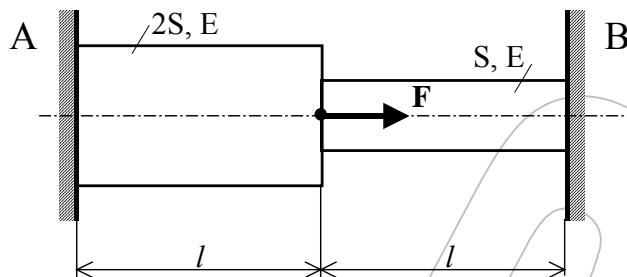


PRŮT NAMÁHANÝ NA ŤAH ALEBO TLAK

staticky neurčitý prút

- Určte:
- reakcie vo väzbách,
 - priebeh osových síl a normálových napätí po dĺžke prúta,
 - skontrolujte dimenzovanie prúta,
 - posunutie pôsobiska sily F.

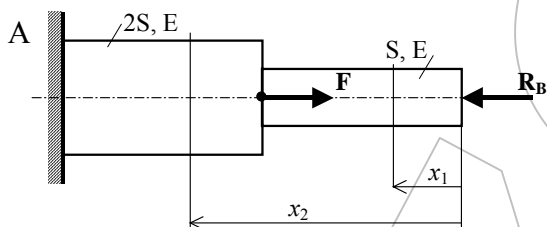


Posúdenie statickej určitosti prúta:

$$n = 3^{\circ} - 3^{\circ}_A - 3^{\circ}_B = -3^{\circ}$$

- vzhľadom na charakter zaťaženia je však úloha iba 1x staticky neurčitá.

Je potrebné vytvoriť základný staticky určitý systém na jej riešenie:



deformačná podmienka: $\Delta l = 0$

$$x_1 \in \langle 0 ; l \rangle$$
$$x_2 \in \langle l ; 2l \rangle$$

$$N_{(x1)} + R_B = 0$$

$$N_{(x2)} + R_B - F = 0$$

$$N_{(x1)} = -R_B$$

$$N_{(x2)} = -R_B + F$$

Výpočet staticky neurčitej reakcie R_B :

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

$$\int_{(x1)} \frac{N_{(x1)}}{ES_1} dx_1 + \int_{(x2)} \frac{N_{(x2)}}{ES_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{N_{(x1)} l_1}{ES_1} + \frac{N_{(x2)} l_2}{ES_2} = 0$$

$$\frac{-R_B l}{ES} + \frac{(-R_B + F)l}{E2S} = 0$$

$$R_B = \frac{1}{3} F$$

potom:

osové sily v jednotlivých častiach prúta

$$N_{(x1)} = -\frac{1}{3}F$$

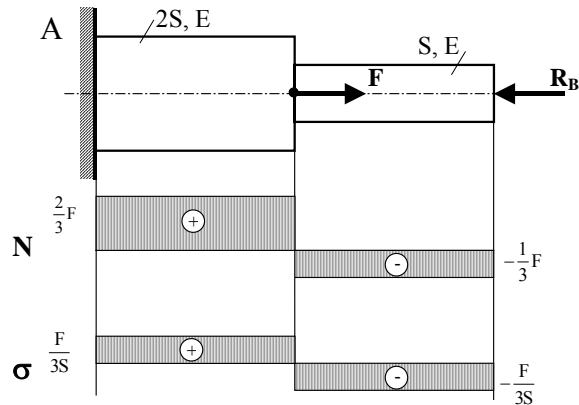
$$N_{(x2)} = \frac{2}{3}F$$

normálové napätia v jednotlivých častiach prúta

$$\sigma_{(x1)} = \frac{N_{(x1)}}{S_1} = -\frac{F}{3S}$$

$$\sigma_{(x2)} = \frac{N_{(x2)}}{S_2} = \frac{2F}{3 \cdot 2S} = \frac{F}{3S}$$

Priebeh osových síl a normálových napätí po dĺžke prúta:

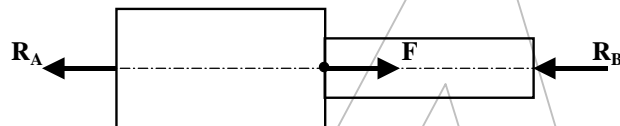


maximálne normálové napätie pôsobiace v prúte: $\sigma_{\max} = \left| \frac{F}{3S} \right|$

Posunutie pôsobiska sily F:

$$u_F = |\Delta l_1| = \left| \frac{N_{(x1)} l_1}{ES_1} \right| = \left| -\frac{F l_1}{3ES} \right|$$

Reakcie vo väzbách:



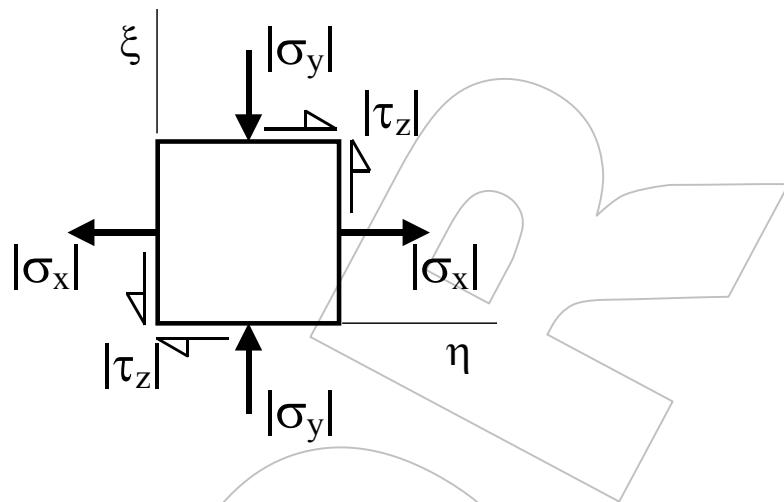
$$\sum F_{ix} = 0: \quad -R_A + F - R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{2}{3}F$$

Dimenzovanie prúta:

z priebehu normálových napätí po dĺžke prúta vyplýva veľkosť σ_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{F}{3S} \right| \leq \sigma_{\text{DOV}} \quad \text{príp.} \quad S \geq \frac{F}{3 \sigma_{\text{DOV}}}$$

MOHROVA KRUŽNICA ROVINNEJ NAPÄTOSTI



$$|\sigma_x| = 60 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_y| = 20 \text{ MPa}$$

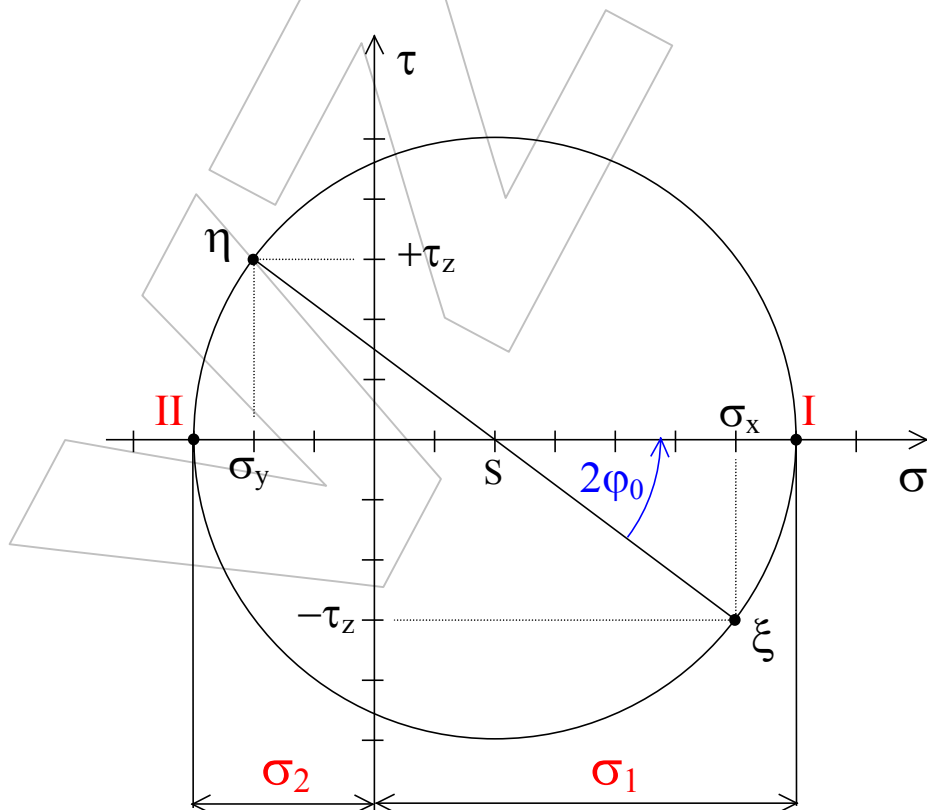
$$|\tau_z| = 30 \text{ MPa}$$

Mohrova kružnica rovinnej napätosti – grafické riešenie

Body zodpovedajúce rezovým rovinám:

$$\xi : (+60 ; -30)$$

$$\eta : (-20 ; +30)$$



$$\sigma_1 \cong +70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 \cong -30 \text{ MPa}$$

$$2\varphi_0 \cong 36,87^\circ$$

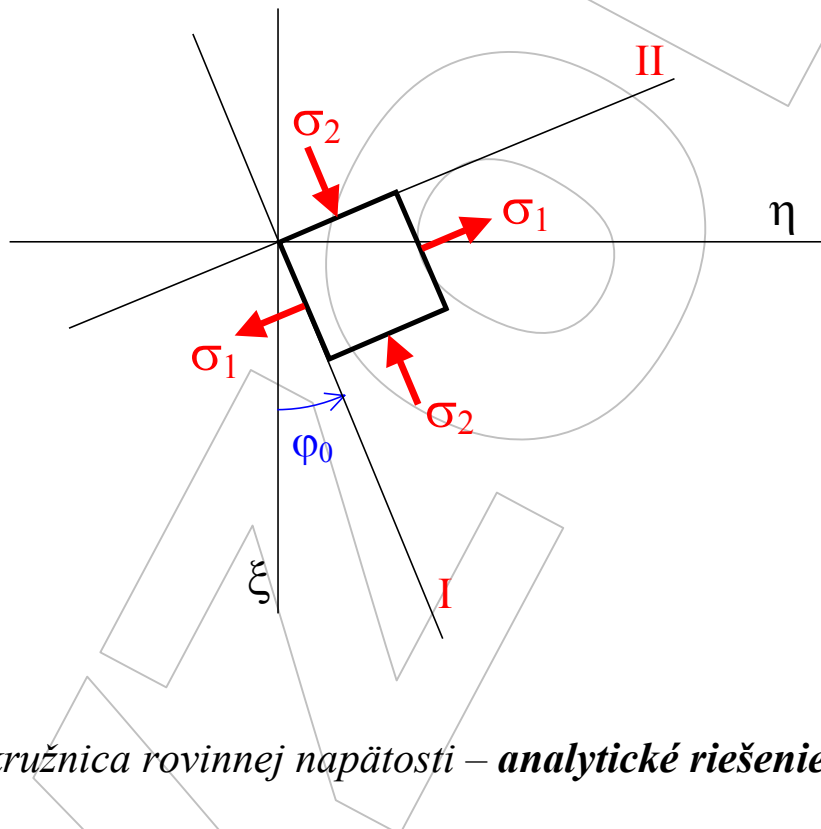
$$\varphi_0 \cong 18,435^\circ$$

Body zodpovedajúce hlavným rezovým rovinám:

$$\text{I: } (\sigma_1; 0) = (+70; 0)$$

$$\text{II: } (\sigma_2; 0) = (-30; 0)$$

Smery hlavných normálových napätí:



Mohrova kružnica rovinnej napätosti – analytické riešenie

$$\sigma_x = +60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -20 \text{ MPa}$$

$$\tau_z = +30 \text{ MPa}$$

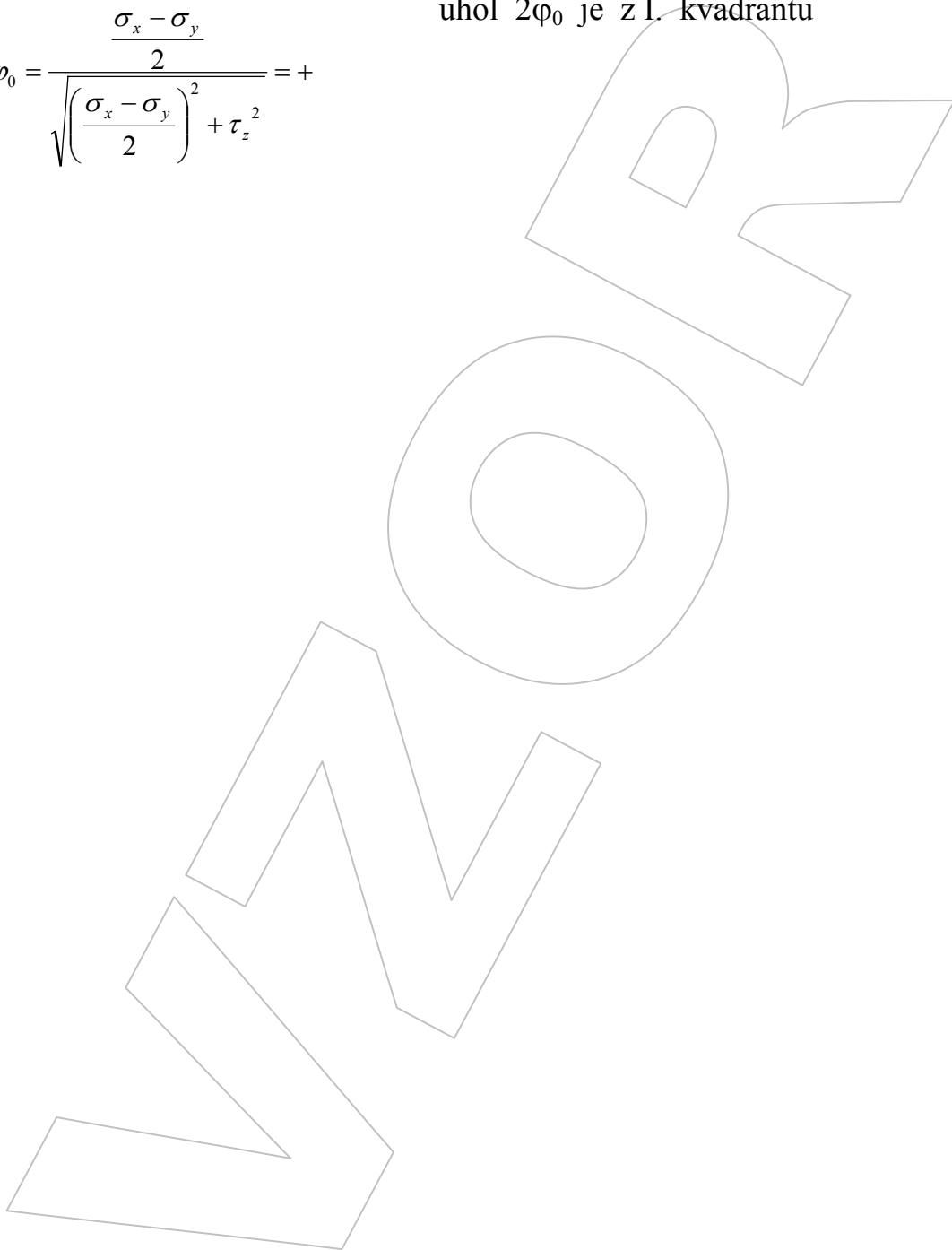
dosadíme do:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \begin{cases} \sigma_1 = \\ \sigma_2 = \end{cases}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\tau_z}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}} = +$$

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}} = +$$

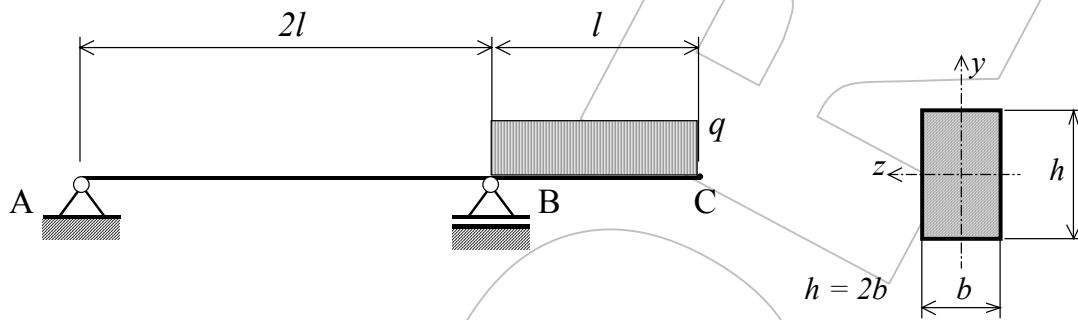
uhol $2\varphi_0$ je z I. kvadrantu



ROVINNÝ OHYB NOSNÍKA

staticky určitý nosník

- Určte:
- reakcie vo väzbách,
 - priebeh priečných (šmykových) síl a ohybových momentov po dĺžke nosníka,
 - skontrolujte dimenzovanie prierezu nosníka,
 - priebeh normálových napätí v priereze nosníka,
 - prieťah a uhol natočenia prierezu na voľnom konci nosníka (bod C).



Posúdenie statickej určítosti nosníka:

$$n = 3^{\circ} - 2^{\circ}_A - 1^{\circ}_B = 0 \quad - \text{úloha je staticky určitá}$$

Nosník uvoľníme:

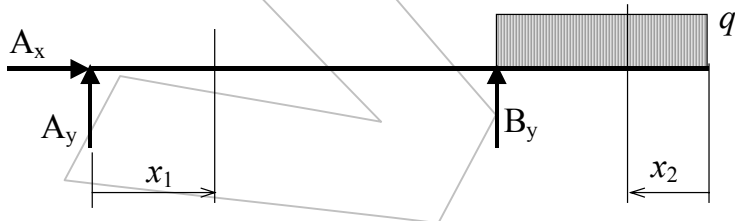


$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad B_y \cdot 2l - ql \cdot \frac{5l}{2} = 0 \quad B_y = \frac{5}{4}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + B_y - ql = 0 \quad A_y = -\frac{1}{4}ql$$

Miesta a počet myslenných rezov:



$$x_1 \in \langle 0; 2l \rangle \quad M_{(x1)} = +A_y x_1 = -\frac{1}{4} q l x_1$$

$$x_2 \in \langle 0; l \rangle \quad M_{(x2)} = -q x_2 \frac{x_2}{2} = -\frac{1}{2} q x_2^2$$

$$T_{(x1)} = +\frac{dM_{(x1)}}{dx_1} = -\frac{1}{4} q l$$

$$T_{(x2)} = -\frac{dM_{(x2)}}{dx_2} = +q x_2$$

$$T_{(x1)} = -\frac{1}{4} q l$$

$$T_{(x2=0)} = 0$$

$$T_{(x2=2l)} = +q l$$

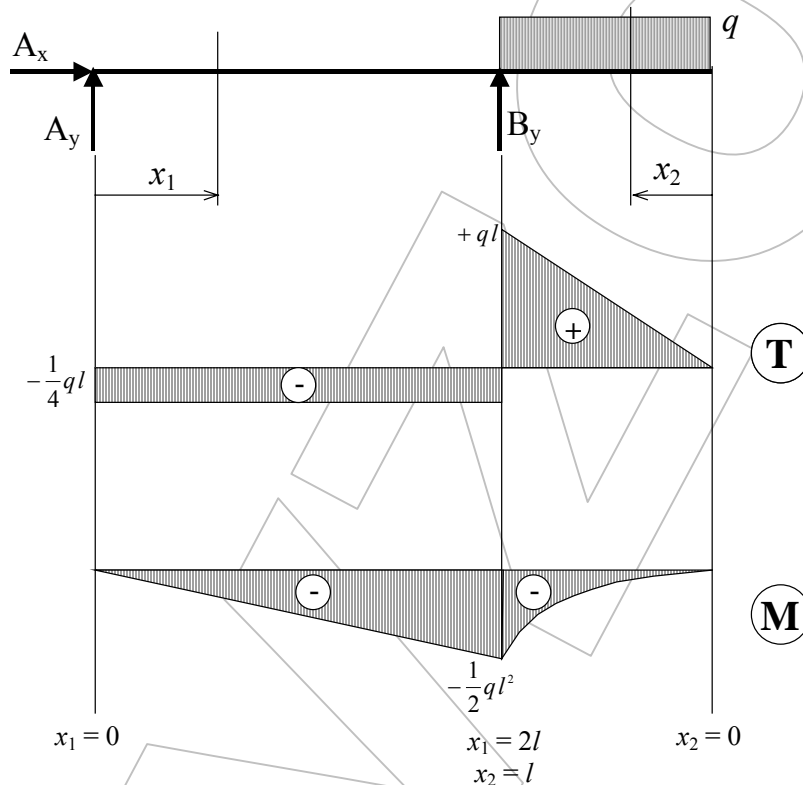
$$M_{(x1=0)} = 0$$

$$M_{(x1=2l)} = -\frac{1}{2} q l^2$$

$$M_{(x2=0)} = 0$$

$$M_{(x2=l)} = -\frac{1}{2} q l^2$$

Priebeh priečných (šmykových) síl a ohybových momentov po dĺžke nosníka:



maximálny ohybový moment pôsobiaci na nosníku:

$$M_{o \max} = \left| -\frac{1}{2} q l^2 \right| = \frac{1}{2} q l^2$$

Dimenzovanie prierezu:

$$\sigma_{o \max} = \frac{M_{o \max}}{W_{oz}} \leq \sigma_{DOV}$$

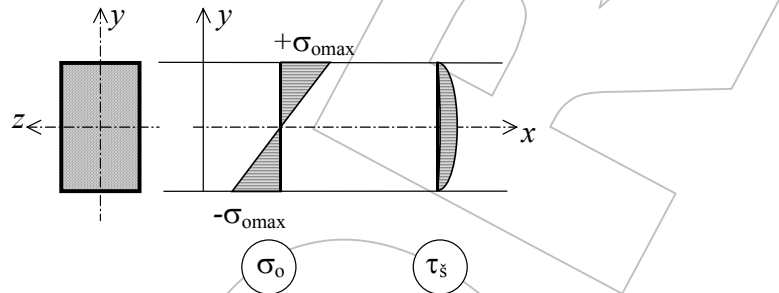
modul prierezu v ohybe pre obdĺžnikový prierez:

$$W_{oz} = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^2 = |\text{pre } h = 2b| = \frac{2}{3} b^3$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{o \max}}{2\sigma_{DOV}}}$$

$$h = 2b$$

Priebeh normálových a šmykových napätí v priereze v mieste pôsobenia maximálneho ohybového momentu:



Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary:

$$v(x_1)'' = -\frac{M(x_1)}{E J Z} = \frac{q l}{4EJ} x_1$$

$$v(x_1)' = \varphi(x_1) = \frac{q l}{8EJ} x_1^2 + c_1$$

$$v(x_1) = \frac{q l}{24EJ} x_1^3 + c_1 x_1 + c_3$$

$$v(x_2)'' = -\frac{M(x_2)}{E J Z} = \frac{q}{2EJ} x_2^2$$

$$v(x_2)' = \varphi(x_2) = \frac{q}{6EJ} x_2^3 + c_2$$

$$v(x_2) = \frac{q}{24EJ} x_2^4 + c_2 x_2 + c_4$$

Okrajové podmienky nutné pre výpočet integračných konštánt c_1 až c_4 :

A: $v(x_1=0) = 0$

B: $v(x_1=2l) = 0$

B: $v(x_2=l) = 0$

B: $v'(x_1=2l) = -v'(x_2=l)$

Z prvej okrajovej podmienky $v(x_1=0) = 0$

$$0 = 0 + 0 + c_3 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0$$

Z druhej okrajovej podmienky $v(x_1=2l) = 0$

$$0 = \frac{8ql^4}{24EJ} + c_1 2l \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{ql^3}{6EJ}$$

Zo štvrtej okrajovej podmienky $v'(x_1=2l) = -v'(x_2=l)$

$$\frac{4ql^3}{8EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} = -\frac{ql^3}{6EJ} - c_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{ql^3}{2EJ}$$

Z tretej okrajovej podmienky $v_{(x_2=l)} = 0$

$$0 = \frac{ql^4}{24EJ} - \frac{ql^4}{2EJ} + c_4 \quad \rightarrow \quad c_4 = \frac{11ql^4}{24EJ}$$

Rovnice uhla natočenia prierezu $\varphi_{(x)}$ a priehybu $v_{(x)}$ vo všeobecnom mieste nosníka:

$$\varphi_{(x_1)} = \frac{ql}{8EJ}x_1^2 - \frac{ql^3}{6EJ}$$

$$\varphi_{(x_2)} = \frac{q}{6EJ}x_2^3 + \frac{ql^3}{2EJ}$$

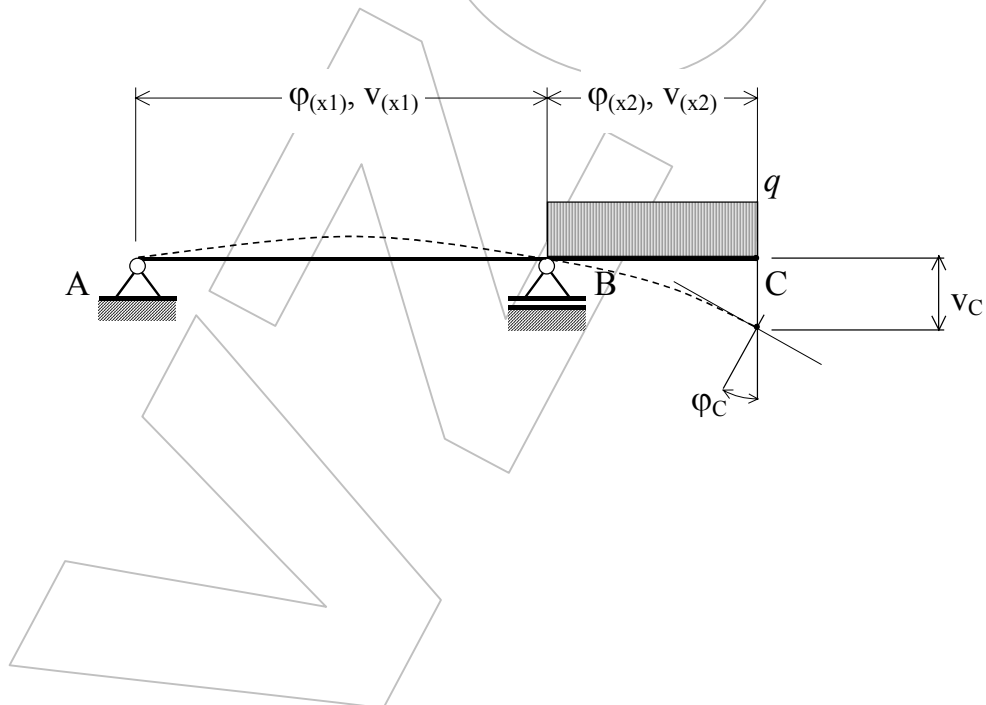
$$v_{(x_1)} = \frac{ql}{24EJ}x_1^3 - \frac{ql^3}{6EJ}x_1$$

$$v_{(x_2)} = \frac{q}{24EJ}x_2^4 + \frac{ql^3}{2EJ}x_2 - \frac{ql^4}{EJ}$$

Priehyb a uhol natočenia prierezu na voľnom konci nosníka (v bode C):

$$C: \quad v_C = v_{(x_2=0)} = c_4 = \frac{11ql^4}{24EJ} \quad [m; mm]$$

$$C: \quad \varphi_C = v'_{(x_2=0)} = \varphi_{(x_2=0)} = c_2 = -\frac{ql^3}{2EJ} \quad [rad]$$

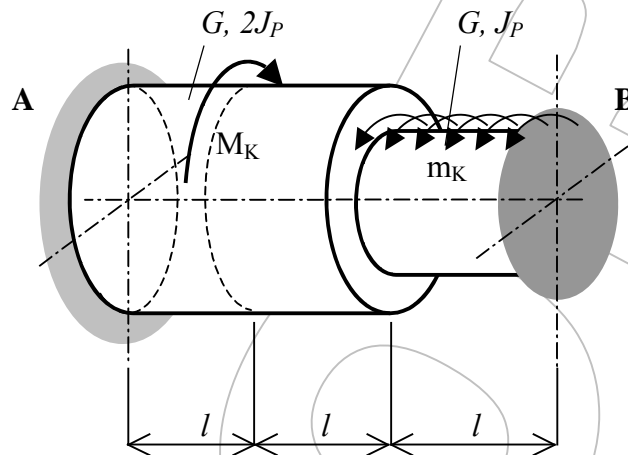


KRÚTENIE HRIADELOV

staticky neurčitý hriadeľ

- Určte:
- priebeh krútiacich momentov po dĺžke hriadeľa,
 - navrhnete potrebný prierez hriadeľa,
 - uhol skrútenia prierezu v mieste pôsobenia sústredeného krútiaceho momentu M_K .

$m_K = 80 \text{ Nm/m}$; $M_K = 40 \text{ Nm}$; $l = 1 \text{ m}$; $\sigma_{\text{DOV}} = 200 \text{ MPa}$

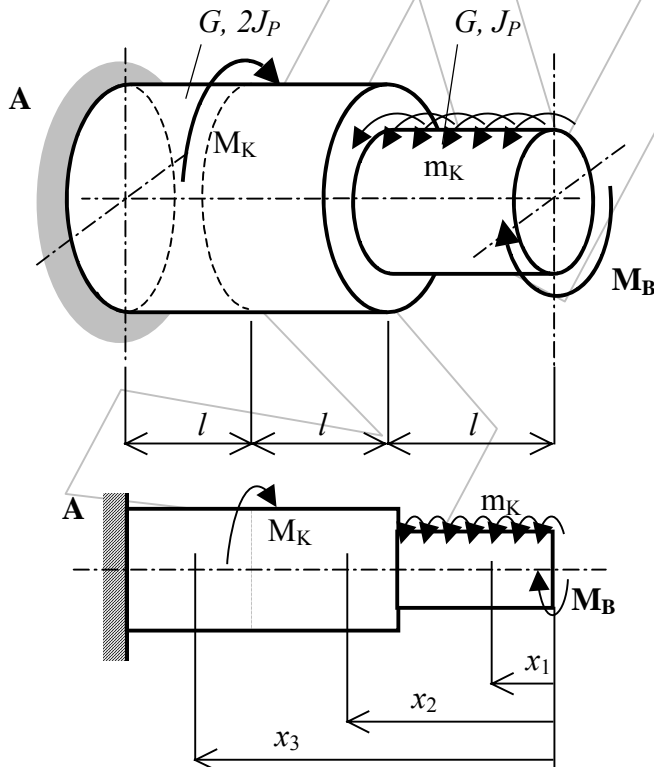


Kontrola statickej určítosti úlohy:

$$n = 6^\circ - 6^\circ_A - 6^\circ_B = -6^\circ$$

- vzhľadom na charakter zaťaženia je však úloha iba 1x staticky neurčitá.

Je potrebné vytvoriť základný staticky určitý systém na jej riešenie:



deformačná podmienka:

$$\varphi_B = 0$$

$$\begin{array}{ll}
 x_1 \in \langle 0 ; l \rangle & M_{K(x1)} = -M_B + m_K x_1 \\
 x_2 \in \langle l ; 2l \rangle & M_{K(x2)} = -M_B + m_K l \\
 x_3 \in \langle 2l ; 3l \rangle & M_{K(x3)} = -M_B + m_K l - M_K
 \end{array}$$

Výpočet staticky neurčitého momentu M_B :

$$\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \int_{(x1)} \frac{M_{K(x1)}}{G J_{P1}} dx_1 + \int_{(x2)} \frac{M_{K(x2)}}{G J_{P2}} dx_2 + \int_{(x3)} \frac{M_{K(x3)}}{G J_{P3}} dx_3 &= 0 \\
 \int_{(x1)} \frac{M_{K(x1)}}{G J_{P1}} dx_1 + \frac{M_{K(x2)} l_2}{G J_{P2}} + \frac{M_{K(x3)} l_3}{G J_{P3}} &= 0 \\
 \int_0^l \frac{(-M_B + m_K x_1)}{G J_P} dx_1 + \frac{(-M_B + m_K l) l}{G 2J_P} + \frac{(-M_B + m_K l - M_K) l}{G 2J_P} &= 0 \\
 M_B = \frac{3}{4} m_K l - \frac{1}{4} M_K &
 \end{aligned}$$

potom:

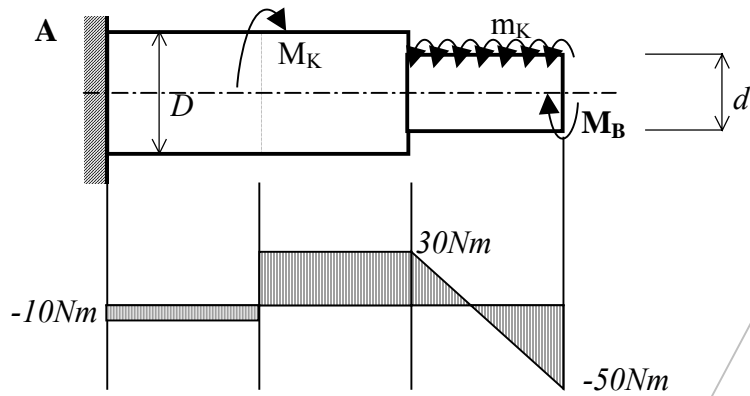
krútiace momenty v jednotlivých častiach hriadeľa sú

$$\begin{aligned}
 M_{K(x1)} &= -\frac{3}{4} m_K l + \frac{1}{4} M_K + m_K x_1 \\
 M_{K(x2)} &= \frac{1}{4} m_K l + \frac{1}{4} M_K \\
 M_{K(x3)} &= \frac{1}{4} m_K l - \frac{3}{4} M_K
 \end{aligned}$$

Pre zadané vstupné veličiny:

$$\begin{aligned}
 M_{K(x1=0)} &= -\frac{3}{4} m_K l + \frac{1}{4} M_K = -50 \text{ Nm} \\
 M_{K(x1=l)} &= \frac{1}{4} m_K l + \frac{1}{4} M_K = 30 \text{ Nm} \\
 M_{K(x2)} &= \frac{1}{4} m_K l + \frac{1}{4} M_K = 30 \text{ Nm} \\
 M_{K(x3)} &= \frac{1}{4} m_K l - \frac{3}{4} M_K = -10 \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

Priebeh krútiacich momentov po dĺžke hriadeľa:



maximálny krútiaci moment pôsobiaci na hriadeli:

$$M_{K\max} = |M_{K(x_1=0)}| = 50\text{ Nm}$$

Dimenzovanie prierezu:

$$\tau_{K\max} = \frac{M_{K\max}}{W_{K1}} \leq \tau_{DOV}$$

modul prierezu v krútení pre plný kruhový prierez:

$$W_{K1} = \frac{J_P}{r_{1\max}} = \frac{\frac{\pi}{32}d^4}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$\left(W_{K2} = \frac{2J_P}{r_{2\max}} = \frac{\frac{\pi}{32}D^4}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} \right)$$

$$\tau_{DOV} = 0,577 \sigma_{DOV}$$

$$d \geq 3 \sqrt{\frac{16 M_{K\max}}{\pi \tau_{DOV}}}$$

Uhol skrútenia prierezu v mieste pôsobenia sústredného krútiaceho momentu \$M_K\$:

$$\varphi_{Mk} = \varphi_3 = \frac{M_{K(x_3)} l}{G 2J_P} = \quad [\text{rad}]$$