

Chapter 3

Číselné rady

3. Číselné rady

3.1 Základné pojmy

Ak je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ ($k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), tak symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ (alebo $a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + \dots$)¹ nazývame (nekonečný číselný) rad. Symboly $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=m}^{\infty} a_{n+k-m}$ považujeme za totožné, preto — keďže každý rad $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ možno zapísať v podobe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k-1}$ — budú nasledujúce definície a vety formulované spravidla pre rady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_k , resp.

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k \in \mathbf{N},$$

sa nazýva k -ty člen, resp. k -ty čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ². Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (je konvergentný), ak existuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, číslo $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ sa potom nazýva súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a označuje sa spravidla tým istým symbolom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$). Ak neexistuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (je divergentný), vtedy možno rozlíšiť tri prípady:

1. ak $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$;
2. ak $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$;
3. ak $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ neexistuje, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.

Hovoríme, že rad $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=m}^{\infty} c_n$ majú rovnaký charakter, ak obidva súčasne konvergujú alebo obidva oscilujú alebo obidva divergujú k $+\infty$ alebo obidva divergujú k $-\infty$.

k -tým zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (k -ná-sobkom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) sa nazýva rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ($k \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} (ka_n)$).

Rad

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,$$

kde $a, q \in \mathbf{R}$ sú dané, sa nazýva geometrický rad (s kvocientom q). Tento rad konverguje, ak $a = 0$ alebo $|q| < 1$; diverguje k $+\infty$ (k $-\infty$), ak $a > 0$ a $q \geq 1$ (ak $a < 0$ a $q \geq 1$); osciluje, ak $a \neq 0$ a $q \leq -1$.

Pre $q \neq 1$ platí

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

¹niekedy použijeme aj „zmiešané“ označenie, napr. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

²rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa niekedy definuje ako postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo ako usporiadaná dvojica postupností $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$

ak $|q| < 1$, tak

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}.$$

Veta 1. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ majú rovnaký charakter.

Veta 2 (Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie). Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n > n_0 \forall p \in \mathbf{N} : |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Veta 3 (nutná podmienka konvergencie). Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

204. Napíšte jedno z možných vyjadrení n -tého člena a_n radu, ak poznáte niekoľko prvých členov³:

- | | |
|--|---|
| 1. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$; | 2. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$; |
| 3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} + \dots$; | 4. $1 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$; |
| 5. $2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$; | 6. $\frac{2}{2} - \frac{5}{6} + \frac{8}{18} - \frac{11}{54} + \dots$. |

205. Nájdite n -tý člen a_n a súčet S radu, ak poznáte postupnosť jeho čiastočných súčtov:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $S_n = \frac{n+1}{n}$; | 2. $S_n = \frac{-1+2^n}{2^n}$; |
| 3. $S_n = \sin\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)$; | 4. $S_n = \frac{(-1)^n}{n}$. |

206. Nájdite n -tý čiastočný súčet S_n nasledujúcich radov, na základe toho rozhodnite, ktoré z nich konvergujú:

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$; |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + (-2)^n)$; | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$; |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$; |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$; | 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; |
| 11. $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$; | 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; |
| 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos \frac{3\alpha}{2^{n+1}}$; | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n! \pi}{720}$. |

³to, že hľadáme len „jedno z možných vyjadrení“, je úplne namieste: v prípade $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ môže

byť napr. $a_n = n$, $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, $a_n = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 4k - 3, & k \in \mathbf{N} \\ 2, & \text{ak } n = 4k - 2, & k \in \mathbf{N} \\ 3, & \text{ak } n = 4k - 1, & k \in \mathbf{N} \\ 4, & \text{ak } n = 4k, & k \in \mathbf{N} \end{cases}$ atď; preto

v ďalšom budeme pri takomto zápise radu uvádzať spravidla okrem niekoľkých prvých aj n -tý člen

207. Ktoré z nasledujúcich radov možno na základe vety 3 vyhlásiť za divergentné?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2 + 3}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos \frac{1}{n} \right)^n$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{1000n^2 + 3}$.

208. Nech je daná rastúca postupnosť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; označme $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$, $n = 1, 2, \dots$.

1. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ ⁴. Dokážte!

2. Ak $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dokážte!

3. Uveďte príklad postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje.

209. Aký musí byť kvocient q geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, aby rad $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$, kde R_n je súčet n -tého zvyšku radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, mal súčet $5/4$?

210. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad, nech R_n je súčet jeho n -tého zvyšku. Ak $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť, tak $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je geometrický rad. Dokážte!

211. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. Dokážte! Na základe tohto tvrdenia dokážte divergenciu radov $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$ pre $p \leq 1$.

2. Zostane tvrdenie z pr. 211.1 v platnosti, ak v ňom vynecháme predpoklad „ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť“?

212. Konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak

1. pre každé $p \in \mathbf{N}$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + \dots + a_{n+p}) = 0$?

2. pre každé $n \in \mathbf{N}$ je $\lim_{p \rightarrow \infty} (a_{n+1} + \dots + a_{n+p}) = 0$?

3.2 Rady s nezápornými (nekladnými) členmi

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva radom s kladnými (zápornými, nezápornými, nekladnými) členmi, ak počínajúc niektorým n_0 ⁵ je $a_n > 0$ ($a_n < 0$, $a_n \geq 0$, $a_n \leq 0$).

Nasledujúce kritériá (vety 4, 6, 7, 9 a 10) formulované pre rady s nezápornými členmi možno využívať aj pri vyšetrovaní konvergenzie radov s nekladnými členmi; na vyšetrenie konvergenzie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nekladnými členmi totiž stačí vyšetriť konvergenziu radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ s nezápornými členmi.

Veta 4 (porovnávacie kritérium). **a)** Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s nezápornými členmi, nech počínajúc niektorým n_0 platí $a_n \leq b_n$. Potom z konvergenzie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergenzia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; z divergenzie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergenzia radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

b) Špeciálne, nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rad s kladnými členmi, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =: K$. Potom

α) ak $K \in (0, \infty)$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majú rovnaký charakter;

β) ak $K = 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

⁴rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ teda vznikne „uzátvorkovaním“ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

⁵Nech V je výroková forma. Hovoríme, že počínajúc niektorým n_0 (platí) $V(n)$, ak existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ platí $V(n)$ (namiesto „počínajúc niektorým n_0 “ sa používa tiež spojenie pre skoro všetky $n \in \mathbf{N}$).

$\gamma)$ ak $K = \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, tak diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 5⁶. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ⁷ konverguje, ak $p > 1$, a diverguje, ak $p \leq 1$.

213. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n - 1)}$; |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)^2}$; | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n+1}}$; |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n + 1}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt[3]{2n-1}}$; |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1}$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n^3}{n + 5n^5}$; |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$; | 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3 + (-1)^n}{n^2}\right)$; |
| 11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$; | 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$; |
| 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$; | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$; |
| 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - 1\right) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)$; |
| 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - n \sin \frac{1}{n^3}\right)$; | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)}{n - \ln^2 n}$. |

Riešenie. Ak chceme pri vyšetovaní konverencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ s nezápornými členmi použiť porovnávacie kritérium, snažíme sa

- nájsť konvergentný rad, ktorého členy počínajúc niektorým sú všetky väčšie alebo rovné ako zodpovedajúce členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

1. $\frac{1}{n5^{n-1}} \leq \frac{1}{5^{n-1}}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ konverguje, preto podľa vety 4a)

konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$;

- alebo nájsť divergentný rad, ktorého členy počínajúc sú všetky nezáporné a menšie alebo rovné ako zodpovedajúce členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

2. $\frac{5^n}{2^n(2^n - 1)} \geq \frac{5^n}{4^n}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ diverguje, preto podľa vety 4a)

diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n - 1)}$;

⁶pozri tiež pr. 211.1, 227.2 a poznámku k pr. 234.1d)

⁷tieto rady sa nazývajú *Riemannove*, špeciálne rad $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ sa nazýva *harmonický*, rady $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$ pre $p \neq 1$ sa niekedy nazývajú *zovšeobecnené harmonické rady*

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\ln^2 n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^2 n} = \infty$ ⁸, teda (ako vyplýva z definície limity) počínajúc niektorým n_0 platí $\frac{n}{\ln^2 n} \geq 1$, tj. $\frac{1}{\ln^2 n} \geq \frac{1}{n}$ ⁹. Rad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (vyplýva to z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a vety 1), preto podľa vety 4a)¹⁰ diverguje aj rad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$;

• alebo nájsť rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, pričom konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ vieme vyšetriť:

14. Pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$ je nenulová a konečná, majú podľa tvrdenia α) vety 4b) rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ rovnaký charakter. O rade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ vieme, že konverguje (veta 5), preto konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$;

16. Aby sme mohli použiť vetu 4b), hľadáme rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ s kladnými členmi taký, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - n \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{d_n}$ je konečná a nenulová (a taký, ktorého konvergenciu vieme vyšetriť); na to použijeme myšlienku výpočtu limit pomocou Taylorových polynómov (pozri pr. I.390):

Pretože

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad \text{pre } u \rightarrow 0$$

a pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2n) = 0$, je

$$\ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{pre } n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{1}{2} - n \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - n \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad 11.$$

Z tohto vyjadrenia vidno, že za rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ môžeme zvoliť harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - n \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8} + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{8}, \quad (3.1)$$

teda rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)$ majú podľa tvrdenia α) vety 4b) rovnaký

charakter, pritom o harmonickom rade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vieme, že diverguje. Preto diverguje aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right).$$

⁸využili sme rovnosť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^2 n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$ ($x \in \mathbf{R}^+$), na výpočet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo

⁹táto úvaha kopíruje myšlienku dôkazu tvrdenia γ) vety 4b)

¹⁰znova pripomeňme, že všetky kritériá z tejto kapitoly (hoci sú formulované pre rady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$) možno použiť pri vyšetrowaní konvergencie radov tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$

¹¹pri úpravách sme využili, že $o((1/2n)^2) = o(1/n^2)$, $no(1/n^2) = o(1/n)$ a $-o(1/n) = o(1/n)$

Poznámka. Čitateľovi by sa mohlo zdať, že pri riešení pr. 213.16 sme zabudli preveriť, či rad $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2 - n \ln(1 + 1/2n))$ je radom s nezápornými (prípadne nekladnými) členmi (inak by sme neboli oprávnení použiť vetu 4). Toto preverenie je zahrnuté vo výpočte limity (3.1): ak totiž $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ je rad s kladnými členmi a $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n/d_n)$ je kladná (záporná), tak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je rad s kladnými (zápornými) členmi.

214. Nájdite všetky hodnoty α , pre ktoré rad $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje, ak:

1. $a_n = n^\alpha (\ln(n^2 + 1) - \ln n^2)$;
2. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \ln \frac{2n+1}{2n-1}$;
3. $a_n = \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha$;
4. $a_n = \left| \ln \frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{n-1} \right|^\alpha$;
5. $a_n = \alpha^{1/n} + \alpha^{-1/n} - 2$, $\alpha > 0$;
6. $a_n = \alpha^{1/n} - \alpha^{1/(n+1)}$, $\alpha > 0$;
7. $a_n = \frac{\ln^\alpha n}{n^2}$;
8. $a_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$.

215. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ ak } n \in \{m^2; m \in \mathbf{N}\} \\ \frac{1}{n^2} & , \text{ ak } n \in \mathbf{N} \setminus \{m^2; m \in \mathbf{N}\} \end{cases} .$$

216. Ak $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a postupnosť $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje. Dokážte!

217. Ak rady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergujú a platí $b_n \leq a_n \leq c_n$, $n \in \mathbf{N}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dokážte¹²!

218. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Dokážte! Platí aj obrátená implikácia?

219. Ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, tak konvergujú aj rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|/n)$. Dokážte!

220. Dokážte konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$; na základe toho dokážte, že existuje číslo C také, že

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad (3.2)$$

kde $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. (Číslo C sa nazýva *Eulerova konštanta*, $C \approx 0.577216$).

Veta 6 (*d'Alembertovo kritérium*). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom

- a) ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- b) ak počínajúc niektorým n_0 platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: k$. Ak $k < 1$ ($k > 1$), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar d'Alembertovho kritéria*.)

¹²veta 4a) je špeciálnym prípadom tohto tvrdenia (stačí zvoliť $b_n \equiv 0$, $n \in \mathbf{N}$)

Veta 7 (Cauchyho kritérium). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi. Potom

a) ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

b) ak pre nekonečne veľa $n \in \mathbf{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} =: k$. Ak $k < 1$ ($k > 1$), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

(Tento špeciálny prípad sa nazýva limitný tvar Cauchyho kritéria.)

Veta 8. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel, tak

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Dôsledok. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel a existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tak existuje aj $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

221. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2(n-1)}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \dots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2 4^{3n}}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)}{(n+1)!} \arcsin \frac{1}{2^n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$.

Riešenie. 5.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a n^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

preto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{e}.$$

Ak použijeme d'Alembertovo kritérium v limitnom tvare, dostaneme:

ak $0 < a < e$ (tj. ak $\frac{a}{e} < 1$), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ konverguje;

ak $a > e$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ diverguje.

Zostáva vyšetriť prípad $a = e$.

Hoci v prípade $a = e$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (a limitný tvar d'Alembertovho kritéria nedáva teda žiadnu informáciu o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$), možno aj tu použiť vetu 6: postupnosť $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca¹³ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, preto pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

podľa tvrdenia b) vety 6 je teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ divergentný.

6. Pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{n^5}{2^n + 3^n} < \frac{n^5}{3^n}.$$

Na dôkaz konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ použijeme limitný tvar Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{3} = \frac{1}{3} \quad 14.$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ teda podľa Cauchyho kritéria konverguje, z porovnávacieho kritéria potom vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$.

Poznámky. 1. Limitný tvar Cauchyho kritéria sme mohli aplikovať aj priamo na rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$,

výpočet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n + 3^n}} \left(= \frac{1}{3} \right)$ by však bol trochu komplikovanejší.

2. Na dôkaz konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ sme mohli rovnako dobre použiť aj d'Alembertovo kritérium.

222¹⁵. Na základe konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dokážte rovnosť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ak

10. $a_n = \frac{n!}{n^n}$;

20. $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$;

3. $a_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

223. Zostrojte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takú, aby $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

224. Zostrojte divergentný¹⁶ rad s kladnými členmi, konvergenciu ktorého možno vyšetriť pomocou d'Alembertovho kritéria, ale nemožno o nej rozhodnúť na základe Cauchyho kritéria.

¹³pripomeňme, že dôkaz monotónnosti postupnosti $(1 + 1/n)^n$ je súčasťou dôkazu existencie konečnej $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$, pozri [23, str. 85]

¹⁴ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (pozri pr. I.135.2, I.380.1)

¹⁵porovnaj s pr. I.133.1 a I.185.1

¹⁶ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi, tak z vety 8 vyplýva: ak o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ možno rozhodnúť použitím d'Alembertovho kritéria, tak o nej možno rozhodnúť aj na základe Cauchyho kritéria

Poznámka. Dôsledok vety 8, ktorá umožňuje porovnať „silu“ Cauchyho a d’Alembertovho kritéria (pozri poznámku k pr. 224), možno využiť pri výpočte limit: vyplývajú z neho napr. rovnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ ¹⁷.

Veta 9 (Raabeho kritérium). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom

a) ak $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

b) ak počínajúc niektorým n_0 platí $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) =: k$. Ak $k > 1$ ($k < 1$), tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).

(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar Raabeho kritéria*.)

225. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+2}}$;

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+d)(a+2d) \cdots (a+nd)}{b(b+d)(b+2d) \cdots (b+nd)}$, $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \cdots (2+\sqrt{n})}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \cdots \ln(n+1+p)}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2) \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n+2)}{n!(n+1)!} \operatorname{tg} \frac{1}{9^n}$.

Riešenie. 2.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! e^n}{n^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)^{n+3}}{(n+1)! e^{n+1}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+2},$$

teda

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+2} - 1 \right) = n \left(\frac{1}{e} \cdot e^{(n+2) \ln(1+1/n)} - 1 \right) = \\ &= n \left(e^{(n+2) \ln(1+1/n) - 1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pri ďalších úpravách si pomôžeme Taylorovými polynómami:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{pre } x \rightarrow 0,$$

preto

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad \text{pre } n \rightarrow \infty.$$

¹⁷uvedené rovnosti možno dokázať aj na základe tvrdenia „ak $b_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbf{R}^*$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = b$ “, ak zvolíme $b_n = 1/n$, resp. $b_n = (1+1/n)^n$; toto tvrdenie vyplýva z pr. I.171 ($\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = e^{(\ln b_1 + \cdots + \ln b_n)/n}$) a možno pomocou neho dokázať aj dôsledok vety 8 (stačí položiť $b_1 = a_1$, $b_n = a_n/a_{n-1}$ pre $n \geq 2$)

Odtiaľ

$$\begin{aligned} (n+2) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 &= (n+2) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - 1 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n} + no \left(\frac{1}{n^2} \right) + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + 2o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - 1 = \frac{3}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \quad 18. \end{aligned}$$

Ak teraz využijeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 0$ a $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{(n+2) \ln(1 + 1/n) - 1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{3/2n + o(1/n)} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \frac{e^{3/2n + o(1/n)} - 1}{3/2n + o(1/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Podľa limitného tvaru Raabeho kritéria teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+2}}$ konverguje.

Poznámka. D'Alembertovo kritérium je špeciálnym prípadom Raabeho kritéria¹⁹, teda ak konvergenciu radu možno vyšetriť použitím vety 6, tak sa o nej dá rozhodnúť aj na základe vety 9. Opačná implikácia neplatí; napr. konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+2}}$, skúmaného v pr. 225.2, nemožno vyšetriť použitím d'Alembertovho kritéria²⁰: predpoklady tvrdenia b) tohto kritéria zrejme nemôžu byť v tomto prípade splnené, pretože — ako už vieme — náš rad konverguje; na základe tvrdenia a) vety 6 však o jeho konvergencii nevieme rozhodnúť, pretože

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(1 + 1/n)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(1 + 1/n)^n (1 + 1/n)^2} = 1.$$

Poznamenajme, že konvergenciu uvedeného radu nemožno vyšetriť ani použitím Cauchyho kritéria, pretože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n! e^n}{n^{n+2}}} = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = 1$$

(k výpočtu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n!}/n)$ pozri poznámku za pr. 224).

226. Uveďte príklad radu, ktorého konvergenciu

1. možno vyšetriť pomocou Cauchyho, ale nie pomocou Raabeho kritéria;
2. možno vyšetriť pomocou Raabeho, ale nie pomocou Cauchyho kritéria.

Veta 10 (integrálne kritérium). *Nech $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ je nezáporná nerastúca funkcia. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje (diverguje) práve vtedy, keď $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt$ ²¹ je vlastná (nevlastná).*

Špeciálne, ak funkcia f je navyše spojitá, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje (diverguje), ak $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$, kde F je primitívna funkcia k funkcii f , je vlastná (nevlastná).

¹⁸využili sme, že $no(1/n^2) = o(1/n)$, $-1/n^2 = o(1/n)$, $2o(1/n^2) = o(1/n)$ a $o(1/n) + o(1/n) + o(1/n) = o(1/n)$

¹⁹ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tj. ak pre niektoré $q \in (0, 1)$ platí $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$,

tak $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \infty$; ak počínajúc niektorým n_0 je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak počínajúc tým istým n_0 platí

$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 0 < 1$

²⁰možno samozrejme nájsť aj jednoduchšie príklady dokumentujúce neplatnosť opačnej implikácie

²¹pomocou tejto limity sa definuje *nevlastný Riemannov integrál* $\int_1^{\infty} f(t) dt$ (pozri napr. [1])

227. Použitím integrálneho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$;

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, $p > 0$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$, $p > 0$;

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$;

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln^2 n}$.

Riešenie. 6. Pretože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}}{\frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}} = \frac{\pi}{2},$$

má podľa tvrdenia α) vety 4b) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$ rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$, ktorého konvergenciu možno vyšetriť použitím integrálneho kritéria:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, kde $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ je funkcia daná predpisom $f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln^2(x+1)}$. Funkcia f je zrejme spojitá, nezáporná a nerastúca; jednou z funkcií k nej primitívnych

je funkcia $F(x) = -\frac{1}{\ln(x+1)}$. Pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$ podľa vety 10 konverguje.

Pretože rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$ majú rovnaký charakter, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$.

228. Nech $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ je nezáporná nerastúca funkcia. Potom

1. existuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \int_1^{n+1} f(x) dx)$, kde $S_n := f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ ²²;
2. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, tak platia nasledujúce odhady:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq S \leq \int_1^{\infty} f(x) dx + f(1),$$

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_k \leq \int_{k+1}^{\infty} f(x) dx + f(k+1),$$

kde $\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$, S je súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ a R_k súčet jeho k -teho zvyšku. Dokážte!

229. Koľko prvých členov radu treba sčítať, aby sme našli súčet radu

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ s chybou menšou než 0.1?

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^6 n}$ s chybou menšou než 0.01?

²²Z tohto tvrdenia priamo vyplýva veta 10; na jeho základe možno opätovne dokázať rovnosť (3.2) z pr. 220

230. Uveďte príklad nezápornej spojitej funkcie $f:[1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ takej, že

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje a $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt = \infty$;
 2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverguje a $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt$ je konečná.
-

231. Vyšetrite konvergenciu radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{n/2} \left(\frac{5}{6} \right)^{2n/3}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{n/2}}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$;
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^{2n}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{q(q+1) \cdots (q+n)}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2 \ln n}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(3 + 2(-1)^n)}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 \left(3 - 2 \sin \frac{n\pi}{3} \right)}$;
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n + \frac{1}{n} \right)^n}$;
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$;
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$;
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+3}{n^2+4}$;
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right)$;
20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+k/\ln n}}$;
21. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$;
22. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$;
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \sin(1/n)}$;
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1)$;
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}$;
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}$;
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$;
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(1+n^\alpha)}$.

232. Nech $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ($n \in \mathbf{N}$). Čo možno povedať o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ak

a) $c_n = \max\{a_n, b_n\}$;

b) $c_n = \min\{a_n, b_n\}$

a

1. rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergujú;
2. rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú;
3. jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a druhý diverguje?

233. 1₀. Dokážte *logaritmicke kritérium*: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom

ak $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} > 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

ak počínajúc niektorým n_0 platí $\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$;

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{3^{n^{4/3}}}$.

234. 1. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má rovnaký charakter ako rady:

a₀) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$;

c₀) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$;

d₀) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ²³.

Dokážte!

2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n - \sqrt{n})\sqrt{n}}$;

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$.

235. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} =: q$. Potom platí: ak $q < 1/2$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje; ak $q > 1/2$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Dokážte!

3.3 Absolútne a relatívne konvergentné rady

Veta 11. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva absolútne (relatívne) konvergentný, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (diverguje).

Poznámka. Pri vyšetrowaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (tj. pri vyšetrowaní absolútnej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) možno použiť kritériá z odseku 3.2. Pretože rady vyhovujúce predpokladom tvrdení b) vety 6 alebo 7 nespĺňajú nutnú podmienku konvergencie²⁴, možno d'Alembertovo a Cauchyho kritérium sformulovať nasledovne²⁵:

²³rovnaký charakter radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ možno využiť napr. na vyšetrenie konvergencie Riemannových radov $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$, $p \geq 0$

²⁴pozri tiež poznámku k riešeniu pr. 207

²⁵tvrdenie b) Raabeho kritéria takto preformulovať nemožno; výrok „ak počínajúc niektorým n_0 je $a_n > 0$ a $n(|a_n|/|a_{n+1}|-1) \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje“ totiž neplatí (stačí uvažovať $a_n = (-1)^n/n^p$, $p \in (0, 1]$, pozri pr. 239.1)

Veta 6'. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nenulovými členmi. Potom

a) ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje;

b) ak počínajúc niektorým n_0 platí $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Veta 7'. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

a) ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje;

b) ak pre nekonečne veľa $n \in \mathbf{N}$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

236. Dokážte, že nasledujúce rady absolútne konvergujú:

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{2^n};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2};$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right);$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3};$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos \frac{1}{n} \right) \cos \pi n.$$

237. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definujme postupnosti $\{a_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n, & \text{ak } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{ak } a_n < 0 \end{cases}, \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n, & \text{ak } a_n \leq 0 \\ 0, & \text{ak } a_n > 0 \end{cases}.$$

Potom

1. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergujú;

2. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergujú a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^+}{S_n^-} = 1, \quad (3.3)$$

kde S_n^+ (S_n^-) je n -tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$);

3. ak konverguje práve jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dokážte!

238. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď pre každú ohraničenú postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Dokážte!

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n > 0$ počínajúc niektorým n_0 alebo $a_n < 0$ počínajúc niektorým n_0 , sa nazýva rad so striedavými znamienkami.

Veta 12 (Leibnizovo kritérium). Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rýdzomonotónna²⁶ postupnosť a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (ktorý je zrejme radom so striedavými znamienkami) konverguje a pre súčet R_n jeho n -tého zvyšku platí odhad

$$|R_n| < a_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.4)$$

²⁶tvrdenie zostane v platnosti, aj keď slovo „rýdzomonotónna“ nahradíme slovom „monotónna“, v (3.4) treba v tom prípade ostrú nerovnosť nahradiť neostrou

Poznámka. Z vety 1 vyplýva, že Leibnizovo kritérium možno vysloviť aj v nasledujúcej podobe:

Veta 12'. *Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje nasledujúcim podmienkam:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
2. *existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rýdzomonotónna postupnosť.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Podobne možno upraviť formulácie dvoch nasledujúcich kritérií — Abelovho a Dirichletovho (vety 13, 14) aj formuláciu integrálneho kritéria.

239. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \sin \frac{1}{n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$;
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln \ln(n+2)}{\ln(n+1)}$.

Riešenie. 2. Pretože $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}$ rad so striedavými znamienkami, preto na vyšetrenie jeho konvergencie skúsime použiť Leibnizovo kritérium. Musíme teda preveriť splnenie predpokladov vety 12':

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = 0$ ²⁷ (na výpočet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo);

2. ak pomocou prvej derivácie vyšetříme rast a klesanie funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$(f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x) > 0 \quad \text{pre } x \in (0, e^2), \quad f'(x) < 0 \quad \text{pre } x \in (e^2, \infty)),$$

zistíme, že funkcia f je klesajúca na intervale $[e^2, \infty)$; preto $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=8}^{\infty}$ ²⁸ je klesajúca postupnosť.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}$ teda podľa Leibnizovho kritéria konverguje.

240. Ukážte, že postupnosť $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ má limitu 0. (Návod: dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$

diverguje k $-\infty$ ²⁹.) Na základe toho vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

²⁷pripomeňme, že podmienka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je súčasne nutnou podmienkou konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (pozri aj poznámku k riešeniu pr. 207), preto z jej nesplnenia by vyplývala divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

²⁸ $e^2 \approx 7.389$

²⁹keby rad $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergoval, existovala by konečná nenulová $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

241. Koľko prvých členov radu treba sčítať, aby sme našli súčet radu

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{7/2}}$ s chybou menšou než 10^{-7} ?
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{5/2}2^n}$ s chybou menšou než 10^{-6} ?

242. Rozhodnite o platnosti tvrdenia „ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje“!

Veta 13 (Abelovo kritérium)³⁰. Nech

- rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť³¹.

Potom konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Veta 14 (Dirichletovo kritérium)³². Nech

- postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená;
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Skutočnosť, že existuje $k \in \mathbf{N}$ také, že $\{b_n\}_{n=k}^{\infty}$ je nerastúca (neklesajúca) postupnosť s limitou $a \in \mathbf{R}^*$, budeme v ďalšom zapisovať $b_n \searrow a$ ($b_n \nearrow a$)³³.

243. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\pi/n)}{n}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \pi/4)}{\ln^2(n+1)}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln \ln(n+2)} \cos \frac{1}{n}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Riešenie. 4. Ukážeme najprv, že postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ (kde $x \in \mathbf{R}$ je dané) je ohraničená. Pre $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) je zrejme $S_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Pre $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) použitím vzorca $\sin \alpha \sin \beta = (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))/2$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin x \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \cdots + \sin nx \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} x \right) \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad 34. \end{aligned}$$

³⁰pozri tiež pr. 275 a 277

³¹tento výrok je zrejme ekvivalentný s výrokom „ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna konvergentná postupnosť“

³²pozri tiež pr. 275 a 276

³³v súvislosti s týmto označením odporúčame čitateľovi sformulovať Abelovo a Dirichletovo kritérium tak, ako formuluje veta 12' Leibnizovo kritérium (pozri poznámku za vetou 12)

Teda $S_n = 0$ pre $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $|S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$ pre $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Teraz už môžeme použiť Dirichletovo kritérium: Nech je dané $x \in \mathbf{R}$; potom podľa predchádzajúceho je postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ohraničená. Súčasne $\frac{1}{n} \searrow 0$, preto podľa vety 14 rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje.

6. Podľa pr. 243.4 rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje, súčasne $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e^{35}$, preto podľa Abelovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konverguje.

Poznámka. Podobne, ako sme v riešení pr. 243.6 od konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ dospeli ku konvergentnému radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, mohli by sme teraz na základe Abelovho kritéria vo vytváraní konvergentných radov pokračovať:

ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, tak z vety 13 vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n b_n$;

ak $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, tak opäť z vety 13 vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n b_n c_n$, atď.

Ukážeme teraz navyše, že pre $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ relatívne. Konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sme dokázali v pr. 243.4, stačí teda dokázať, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ diverguje. Využijeme pritom výsledok pr. 243.5, podľa ktorého rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny}{n}$ konverguje pre každé $y \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Pretože $|\sin \alpha| \geq \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, je

$$\frac{1}{n} |\sin nx| \geq \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}. \quad (3.5)$$

Pre $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) je $2x \neq 2k\pi$, preto podľa pr. 243.5 rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(2x)}{n}$ — a teda aj rad $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ — konverguje. Odtiaľ vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}\right)$ — ktorý je súčtom divergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ a konvergentného radu $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ — diverguje.

³⁴1. snaživý čitateľ sa môže presvedčiť, že v prípade $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, kedy — ako už vieme — je $S_n = 0$ ($n \in \mathbf{N}$), skutočne platí $\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) / \left(2 \sin \frac{x}{2}\right) = 0$;

2. z rovnosti $S_n = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \sin(x/2)} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x$ vyplýva, že pre $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ osciluje (neexistencia limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1/2)x$ pre $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sa dokáže rovnako ako v pr. I.178)

³⁵opätovne pripomíname, že dôkaz monotónnosti postupnosti $(1 + 1/n)^n$ je súčasťou dôkazu existencie konečnej $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$

Z rovnosti $\frac{1 - \cos 2nx}{2} = \sin^2 nx$ vyplýva, že $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n} \right)$ je rad s nezápornými členmi; môžeme

preto použiť porovnávacie kritérium, podľa ktorého z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n} \right)$ a z nerovnosti

$$(3.5) \text{ vyplýva divergencia radu } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}.$$

244. 1. Ukážte, že Leibnizovo a Abelovo kritérium možno odvodiť z Dirichletovho kritéria!

20. Nech $k \in \mathbb{N}$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť s limitou 0, tak rad $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{k[n/k]} a_n$ konverguje ([.] tu označuje celú časť). Dokážte!

245. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$;
2. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3n}{n \ln(n+1) \ln^2(n+2)}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{6} \right) \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right)$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$;
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n}}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n - 3/8}{\sqrt{n+1}}$;
15. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{3^n} + \dots$.

246. Zistite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú relatívne a ktoré absolútne:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1/n}}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{n^{100}}{2^n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln^2 n}{n^p}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$;
7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$, $p > 0$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$, $p > 0$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \cos(1/n)}{\sqrt[4]{n}}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}$;

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin 2n}{n^2 - \ln n}; \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/12)}{\ln n};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{n^p}, \quad p > 0.$$

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je (vznikne) prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak existuje bijekcia $p: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ taká, že $b_n = a_{p(n)}$, $n \in \mathbf{N}$.

Veta 15 (Riemannova veta o prerovnaní). Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad; nech $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a \leq b$. Potom existuje prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ také, že

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad b = \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

kde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Veta 16. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď každé jeho prerovnanie konverguje k tomu istému súčtu.

247. 1. Zo vzťahu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n,$$

kde $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ a C je Eulerova konštanta (pozri pr. 220 a poznámku k pr. 228.1), odvoďte vzťah

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \ln \sqrt{4n} + \frac{C}{2} + \eta_n,$$

kde $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$.

2. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ a súčty nasledujúcich radov, ktoré vzniknú jeho prerovnaním:

a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots;$

b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots;$

c) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots.$

30. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikne prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ tak, že za každou skupinou p za sebou nasledujúcich kladných členov dáme skupinu m za sebou nasledujúcich záporných členov. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{m}.$$

Dokážte!

248. 1. Z rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad 36$$

odvoďte vzťahy

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4k-3} = \ln \sqrt[4]{8k} + \frac{\pi}{8} + \frac{C}{4} + \vartheta_k,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{4k-1} = \ln \sqrt[4]{8k} - \frac{\pi}{8} + \frac{C}{4} + \tau_k,$$

³⁶túto rovnosť dokážeme v pr. 344.2

kde $\lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$ a C je Eulerova konštanta.

2. Nájdite súčty nasledujúcich radov, ktoré vznikli prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$:

a) $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{9} - \dots$;

b) $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \dots$.

249. Pomocou rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad 37$$

nájdite súčty radov

1. $1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$;

2. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$.

250. Dokážte, že rad

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots,$$

ktorý vznikne prerovnaním konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, je divergentný.

251. Vyšetrite konvergenciu radu

$$1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

(pre $p = 1, 2, 1/2$ ide o rady z pr. 247.2a), 249.1 a 250).

251. 1. Nech $c \in \mathbf{N}$ a nech $p: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ je bijekcia taká, že $|p(n) - n| \leq c$, $n \in \mathbf{N}$. Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad, tak jeho prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ ³⁸ konverguje k tomu istému súčtu ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dokážte!

2. Nájdite súčet radu $-\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + 2(-1)^n}$.

3.4 Cauchyho súčin radov

Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazývame rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ budeme označovať symbolom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Veta 17. a) Ak aspoň jeden z konvergentných radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje absolútne, tak ich Cauchyho súčin konverguje a jeho súčtom je číslo $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

b) Ak rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergujú absolútne, tak ich Cauchyho súčin konverguje absolútne.

³⁷odvodenie uvedenej rovnosti presahuje rámec tohto textu (dokazuje sa spravidla dosadením $x = 0$ do rovnosti $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in [-\pi, \pi]$, ktorá vyplýva z teórie Fourierových radov (pozri napr.

[1, str. 40, pr. 2.4])

³⁸rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ teda prerovnáme tak, aby sa žiadny jeho člen „nevzdialil“ zo svojho pôvodného miesta viac ako o c miest

253. Nájdite Cauchyho súčin radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kde

- a) $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $a \neq b$; b) $a_n = \frac{q^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, $b_n = q^n$;
 c) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $b_n = \frac{3^n}{n!}$; d) $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ ³⁹.

2. Dokážte rovnosti

- a) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1$; b) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$.

254. Nech $a_n > 0$, $b_n > 0$ ($n \in \mathbf{N}$), rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Potom Cauchyho súčin týchto radov diverguje. Dokážte!

255. Dokážte, že druhá mocnina konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (tj. jeho Cauchyho súčin so sebou samým) diverguje.

256. Dokážte, že Cauchyho súčin divergentných radov

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{a} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

je absolútne konvergentný rad.

257. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú absolútne konvergentné rady, nech $p: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ je bijekcia; nech $c_n := a_j b_k$, ak $p(n) = (j, k)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je absolútne konvergentný rad, ktorého súčtom je číslo $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$. Dokážte!

3.5 Ďalšie príklady

258. Nájdite súčet radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\ln n}{n - \ln n} \right]$ ⁴⁰; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$;
 3. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3-1}{n^3+1}$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$;
 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$;
 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{x}{2^n}$, $x \in (-\pi, \pi)$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

259. Nech $m \in \mathbf{N}$, nech $a_k := \frac{1}{u_k u_{k+1} \cdots u_{k+m}}$ ($k \in \mathbf{N}$), kde $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť nenulových čísel s diferenciou $d \neq 0$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{m d u_1 u_2 \cdots u_m}$. Dokážte!

260. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť reálnych čísel; definujme funkciu $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & \text{ak } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}.$$

³⁹prítom kladieme $(-1)^0 := 1$

⁴⁰[.] tu označuje celú časť

Potom $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ a $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$. Dokážte!

261. Ak $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $c_n \geq 0$ ($n \in \mathbf{N}$) a rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ konvergujú, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$. Dokážte!

262. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel a rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Dokážte! (Návod: využite pr. 211.1.)

263. *Fibonacciho postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná nasledovne: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$). Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konverguje.

264. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n/3} \sqrt[3]{n!+1}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!! \arctg(1/3^n)}{n!}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^n}{2!4!\dots(2n)!}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n\sqrt{n}}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \frac{1}{n^q}$, $q \leq 1$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{q(q+1)\dots(q+n-1)} \right)^p$, $q > 0$;
8. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \dots$
(návod: $\sqrt{2} = 2 \sin(\pi/4) = 2 \cos(\pi/4)$);
9. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \dots$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n^2}{2(n^2 + \alpha n + \beta)}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\cos \frac{1}{n^p} \right)^n \right)$, $p > 0$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^p$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \right)$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}$;
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n+1} \right)$;
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{pn+q} \right)^{n \ln n}$, $p > 0$, $q > 0$;
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b})$;
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1 \right)$;
19. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{(a \ln n + b)/(c \ln n + d)}$;
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2} \right)$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^p} - \ln \sin \frac{1}{n^p} \right)$, $p > 0$;
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)(n+b)(n+b)(n+a)}$;
23. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}$, $a > 0$;
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$;
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}$;
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$;

$$\begin{array}{ll}
27. \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx ; & 28. \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx ; \\
29. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n (\ln \ln n)^r} ; & 30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1} \ln^3(n+2)} ; \\
31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n+n^2)}{n^2 \ln^2(n+1)} ; & 32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2-n+1)}{\arcsin^p(e^{1/\sqrt{n}}-1)} \\
33. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \dots + (\ln n)^2} ; & 34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)} ; \\
35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}} ; & 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^p} .
\end{array}$$

265. Nájďte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takú, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ diverguje pre každé $p \geq 1$.

266. Dokážte nerovnosti:

$$1. -\frac{\pi}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2} < \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R}; \quad 2. \frac{\pi}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2}(\pi+1).$$

267. Na základe porovnania radu $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ s radom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ odvoďte *Bertrandovo kritérium*: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom

1. ak existuje $p > 1$ tak, že počínajúc niektorým n_0 platí

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \geq p, \quad (3.6)$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje:

2. ak počínajúc niektorým n_0 platí $\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

268. Nech $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ je kladná nerastúca funkcia a $\varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ je kladná diferencovateľná rastúca funkcia vyhovujúca podmienke $\varphi(x) > x$. Nech existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\varphi(x)) \varphi'(x)}{f(x)} =: A \ (\in \mathbf{R}^*)$. Potom

1. ak $A < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje;

2₀. ak $A > 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverguje.

Dokážte!

269. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou 0. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má rovnaký charakter ako rad $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$, kde p_m je počet prvkov množiny $\{a_n; a_n \geq 2^{-m}\}$ (prítom \emptyset pokladáme za 0-prvkovú množinu). Dokážte!

270. Zistite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú absolútne a ktoré relatívne:

$$\begin{array}{ll}
1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n} + (-1)^{n+1}} ; & 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p} ; \\
3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n+1})^p} ; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{n^p + \sin(n\pi/4)} ; \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p} \right) ; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} ; \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p ; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln^p(n+1)}, \quad x \in (0, \pi) ; \\
9. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots .
\end{array}$$

271. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ spĺňa nutnú podmienku konvergence a nech $c \in \mathbf{N}$. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $p_1 = 1$ a $p_{n+1} - p_n \leq c$, $n \in \mathbf{N}$. Potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$ ⁴¹, majú rovnaký charakter. Dokážte!

272. „Uzátvorkujme“ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby žiadna zátvorka neobsahovala členy s opačnými znamienkami. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a uzátvorkovaný rad majú rovnaký charakter. (Korektnjšiu formuláciu zadania prenechávame čitateľovi.) Dokážte!

273. Relatívne konvergentný rad možno „uzátvorkovať“ tak, aby vznikol absolútne konvergentný rad. (Aj v tomto prípade prenechávame presnú formuláciu čitateľovi.) Dokážte!

274. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \right)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} \right)$;
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$;
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+(-1)^n}}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n + \sin n}$;
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln \ln n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} \right)$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi(2 + \sqrt{3})^n$ (návod: vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi(2 - \sqrt{3})^n$);
10. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n \ln(n+1)}$, kde $a_n = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 5k+1, 5k+2 \\ -1, & \text{ak } n = 5k, 5k-1, 5k-2 \end{cases}$, $k \in \mathbf{N}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

275. Nech S_n je n -tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = 0$. Dokážte, že ak konverguje jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) S_n$, tak konverguje aj druhý z nich a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) S_n$. Dokážte!

276. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- (i) postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je ohraničená;
- (ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ absolútne konverguje;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

277. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- (i) rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje;
- (ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ konverguje absolútne.

278. Dokážte, že pre súčet S_p radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ ($p > 0$) platí odhad $\frac{1}{2} < S_p < 1$.

279. Nech $p, m \in \mathbf{N}$; nemieliac poradie členov harmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, zmeňme ich znamienka tak, aby vždy za skupinou p kladných členov nasledovala skupina m záporných členov. Takto získaný rad diverguje (konverguje), ak $p \neq m$ ($p = m$). Dokážte!

⁴¹teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ „uzátvorkujme“ tak, aby žiadna zátvorka neobsahovala viac ako c členov

280. 1. Nájdite také prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorého súčet je dvojnásobkom súčtu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2. Nájdite divergentné prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

281. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad, $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je také prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = b$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = a$, kde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ⁴². Potom aj každé číslo z intervalu (a, b) je hromadnou hodnotou postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokážte!

282. Nech $a_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, definujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne: $a_1 = \sin a_0$, $a_{n+1} = \sin a_n$ ($n \in \mathbf{N}$).

1. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \sin a_n)$ je konvergentný. Na základe toho dokážte konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.

2. Dokážte, že rady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_{n+1}/a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergujú.

3. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$.

283. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\right) a_n$, $n \in \mathbf{N}$;

2. $a_1 = \sin \alpha$, $a_{n+1} = (-1)^n \sin a_n$, $n \in \mathbf{N}$;

3. $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, $n \in \mathbf{N}$;

4. $a_1 = a \in \mathbf{R}$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $n \in \mathbf{N}$.

284. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ konverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ konverguje absolútne pre každé $x > x_0$. Dokážte!

285. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-p}$ ($p > 0$) konverguje, tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

Dokážte!

286. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad s kladnými členmi. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ diverguje;

2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$, kde S_n je n -tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje pre $p > 1$ a diverguje pre

$p \leq 1$.

Dokážte!

287. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi, nech $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_n}$ diverguje;

2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ konverguje.

Dokážte!

288. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ majú rovnaký charakter. Dokážte!

289. Uveďte príklad konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takého, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ diverguje.

⁴²pozri vetu 15

290. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad, pričom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou 0; nech $c \in \mathbf{N}$ a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $p_{n+1} - p_n \leq c$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ diverguje. Dokážte!

291. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členmi konverguje, tak existuje postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $b_n \nearrow \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Dokážte!

292. 1₀. Nech S_n , σ_n je n -tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; pričom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentný rad s kladnými členmi. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sigma_n} = k$ ($k \in \mathbf{R}^*$). Dokážte!

2. Dokážte *Stolzovu vetu*: Ak $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca divergentná postupnosť a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, tak existuje aj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

3. Vypočítajte limity:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + n^{p-1}}{n^p}$, $p > 1$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + n^{p-1}}{n} - \frac{1}{p} \right)$, $p > 1$.

4. Nech S_n je n -tý čiastočný súčet divergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členmi; nech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k S_k^{-1}}{\ln S_n} = 1.$$

Dokážte!

293. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená (neohraničená) rastúca postupnosť kladných čísel, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$ konverguje (diverguje). Dokážte!

294. Nech $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ je rastúca konkávna funkcia taká, že $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konverguje. Potom platí: ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s nezápornými členmi, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{n}$ konverguje. Dokážte!