) $-\frac{3}{(x-1)^2}$, c) $-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$,
d) $\frac{1}{\cos^2 x}$, e) $\operatorname{sign} x, \quad x \neq 0$, f) $3x|x|$.

3. a) $y' = 28x^3 - 36x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$, b) $y' = \frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$,

c) $y' = 9x^2 - 16x + 19$, d) $y' = -\frac{2}{(1+x)^2}$,
e) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 3\log_4 x - \frac{3}{\ln 4}$, f) $y' = 3x^2\cosh x + x^3\sinh x + \frac{6-\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}(3+\sqrt{x})^2}$,
g) $y' = 4\times\left(\frac{3}{2}\right)^x\times(\ln 3 - \ln 2)$, h) $y' = e^x(\cos x - \sin x + \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$
.

4. a) $y' = -3\sin 3x$, b) $y' = 14x(x^2+1)^6$,
c) $y' = \frac{1-2x}{x-x^2}$, d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$,
e) $y' = \frac{6x^2\mathrm{tg}\, x^3}{\cos^2 x^3}$, f) $y' = -\frac{1}{3\sin(\frac{x}{3})\cos(\frac{x}{3})}$,
g) $y' = -2x\times 2^{-x^2}\ln 2 - \frac{1}{2x}$, h) $y' = -\frac{2e^x\arccos e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,
i) $y' = \frac{2x}{\ln^2 2}$, j) $y' = \frac{1}{x\sinh(\ln x)}$,
k) $y' = 6x^2e^{\sin^2 x^3}\sin x^3\cos x^3$, l) $y' = -\frac{4}{15\sqrt[15]{(4x+1)^{16}}}$.

5. a) $-\frac{5}{2}$, b) $\frac{4}{3}$, c) 4, d) $-\frac{1}{10}$.

6. a) $x^x(\ln x + 1)$, b) $(\ln x)^x(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x})$,
c) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\times\frac{\ln\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$, d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)$.

7. a) $y' = \frac{1}{y}$, b) $y' = -\frac{y}{x}$, c) $y' = -\frac{4x}{9y}$,
d) $y' = -1$, e) $y'(0) = \frac{2}{3\sqrt[3]{7}}$, f) $y'(0) = -\frac{1}{e}$.

8. a) $y' = \frac{1}{t}$, b) $y' = -\frac{1+\cos t}{\sin t}$, c) $y' = -\frac{2}{3}\mathrm{cotg}\, t$,
d) $y' = -1$, e) $y'\frac{\cos t - t\sin t}{1-\sin t - t\cos t}$, f) $y' = -\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$.

11. a) $y = \sqrt{x}, \quad x\in(0,1)$, b) $y = x$, c) $y = \sqrt{x}$,
d) $y = -\sqrt{x}$, e) $y = x + \sin x$, f) $y = x^2$.

12. Napríklad $f(x) = 2 - x$ a $g(x) = x$.

13. Napríklad $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

14.

a) $y' = 9x^2 - 8x$, $y'' = 18x - 8$, $y''' = 18$, $y^{(4)} = y^{(5)} = 0$,

b) $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$, $y^{(4)} = \cos x$, $y^{(5)} = -\sin x$,

c) $y' = e^{2x}(6x - 5)$, $y'' = e^{2x}(12x - 4)$, $y''' = e^{2x}(24x + 4)$,

d) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $y''' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.

e) $y' = 2x\ln x + x$, $y'' = 2\ln x + 3$, $y''' = \frac{2}{x}$,

f) $y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $y'' = -2\frac{\sinh x}{\cosh^3 x}$, $y''' = \frac{6\sinh^2 x - 2\cosh^2 x}{\cosh^4 x}$,

g) $y' = -\frac{2x}{3y^2}$, $y'' = -\frac{6y^3+8x^2}{9y^5}$,

h) $y' = \frac{2}{3t}$, $y'' = -\frac{2}{9t^4}$.

15. a) $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$, b) $y^{(n)} = 3^x(\ln 3)^n$, c) $y^{(n)} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!x^{-n}$,

d) $y^{(n)} = \sinh x$, ak n je párne, $y^{(n)} = \cosh x$, ak n je nepárne,

e) $y^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n-1)!x^{-2n}}{(n-1)!}$, f) $y^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{1\times 3\times \cdots \times (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}$.

16.

a) $t: \ y = \frac{x-2}{3}$, $n: \ y = -3x - 4$,

b) $t: \ y = -2x + \frac{3}{4}$, $n: \ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

c) $t: \ y = \frac{4}{25}x + \frac{13}{25}$, $n: \ y = -\frac{25}{4}x - \frac{123}{10}$,

d) $t: \ y = -x + \frac{\pi}{2}$, $n: \ y = x - \frac{\pi}{2}$,

e) $t: \ y = -(\ln 3)x + 1$, $n: \ y = \frac{1}{\ln 3}x + 1$,

f) $t: \ y = x + \ln 5 - 1$, $n: \ y = -x + \ln 5 - 1$,

17.

a) dotyčnica neexistuje, normála je jedna: $n:\ y=-x+\frac{3}{2}$,

b) $t:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{47}{16}$, $n:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$,

c) dotyčnica neexistuje, normála je jedna: $n:\ y=-x+\frac{3}{2}$,

d) $t:\ y=2x+1$, normála neexistuje,

e) dotyčnice sú dve: $t:\ y=-4x\pm(\frac{\pi}{2}+1)$, normála neexistuje.

18. $y=x$.

19. $t:\ y=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$, $n:\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Obsah je konštantný 8.

22. a) $30\ m/s$, b) $6\ s$, c) $30\ m/s$,

d) $45\ m$, e) 0, f) $-10\ m/s^2$.

23. a) V časoch $t=\frac{8}{5}$ a $t=4$, b) $t\in(\frac{8}{5},4)$, c) $\frac{2187}{125}$.

24. $\frac{20}{3}$.

25. a) $2(x-3)$, b) $11(x+2)$, c) 0,

d) $3x$, e) x, f) $\frac{1}{4}(x-2)$.

26. a) $8,36$, b) $9-0,45\times\ln 3$, c) $9,9$, d) $\frac{1277}{640}$,

e) $6,018$, f) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$, g) $1-\frac{2\pi}{180}$, h) $\frac{3\pi}{4}-0,05$.

27. $\Delta V=4\pi r^2\Delta r$.

28. $0,05\%$.

29. a) asi $24,8$ cm, b) $\Delta T = 0,02$ s.

30.

a) aj b) $T_4(x) = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$,

c) $T_4(x) = \frac{x^4}{384} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1$,

d) $T_5(x) = -\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{10x^3}{3} - 5x^2 + 5x - \frac{137}{60}$,

e) $T_4(x) = -\frac{5x^4}{128} + \frac{7x^3}{32} - \frac{35x^2}{64} + \frac{35x}{32} + \frac{35}{128}$,

f) $T_3(x) = \frac{8}{3}x^3 + 2(1-\pi)x^2 + (\frac{\pi^2-2\pi+4}{2})x + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{24}$,

g) $T_3(x) = -\frac{x^3}{3} + x$.

32. $T_5(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 2x$.

33. $\frac{842}{1215} \approx 0,693147$.

34. $\frac{225}{64}$.

35. a) $8,3654$, b) $8,519$, c) $9,8995$, d) $1,9953$,
e) $6,0181$, f) $0,4848$ g) $0,9657$, h) 2.3036.

36.

a) Funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, klesajúca v intervale $(-1,1)$, má lokálne maximum v bode -1, lokálne minimum v bode 1, je konvexná v intervale $(0,\infty)$, konkávna v intervale $(-\infty,0)$,

b) funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty,-\frac{8}{3})$ a $(0,\infty)$, klesajúca v intervaloch $(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3})$ a $(-\frac{4}{3},0)$, má lokálne maximum v bode $-\frac{8}{3}$, lokálne minimum v bode 0, je konvexná v intervale $(-\frac{4}{3},\infty)$, konkávna v intervale $(-\infty,-\frac{4}{3})$,

c) funkcia je rastúca v intervaloch $(-5,-\frac{1}{2})$ a $(4,\infty)$, klesajúca v intervaloch $(-\infty,-5)$ a

$(-\frac{1}{2},4)$, má lokálne maximum v bode $-\frac{1}{2}$, lokálne minimum v bodoch -5 a 4, je konvexná v intervaloch $(-\infty,-5)$ a $(4,\infty)$, konkávna v intervale $(-5,4)$,

d) funkcia je rastúca v intervale $(-\infty,0)$, klesajúca v interval $(0,\infty)$, má lokálne maximum v bode 0, je konvexná v intervaloch $(-\infty,-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}})$ a $(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}},\infty)$, konkávna v intervale $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}},\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}}$,

e) funkcia je rastúca v intervale $(1,\infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty,0)\cup(0,1)$, má lokálne minimum v bode 1, je konvexná v intervale $(0,\infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty,0)$,

f) funkcia je rastúca v intervale $(0,\infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty,0)$, má lokálne minimum v bode 0, je konvexná v intervale $(-1,1)$, je konkávna v intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$,

g) funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ a $(0,\infty)$, nemá lokálne extrémy, je konvexná v intervaloch $(-1,-\frac{1}{2})$ a $(0,\infty)$, je konkávna v intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(-\frac{1}{2},0)$,

h) funkcia je rastúca v intervale $(0,\infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty,0)$, má lokálne minimum v bode 0, je konkávna v intervaloch $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$,

i) funkcia je rastúca v intervale $(\frac{1}{e},\infty)$, klesajúca v intervale $(0,\frac{1}{e})$, má lokálne minimum v bode $\frac{1}{e}$, je konvexná v intervale $(0,\infty)$,

j) funkcia je rastúca v intervale $(-1,0)$, klesajúca v intervale $(0,1)$, má lokálne maximum v bode 0, je konkávna v intervale $(-1,1)$.

37. Návod: Uvažujte funkciu $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

38.

a) Maximum $\frac{1}{4}$ v bode $\frac{3}{2}$, minimum -2 v bodoch 0 a 3,

b) maximum 28 v bode -5, minimum 0 v bodoch $-\frac{3}{2}$ a -1,

c) maximum 16 v bode 3, minimum -25 v bode 2,

d) maximum 3 v bode 0, minimum $\sqrt{5}$ v bodoch -1 a 1,

e) maximum 1 v bode 1, minimum $2-\ln 4$ v bode 2,

f) funkcia má maximum asi $5,325$ v bode asi $0,647$, minimum nenadobúda,
g) funkcia je rastúca v otvorenom intervale, preto nenadobúda maximum ani minimum,

h) maximum nenadobudne, minimum $\frac{1}{e}$ v bode 0.

39. 20 cm.

40. a) $V_{max} = \frac{4\pi}{27} r^2 v$, b) $S_{max} = \frac{\pi r v^2}{2(v-r)}$ ak $v > r$, $2\pi r^2$ inak.

41. $80000\ m^2$.

42. Približne $21,5\ km/h$.

43. $3888\ cm^3$.

44. 7500 kusov. Maximálny zisk je 582500 Sk.

45. Stihne to približne za štvrť hodiny.
46. $n = 2$.

47. Napríklad $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

48.

a) Áno, napríklad $y = \frac{1}{x},\ x \in (0, \infty)$, b) nie, ak má druhú deriváciu,tak v lokálnom minime je funkcia konvexná

c) áno, napríklad $y = x^3 - x$,

d) áno, napríklad $y = \operatorname{arctg} x$,

e) áno, napríklad $y = x^4 + x^2$.

53. $x \in (1, 2)$

54. $x \in (1, 2)$

56.
a) 0,347296 a -1,87938 a 1,53208.
b) 1,1469 a -1,8414
c) -1,34997 a 0,806465
d) 0,934833

57.
a) -0,567143
b) 1,26716

58. $x_1 = 0,3$ a $x_2 = 0,5$, chyba je menšia ako $0,25$

59. $x_3 = 0,5125$, teda 3 kroky

60. $x_8 = 1,64293$

61. $x_5 = 1,64291$, chyba menšia ako $0,0002$

62. riešenie je $0,567143$, a) nekonverguje, b) konverguje pomaly, c) konverguje rýchlo

63. a) 0,213308
b) 0
c) 0,43843

64. 4,83228

65. 4,49340; 7,72525

66. $x_2 = 1,95646$

67. $x_5 = 0,450180$

68. $x_6 = 1,76629$